REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : *Statistique et Probabilités approfondies*

Par :
Mme. Malti Dounyazad Fatiha

Sur le thème

Étude de la convergence des séries de variables aléatoires fortement intégrables

Soutenue publiquement le 24/10/2019 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr. MIRI. S.	MCA	Université de Tlemcen	Président
Mme. BELARBI. F.	Professeur	Université de Sidi Belabbes	Examinatrice
Mme.BOUCHENTOUF. A.A.	Professeur	Université de Sidi Belabbes	Examinatrice
Mr. LABBAS. A.	MCA	Université de Tlemcen	Examinateur
Mr. BOUKHARI. F.	MCA	Université de Tlemcen	Directeur de thèse

.

Laboratoire de statistiques et modélisations aléatoires ,UABB,
13000 Tlemcen - Algérie

Remerciements

C'est avec un profond respect que je remecie mon directeur de thèse Monsieur Boukhari. F. Maître de conférences à l'Université de Tlemcen, pour m'avoir encadré et prodigué des conseils au cours de l'élaboration de cette thèse. Qu'ils soit assuré de ma gratitude.

Je remercie également Monsieur MIRI. S. Maître de conférences à l'Université de Tlemcen, pour avoir accepter de présider le jury.

Mes remerciements s'adressent également à Madame BELARBI. F. Professeur à l'Université de Sidi Belabbes, pour avoir accepté de faire partie du jury qui examinera cette thèse.

Mes sincères remerciements vont à Madame BOUCHENTOUF. A.A Professeur à l'Université de Sidi Belabbes, pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant de faire partie du jury.

J'exprime ma gratitude à Monsieur LABBES. A. Maître de conférences à l'Université de Tlemcen, pour avoir accepté de se joindre à ce jury comme examinateur.

Table des matières

Introduction

L'étude de la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes est un problème classique en théorie de probabilités. Elle est souvent la première étape dans l'établissement de lois fortes des grands nombres. Cependant, dans de nombreuses situations, l'hypothèse d'indépendance est difficilement vérifiée, pour cette raison différents concepts de dépendance ont été introduits.
Dans ce travail nous nous intéressons au comportement asymptotique des séries de variables aléatoires possédant des moments exponentiels. Ce genre d'étude a été initié en 1966 par Chow [10] et généralisé en 1967 par Azuma [4]. Dans les travaux de ces deux auteurs, la notion de variables sous-gaussiennes joue un rôle important. Plus récemment ce problème a été considéré par Amini et al [2, 3] ainsi qu' Antonini et al [17] avec des conditions de dépendance assez faibles sur les accroissements.

Le principal objectif de cette thèse est de fournir un cadre unifié pour l'étude de la convergence des séries de variables aléatoires lorsque les accroissements appartiennent à un espace d'Orlicz de type exponentiel. Pour ce faire nous nous appuyons sur le célèbre critère d'entropie de Dudley. Cette approche s'est révélée trés efficace pour retrouver les principaux résultats de Chow, Azuma, Amini et al, et Antonini et al. Elle a aussi l'avantage de nous permettre de traiter le cas des séries de variables aléatoires gaussiennes stationnaires, ce dernier problème n'a pas été examiné dans la littérature.

Ce manuscrit est constitué de quatre chapitres :

Le premier est consacré aux rappels des principaux outils mathématiques dont nous aurons besoin tout au long de cette thèse, nous commençons par rappeler la notion d'espace d'Orlicz. Nous donnons aussi la définition des nombres d'entropie métrique et leurs principales propriétés. Enfin nous y établissons le théorème de Dudley.

Dans le deuxième chapitre on introduit la notion de dépendance négative, ensuite nous y présentons les principales propriétés des variables aléatoires négativement dépendantes. Nous abordons aussi dans ce chapitre le problème de convergence presque sûre des séries de variables aléatoires négativement associées en se basant essentiellement sur un travail de Matula [30].

La classe des variables aléatoires sous-gaussiennes a été introduite par J.P Kahane en 1960 dans son travail concernant la généralisation d'une estimation uniforme pour des polynômes trigonométriques aléatoires obtenue par Salem et Zygmund[37]. Le troisième chapitre est consacré en grande partie à cette classe de variables aléatoires trés importante. Nous y présentons les principales caractéristiques de cette classe. Nous terminons ce chapitre par quelques rappels sur la théorie du calculs stochastiques.

Dans le dernier chapitre nous exposons les résultats obtenus concernant le comportement asymptotique des séries de variables appartenant à un espace d'Orlicz de type exponentiel, ces résultats sont ensuite appliqués à des séries pondérées de variables aléatoires sous-gaussiennes possédant différentes structures de dépendance. Enfin une loi forte des grands nombres est déduite pour des variables sous-gaussiennes négativement dépendantes ou conditionnellement sous-gaussiennes.

Chapitre 1

Critère d'entropie métrique

Ce chapitre est constitué de trois paragraphes, le premier est consacré aux rappels des principales propriétés des espaces d'Orlicz qui généralisent les espaces L^p habituels. Nous y rappelons en particulier la notion de norme de Luxemburg. Un intérêt particulier est accordé aux espaces d'Orlicz de type exponentiel.

Le deuxième paragraphe est consacré à la notion importante des nombres d'entropie métrique introduite en théorie de probabilités en 1957 par Kolmogorov [25] .

Dans la troisième partie de ce chapitre nous utilisons les outils des deux premiers paragraphes afin d'énoncer et de démontrer le théorème fondamental de ce chapitre à savoir le critère d'entropie métrique de R.Dudley [12], ce théorème sera à l'origine des résultats obtenus au dernier chapitre.

1.1 Espaces d'Orlicz

Les espaces d'Orlicz ont été introduits pour la première fois par W.Orlicz en 1931. Les principales propriétés de ces espaces sont données dans les ouvrages de Krasnosel'skii et Rutickii [27] et de Ren et Rao [35]. Dans ce paragraphe nous nous sommes basés essetiellement sur le Chapitre 2 du livre de Buldygin et Kozachenko [9].

Définition 1.1.1. Une fonction convexe, croissante, continue ψ définie sur $\mathbb{R}^+$ est dite fonction de Young si elle vérifie : $\psi(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = +\infty$

Exemples 1.1.1. Les fonctions suivantes sont des exemples de fonctions de Young. Pour $t \geq 0$

1. $\psi(t) = t^p, p \geq 1$

2. $\psi(t) = \exp\{t^p\} - 1, p \geq 1$
3. $\psi(t) = e^t - t - 1$

Définition 1.1.2. Soit ψ une fonction de Young, l'espace d'Orlicz $L_\psi(\Omega, F, \mathbb{P})$ associé à la fonction ψ noté $L_\psi(\Omega)$ est l'espace des variables aléatoires réelles $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{E}\{\psi(\frac{|X|}{c})\} < \infty \qquad \text{pour un } c > 0.$$

Tout espace d'Orlicz est muni de la norme suivante dite norme de Luxemburg et pour $X \in L_\psi(\Omega)$ on a

$$||X||_\psi = \inf\left\{c > 0, \;\; \mathbb{E}\{\psi(\frac{|X|}{c})\} \leq 1\right\}$$

Théorème 1.1.1. *L'espace $L_\psi(\Omega, F, \mathbb{P})$ muni de la norme de Luxemburg est un espace de Banach.*

Exemples 1.1.2.

1. Pour $\psi(x) = |x|^p, p \geq 1$ on a $L_\psi(\Omega) = L_p(\Omega)$, en effet $X \in L_\psi \iff \mathbb{E}(\frac{|X|^p}{c^p}) < \infty$, ceci est équivalent à $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$, ainsi $X \in L_p(\Omega)$. De plus la norme est donnée par

$$||X||_\psi = \inf\left\{c > 0, \mathbb{E}\{\frac{|X|^p}{c^p}\} \leq 1\right\}$$

alors $||X||_\psi = \{\mathbb{E}(|X|^p\}^{\frac{1}{p}} = ||X||_p$

2. Soit la fonction de Young $\psi(x) = exp(x^2) - 1, \; x \geq 0$

i) Soient $c > 0$, $\sigma > 0$ et $G \hookrightarrow N(0, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\psi(\frac{G}{c})\} &= \mathbb{E}\{\exp(\frac{G^2}{c^2})\} \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{u^2}{c^2}) \exp(-\frac{u^2}{2\sigma^2}) du \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\frac{u^2}{2}(\frac{c^2 - 2\sigma^2}{c^2\sigma^2})\} du,
\end{aligned}$$

on remarque que si $c^2 - 2\sigma^2 \leq 0$ alors $\mathbb{E}\{\psi(G/c)\} = \infty$ et dans le cas contraire i.e $c^2 - 2\sigma^2 > 0$ on trouve

$$\mathbb{E}\{\exp(\frac{G^2}{c^2})\} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - 2\sigma^2}},$$

ainsi

$$\mathbb{E}\{\exp(\frac{G^2}{c^2})\} \leq 2 \iff c \geq \sqrt{\frac{8}{3}}\sigma,$$

finalement

$$\| G \|_\psi = \sqrt{\frac{8}{3}}\sigma.$$

ii) Soit ε une v.a.r de "Rademacher" où $\varepsilon(\Omega) = \{-1, +1\}$ avec la fonction de masse $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = +1) = \frac{1}{2}$, la norme de Luxemburg associée à la fonction ψ est donnée par

$$\| \varepsilon \|_\psi = \frac{1}{\sqrt{ln2}}.$$

En effet un calcul simple montre que $\mathbb{E}\{\exp(\varepsilon^2/c^2)\} = \mathbb{E}\{\exp(1/c^2)\}$, ainsi

$$\mathbb{E}\{\exp(\frac{\varepsilon^2}{c^2})\} \leq 2 \iff c \geq \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}.$$

iii) Si $X = a$ avec $P(X = a) = 1$, alors $||X||_\psi = |a|/\sqrt{ln(2)}$.

Parmi les propriétés de ces espaces, on s'intéresse à l'inégalité de grande déviation pour des variables aléatoires appartenant aux espaces d'Orlicz de type exponentiel en particulier associé à la fonction de Young $\psi(x) = \exp\{x^2\} - 1$.

Proposition 1.1.1. *Soit $\psi(x) = \exp\{x^2\} - 1$, si $X \in L_\psi(\Omega)$ alors pour $x \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}(|X| \geq x) \leq 2\exp\{-\frac{x^2}{||X||_\psi^2}\}.$$

La réciproque est aussi vérifiée, s'ils existent deux constantes positives c et D telles qu' on ait

$$\mathbb{P}(|X| \geq x) \leq c\exp\{-\frac{x^2}{D^2}\},$$

alors $X \in L_\psi$ et dans ce cas $||X||_\psi \leq D\sqrt{1+c}$.

Démonstration. Soient $x > 0$ et $X \in L_\psi$, supposons que $||X||_\psi > 0$, en appliquant l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(|X| \geq x) \leq \mathbb{E}\Big(\exp\{\frac{X^2}{||X||_\psi^2}\}\Big)\exp\{-\frac{x^2}{||X||_\psi^2}\} \leq 2\exp\{-\frac{x^2}{||X||_\psi^2}\}.$$

Montrons que la réciproque est aussi vérifiée.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\exp\{\frac{X^2}{a^2}\}\Big) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\exp\{\frac{X^2}{a^2}\} \geq t\Big)dt \\
&= 1 + \int_1^{+\infty} \mathbb{P}(\mid X \mid \geq a\sqrt{\ln t})dt \\
&= 1 + \frac{1}{a^2}\int_1^{+\infty} 2u\mathbb{P}(\mid X \mid \geq u)du \\
&\leq 1 + \frac{c}{a^2}\int_1^{+\infty} 2u\exp\{\frac{u^2}{a^2}\}\exp\{-\frac{u^2}{D^2}\}du \\
&\leq 1 + \frac{cD^2}{a^2 - D^2},
\end{aligned}$$

il suffit de prendre $a = D\sqrt{c+1}$ pour que $\mathbb{E}\Big(\exp\{\frac{X^2}{a^2}\}\Big) \leq 2$. □

Dans le cas d'une fonction de Young de type exponentiel quelconque, la preuve est élaborée par Kozachenko-Buldygin [9] (page 56).

1.2 Nombres d'entropie métrique

La notion d'entropie métrique a été introduite en théorie de probabilité par Kolmogorov [25] en 1957, ses propriétés ont été étudiées par Kolmogorov-Thikhomirov [26] en 1959. Commençons par quelques définitions.

Définitions 1.2.1. 1. Une pseudo-métrique sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :
- $\forall x \in E, d(x,x) = 0$,
- $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$,
- $\forall x, y, z \in E,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

2. Un espace pseudo-métrique (E, d) est un ensemble E muni d'une pseudo-métrique.

Une pseudo-métrique vérifie toutes les conditions d'une métrique exepté celle de la séparation des points à savoir $d(t,s) = 0$ n'implique pas toujours que $s = t$.

Exemple 1.2.1. 1. Toute métrique est une pseudo-métrique.

2. Soit $E = \mathbb{R}^2$, on définit une pseudo-métrique sur E en posant :

$$d((x_1, x_2); (y_1, y_2)) = \mid x_1 - y_1 \mid .$$

3. Soit E un espace vectoriel ρ une semi-norme, on pose $d(x,y) = \rho(x-y)$ pour $x, y \in E$, d ainsi définie est une pseudo-métrique.

4. Soit X un processus à accroissements dans L_2, $d(t,s) = \Big(\mathbb{E}[X(t) - X(s)]^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ est une pseudo-métrique.

Définition 1.2.1. Soit E un espace pseudo-métrique. Un ensemble $A \subseteq E$ est dit totallement borné si pour tout $u > 0$ l'ensemble A admet un recouvrement par un nombre fini de d-boules ouvertes de rayon u.

Définition 1.2.2. Soit (E, d) un espace pseudo-métrique, soit $u > 0$, on note par $\mathcal{N}(E, d, u)$: le nombre minimal (éventuellement infini) de d-boules ouvertes de rayon u suffisantes pour recouvrir E, appelé nombre d'entropie métrique.

Remarque 1. Un espace pseudo-métrique est totallement borné si et seulement si $\mathcal{N}(E, d, u) < \infty$ pour tout $u > 0$

Exemples 1.2.1. a) Le premier exemple est emprunté de l'article de Kolmogorov[26], soit $E = [a, b]$, $d_1(x, y) = |x - y|$, $u > 0$,on a

$$\mathcal{N}(E, d_1, u) = \begin{cases} [\frac{b-a}{u}] + 1 & \text{si } \frac{b-a}{u} \text{ n'est pas entier} \\ \frac{b-a}{u} & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{I}_j = [a + (j-1)2u, a + j2u[$, $j = 1, ..., \frac{b-a}{2u}$ si $\frac{b-a}{2u}$ est un entier, dans le cas contraire $[\frac{b-a}{u}] < \frac{b-a}{u}$ alors pour recouvrir $[a, b]$, j varie de 1 à $[\frac{b-a}{2u}] + 1$.

Les exemples b) et c) sont cités dans le livre de Buldygin et Kozachenko [9],

b) soit $E = [a, b]$ et $\alpha \in]0, 1[$ $d_2(x, y) = |x - y|^\alpha$, $u > 0$, on a

$$\mathcal{N}(E, d_2, u) = \mathcal{N}(E, d_1, u^{\frac{1}{\alpha}}).$$

c) Soient $E = [0, 1]^m$ avec $m > 1$, $x, y \in E$ on pose $d_3(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \mid x_i - y_i \mid^2}$, $u > 0$, on a alors

$$[\frac{1}{2u}]^m \leq \mathcal{N}(E, d_3, u) \leq ([\frac{\sqrt{m}}{2u}] + 1)^m.$$

En se basant sur le premier exemple, pour tout $x_i, y_i \in \mathcal{I}_j$, $i \in \{1, ..., m\}$ on a $d_3(x, y) < \sqrt{m}u$, de ce fait

$$[\frac{1}{2u}]^m \leq [\frac{1}{\frac{2u}{\sqrt{m}}}]^m \leq \mathcal{N}(E, d_3, u) \leq ([\frac{1}{\frac{2u}{\sqrt{m}}}] + 1)^m.$$

Proposition 1.2.1. *1. Soit E_1, E_2 deux sous-ensembles d'un espace pseudo-métrique (E, d) tels que $E_1 \subset E_2$, on a*

$$\mathcal{N}(E_1, d, u) \leq \mathcal{N}(E_2, d, u).$$

2. Soit (E, d') et (E, d'') deux espaces pseudo-métriques tel que pour tout $x, y \in E$, on a $d'(x, y) \leq d''(x, y)$ alors

$$\mathcal{N}(E, d', u) \leq \mathcal{N}(E, d'', u).$$

3. L'application $u \longrightarrow \mathcal{N}(E, d, u)$ est décroissante i.e pour $0 < u \leq u'$,

$$\mathcal{N}(E, d, u) \geq \mathcal{N}(E, d, u').$$

Démonstration. 1. Soit $N_i = \mathcal{N}(E_i, d, u)$ le nombre minimal de d-boules ouvertes de rayon u suffisantes pour recouvrir E_i, $i \in \{1, 2\}$.

Comme $E_1 \subset E_2$ et du fait que $E_2 \subset \bigcup_{k=1}^{N_2} \mathcal{B}(x_k, u)$ on obtient

$$E_1 \subset \bigcup_{k=1}^{N_2} \mathcal{B}(x_k, u),$$

c.à.d N_2 est le nombre de d-boules ouvertes de rayon u suffisantes pour recouvrir E_1 mais par hypothèse N_1 est le nombre minimal ce qui nous ramène à la relation

$$\mathcal{N}(E_1, d, u) \leq \mathcal{N}(E_2, d, u).$$

2. Posons $N' = \mathcal{N}(E, d', u)$ et $N'' = \mathcal{N}(E, d'', u)$. Soit

$$y \in \mathcal{B}''(x_k, u) \iff d''(x_k, y) < u \Rightarrow d'(x_k, y) < u \iff y \in \mathcal{B}'(x_k, u)$$

donc on écrit

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{N''} \mathcal{B}''(x_k, u) \subset \bigcup_{k=1}^{N''} \mathcal{B}'(x_k, u),$$

et on en déduit que N'' est le nombre de d-boules ouvertes suffisantes pour recouvrir E, or N' est le nombre minimal donc

$$N' = \mathcal{N}(E, d', u) \leq N'' = \mathcal{N}(E, d'', u).$$

3. De même pour la 3^{eme} propriété, notons par $N(u') = \mathcal{N}(E, d, u')$ et $N(u) = \mathcal{N}(E, d, u)$. Soit

$$y \in \mathcal{B}(x_k, u) \iff d(x_k, y) < u \leq u' \Rightarrow y \in \mathcal{B}(x_k, u'),$$

ceci donne
$$\bigcup_{k=1}^{N(u)} \mathcal{B}(x_k, u) \subset \bigcup_{k=1}^{N(u)} \mathcal{B}(x_k, u'),$$
ainsi $N(u)$ est le nombre de d-boules ouvertes de rayon u' suffisantes pour recouvrir E mais $N(u')$ est le nombre minimale, donc effectivement

$$\mathcal{N}(E, d, u) \geq \mathcal{N}(E, d, u').$$

□

1.3 Théorème de Dudley

Le théorème suivant a été établi par Dudley [12] en 1967 pour des processus gaussiens, les résultats obtenus ont été généralisés à une classe de processus plus large sous des conditions suffisantes sur les accroissements. Parmi les auteurs qui se sont intéressés à cette généralisation on peut citer Jain-Marcus [19] qui a étudié les processus sous-gaussiens. En 1983 Pisier [34] a traité le cas des processus dont les accroissements sont dans L_ψ. Pour la suite de notre travail ce théorème est important dans l'étude de la convergence des séries de variables aléatoires (on n' aborde pas les résultats obtenus sur la continuité des processus vu qu'on considère des processus indexés par $\mathbb{N}$). La preuve que nous présentons de ce théorème figure dans l'article de Weber [41].

Théorème 1.3.1. *Soit E un ensemble dénombrable, muni d'une pseudo-métrique d, ψ une fonction de Young et soit $X = \{X_t,\ t \in E\}$ un processus stochastique indexé par E qui satisfait la condition suivante :*

$$\forall s, t \in E \qquad \| X_s - X_t \|_\psi \leq d(s, t),$$

soit $D = diam(E, d) = \sup\{d(x, y)/x, y \in E\}$. *Si l'intégrale d'entropie*

$$\mathcal{I}_\psi(E, d) = \int_0^D \psi^{-1}(\mathcal{N}(E, d, u))du$$

est convergente. Alors

$$\left\|\sup_{s,t\in E}|X_t - X_s|\right\|_\psi \leq 8\ \mathcal{I}_\psi(E,d).$$

La démonstration de ce théorème fait appel à la proposition suivante :

Proposition 1.3.1. *Soit ψ une fonction de Young, $f_1, ..., f_n \in L^\psi$ alors on a l'estimation suivante*

$$|| \max_{1\leq j\leq n} \mid f_j \mid ||_\psi \leq \psi^{-1}(n) \max_{1\leq j\leq n} || f_j ||_\psi \quad \forall n \geq 2. \qquad (*)$$

Dans l'article de M. Weber[41], une preuve succinte de $(*)$.

Dans cette thèse on donne une preuve détaillée de la majoration suivante, pour une fonction de Young particulière $\psi(x) = \exp\{x^2\} - 1$ voir [40],

$$|| \max_{1\leq j\leq n} \mid f_j \mid ||_\psi \leq \{\frac{2}{\ln 2}\ln(n)\}^{\frac{1}{2}} \max_{1\leq j\leq n} || f_j ||_\psi \quad \forall n \geq 2.$$

Démonstration. Soit $n \geq 2$ on suppose que $|| f_j ||_\psi \leq 1$ pour $j \in \{1, ..., n\}$ remarquons que $\frac{2}{\ln 2} \geq 1$, on pose $\Delta = \frac{2}{\ln 2}$, en utilisant l'inégalité de Jensen et le fait que $|\max(X,Y)| \leq |X| + |Y|$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp\{\frac{[\max_{1\leq j\leq n} \mid f_j \mid]^2}{\Delta\ln(n)}\}) &= \mathbb{E}(\exp\{\frac{\max_{1\leq j\leq n} \mid f_j \mid^2}{\Delta\ln(n)}\}) \\
&= \mathbb{E}[\exp\{\max_{1\leq j\leq n} \mid f_j \mid^2\}]^{\frac{1}{\Delta\ln(n)}} \\
&\leq [\mathbb{E}(\exp\{\max_{1\leq j\leq n} \mid f_j \mid^2\}]^{\frac{1}{\Delta\ln(n)}} \\
&\leq [\mathbb{E}(\max_{1\leq j\leq n} \exp\{\mid f_j \mid^2\}]^{\frac{1}{\Delta\ln(n)}} \\
&\leq [\mathbb{E}(\sum_{j=1}^{n} \exp\{\mid f_j \mid^2\}]^{\frac{1}{\Delta\ln(n)}} \\
&\leq (2n)^{\frac{1}{\Delta\ln(n)}} = \exp\{\frac{\ln(2n)}{\Delta\ln(n)}\} \leq 2.
\end{aligned}$$

le fait de supposer que $|| f_j ||_\psi \leq 1$ pour $j = 1, ..., n$ n'est pas un cas particulier, on peut toujours se ramener à cette hypothèse dans le cas contraire □

On passe à présent à la preuve du résultat de Dudley

Démonstration du Théorème 1.3.1 . Dans ce qui suit on identifie E à $\mathbb{N}$, on suppose que $D > 0$ (car sinon le résultat est évident). Remarquons aussi que $D < \infty$,

en effet :
Puisque l'intégrale d'entropie métrique $\mathcal{I}_\psi(E,d) < \infty$ alors (E,d) est totallement borné, donc $\mathcal{N}(E,d,u) < \infty$ pour tout $0 < u \leq D$. Pour $n = 0,1,2,...$ soit $\mathcal{E}_n \subset E$ une suite de centres des boules de rayon $2^{-n}D$ correspendant au plus petit recouvrement ($\mathcal{E}_0 = \{i_0\}$), on note $\mathcal{E} = \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{E}_n$ alors $\mathcal{E}$ est dense dans E.
On associe à chaque $i \in \mathcal{E}_n$ le plus petit entier noté par $\bar{i} \in \mathcal{E}_{n-1}$ tel que les accroissements vérifient $\| X_i - X_{\bar{i}} \|_\psi < 2^{-n+1}D$. Posons

$$\forall n \geq 0 \quad M_n = \sup_{i\in\mathcal{E}_n} | X_i - X_{i_0} | \qquad \text{et} \qquad W_n = \sup_{0\leq j\leq n} M_j,$$

par construction $M_0 = W_0 = 0$, et on a

$$0 \leq W_n - W_{n-1} \leq \sup_{i\in\mathcal{E}} | X_i - X_{\bar{i}} |,$$

en effet, on a soit $W_n - W_{n-1} = 0$ dans ce cas on a rien à montrer, soit $W_n - W_{n-1} > 0$ et dans ce cas $W_n > W_{n-1}$ or $W_n = \sup(W_{n-1}, M_n) > W_{n-1}$ ce qui implque que $W_n = M_n$.
Soit alors i_s un indice tel que $M_n = | X_{i_s} - X_{i_0} |$ ainsi

$$W_n - W_{n-1} = | X_{i_s} - X_{i_0} | - W_{n-1} \leq | X_{i_s} - X_{i_0} | - | X_{\bar{i}_s} - X_{i_0} | \leq | X_{i_s} - X_{\bar{i}_s} | .$$

A présent on applique le résultat de la proposition précédente, en remarquant que $\mathcal{N}(E,d,u) \geq 2$ si $0 \leq u \leq D$.

$$\| W_n - W_{n-1} \|_\psi \leq \| \sup_{i\in\mathcal{E}_n} | X_i - X_{\bar{i}} | \|_\psi \leq \psi^{-1}(\mathcal{N}(E,d,2^{-n}D)) \sup_{i\in\mathcal{E}_n} \| X_i - X_{\bar{i}} \|_\psi$$

$$\leq 2^{-n+1}D\psi^{-1}(\mathcal{N}(E,d,2^{-n}D)) \qquad (n \geq 1)$$

puisque $W_n = W_n - W_0 = \sum_{k=1}^{n} W_k - W_{k-1}$, donc

$$\| W_n \|_\psi \leq \sum_{k=1}^{n} \| W_n - W_{n-1} \|_\psi \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}D\psi^{-1}(\mathcal{N}(E,d,2^{-k}D))$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}D\psi^{-1}(\mathcal{N}(E,d,2^{-k}D)) \leq 4\int_0^D \psi^{-1}(\mathcal{N}(E,d,u))du.$$

Lorsque n tend vers l'infini W_n tend vers $\sup_{i\in\mathcal{E}} \mid X_i - X_{i_0} \mid$ car :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} W_n &= \sup_{j\geq 0} M_j = \sup_{j\geq 0} \sup_{i\in\mathcal{E}_j} \mid X_i - X_{i_0} \mid \\
&= \sup_{i\in \underset{j\geq 0}{\cup} \mathcal{E}_j} \mid X_i - X_{i_0} \mid = \sup_{i\in\mathcal{E}} \mid X_i - X_{i_0} \mid
\end{aligned}$$

on peut ainsi écrire

$$\| \sup_{i\in\mathcal{E}} \mid X_i - X_{i_0} \mid \|_\psi \leq 4 \int_0^D \psi^{-1}(\mathcal{N}(E,d,u))du.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\| \sup_{i,j\in\mathcal{E}} \mid X_i - X_{i_0} \mid \|_\psi \leq \| \sup_{i\in\mathcal{E}} \mid X_i - X_{i_0} \mid \|_\psi + \| \sup_{j\in\mathcal{E}} \mid X_j - X_{i_0} \mid \|_\psi$$

$$\leq 8 \int_0^D \psi^{-1}(\mathcal{N}(E,d,u))du.$$

Puisque (E,d) est totallement borné, c'est un espace séparable, l'hypothèse sur les accroissements montre que X est d-continu en probabilité, d'aprés l'inégalité de Markov :
soit $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_t - X_{t_0}| > \varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{E}\Big(\psi(|X_t - X_{t_0}|)\Big)}{\psi(\varepsilon)} \\
&\leq \frac{d(t,t_0)}{\psi(\varepsilon)} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{E}$ est dense dans E pour la métrique d, pour chaque $t \in E$, il existe une suite $(t_n)_n \in \mathcal{E}$ telle que : $\quad d(t_n, t) \to 0 \quad$ quand $\; n \to \infty$
et $\mathbb{P}\{\lim_{n\to\infty} X_{t_n} = X_t\} = 1$, ce qui permet de conclure que

$$\mathbb{P}(\sup_{i,j\in\mathcal{E}} \mid X_i - X_j \mid = \sup_{i,j\in E} \mid X_i - X_j \mid) = 1.$$

$\square$

Chapitre 2

Variables aléatoires négativement dépendantes

Le concept d'indépendance est trés important en probabilités et en statistiques, cepandant plusieurs problèmes étudiés en physique, chimie, biologie et en ingénierie font apparaître des modèles stochastiques où l'indépendance est une hypothèse non réalisable, en 1966 Lehmann [29] a introduit la notion de dépendance négative dans le cadre bivarié (cas d'un couple de variables aléatoires). Cette idée a été généralisée au cas multivarié par Alam et Saxena [1]. Un autre concept intéressant a été introduit par Essary et al [14] en 1967, il s'agit de famille de v.a positivement (négativement) associées, cette dernière notion a été étudiée en détails par Joag-dev et Proschan [20] et Block et al [5].

Ce chapitre est consacré à la présentation des principales propriétés de familles de variables aléatoires négativement dépendantes respectivement négativement associées. Nous donnerons aussi quelques théorèmes limites pour cette dernière famille. Les résultats de ce chapitre sont empruntés des articles [29, 5, 20] et de Matula [30].

2.1 Définitions et Exemples

Dans la première partie nous allons reprendre la définition d'un couple de variables aléatoires négativement dépendantes, nous donnerons quelques exemples puis nous rappelerons les principales propriétés de cette notion de dépendance.

Définition 2.1.1. Les variables aléatoires X et Y sont dites négativement dépendantes par quadrant (NQD) si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] \leq \mathbb{P}[X \leq x]\mathbb{P}[Y \leq y] \tag{2.1.1}$$

Remarque 2. Il est important de noter que l'équation (2.1.1) implique l'équation suivante

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{P}[X > x, Y > y] \leq \mathbb{P}[X > x]\mathbb{P}[Y > y], \tag{2.1.2}$$

en effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X > x]\mathbb{P}[Y > y] &= (1 - \mathbb{P}[X \leq x])(1 - \mathbb{P}[Y \leq y]) \\
&= 1 - \{\mathbb{P}[X \leq x] + \mathbb{P}[Y \leq y] - \mathbb{P}[X \leq x]\mathbb{P}[Y \leq y]\} \\
&\geq 1 - \{\mathbb{P}[X \leq x] + \mathbb{P}[Y \leq y] - \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y]\} \\
&\geq 1 - \mathbb{P}\Big[\{X \leq x\} \cup \{Y \leq y\}\Big] \\
&\geq \mathbb{P}[X > x, Y > y].
\end{aligned}$$

De même (2.1.2) implique (2.1.1) donc les deux équations sont équivalentes.

Parmi les exemples de variables aléatoires NQD on a :

Exemple 2.1.1. 1. Si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors X et Y sont NQD.

2. Soit X une variable aléatoire non dégénérée alors X et $-X$ sont NQD. Evidemment : Soit $x, y \in \mathbb{R}$, si $-y \leq x$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x, -X \leq y) &= \mathbb{P}(-y \leq X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < -y) \\
&\leq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(-X < y)[\frac{1}{\mathbb{P}(-X < y)} - \frac{\mathbb{P}(X < -y)}{\mathbb{P}(-X < y)}] \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(-X < y)[\frac{1 - \mathbb{P}(X < -y)}{\mathbb{P}(-X < y)}] \\
&\leq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(-X \leq y).
\end{aligned}$$

Remarque 3. Le deuxième exemple montre aussi que si deux variables sont négativement dépendantes ceci n'implique pas toujours qu'elles sont indépendantes, la classe des variables aléatoires négativement dépendantes est plus large que celle des variables aléatoires indépendantes.

La proposition suivante est dûe à Hoeffding mentionée par Lehmann [29].

Proposition 2.1.1. *(Hoeffding) Soit X et Y deux variables aléatoires, supposons que $\mathbb{E}(|XY|)$, $\mathbb{E}(|X|)$ et $\mathbb{E}(|Y|)$ sont finis, soit F leurs fonction de répartition conjointe et F_X, F_Y leurs fonctions de répartitions marginales respectives alors*

$$Cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x,y) - F_X(x)F_y(y)]dxdy.$$

Démonstration. Soit (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux vecteurs indépendants de même loi que (X,Y), on a :

$$\begin{aligned} Cov(X_1, Y_1) &= \mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathbb{1}(u, X_1) - \mathbb{1}(u, X_2)][\mathbb{1}(v, Y_1) - \mathbb{1}(v, Y_2)]dudv. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}(|XY|)$, $\mathbb{E}(|X|)$ et $\mathbb{E}(|Y|)$ sont supposées finis, on peut écrire

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= Cov(X_1, Y_1) = \mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}(u, X_1) - \mathbb{1}(u, X_2)][\mathbb{1}(v, Y_1) - \mathbb{1}(v, Y_2)]du\ dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}(u, X_1)\mathbb{1}(v, Y_1)] - \mathbb{E}[\mathbb{1}(u, X_1)\mathbb{1}(v, Y_2)]du\ dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(X > u, Y > v) - \mathbb{P}(X > u)\mathbb{P}(Y > v)du\ dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(X \leq u, Y \leq v) - \mathbb{P}(X \leq u)\mathbb{P}(Y \leq v)du\ dv. \end{aligned}$$

□

Cette dernière proposition montre que pour un couple de variables négativement dépendantes, les variables sont forcément négativement corrélées.

Corollaire 2.1.1. *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles, si X et Y sont négativement dépendantes par quadrants alors $Cov(X,Y) \leq 0$.*

Dans le cas gaussien, cette condition est à la fois suffisante et nécessaire, en effet,

Proposition 2.1.2. *soit (X,Y) un couple gaussien, les variables aléatoires X et Y sont NQD ssi $Cov(X,Y) \leq 0$.*

La preuve de cette assertion est dûe à Joeg-dev et Proschan [20]

Définition 2.1.2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, ...X_n$ sont dites négativement dépendantes (NOD) si

$$\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n}\{X \leq x_j\}) \leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X \leq x_j) \tag{2.1.3}$$

et

$$\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n}\{X > x_j\}) \leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X > x_j) \tag{2.1.4}$$

On a vu d'aprés la remarque 2 que lorsque $n = 2$, les relations (2.1.4) et (2.1.3) sont équivalentes. Si $n \geq 3$, cette équivalence n'est pas vraie en général. Pour illustrer ceci considérons un exemple emprunté à Ebrahimi et Gosh [13].

Exemple 2.1.2. Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur de variables aléatoires prenant les valeurs $(0, 1, 1), (1, 0, 1)$, $(1, 1, 0), (0, 0, 0)$, chacune d'entre elle avec une probabilité $\frac{1}{4}$, alors

$$\mathbb{P}(X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0) = 0 \leq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X_1 > 0)\mathbb{P}(X_2 > 0)\mathbb{P}(X_3 > 0),$$

mais

$$\mathbb{P}(X_1 \leq 0, X_2 \leq 0, X_3 \leq 0) = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X_1 \leq 0)\mathbb{P}(X_2 \leq 0)\mathbb{P}(X_3 \leq 0).$$

Block, Savits et Shaked [5] proposent plusieurs exemples de suites de v.a NOD en se basant sur le Théorème 4.1 [5] page 770. Parmi ces exemples on cite celui de la loi de Dirichlet et de la loi multinomiale.

Exemple 2.1.3. Loi de Dirichlet, elle est vue comme la généralisation au cas multivarié de la loi bêta. On note $X = (X_1, X_2, ...X_n) \hookrightarrow Dir(\alpha)$ avec $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n)$ un vecteur de nombres réels positifs dont la densité de probabilité est donnée par

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\Gamma(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i)}{\prod_{i=0}^{n} \Gamma(\alpha_i)} (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha_0 - 1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i - 1}$$

où $x_i \geq 0$ pour $i = 1, , , n$, $\alpha_i > 1$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1$; alors $X_1, ..., X_n$ sont NOD.

Exemple 2.1.4. Loi multinomiale. Cette loi est une généralisation de la loi binomiale, l'expérience (avec remise) est répétée N fois de loi conjointe

$$\mathbb{P}(x_1, ..., x_n) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{n}(x_i)!(N - \sum_{i=1}^{n} x_i)!} (1 - \sum_{i=1}^{n} p_i)^{(N - \sum_{i=1}^{n} x_i)} \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i}$$

avec $x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq N, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i \leq 1$.

Joeg-dev et Proschan [20] ont généralisé la Proposition 2.1.2 au cas multivarié.

Proposition 2.1.3. *Soit $(X_1, ..., X_n)$ un vecteur gaussien, les variables aléatoires sont NOD si et seulement si elles sont deux à deux négativement corrélées.*

2.2 Propriétés des variables négativement dépendantes

Les propositions suivantes sont trés importantes notamment dans l'étude de la convergence des séries de variables aléatoires négativement dépendantes, elles concernent la stabilité du concept aprés composition avec des fonctions toutes croissantes ou toutes décroissantes ainsi que la relation entre le moment du produit fini des v.a et le produit des moments de chaque v.a. Les résultats de ce paragraphe sont dûs à Bozorgnia et al [7].

Proposition 2.2.1. *Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires NOD, si $f_1....f_n$ sont des fonctions Boréliennes toutes croissantes ou sont toutes décroissantes alors $f_1(X_1)....f_n(X_n)$ sont des variables NOD.*

Démonstration. Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires NOD et soit $f_1....f_n$ sont des fonctions toutes croissantes. Pour tout $k = 1,,,,n$ et pour tout réel y_k, l'évenement $\{f_k(X_k) \leq y_k\} = \{X_k \leq x_k\}$ avec $x_k = sup\{x : f_k(x) \leq y_k\}$ ou $\{f_k(X_k) \leq y_k\} = \{X_k < x_k\}$.

1. Dans le cas où $\{f_k(X_k) \leq y_k\} = \{X_k \leq x_k\}$, comme les variables sont NOD, en utilisant l'équation (2.1.3) on obtient :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n}\{f_k(X_k) \leq y_k\}) = \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k \leq x_k\}) \leq \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leq x_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(f_k(X_k) \leq y_k).$$

2. Si $\{f_k(X_k) \leq y_k\} = \{X_k < x_k\}$, on écrit $\{X_k < x_k\} = \bigcup\limits_{m \geq 1}\{X_k \leq x_k - \frac{1}{m}\}$,

et dans ce cas

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n}\{f_k(X_k)\leq y_k\}) &= \mathbb{P}\{X_1\leq x_1,...X_k<x_k,...,X_n\leq x_n\}\\
&= \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\{X_1\leq x_1,...X_k\leq x_k-\frac{1}{m},...,X_n\leq x_n\}\\
&\leq \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}(X_1\leq x_1)...\mathbb{P}(X_k\leq x_k-\frac{1}{m})...\mathbb{P}(X_n\leq x_n)\\
&\leq \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}(f_1(X_1)\leq f_1(x_1))...\mathbb{P}(f_k(X_k)\leq f_k(x_k-\frac{1}{m}))\\
&\quad ...\mathbb{P}(f_n(X_n)\leq f_n(x_n))\\
&= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(f_k(X_k)\leq y_k).
\end{aligned}$$

Nous avons montré que $\{f_1(X_1),...f_n(X_n)\}$ sont NOD inférieurement. Montrons à présent que $f_1(X_1),...,f_n(X_n)$ sont NOD supérieurement. l'évenement $\{f_k(X_k)>y_k\}=\{X_k>x_k\}$ ou$\{f_k(X_k)>y_k\}=\{X_k\geq x_k\}$ avec $x_k=\inf\{x:f_k(x)>y_k\}$.

3. Soit on a $\{f_k(X_k)>y_k\}=\{X_k>x_k\}$, comme les variables $X_1,...X_n$ sont NOD, en utilisant l'équation (2.1.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n}\{f_k(X_k)>y_k\}) &= \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k>x_k\}\\
&\leq \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k>x_k)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(f_k(X_k)>y_k).
\end{aligned}$$

4. Soit $\{f_k(X_k)>y_k\}=\{X_k\geq x_k\}$ et on écrit $\{X_k\geq x_k\}=\bigcap\limits_{m\geq 1}\{X_k>x_k-\frac{1}{m}\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n}\{f_k(X_k)>y_k\}) &= \mathbb{P}\{X_1>x_1,...X_k\geq x_k,...,X_n>x_n\}\\
&= \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\{X_1>x_1,...X_k>x_k-\frac{1}{m},...,X_n>x_n\}\\
&\leq \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}(X_1>x_1)...\mathbb{P}(X_k>x_k-\frac{1}{m})...\mathbb{P}(X_n>x_n)\\
&\leq \mathbb{P}(f_1(X_1)>y_1)...\mathbb{P}(f_k(X_k)>y_k)\\
&\quad ...\mathbb{P}(f_n(X_n)>y_n)\\
&= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(f_k(X_k)>y_k).
\end{aligned}$$

Même raisonnement si on suppose que les fonctions $f_1, ...f_n$ sont toutes décroissantes.

□

Corollaire 2.2.1. *Soit $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires NOD, soit $(t_1...t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ou $(t_1...t_n) \in \mathbb{R}_-^n$ alors $(\exp(t_1X_1), ... \exp(t_nX_n))$ sont aussi des variables aléatoires NOD.*

Proposition 2.2.2. *Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires positives NOD alors*

$$\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n X_i) \leq \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i).$$

Démonstration. Soit

$$X(\omega) = \int_0^{X(\omega)} dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{t<X(\omega)\}} dt,$$

alors par Tonelli

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n X_i) &= \mathbb{E}(\prod_{i=1}^n \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{t_i<X_i(\omega)\}} dt_i) \\
&= \mathbb{E}(\int_0^{+\infty} .... \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{t_i<X_i(\omega)\}} dt_1...dt_n) \\
&= \int_0^{+\infty} .... \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{t_i<X_i(\omega)\}}) dt_1...dt_n \\
&= \int_0^{+\infty} .... \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n \{X_i(\omega) > t_i\}) dt_1...dt_n \\
&\leq \int_0^{+\infty} .... \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i(\omega) > t_i) dt_1...dt_n \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i).
\end{aligned}$$

□

En combinant les propositions 2.2.1 et 2.2.2, on obtient

Proposition 2.2.3. *Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires NOD, si $f_1....f_n$ sont des fonctions positives boréliennes toutes croissantes ou sont toutes décroissantes alors*

$$\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n f_i(X_i)) \leq \prod_{i=1}^n \mathbb{E} f_i(X_i).$$

En particulier, si $(t_1, ...t_n) \in \mathbb{R}_+^n, (resp.\ \ \mathbb{R}_-^n)$ *alors*

$$\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} \exp(t_i X_i)) \leq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(t_i X_i)].$$

Définition 2.2.1. Une famille de variables aléatoires $\{X_k, k \geq 1\}$ est dite (NOD) si

$$\forall n \geq 2 \qquad (X_1, ..., X_n) \text{ sont NOD.}$$

2.3 Variables aléatoires négativement associées

Dans ce paragraphe, nous abordons la convergence des séries de variables aléatoires négativement associées traitée par Matula [30]. Pour cela, on a besoin de définir la classe de ces variables qui fait partie de la classe des variables négativement dépendantes et contient la classe des variables aléatoires indépendantes, on propose aussi par la suite un exemple de variables négativement dépendantes qui ne vérifient pas la condition d'association négative. Pour les différentes définitions, proriétés, exemples et contres exemples, le lecteur pourra consulter l'article de Joag-Dev et Proschan [20].

Définition 2.3.1. Soit $(X_1, ..., X_n)$ une suite de v.a, ces variables sont dites négativement associées (NA) si pour tout sous ensembles $A, B \subset \{1, ..., n\}$ disjoints et pour toutes fonctions croissantes (ou décroissantes) par coordonnée f, g on a

$$Cov\{(f(X_i), i \in A), (g(X_j), j \in B)\} \leq 0$$

Dans le cas d'une suite infinie, elle est NA si toute sous suite finie l'est.

Les propriétés suivantes nous seront utiles pour la suite. Pour la preuve voir [20]

1. **Propriété** $\mathbf{P}_1$ Pour un couple de variables aléatoires, négativement dépendants par quadrant est équivalent à négativement associés.

2. **Propriété** $\mathbf{P}_2$ Soient $A_1, ..., A_m$ des ensembles disjoints de $\{1, ..., k\}$ et $f_1, ..., f_m$ sont des fonctions croissantes positives. Si $X_1, ..., X_k$ sont NA, alors
$$\mathbb{E}\prod_{i=1}^{m} f_i(X_j, j \in A_i) \leq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{E} f_i(X_j, j \in A_i).$$

3. **Propriété** $\mathbf{P}_3$ Une conséquence immédiate de la propriétés P_2 est que pour

A_1, A_2 des sous-ensembles disjoints de $\{1, ..., k\}$ et $x_1, ..., x_k$ réels

$$\mathbb{P}(X_i \leq x_i, i = 1, ..., k) \leq \mathbb{P}(X_i \leq x_i, i \in A_1)\mathbb{P}(X_j \leq x_j, j \in A_2)$$

et

$$\mathbb{P}(X_i > x_i, i = 1, ..., k) \leq \mathbb{P}(X_i > x_i, i \in A_1)\mathbb{P}(X_j > x_j, j \in A_2)$$

en particulier $X_1, ..., X_n$ sont NOD.

Théorème 2.3.1. *Soit $(X_1, ..., X_n)$ un vecteur gaussien, si $Cov(X_i, X_j) \leq 0$ pour tout $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ alors $X_1, ..., X_n$ est une suite de variables négativement associées.*

Pour la preuve voir Joag-Dev [20] page(293). L'exemple suivant montre que les v.a NOD ne sont pas généralement NA.

Exemple 2.3.1. Soit (X_1, X_2, X_3, X_4) un vecteur de distribution conjointe représentée par le tableau suivant :

(X_3, X_4) \ (X_1, X_2)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	marginale
(0,0)	0.0577	0,0623	0,0623	0,0577	0,24
(0, 1)	0,0623	0,0677	0,0677	0,0623	0,26
(1, 0)	0,0623	0,0677	0,0677	0,0623	0,26
(1,1)	0.0577	0,0623	0,0623	0,0577	0,24
marginale	0,24	0,26	0,26	0,24	1

Les couples (X_1, X_2) et (X_3, X_4) ont les mêmes lois, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ les lois marginales sont $\mathbb{P}(X_i = 1) = 0, 5$.
On affirme que les v.a X_1, X_2, X_3, X_4 sont NOD, soit $f(x) = g(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ et soit $A = \{1, 2\}$ et $B = \{3, 4\}$ alors en posant $C = Cov(f(X_i, i \in A), g(X_j, j \in B))$,

$$\begin{aligned}
C &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_1>0\}\cap\{X_2>0\}}\mathbb{1}_{\{X_3>0\}\cap\{X_4>0\}}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_1>0\}\cap\{X_2>0\}})\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_3>0\}\cap\{X_4>0\}}) \\
&= \mathbb{P}(X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0, X_4 > 0) - \mathbb{P}(X_1 > 0, X_2 > 0)\mathbb{P}(X_3 > 0, X_4 > 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1) - \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1, X_4 = 1),
\end{aligned}$$

donc

$$Cov(f(X_i, i \in A), g(X_j, j \in B)) = 0, 0577 - (0, 24)^2 > 0,$$

ainsi les variables ne sont pas négativement associées.

Le problème de la convergence presque sûre de

$$\frac{1}{n}\{S_n - \mathbb{E}(S_n)\},$$

avec $S_n = \sum_{1\leq k\leq n} X_k$ pour les suites stationnaire posistivement associées et négativement associées a été étudié par Newman [31]. La suite de ce paragraphe est consacrée à la présentation d'un résultat obtenu dans le cadre non stationnaire établi par Matula généralisant le travail d'Etemadi [15]. Commencons par établir une inégalité maximale similaire à celle de Kolmogorov.

Proposition 2.3.1. *Soit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires centrées négativement asociées ayant le moment d'ordre 2 fini, alors pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{P}[\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > \varepsilon] \leq 8\varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{n} Var(X_k). \tag{2.3.1}$$

Démonstration. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, on a

$$\max(|S_1|, ..., |S_n|) \leq \max(0, S_1, ..., S_n) + \max(0, -S_1, ..., -S_n).$$

Posons

$$\mathcal{I}_n(\varepsilon) = \mathbb{P}[\max(|S_1|, ..., |S_n|)] > \varepsilon],$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_n(\varepsilon) &\leq \mathbb{P}[\max(0, S_1, ..., S_n) > \frac{\varepsilon}{2}] + \mathbb{P}[\max(0, -S_1, ..., -S_n)] > \frac{\varepsilon}{2}] \\
&\leq 4\Big\{\frac{\mathbb{E}[\max(0, S_1, ..., S_n)]^2}{\varepsilon^2} + \frac{\mathbb{E}[\max(0, -S_1, ..., -S_n)]^2}{\varepsilon^2}\Big\} \\
&\leq 4\varepsilon^{-2}\Big[\mathbb{E}(\max(S_1, ..., S_n))^2 + \mathbb{E}(\max(-S_1, ..., -S_n))^2\Big]. \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$M_n = \max(S_1, ..., S_n) = X_1 + \max(0, X_2, X_2 + X_3, ..., X_2 + ... + X_n),$$

ainsi

$$\mathbb{E}(M_n)^2 = \mathbb{E}(X_1)^2 + 2\mathbb{E}(X_1 \max(0, X_2, X_2 + X_3, ..., X_2 + ... + X_n))$$

$$+\mathbb{E}(\max(0, X_2, X_2 + X_3, ..., X_2 + ... + X_n)^2).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n)^2 &\leq \mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(\max(X_2, X_2 + X_3, ..., X_2 + ... + X_n)^2) \\
&\leq \mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(X_2 + \max(0, X_3, ..., X_3 + ... + X_n)^2) \\
&\leq \mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(X_2)^2 + 2\mathbb{E}(X_2 \max(0, X_3, ..., X_3 + ... + X_n)) \\
&\quad + \mathbb{E}(\max(0, X_3, ..., X_3 + ... + X_n)^2) \\
&\leq \mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(X_2)^2 + \mathbb{E}(\max(X_3, ..., X_3 + ... + X_n)^2) \\
&\quad ... \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} Var(X_k),
\end{aligned}$$

de même par rapport à $\mathbb{E}(\max(-S_1, ..., -S_n))^2$ donc $(\star)$ implique

$$\mathbb{P}[\max(|S_1|, ..., |S_n|)] > \varepsilon] \leq 8\ \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{n} Var(X_k),$$

d'où le résultat. $\square$

Théorème 2.3.2 (Théorème des deux séries). *Soit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires négativement associées, ayant le moment d'ordre 2 fini. Si les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} Var(X_n) < \infty$ alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ converge presque sûrement.*

La preuve de ce théorème fait appel à l'inégalité (2.3.1).

Démonstration. Supposons que $\mathbb{E}(X_n) = 0$, et rappelons que $\{S_n, n \geq 1\}$ désigne la suite des sommes partielles, soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sup_{1 \leq k \leq m} |S_{n+k} - S_n)| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(\sup_{1 \leq k \leq m} |\sum_{j=n+1}^{n+k} X_j| > \varepsilon) \\
&\leq 8\varepsilon^{-2} \sum_{j=n+1}^{n+m} Var(X_j) \\
&\leq 8\varepsilon^{-2} \sum_{j=n+1}^{+\infty} Var(X_j),
\end{aligned}$$

on obtient alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\sup_{k \geq n} |S_{n+k} - S_n| > \varepsilon) \leq 8\varepsilon^{-2} \sum_{j=n+1}^{+\infty} Var(X_k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $\{S_n, n \geq 1\}$ converge presque sûrement.

A présent, on pose $Y_n = X_n - \mathbb{E}(X_n)$, $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires réelles centrées et de carrés intégrables. Par la $1^{\text{ère}}$ étape, la série

$\sum_{n\geq 1} Y_n$ converge presque sûrement. D'autre part $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n)$ converge, comme $X_n = \mathbb{E}(X_n) + (X_n - \mathbb{E}(X_n))$, on déduit que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n \qquad \text{converge presque sûrement.}$$

$\square$

Pour énoncer le théorème suivant, on a besoin de définir

$$X^c = \begin{cases} X & \text{si } \mid X \mid \leq c \\ -c & \text{si } X < -c \\ c & \text{si } X > c. \end{cases}$$

Théorème 2.3.3 (Théorème des trois séries)**.** *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une famille de variables aléatoires négativement associées, si pour tout* $c > 0$ *les séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n^c), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} Var(X_n^c) \quad et \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > c)$$

convergent alors $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *converge p.s.*

La démonstration du Théorème 2.3.3 est exactement similaire à la preuve du théorème des trois séries de Kolmogorov sauf pour la trancature, la composition des v.a négativement associées par la fonction indicatrice sur un intervalle borné ne permet pas de préserver la propriété de négative association.

Démonstration. La convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > c) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \neq Y_n)$ implique que la famille de variables aléatoires $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ et la famille $\mathcal{X}^c = \{X_n^c, n \geq 1\}$ sont équivalentes en convergence, d'un autre côté si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} Var(X_n^c)$ converge, le Théorème 2.3.2 s'applique et on obtient alors que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n^c$ converge p.s et il en ait de même pour $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$. $\square$

Chapitre 3

Variables aléatoires sous-gaussiennes

Les variables aléatoires sous-gaussiennes ont été introduite par Kahane [21] en 1960, dans l'étude des propriétés des polynômes trigonométriques aléatoires. Elles forment une classe de variables aléatoires importante possédant des propriétés d'intégrabilité intéressantes et généralisant les variables aléatoires gaussiennes.
Dans ce chapitre nous allons établir les principales caractéristiques de ces variables aléatoires, nous nous intéresserons aussi à l'espace engendré par ces variables et son lien avec les espaces d'Orlicz de type exponentiel étudiés dans le Chapitre 1. Nos références de base pour ce chapitre sont l'article de J.P Kahane [21] et le livre de Buldygin et Kozachenko[9].

3.1 Définitions et Exemples

Définition 3.1.1. Une variable aléatoire est dite sous gaussienne s'il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X}) \leq \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 a^2}{2}} .$$

Les exemples proposés correspendent aux variables aléatoires usuelles appartenant à cette classe.

Exemples 3.1.1. Le premier exemple de v.a.r sous gaussienne qu'on cite est celui d'une variable aléatoire gaussienne centrée.

– Si $G \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, sa fonction génératrice des moments est donnée par

$$\mathbb{E}(\exp\{\lambda G\}) = \exp\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\},$$

et donc G une v.a sous-gaussienne.

L'ensemble des v.a sous-gaussiennes ne contient pas uniquement les v.a gaussiennes centrées, voici quelques exemples de v.a qui ne sont pas gaussiennes mais elles vérifient la condition de sous-gaussienneté.

i) Soit ε une v.a de Rademacher prennant ses valeurs dans $\{-1,1\}$ avec une probabilité $\mathbb{P}(\varepsilon=-1)=\mathbb{P}(\varepsilon=1)=\frac{1}{2}$, sa fonction génératrice des moments vérifie

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda\varepsilon}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}) \\ &= \cosh(\lambda) \\ &\leq \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}.\end{aligned}$$

Ceci montre que ε est une v.a sous-gausienne.

Un autre exemple généralisant celui du Rademacher est celui des variables aléatoires bornée.

ii) Soit X une v.a centrée à support dans $[a,b]$, soit X' une copie indépendante de X, construite sur un autre espace de probabilité $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}')$. En utilisant l'inégalité de Jensen, Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_X[\mathrm{e}^{\lambda X}] &= \mathbb{E}_X[\mathrm{e}^{\lambda(X-\mathbb{E}_{X'}(X'))}] \\ &\leq \mathbb{E}_{X,X'}[\mathrm{e}^{\lambda(X-X')}]\end{aligned}$$

Soit maintenant la v.a ε définie précédemment indépendante de X et X' et construite sur un troisième espace de probabilité$(\Omega_\varepsilon,\mathcal{F}_\varepsilon,\mathbb{P}_\varepsilon)$. On sait que $(X-X')\overset{\mathcal{L}}{=}\varepsilon(X-X')$, ceci nous permet d'utiliser le résultat précédent comme suit

$$\mathbb{E}_{X,X'}[\mathrm{e}^{\lambda(X-X')}] = \mathbb{E}_{X,X'}\Big[\mathbb{E}_\varepsilon[\mathrm{e}^{\lambda\varepsilon(X-X')}]\Big] \leq \mathbb{E}_{X,X'}[\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(X-X')^2}{2}}],$$

où $\mathbb{E}_X(resp.\ \mathbb{E}_{X'}, resp.\ \mathbb{E}_\varepsilon)$ désigne l'espérance mathématique par rapport à $\mathbb{P}(resp.\ \mathbb{P}', resp.\ \mathbb{P}_\varepsilon)$. Puisque $\mid X-X'\mid\leq b-a$, alors

$$\mathbb{E}_X[\mathrm{e}^{\lambda X}] \leq \mathbb{E}_{X,X'}[\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(X-X')^2}{2}}] \leq \mathbb{E}_{X,X'}[\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(b-a)^2}{2}}] \leq \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(b-a)^2}{2}},$$

ainsi une variable centrée bornée est une v.a sous-gaussienne (par la méthode de symétrisation).

Définition 3.1.2. On appelle le standard d'une variable aléatoire X sous-gaussienne la quantité notée $\tau(X)$ définie par

$$\tau(X) = \inf\{a \geq 0, \mathbb{E}(X) \leq \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 a^2}{2}}\}.$$

Remarque 4. On note par $Sub(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires sous-gaussiennes définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Remarque 5. On a par définition $X \in Sub(\Omega) \iff \tau(X) < \infty$.

Une autre expression du standard est proposée par le lemme suivant qui peut être utile pour la détermination de ce dernier.

Lemme 3.1.1. *Soit $X \in Sub(\Omega)$, alors*

$$\tau(X) = \sup_{\lambda \neq 0} \Big[\frac{2\ \ln \mathbb{E}(e^{\lambda X})}{\lambda^2}\Big]^{1/2} \tag{3.1.1}$$

et

$$\mathbb{E}(\exp\{\lambda X\}) \leq \exp\{\frac{\lambda^2 \tau^2}{2}\} \tag{3.1.2}$$

Démonstration. Soit $X \in Sub(\Omega)$, il existe une constante positive a tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leq e^{\frac{\lambda^2 a^2}{2}}.$$

Ainsi

$$2 \ln[\mathbb{E}(e^{\lambda X})] \leq \lambda^2 a^2,$$

d'où pour $\lambda \neq 0$ on trouve

$$\Big[\frac{2 \ln \mathbb{E}(e^{\lambda X})}{\lambda^2}\Big]^{1/2} \leq a \Longrightarrow \sup_{\lambda \neq 0} \Big[\frac{2 \ln \mathbb{E}(e^{\lambda X})}{\lambda^2}\Big]^{1/2} \leq a.$$

Donc d'une part

$$\tau(X) \geq \sup_{\lambda \neq 0} \Big[\frac{2 \ln \mathbb{E}(e^{\lambda X})}{\lambda^2}\Big]^{1/2}, \tag{3.1.3}$$

d'une autre part, en posant $\alpha = \sup_{\lambda \neq 0} \Big[2 \ln \mathbb{E}(e^{\lambda X})/\lambda^2\Big]^{1/2}$, on a

$$\begin{aligned} \Big[\frac{2 \ln \mathbb{E}(e^{\lambda X})}{\lambda^2}\Big]^{1/2} \leq \alpha \quad & \iff \quad 2 \ln \mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leq \lambda^2 \alpha^2 \\ & \iff \quad \mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leq \mathrm{e}^{\lambda^2 \alpha^2/2}, \end{aligned}$$

on en déduit que $\tau(X) \leq \alpha$, et puisqu'on a montré aussi que $\tau(X) \geq \alpha$ on trouve finalement $\tau(X) = \alpha$ et en remplaçant α par τ on trouve la formule (3.1.2). $\square$

On remarque que les exemples de v.a que nous avons citer ont une caractéristique celle d'être centrées.

Proposition 3.1.1. *Si $X \in Sub(\Omega)$ alors $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) \leq \tau^2$.*

La proposition montre que $\mathbb{E}(X) = 0$ une condition nécéssaire pour q'une v.a soit sous-gaussienne et montre aussi que son écart-type est dominé par τ.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{|X|}) &= \mathbb{E}(\mathrm{e}^X \, \mathbb{1}_{\{X \geq 0\}}) + \mathbb{E}(\mathrm{e}^X \, \mathbb{1}_{\{X<0\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(\mathrm{e}^X) + \mathbb{E}(e^{-X}) \\ &\leq 2\,\mathrm{e}^{a^2/2} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

On a

$$\mathbb{E}(|X|^n) \leq 2(n!)\mathbb{E}(\cosh(X)) < \infty,$$

où

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\mathbb{E}(\sup_{-a \leq \lambda \leq a} (\mathrm{e}^{\lambda X})) \leq \mathbb{E}(\mathrm{e}^{a|X|}) < \infty,$$

et

$$\mathbb{E}(\sup_{-a \leq \lambda \leq a} (|X|^n \, \mathrm{e}^{\lambda X})) \leq n! \; \mathbb{E}(\mathrm{e}^{(a+1)|X|}) < \infty.$$

La fonction $M(\lambda) = \mathbb{E}(\exp\{\lambda X\})$ est n fois dérivable $n \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{d^n M(0)}{d\lambda^n} = \mathbb{E}(X^n)$,

en faisant appel à la formule de taylor on obtient

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X}) = 1 + \lambda \mathbb{E}(X) + \frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}(X^2) + o_1(\lambda^2),$$

d'une autre part

$$\exp\{\frac{\lambda^2 \tau^2(X)}{2}\} = 1 + \frac{\lambda^2 \tau^2}{2} + o_2(\lambda^2),$$

d'aprés l'equation (3.1.2)

$$\mathbb{E}(\exp\{\lambda X\}) \leq \exp\{\frac{\lambda^2 \tau^2(X)}{2}\},$$

on trouve
$$\lambda\mathbb{E}(X)+\frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}(X^2)+o_1(\lambda^2)\leq\frac{\lambda^2\tau^2}{2}+o_2(\lambda^2),$$
on divise par $\lambda>0$ et quand $\lambda\to 0$ on obtient
$$\mathbb{E}(X)\leq 0,$$
ensuite on divise par $\lambda<0$ l'inégalité devient
$$\mathbb{E}(X)+\frac{\lambda}{2}\mathbb{E}(X^2)+o_1(\lambda)\leq\frac{\lambda\tau^2}{2}+o_2(\lambda),$$
quand $\lambda\to 0$ on remarque que
$$\mathbb{E}(X)\geq 0,$$
finalement on a montré que
$$\mathbb{E}(X)=0.$$
Maintenant si on divise par λ^2 on obtient l'inégalité suivante
$$\frac{1}{2}\mathbb{E}(X^2)+o_1(1)\leq\frac{\tau^2}{2}+o_2(1),$$
et quand $\lambda\to 0$ on trouve $\mathbb{E}(X^2)\leq\tau^2$. □

Reprenons les exemples des v.a sous-gaussiennes déja cités afin de déterminer leurs standards respectifs

Exemples 3.1.2. 1. Pour une gaussienne $G\hookrightarrow\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $\tau(G)=\sigma$

En effet
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda G})=\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}\Rightarrow\Big(\frac{2\ln\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda G})}{\lambda^2}\Big)^{\frac{1}{2}}=\sigma,$$
ainsi
$$\sup_{\lambda\neq 0}\Big(\frac{2\ln\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda G})}{\lambda^2}\Big)^{\frac{1}{2}}=\tau=\sigma.$$

2. Une v.a X centrée à support dans $[a,b]$ est sous-gaussienne et son standard vérifie
$$\tau(X)\leq\frac{b-a}{2}.\tag{3.1.4}$$
Par la méthode de symétrisation on a trouvé $\tau(X)\leq b-a$. L'estimation (3.1.4) est plus précise, elle est dûe à Hoeffding [18].

Remarquons que pour $a \leq x \leq b$, on a $\quad | x - \frac{b+a}{2} | \ \leq \frac{b-a}{2}$, par conséquent

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) \leq \frac{(b-a)^2}{4},$$

on pose

$$f(\lambda) = \ln \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X}),$$

$$f'(\lambda) = \frac{\mathbb{E}(X\,\mathrm{e}^{\lambda X})}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})},$$

$$\begin{aligned} f"(\lambda) &= \frac{\mathbb{E}(X^2\,\mathrm{e}^{\lambda X})}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})} - \Big[\frac{\mathbb{E}(X\,\mathrm{e}^{\lambda X})}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})}\Big]^2 \\ &= \mathbb{E}\Big[X^2\,\mathrm{e}^{\lambda X}\,\frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})}\Big] - \mathbb{E}^2\Big[X\,\mathrm{e}^{\lambda X}\,\frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})}\Big], \end{aligned}$$

on remarque aussi que $\mathbb{E}\Big[X\,\mathrm{e}^{\lambda X}\,\frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{e})}\Big] = 1$, donc

$$d\tilde{\mu}(x) = \frac{\mathrm{e}^{tX}}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})} d\mu(x),$$

est la loi de $\tilde{X}$, d'où

$$\begin{aligned} V(\tilde{X}) &= \mathbb{E}\Big[X^2\,\mathrm{e}^{\lambda X}\,\frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})}\Big] - \mathbb{E}^2\Big[X\,\mathrm{e}^{\lambda X}\,\frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})}\Big] \\ &= f"(\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi

$$V(\tilde{X}) \frac{(b-a)^2}{4},$$

en intégrant les deux membre de l'inégalité, on obtient

$$\int_0^\lambda f"(t)dt = f'(\lambda) - f'(0) \leq \lambda \frac{(b-a)^2}{4},$$

en intégrant une seconde fois, on trouve

$$\int_0^\lambda f'(t)dt = f(\lambda) - f(0) = f(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2}\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X}) \leq \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 (b-a)^2}{8}},$$

donc
$$X \in Sub(\Omega) \quad et \quad \tau(X) \leq \frac{(b-a)}{2}.$$

3. (Rademacher), on a $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ et d'aprés l'exemple précédent $\tau(\varepsilon) \leq 1$, or $1 = \mathbb{E}(X^2) \leq \tau^2(\varepsilon)$ ceci donne $\tau(\varepsilon) \geq 1$ finalement $\tau(\varepsilon) = 1$.

Un autre exemple de variable sous-gaussienne est traité par Sirota et Ostrovsky [32], où il donne la valeur exacte du stansard τ.

Théorème 3.1.1. *Soit A un évènement de probabilité $p \in [0,1]$ et soit la variable aléatoire X définie par $X = \mathbb{1}_A$. On pose $Y = X - p$, $\mathbb{P}(Y = -p) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(Y = 1 - p) = p$, alors on a*

$$\tau(Y) = \Big[\frac{1-2p}{2\ln(\frac{1-p}{p})}\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. La fonction génératrice des moments est donnée

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda Y}) = p\,\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} + (1-p)\,\mathrm{e}^{-\lambda p},$$

il a été démontré par Kearns et Saul [23] en 1998 que

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda Y}) \leq \exp\Big\{\frac{\lambda^2(1-2p)}{4\ln(\frac{1-p}{p})}\Big\}.$$

En posant
$$g(\lambda) = \lambda^{-2} 2\ln\Big[p\,\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} + (1-p)\,\mathrm{e}^{-\lambda p}\Big],$$
$$g'(\lambda) = 2\lambda^{-3}\frac{\Big[(p(1-p)\,\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} - p(1-p)\,\mathrm{e}^{-\lambda p} - 2\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda Y})\ln\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda Y})\Big]}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda Y})},$$

d'aprés [23]
$$g'(\lambda) = 0 \iff \lambda_0 = 2\ln(\frac{1-p}{p})$$

et

$$g(\lambda_0) = 2\{2\ln(\frac{1-p}{p})\}^{-2}\ln\Big[p(\frac{1-p}{p})^{2-2p} + (1-p)(\frac{1-p}{p})^{-2p}\Big] = \frac{1-2p}{2\ln(\frac{1-p}{p})},$$

ainsi
$$\tau(Y) = \sup_{\lambda\neq 0}\lambda^{-2} 2\ln[\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda Y})] = g(\lambda_0).$$

□

Passons à quelques inégalités de grandes déviations à décroissance exponentielle ainsi que l'estimation des moments positifs d'ordre s.

Proposition 3.1.2. *Soit $X \in Sub(\Omega)$ alors pour $t > 0$ on a*

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \exp\{\frac{-t^2}{2\tau^2}\},$$

$$\mathbb{P}(X \leq -t) \leq \exp\{\frac{-t^2}{2\tau^2}\},$$

et

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2\exp\{\frac{-t^2}{2\tau^2}\}. \tag{3.1.5}$$

Démonstration. (On peut supposer que $\tau(X) > 0$)

1. En utilisant l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})}{\mathrm{e}^{\lambda t}} \leq \exp\{\frac{\lambda^2\tau^2}{2} - \lambda t\} \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall t > 0.$$

On cherche ensuite $\min_{\lambda > 0} \exp\{\frac{\lambda^2\tau^2}{2} - \lambda t\}$, pour cela on pose $f(\lambda) = \frac{\lambda^2\tau^2}{2} - \lambda t$ ainsi $f'(\lambda) = \lambda\tau^2 - t$, ceci nous donne $f'(\lambda) = 0$ pour $\lambda_0 = t/\tau^2$, en remplaçant on obtient

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \exp\{\frac{t^2}{2\tau^2} - \frac{t^2}{\tau^2}\} = \exp\{-\frac{t^2}{2\tau^2}\}.$$

2. De même pour $\mathbb{P}(X \leq -t) = \mathbb{P}(-X \geq t) \leq \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda X}) \leq \exp\{-\frac{t^2}{2\tau^2}\}$.
3. Finalement $\mathbb{P}(\mid X \mid \geq t) = \mathbb{P}(X \geq t) + \mathbb{P}(X \leq -t) \leq 2\exp\{-\frac{t^2}{2\tau^2}\}$.

□

Proposition 3.1.3. *Si $X \in Sub(\Omega)$ alors*

$$\mathbb{E}(|X|^s) \leq 2(s/e)^{\frac{s}{2}}\ \tau^s(X), \qquad \forall s > 0. \tag{3.1.6}$$

Démonstration. Soit $s > 0$ on a $\max_{x \geq 0} x^s\,\mathrm{e}^{-x} = (s/e)^s$, en effet si on pose $h(x) = x^s\,\mathrm{e}^{-x}$, alors

$$h'(x) = sx^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x} - x^s\,\mathrm{e}^{-x} = x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}(s - x),$$

donc $h(s) = s^s\,\mathrm{e}^{-s} = \max_{x \geq 0} h(x)$ et on a l'inégalité suivante vérifiée pour tout $x \geq 0$

$$x^s \leq (s/e)^s\,\mathrm{e}^x.$$

On prend $x = \lambda|X|$, $\lambda > 0$ on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|^s) &\leq (\frac{s}{\lambda e})^s \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda|X|}) \\
&\leq (\frac{s}{\lambda e})^s \{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda X}) + \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})\} \\
&\leq 2(\frac{s}{\lambda e})^s \exp\{\frac{\lambda^2\tau^2}{2}\} \\
&\leq \min_{\lambda>0} 2(\frac{s}{\lambda e})^s \exp\{\frac{\lambda^2\tau^2}{2}\} \\
&\leq 2(\frac{s}{e})^{s/2}\tau^s.
\end{aligned}$$

□

3.2 Propriétés de l'espace des variables sous-gaussiennes

Dans ce paragraphe nous nous intéressons a la structure de l'espace formé par les v.a. sous-gaussiennes ainsi que leurs propriétés. Contrairement aux variables gaussiennes l'espace $\mathrm{Sub}(\Omega)$ est un espace vectoriel, le theoréme suivant nous fournit sa structure.

Théorème 3.2.1. *L'espace $Sub(\Omega)$ muni de la norme $\tau(.)$ est un espace de Banach.*

La preuve se fera en 3 étapes, lors de la première on montre que $\mathrm{Sub}(\Omega)$ est un espace vectoriel, ensuite que $\tau(.)$ est une norme et finalement on montre que l'espace est complet pour la distance issue de sa norme.

Démonstration. 1. Montrons que $Sub(\Omega)$ est un espace vectoriel :

– La variable aléatoire nulle p.s appartient à $Sub(\Omega)$.
– Soit $X, Y \in Sub(\Omega), \lambda \in \mathbb{R}$ et soit $p > 1, q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(\lambda(X+Y))] &= \mathbb{E}[\exp(\lambda X)\exp(\lambda Y)] \\
&\leq \mathbb{E}^{\frac{1}{p}}[\exp(p\lambda X)]\mathbb{E}^{\frac{1}{q}}[\exp(q\lambda X)] \\
&\leq \exp(\tau^2(X)p\frac{\lambda^2}{2})\exp(\tau^2(Y)q\frac{\lambda^2}{2}) \\
&= \exp(\frac{\lambda^2}{2}(\tau^2(X)p + \tau^2(Y)q)).
\end{aligned}$$

Posons $f(p) = (\tau^2(X)p + \tau^2(Y)q) = p\tau^2(X) + \frac{p}{p-1}\tau^2(Y)$ et déterminons son minimum pour $p > 1$,

$$f'(p) = \tau^2(X) + \tau^2(Y)[\frac{p-1-p}{(p-1)^2}]$$

,

$$\begin{aligned} f'(p) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \tau^2(X) - \frac{\tau^2(Y)}{(p-1)^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \mid p-1 \mid = \frac{\tau(Y)}{\tau(X)} \\ &\Longleftrightarrow \quad p = 1 + \frac{\tau(Y)}{\tau(X)}, \end{aligned}$$

on remplace pour trouver

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda(X+Y))] \leq \exp(\frac{\lambda^2}{2}(\tau^2(X)(1+\frac{\tau(Y)}{\tau(X)}) + \tau^2(Y)(1+\frac{\tau(X)}{\tau(Y)})))$$

$$= \quad \exp(\frac{\lambda^2}{2}(\tau(X)+\tau(Y))^2), \tag{3.2.1}$$

Ainsi $X + Y \in Sub(\Omega)$.

– Soit $X \in Sub(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda a X)] = \mathbb{E}[\exp(\alpha X)],$$

comme $X \in Sub(\Omega)$, il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout réel α on ait

$$\mathbb{E}[\exp(\alpha X)] \leq \exp\{\frac{\alpha^2 c^2}{2}\} = \exp\{\frac{\lambda^2 (ac)^2}{2}\}, \tag{3.2.2}$$

donc $aX \in Sub(\Omega)$.

2. Montrons que τ est une norme :
   – Si $X = 0$ alors $\mathbb{E}[\exp(\lambda X)] = 1$, donc

$$X = 0 \Rightarrow \tau(X) = 0,$$

réciproquement :

$$\tau(X) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = 0 \Rightarrow X = 0.$$

   – D'aprés(3.2.2) $\tau(aX) = \mid a \mid \tau(X)$,

– et d'aprés (3.2.1) on a $\tau(X+Y) \leq \tau(X) + \tau(Y)$.

3. Il nous reste à montrer que $Sub(\Omega)$ est complet pour la norme $\tau(.)$
Soit $\{(X_n), n \geq 1\} \subset Sub(\Omega)$ une suite de cauchy, alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 : \forall p, q > N \quad \tau(X_p - X_q) < \epsilon,$$

or toute suite de cauchy est bornée ceci donne

$$\sup_{n \geq 1} \tau(X_n) < +\infty,$$

et

$$\mathbb{E}[(X_p - X_q)^2] \leq \tau^2(X_p - X_q) \leq \epsilon^2.$$

Ainsi (X_n) est convergente en moyenne quadratique, donc convergente en probabilité vers X_∞ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, (\exp(\lambda X_n))_{n\geq 1}$ est convergente en probabilité vers $\exp(\lambda X_\infty)$, d'une autre part pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $\beta > 0$

$$\begin{aligned} \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[\exp(\lambda X_n)^{1+\beta}] &= \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[\exp(\lambda(1+\beta)X_n)] \\ &\leq \sup_{n\geq 1} \exp(\frac{\lambda^2(1+\beta)^2\tau^2(X_n)}{2}) \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $\{\exp(\lambda X_n)\}$ est bornée dans $L^{1+\beta}$ donc uniformément intégrable, comme elle converge en proba, elle converge dans L^1 et par suite :

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda X_\infty)] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\exp(\lambda X_n)] \leq \exp \frac{(\lambda^2 \tau_\infty^2)}{2} < \infty$$

$$\tau_\infty = \limsup_{n\to+\infty} \tau(X_n),$$

alors

$$X_\infty \in Sub(\Omega),$$

finalement

$$\lim_{n\to+\infty} \tau(X_\infty - X_n) \leq \limsup_{p\geq q} \tau(X_p - X_q) < \epsilon,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \tau(X_\infty - X_n) = 0.$$

□

Remarque 6. Pour $p > 0$, on a :

$$L_0^\infty(\Omega) \subsetneq Sub(\Omega) \subsetneq L_0^p(\Omega) \quad p > 0,$$

où $L_0^p = \{X \in L^p \ / \quad \mathbb{E}(X) = 0\}, \ \ 0 < p \leq \infty.$

En effet

i) Toute variable aléatoire centrée bornée est sous-gaussienne (S.G), mais une v.a S.G n'est pas forcément bornée c'est le cas des v.a Gaussiennes centrées qui sont S.G mais non bornées.

ii) D'aprés l'inégalité (3.1.6), toute v.a S.G est forcément une v.a de $\mathrm{L}^p(\Omega)$, or si on considère une v.a $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, et on pose $Y = X - 1$, on a $Y \in \mathrm{L}_0^p(\Omega)$ mais sa fonction géneratrice $M_Y(t)$ n'est définie que pour $\lambda < 1$.

Un autre exemple c'est celui d'une loi de poison $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ où sa fonction génératrice des moments $M_X(t) = \exp(\mathrm{e}^t - 1)$. La variable aléatoire $Y = X - 1$ est centrée, de plus

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tY}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t(X-1)}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})\,\mathrm{e}^{-t} = \exp(\mathrm{e}^t - 1 - t),$$

or $\ \mathrm{e}^t - 1 - t = \sum_{k \geq 2} \frac{t^k}{k!}$ et donc pour tout réel a positif, il existe un réel t tel que

$$\mathrm{e}^t - 1 - t > \frac{a^2 t^2}{2},$$

ceci montre que Y ne peut pas être dans $Sub(\Omega)$.

Proposition 3.2.1. *Soient $X_1, ..., X_n \in Sub(\Omega)$ indépendantes alors*

$$\tau^2\Big(\sum_{k=1}^n X_k\Big) \leq \sum_{k=1}^n \tau^2(X_k). \tag{3.2.3}$$

Démonstration. Comme $\tau(.)$ est une norme

$$\tau\Big(\sum_{k=1}^n X_k\Big) \leq \sum_{k=1}^n \tau(X_k)$$

la proposition nous fournit une inégalité plus précise lorsque les v.a sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp\{\lambda \sum_{k=1}^{n} X_k\}) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\exp\{\lambda X_k\} \\
&\leq \prod_{k=1}^{n} \exp\{\lambda^2 \tau^2(X_k)/2\} \\
&\leq \exp\{\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \tau^2(X_k)\},
\end{aligned}$$

d'où

$$\tau^2\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \tau^2(X_k).$$

□

Proposition 3.2.2. *Considérons une suite* $\tilde{a} = \{a_k, 1 \leq k \leq n\}$ *de nombre réels et soit* $\{X_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ *une suite de variables aléatoires sous-gaussiennes négativement dépendantes, on pose*

$$S_n(\tilde{a}) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i,$$

on obtient alors

$$S_n(\tilde{a}) \hookrightarrow Sub_\tau(\Omega) \quad et \quad \tau^2(S_n(\tilde{a})) \leq 2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \tau_k^2, \tag{3.2.4}$$

Démonstration. Soit l'ensemble des indices $A^+ = \{1 \leq k \leq n / a_k \geq 0\}$ et l'ensemble $A^- = \{1 \leq k \leq n / a_k < 0\}$. posons

$$S_n^{(1)}(\tilde{a}) = \sum_{k \in A^+} a_k X_k,$$

et

$$S_n^{(2)}(\tilde{a}) = \sum_{k \in A^-} a_k X_k,$$

on a $(a_k X_k)_{k \in A^+}$ et $(a_k X_k)_{k \in A^-}$ sont deux suites de v.a SG-NOD, ainsi

$$\tau^2(S_n^{(1)}(\tilde{a})) \leq \sum_{k \in A^+} a_k^2 \tau^2(X_k),$$

de même

$$\tau^2(S_n^{(2)}\tilde{a})) \leq \sum_{k \in A^-} a_k^2 \tau^2(X_k).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz , on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp\{tS_n(\tilde{a})\}) &= \mathbb{E}\Big[\exp\{tS_n^{(1)}(\tilde{a}) + tS_n^{(2)}(\tilde{a})\}\Big] \\ &\leq \mathbb{E}^{1/2}[\exp(2tS_n^{(1)}(\tilde{a})]\mathbb{E}^{1/2}[\exp(2tS_n^{(2)}(\tilde{a})],\end{aligned}$$

ensuite en utilisant le fait que les v.a sont sous gaussiennes ND, on obtient

$$\mathbb{E}(\exp\{tS_n(\tilde{a})\}) \leq \exp(\frac{1}{2}4t^2 S_n^{(1)}(\tilde{a}))^{1/2}\exp(\frac{1}{2}4t^2 S_n^{(2)}(\tilde{a}))^{1/2},$$

$$\leq \exp(t^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2\tau^2(X_k)).$$

□

Nous allons voir quelques définitions équivalentes de v.a sous-gaussiennes.

Théorème 3.2.2. *Soit X une v.a centrée, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $X \hookrightarrow Sub(\Omega)$,
2. $\exists c_1 > 0, \forall t > 0 : \mathbb{P}(\mid X \mid \geq t) \leq 2exp(-c_1 t^2)$,
3. *soit* $\psi(x) = \exp\{x^2\} - 1$ *une fonction de Young, on a alors* $X \in L_\psi(\Omega)$,
4. $\exists \; c_2 \geq 1$ *tel que pour tout* $t > 0$ $\mathbb{P}(\mid X \mid \geq t) \leq c_2\mathbb{P}(\mid Y \mid \geq t)$ *où* $Y \hookrightarrow N(0,\sigma)$,
5. $\sup_k \Big[\frac{2^k k!\mathbb{E}(X^{2k})}{(2k)!}\Big]^{\frac{1}{2k}} < +\infty$.

Démonstration. a) D'aprés la proposition 3.1.2 on a 1) $\Rightarrow$ 2).

b) Montrons que 2) $\Rightarrow$ 3), supposons qu'il existe une constante réelle c_1 positive tel que

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2\exp(-c_1 t^2),$$

en appliquant la formule d'intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp\{aX^2\}) &= \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(\exp\{aX^2\} \geq x)dx \\ &= \int_0^1 \mathbb{P}(\exp\{aX^2\} \geq x)dx + \int_1^{+\infty}\mathbb{P}(\exp\{aX^2\} \geq x)dx \\ &= 1 + \int_1^{+\infty}\mathbb{P}(\exp\{aX^2\} \geq x)dx \\ &= 1 + \int_0^{+\infty} 2ate^{at^2}\mathbb{P}(\exp\{aX^2\} \geq e^{at^2})dt,\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp\{aX^2\}) &= 1+\int_0^{+\infty} 2ate^{at^2}\mathbb{P}(|X|\geq t)dt \\
&\leq 1+\int_0^{+\infty} 2ate^{at^2}2\,\mathrm{e}^{-(c-a)t^2}\,dt \\
&= 1+\frac{2a}{c-a},
\end{aligned}$$

pour $a \leq c/3$, on obtient $\mathbb{E}(\exp\{aX^2\}) \leq 2$.

c) Montrons que 4) $\Rightarrow$ 5), par hypothèse $\exists\ c_2 \geq 1$ tel que pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|\ X\ |\geq t) \leq c_2\mathbb{P}(|\ Y\ |\geq t),$$

en utilisant la formule d'intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^{2k}) &= \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X^{2k} > t)dt \\
&= \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X > t^{\frac{1}{2k}})dt \\
&\leq c_2\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Y > t^{\frac{1}{2k}})dt \\
&= c_2\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Y^{2k} > t)dt \\
&= c_2\mathbb{E}(Y^{2k}) \\
&= c_2\frac{2k!\sigma^{2k}}{2^k k!} \\
&\leq \frac{2k!(c_2\sigma)^{2k}}{2^k k!},
\end{aligned}$$

ainsi $\sup\limits_k\left[\frac{2^k k!\mathbb{E}(X^{2k})}{(2k)!}\right]^{\frac{1}{2k}} \leq c_2\sigma < +\infty$.

d) Montrons que 5) $\Rightarrow$ 1), i.e montrons que $X \in Sub(\Omega)$

$$\mathbb{E}(\exp\{\lambda X\}) \leq 1+\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{2k}\mathbb{E}(|\ X\ |^{2k})}{(2k)!}+\sum_{k\geq 1}\frac{\mathbb{E}(|\ \lambda X\ |^{2k+1})}{(2k+1)!},$$

or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\ \lambda X\ |^{2k+1}) &\leq \Big[\mathbb{E}(|\ \lambda X\ |^{2k})\mathbb{E}(|\ \lambda X\ |^{2k+2})\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}(\lambda^{2k}\mathbb{E}(X^{2k})+\lambda^{2k+2}\mathbb{E}(X^{2k+2})),
\end{aligned}$$

en posant $M(\lambda) = \mathbb{E}(\exp\{\lambda X\})$,

$$\begin{aligned} M(\lambda) &\leq 1 + \sum_{k\geq 1}[\frac{1}{(2k)!} + \frac{1}{2(2k+1)!}]\lambda^{2k}\mathbb{E}(X^{2k}) + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{2k+2}\mathbb{E}(X^{2k+2})}{(2k+1)!} \\ &\leq 1 + \frac{7}{12}\lambda^2\mathbb{E}(X^2) + \sum_{k\geq 2}[\frac{1}{(2k)!} + \frac{2k}{2(2k)!} + \frac{1}{2(2k+1)!}]\lambda^{2k}\mathbb{E}(X^{2k}) \\ &= 1 + \frac{7}{12}\lambda^2\mathbb{E}(X^2) + \sum_{k\geq 2}[1 + k + \frac{1}{2(2k+1)}]\frac{\lambda^{2k}\mathbb{E}(X^{2k})}{(2k)!} \\ &\leq \sum_{k\geq 0}(3,1)^{\frac{2k}{4}}\frac{\lambda^{2k}\mathbb{E}(\mid X\mid^{2k})}{(2k)!}, \end{aligned}$$

posons $\sup\limits_k\Big[\frac{2^k k!\mathbb{E}(X^{2k})}{(2k)!}\Big]^{\frac{1}{2k}} = \theta$, on obtient

$$\mathbb{E}(\exp\{\lambda X\}) \leq \exp\{\frac{\lambda^2\sqrt{3,1}\theta^2}{2}\}.$$

$\square$

On vient de montrer que pour $\psi(x) = \exp\{x^2\} - 1$, nous avons les deux espaces $Sub(\Omega)$ et $L^0_\psi(\Omega)$ coïncident, c'est ce qui nous a motivé à travailler avec ces espaces. En vu de cette égalité il est naturel de se poser la question sur l'équivalence entre les deux normes τ et $||.||_\varphi$ elle a été établi par Kozachenko et Ostrovskii, plus tard en 2000 Antonnini [16] donne les constantes d'équivalence jusqu'à présent les plus précises.

Proposition 3.2.3. *Soit $X \in Sub(\Omega)$ alors*

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ \tau(X) \leq ||X||_\psi \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}}\ \tau(X). \tag{3.2.5}$$

3.3 Processus d-sous-gaussiens

Aprés avoir consacrer trois paragraphes aux variables aléatoires sous-gaussiennes ce dernier est dédié aux processus à accroissements d-sous-gaussiens étudié par Kozachenko en 1968, mentionné aussi dans le livre de Ledoux-Talagrand [28] Chapitre 11.

3.3.1 Définitions et exemples

Définition 3.3.1. Soit $(\mathbb{T}, d)$ un espace pseudo-métrique. Un processus indexé par $\mathbb{T}$, $\mathcal{X} = \{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ centré est dit à accroissements d-sous-gaussien si pour tout $t, s \in \mathbb{T}$ et pour tout réel λ on a

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda(X_t - X_s))] \leq \exp(\frac{\lambda^2}{2} d^2(s,t)).$$

Comme pour les v.a sous-gaussiennes, les processus gaussiens centrés sont des processus à accroissements d-sous-gaussiens.

Exemple 3.3.1 (Processus gaussien)**.** Soit $\mathcal{G} = \{G_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ un processus gaussien centré, alors la fonction génératrice est donnée par

$$\mathbb{E}[\exp\{\lambda(G_t - G_s)\}] = \exp\{\frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2]\}$$

ainsi $\mathcal{G}$ est un processus à accroissements d-sous-gaussiens avec

$$d(s,t) = \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous allons voir dans cette partie que la classe des processus à accroissement d-sous-gaussiens contient d'autres exemples de processus.

Exemple 3.3.2 (Somme de v.a sous-gaussiennes)**.** Considérons une suite de v.a sous-gaussienne $X = \{X_k, 1 \leq k \leq n\}$ et une suite de réels $\tilde{a} = \{a_k, 1 \leq k \leq n\}$ alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$

est à accroissement d-sous gaussiens où

$$d(n,m) = \sum_{k=1+n\wedge m}^{n\vee m} |a_k|\tau_k,$$

car $(Sub(\Omega), \tau)$ est un espace de Banach et donc on a

$$\tau\Big(\sum_{1+n\wedge m}^{n\vee m} a_k X_k\Big) \leq |a_k|\tau_k.$$

Exemple 3.3.3. Si en plus des conditions de l'exemple 3.3.2 les variables sont indépendantes alors d'aprés la formule (3.2.3), on a

$$d(n,m) = (\sum_{k=1+n\wedge m}^{n\vee m} a_k^2\tau_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 3.3.4 (Cas de v.a sous-gaussiennes négativement dépendantes)**.** À présent reprenons l'exemple 3.3.2 avec l'hypothèse de la dépendance négative des variables aléatoires, alors d'aprés l'equation (3.2.4)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$

est un processus d-sous-gaussiens et $d(n,m) = (2\sum_{k=1+n\wedge m}^{n\vee m} a_k^2 \tau_k^2)^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 3.3.5 (Suite conditionnellement sous-gaussiennes)**.** [4],
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ une famille de filtrations de $\mathcal{F}$ (croissante), on pose $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Soit $\mathcal{X} = \{X_i,\ i \geq 1\}$ une suite de différence de martingale ,s'il existe une suite $\mathbf{c} = (c_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs tel que

$$\mathbb{E}(\exp(tX_n)/\mathcal{F}_{n-1}) \leq \exp(t^2 c_n^2/2),$$

alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est dite une suite $(\mathcal{F}_n, \mathbf{c})$-conditionnellement sous-gaussiennes.
Soit $X = \{X_i, i \geq 1\}$ une suite $(\mathcal{F}_n, \mathbf{c})$-conditionnellement sous-gaussiennes et $S_n(\tilde{a}) = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ où $(a_k)_{k\geq 1}$ est une suite de réels. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp tS_n(\tilde{a})) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\exp(tS_n(\tilde{a}))/\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}(\exp(t\sum_{k=1}^{n-1} a_k X_k)\mathbb{E}(\exp(ta_n X_n)/\mathcal{F}_{n-1})) \\
&\leq \exp(t^2 a_n^2 c_n^2/2)\mathbb{E}[\exp(t\sum_{k=1}^{n-1} a_k X_k)],
\end{aligned}$$

un raisonnement par récurrence donne :

$$\mathbb{E}(\exp tS_n(\tilde{a})) \leq \exp(\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k^2),$$

ainsi

$$\tau^2\Big(S_n(\tilde{a})\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k^2$$

et $S_n(\tilde{a})$ est un processus d-sous gaussiens avec $d^2(n,m) = \sum_{k=1+n\wedge m}^{n\vee m} a_k^2 c_k^2$.

Exemple 3.3.6. [19] Soit $\mathcal{E} = \{\varepsilon_k, k \geq 1\}$ une suite de v.a de Rademacher indépendantes. Soit $(f_k(t))_{k\geq 1}$ une suite de fonctions qui vérifient

$$\sum_{k\geq 1} f_k^2(t) < +\infty \quad \forall t \in [0,1],$$

alors le processus

$$X_t = \sum_{k\geq 1} \varepsilon_k f_k(t)$$

est un processus à acrroissements d-sous gaussiens. En effet, posons $X_t^n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k f_k(t)$, comme $\{\varepsilon_k, k \geq 1\}$ est une suite de v.a indépendantes sous-gaussiennes on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp\{\lambda(X_t^n - X_s^n)\}) &= \mathbb{E}(\exp\{\lambda \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(f_k(t) - f_k(s))\}) \\
&= \mathbb{E}(\prod_{k=1}^n \exp\{\lambda\varepsilon_k(f_k(t) - f_k(s))\}) \\
&= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(\exp\{\lambda\varepsilon_k(f_k(t) - f_k(s))\}) \\
&\leq \prod_{k=1}^n \exp\{\frac{\lambda^2}{2}(f_k(t) - f_k(s))^2\} \\
&= \exp\{\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^n (f_k(t) - f_k(s))^2\},
\end{aligned}$$

la suite $X_t^n - X_s^n$ converge dans L^2 donc en probabilité et comme les v.a ε_k sont indépendantes alors $X_t^n - X_s^n$ converge p.s, ainsi en appliquant le lemme de fatou, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp\{\lambda(X_t - X_s)\}) &= \mathbb{E}(\lim_{n\to+\infty} \exp\{\lambda(X_t^n - X_s^n)\}) \\
&= \mathbb{E}(\liminf_{n\to+\infty} \exp\{\lambda \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(f_k(t) - f_k(s))\}) \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \exp\{\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^n (f_k(t) - f_k(s))^2\}
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\mathbb{E}(\exp\{\lambda(X_t - X_s)\}) \leq \exp\{\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} (f_k(t) - f_k(s))^2\}.$$

Finalement X est un processus à accroissement d-sous-gaussiens avec

$$d^2(s,t) = \sum_{k\geq 1} (f_k(t) - f_k(s))^2.$$

Notre dernier exemple de processus à accroissements d-sous-gaussiens est emprunté à la théorie de l'intégration stochastique. Pour cette raison, on rappelle quelques notions de cette théorie.

3.3.2 Rappels sur la théorie de l'intégration stochastique

Définition 3.3.2 (Le Mouvement Brownien)**.** Un mouvement Brownien (standard) est un processus gaussien centré $B = \{B_t, t \geq 0\}$ à trajectoires continues $\mathbb{P}$.ps et de fonction de covariance $K(s,t) = s \wedge t$.

Avant de définir l'intégrale stochastique on propose quelques rappels sur les martingales locales, les processus à variation quadratique, ainsi que les semi-martingales qui sont essentiels à la théorie du calcul stochastique.

Définition 3.3.3 (Martingale locale)**.** Une v.a.r T : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$vérifiant $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour $t \geq 0$ est un temps d'arrêt.
Un processus continu $M = \{M_t, t \geq 0\}$ est une$(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})-$martingale locale si :

i) il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n\geq 1}$ vérifiant :
   - la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$

ii) Pour tout n, $M_n^T = \{M_{t\wedge T_n} \mathbb{1}_{T_n>0}, t \geq 0\}$ est une martingale.

La proposition suivante nous donne quelques propriétés utiles pour la construction de notre dernier exemple de processus à accroissement d-sous-gaussiens.

Proposition 3.3.1.

1. *Toute martingale continue est une martingale locale continue.*
2. *Toute martingale locale bornée par une v.a.r intǵrable est une martingale.*
3. *Toute martingale locale M positive continue telle que $M_0 \in L^1$ est une surmartingale continue.*

Démonstration. 1. Si $M = \{M_t, t \geq 0\}$ est une martingale continue, il suffit de prendre $T_n = n$ et $\mathbb{E}(M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s) = M_{s\wedge n}$ est encore une martingale.

2. Soit $M = \{M_t, t \geq 0\}$ une martingale locale continue avec $|M_t| \leq Z$ $\mathbb{P}.p.s$ pour tout $t \geq 0$ avec $Z \in L^1(\Omega)$ alors

   a) pout tout $t \geq 0$, $M_t \in L^1$.

   b) D'aprés la définition de martingale locale, il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) croissante telle que $\{M_{t\wedge T_n}\mathbb{1}_{T_n>0}, t \geq 0\}$ soit une martingale et
   $$M_t = \lim_{n\to+\infty} M_{t\wedge T_n} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow M_t \in \mathcal{F}_t,$$
   donc $M = \{M_t, t \geq 0\}$ est adapté.

c) Soit $0 \leq s \leq t$ on a
$$\mathbb{E}(M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s) = M_{s\wedge T_n},$$

or $t \wedge T_n \longrightarrow t$ et $s \wedge T_n \longrightarrow s$ quand $n \to +\infty$
donc par le fait que M soit un processus continu en passant à la limite et en utilisant le théorème de convergence dominé on obtient

$$M_s = \lim_{n\to+\infty} M_{s\wedge T_n} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\lim_{n\to+\infty} M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s).$$

3. Soit $M = \{M_t, t \geq 0\}$ une martingale locale continue positive, donc il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) croissante telle que $\{M_{t\wedge T_n}\mathbb{1}_{T_n>0}, t \geq 0\}$ soit une martingale. Soit $0 \leq s \leq t$ on a

$$\mathbb{E}(M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s) = M_{s\wedge T_n},$$

comme M est continue et positive en faisant appel au lemme de Fatou on trouve

$$\begin{aligned} M_s &= \lim_{n\to+\infty} M_{s\wedge T_n} = \liminf_{n\to+\infty} M_{s\wedge T_n} \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s) \geq \mathbb{E}(\liminf_{n\to+\infty} M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

En particulier pour s=0, $\mathbb{E}(M_t) \leq \mathbb{E}(M_0) < +\infty$, donc $M_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$. Ceci montre que $M = \{M_t, t \geq 0\}$ est bien une surmartingale. □

La classe des martingales locales est plus large que celle des martingales, en effet il existe des exemples de martingales locales qui ne sont pas des martingales parmi eux on cite l'exemple suivant :

Exemple 3.3.7. [36], soit $B = \{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien de $\mathbb{R}^3$, i.e $B_t = (B_t^1, B_t^2, B_t^3)$ issu de $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ i.e $(B_0^1, B_0^2, B_0^3) = (x^1, x^2, x^3)$.
Le processus $\frac{1}{||B_t||}$ est une martingale locale bornée dans L^2 qui n'est pas une vraie martingale.

Théorème 3.3.1 (Théorème d'arrêt de Doob)**.** *Voir [36](page 68).*
Soit $M = \{M_t, t \geq 0\}$ une martingale, T un temps d'arrêt borné alors on a l'égalité suivante $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$.

Définition 3.3.4 (Semi-martingale)**.** Soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus continu, on dit que X est une semi-martingale s'il peut s'écrire comme suit

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \qquad t \geq 0$$

où $M = M_t$ est une martingale locale continue issu de 0 ($M_0 = 0$) et le processus $A = \{A_t, t \geq 0\}$ est à variation borné issu de 0, i.e pour tout $\omega \in \Omega \quad t \to A_t(\omega)$ est à variation bornée.

Définition 3.3.5 (variation quadratique)**.** Soit $\Delta_n = \{0 = t_0^{(n)} < ... < t_{p_n}^{(n)} = t\}$ une suite subdivision de [0,t] avec $\max_{1\leq i\leq n} |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}| \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus continu, posons

$$T_t^{\delta_n}(X) = \sum_{\Delta_n} (X_{ti+1} - X_{ti})^2$$

On dit que le processus X est à variation quadratique fini sur $[0, t]$ si $\lim_{n\to+\infty} T_t^{\Delta_n}(X)$ existe en probabilité. Dans ce cas on note

$$< X, X >_t \overset{\text{en proba}}{=} \lim_{n\to+\infty} T_t^{\Delta_n}(X).$$

Quelques résultats essentiels associés à cette notion sont les suivants :

Proposition 3.3.2.
1. *Soit $B = \{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien alors $< B, B >_t = t$.*
2. *Si $M = \{M_t, t \geq 0\}$ une martingale locale continue et $A = \{A_t, t \geq 0\}$ un processus à variation bornée continu alors $< A, A > \equiv 0$ et on a aussi $< M, A > \equiv 0$.*

Théorème 3.3.2. *Si $M = \{M_t, t \geq 0\}$ est une martingale locale continue, $< M, M >$ est l'unique processus croissant, continu, adapté nul en 0 tel que $M_t^2 - < M, M >_t$ soit une martingale locale.*

Théorème 3.3.3 (Formule d' Itô)**.** *Soit $X^1, ..., X^d$ des semi-martingale continues, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ alors $F(X^1, ..., X^d)$ est une semi-martingale, de plus*

$$F(X_t^1, ..., X_t^d) = F(X_0^1, ..., X_0^d) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1, ..., X_s^d) dX_s^i$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^1, ..., X_s^d) d < X^i, X^j >_s .$$

Corollaire 3.3.1. *Soit (M_t) une martingale locale continue, $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons*

$$\mathcal{E}^\lambda(M) = \{\exp\{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} < M, M >_t\}, t \geq 0\},$$

alors $\mathcal{E}^\lambda(M)$ est une martingale locale continue .

Démonstration. Posons $F(x,y) = \exp\{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}y\}$, F est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, on a $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \lambda F(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{\lambda^2}{2}F(x,y)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \lambda^2 F(x,y)$,
or on sait que $< y, y >= 0 =< x, y >$ car $y =< M, M >$ est à variation bornée donc

$$F(M_t, < M, M >_t) = F(M_0, 0) + \lambda \int_0^t F(M_s, < M, M >_s) dM_s$$

$$-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t F(M_s, < M, M >_s) d < M, M >_s + \frac{1}{2}\lambda^2 d < M, M >_s$$

$$= F(M_0, 0) + \lambda \int_0^t F(M_s, < M, M >_s) dM_s.$$

On remarque bien que la partie variation bornée s'annule, donc
$F(M_t, < M, M >_t) = \mathcal{E}^\lambda(M)$ est une martingale locale. $\square$

Théorème 3.3.4. *Soit $B = \{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{H} = \{H_t, t \geq 0\}$un processus adapté continu.*

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s. \tag{3.3.1}$$

Si pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds) < \infty$ alors $M = \{M_t, t \geq 0\}$ est une martingale de L^2 et

$$\mathbb{E}(M_t M_s) = \int_0^{t\wedge s} \mathbb{E}(H_s^2) ds,$$

Proposition 3.3.3. *Soit $M = \{M_t, t \geq 0\}$ une martingale continue issu de 0 définie par la formule* (3.3.1)*, alors $< M, M >_t$ est fonction déterministe ssi M est un processus gaussien.*

Démonstration. i) Supposons que $< M, M >_t = f(t)$ où f est une fonction croissante continue en t, d'aprés le corollaire 3.3.1, puisque M est une martingale, $\mathcal{E}^\lambda(M)$ est une martingale locale. Pour $\lambda = i\alpha$,

$$\mathcal{E}^{i\alpha}(M) = \{\exp\{i\alpha M_t + \frac{\alpha^2}{2} < M, M >_t, t \geq 0\},$$

soit $K > 0$ pour tout $t \in [0, K]$ on a

$$\left|\exp\{i\alpha M_t + \frac{\alpha^2}{2} < M, M >_t\}\right| \leq \exp\{\frac{\alpha^2}{2}K\},$$

donc $\{\mathcal{E}^{i\alpha}(M), 0 \leq t \leq K\}$ est une vraie martingale. Soient $0 \leq s \leq t \leq K$

et $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_s$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(1_{\mathcal{A}} e^{i\alpha(X_t - X_s)}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(1_{\mathcal{A}} e^{i\alpha(X_t - X_s)}/\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(1_{\mathcal{A}} e^{-i\alpha X_s} \mathbb{E}(e^{i\alpha X_t}/\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(1_{\mathcal{A}} e^{-i\alpha X_s - \frac{\alpha^2}{2} < M,M >_t} \mathbb{E}(e^{i\alpha X_t + \frac{\alpha^2}{2} < M,M >_t}/\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(1_{\mathcal{A}} e^{-i\alpha X_s - \frac{\alpha^2}{2} < M,M >_t} (e^{i\alpha X_s + \frac{\alpha^2}{2} < M,M >_s}) \\
&= \mathbb{P}(\mathcal{A}) \exp\{\frac{\alpha^2}{2}(f(t) - f(s))\}.
\end{aligned}$$

Pour $\mathcal{A} = \Omega$, $\quad (M_t - M_s) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, f(t) - f(s))$, en particulier pour $s = 0$ on a $M_t \longrightarrow \mathcal{N}(0, f(t))$

ii) Inversement, on suppose maintenant que la martingale $M = \{M_t, t \geq 0\}$ est un processus gaussien.

Afin de prouver que $\{(M_t)^2 - \mathbb{E}((M_t)^2, t \geq 0\}$ est une martingale on doit montrer que M est un processus à accroissements indépendants, c.à.d on a pour $t_1 < t_2 < .... < t_n$, les composantes de $X = (M_{t_1}, M_{t_2} - M_{t_1}, ..., M_{t_n} - M_{t_n - 1})$ sont indépendantes. Le vecteur X est un vecteur gaussien, en effet
$\sum a_k X_k = \sum a_k (M_{tk} - M_{tn-1}) = \sum b_k M_{tk}$ est une v.a gaussienne puisque M est un processus gaussien donc il suffit de montrer que :

$$Cov(X_i, X_j) = 0, \quad i \neq j$$

pour $i < j$

$$\begin{aligned}
Cov(X_i, X_j) &= \mathbb{E}((M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})) \\
&= \mathbb{E}\Big[(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_u dB_u)(\int_{t_{j-1}}^{t_j} H_u dB_u)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]t_{i-1}, t_i[} H_u dB_u)(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]t_{j-1}, t_j[} H_u dB_u)\Big],
\end{aligned}$$

ainsi

$$Cov(X_i, X_j) \mathbb{E}(\int_0^T 1_{]t_{i-1}, t_i[\cap]t_{j-1}, t_j[} H_u^2 du) = 0.$$

Montrons que $\{(M_t)^2 - \mathbb{E}((M_t)^2, t \geq 0\}$ est une martingale

a) $\mathbb{E}(\mid (M_t)^2 - \mathbb{E}(M_t)^2 \mid) \leq 2\mathbb{E}(M_t)^2 < +\infty$

b) soit $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_t^2 - \mathbb{E}(M_t)^2/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 + M_s^2 - \mathbb{E}(M_t)^2 - 2M_tM_s/\mathcal{F}_s) \\
&\quad +2M_s\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}((M_t - M_s)^2/\mathcal{F}_s) - M_s^2 - \mathbb{E}((M_t)^2) + 2(M_s)^2 \\
&= \mathbb{E}((M_t - M_s)^2) + M_s^2 - \mathbb{E}(M_t)^2 \\
&= M_s^2 + \mathbb{E}((M_s)^2) - 2\mathbb{E}((M_t)(M_s)) \\
&= M_s^2 + \mathbb{E}((M_s)^2) - 2\mathbb{E}[\mathbb{E}((M_t)(M_s))/\mathcal{F}_s)] \\
&= M_s^2 - \mathbb{E}(M_s)^2.
\end{aligned}$$

Puisque $M = \{M_t, t \geq 0\}$ est une martingale continue c'est donc une martingale locale continue et d'aprés la proposition il existe un unique processus $< M, M >_t$ adapté croissant continu tel que $\{M_t^2 - < M, M >_t, t \geq 0\}$ soit une martingale locale continue.
Comme $\mathbb{E}(M_t^2) = \int_0^t \mathbb{E}(H_s^2)ds$ est continu adapté et croissant, par unicité du processus on a $< M, M >_t = \mathbb{E}(M_t^2)$ est déterministe. □

Considérons à présent l'exemple suivant :

Exemple 3.3.8. Soit $= \{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_u, u \leq t\}$ sa filtration naturel et $\mathcal{H} = \{H_t, t \geq 0\}$ un processus adapté et continu tel que $\mathbb{P}\{\mid H_t \mid\leq C\} = 1$ pour tout $t \geq 0$, où $C > 0$. Posons

$$M_t = \int_0^t H_u dB_u,$$

en utilisant la formule d'Itô on conclut que le processus positif

$$\mathcal{E}^\lambda(M) = \{\exp\{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t H_u^2 du\}, t \geq 0\},$$

est martingale locale positive donc une surmartingale alors

$$\mathbb{E}(\exp\{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t H_u^2 du\}/\mathcal{F}_s) \leq \exp\{\lambda M_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^s H_u^2 du\},$$

pour tout $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}(\exp\{\lambda(M_t - M_s) - \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t H_u^2 du\}/\mathcal{F}_s) \leq 1,$$

alors

$$\mathbb{E}(\exp\{\lambda(M_t - M_s)\} \leq \exp\{\frac{C^2(t-s)\lambda^2}{2}\},$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On déduit donc que le processus M est à accroissement d-sous-gaussiens avec $d^2(s,t) = C^2 \mid t-s \mid$.

On termine ce chapitre par une propriété intéressante des sommes arrêtées de variables aléatoires sous-gaussiennes indépendantes.

Lemme 3.3.1. *[10], soit $X = \{X_k, 1 \leq k \leq n\}$, n fixé, des variables aléatoires sous-gaussiennes indépendantes, T un temps d'arrêt tel que $1 \leq T \leq n$, posons $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$, alors S_T est sous-gaussienne et*

$$\tau(S_T) \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} \tau^2(X_j)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

.

Ce lemme présente un exemple de v.a sous-gaussienne mais comme il fait appel à la théorie des martingales et temps d'arrêt il figure dans ce dernier paragraphe.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{M}_j(t) = \mathbb{E}(\exp\{tX_i\})$ alors

$$M_j(t) \leq \exp\{\frac{t^2\tau^2(X_i)}{2}\}$$

et posons aussi

$$Z_k = \frac{\exp\{tS_k\}}{\prod_{j=1}^{k} M_j(t)},$$

alors $(Z_k, \mathcal{F}_k, k \leq n)$ est une martingale où $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, ..., X_k)$ voir Doob [11] (page 352). Soit m<k , comme les variables sont indépendantes on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_k/\mathcal{F}_m) &= \mathbb{E}\Big(\frac{\exp\{tS_m\}\exp\{t\sum_{j=m+1}^{k} X_j\}}{\prod_{j=1}^{m} M_j(t)\prod_{j=m+1}^{k} M_j(t)}/\mathcal{F}_m\Big) \\
&= \frac{\exp\{tS_m\}}{\prod_{j=1}^{m} M_j(t)}\frac{\mathbb{E}(\exp\{t\sum_{j=m+1}^{k} X_j\})}{\prod_{j=m+1}^{k} M_j(t)}, \\
&= Z_m
\end{aligned}$$

de plus $\mathbb{E}(\mid Z_k \mid) < \infty$, Z_k étant une martingale, T un temps d'arrêt borné l'égalité suivante est vérifiée

$$1 = \mathbb{E}(Z_k) = \mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}\Big(\frac{\exp\{tS_T\}}{\prod_{j=1}^{T} M_j(t)}\Big),$$

puisque $1 \leq T \leq n$, voir [11] (page 303)

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\{T=j\}} \frac{\exp\{tS_j\}}{\prod_{k=1}^{j} M_k(t)} \, dP \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} \int_{\{T=j\}} \exp\{tS_j - \frac{t^2 \sum_{k=1}^{j} \tau^2(X_k)}{2}\} \, dP \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} \int_{\{T=j\}} \exp\{tS_j - \frac{t^2 \sum_{k=1}^{n} \tau^2(X_k)}{2}\} \, dP, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\{T=j\}} \exp\{tS_j\} \, dP \leq \exp\{\frac{t^2 \sum_{k=1}^{n} \tau^2(X_k)}{2}\},$$

ainsi

$$\mathbb{E}(e^{tS_T}) \leq \exp\{\frac{t^2 \sum_{k=1}^{n} \tau^2(X_k)}{2}\},$$

ceci montre que S_T est sous-gaussienne et $\tau^2(S_T) \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} \tau^2(X_k) \Big)$. $\square$

Chapitre 4

Convergence des séries de variables aléatoires fortement intégrables

Ce chapitre est dédié à la présentation de nos résultats publiés dans l'article

F. Boukhari, D. Malti., (2018) *Convergence of series of strongly integrable random variables and applications.* Statistics and Probability Letters, **137**. pp 191-200.

Dans ce papier, on s'est intéressé aux conditions suffisantes pour la convergence presque sûre des séries de variables aléatoires à accroissements dans l'espace d'Orlicz de type exponentiel. Notre approche nous a permis d'unifier les résultats des travaux antécédants de Chow [10], Azuma [4], Ouy [33], Amini et al. [2, 3] en 2004 puis en 2007 et enfin Giuliano Antonini et al. [17]. Notre méthode est basée sur le critère d'entropie métrique de R. Dudley. La technique utilisée s'est révélée efficace pour traiter la convergence des séries de variables aléatoires stationnaires. Ce dernier problème n'a pas été traité dans les travaux cités.

Dans toute la suite, on considère la la fonction de Young que l'on note φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\varphi(x) = \exp(x^2) - 1,$$

et L_φ l'espace d'Orlicz associé défini dans la première section du 2^{eme} Chapitre.

4.1 Comportement asymptotique des séries à accroissements dans L_φ

Nous consacrons la première section à la présentation de deux théorèmes, le premier consitste à établir une estimation de la norme d'Orlicz du maximum des accroissements des processus indexés par $\mathbb{N}$ et le deuxième concerne l'étude de la convergence de ces processus.

Soit $\mathcal{X} = \{X_k,\ k \geq 1\}$, une famille de variables aléatoires appartenant à $L_\varphi(\Omega)$. Posons pour tout $n \geq 1$,

$$S_n(\mathcal{X}) = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}(\mathcal{X}) = \{S_n(\mathcal{X}), n \geq 1\}.$$

On s'intéresse dans cette partie au comportement asymptotique de $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ quand $\mathcal{X}$ vérifie la condition des accroissements suivante :

$$\forall\ 0 \leq n < m < \infty \quad \|\sum_{k=n+1}^{m} X_k \|_\varphi \leq \Big(\sum_{k=n+1}^{m} u_k\Big)^\alpha, \tag{4.1.1}$$

où $\tilde{u} = \{u_k, k \geq 1\}$ une suite de nombre réels positifs et $\alpha > 0$.

Commençons par établir une estimation pour la norme L_φ du supremum des séries de sommes partielles $S_n(\mathcal{X})$.

Théorème 4.1.1. *Soit $\mathcal{X} = \{X_k, k \geq 1\}$ une famille de variables aléatoires qui satisfait la condition des accroissements* (4.1.1) *pour une famille de réels positifs $\tilde{u}$ et un $\alpha > 0$. Si la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge, alors*

$$\Big\| \sup_{1\leq i<j} |\sum_{k=i+1}^{j} X_k| \Big\|_\varphi \leq 8C(\alpha)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\Big)^\alpha, \tag{4.1.2}$$

où

$$C(\alpha) = \frac{2^{2\alpha+2}}{\sqrt{\alpha}} \int_{\sqrt{\alpha \ln 3}}^{+\infty} x^2 \exp(-x^2)\ dx < \infty. \tag{4.1.3}$$

La preuve de ce théorème est basée sur le théorème d'entropie métrique de Dudley, pour cela nous avons besoin d'une estimation des nombres d'entropie métrique $\{\mathcal{N}(\mathbb{N}, d_\varphi, \delta), \delta > 0\}$, avec $d_\varphi(n,m) = \| S_m(\mathcal{X}) - S_n(\mathcal{X}) \|_\varphi$. Posons

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k < \infty.$$

Proposition 4.1.1. *Sous les conditions du Théorème 4.1.1*

$$\mathcal{N}(\mathbb{N}, d_\varphi, \delta) \leq \frac{2\boldsymbol{u}}{\delta^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad 0 < \delta < \boldsymbol{u}^\alpha.$$

On propose 2 démonstrations de cette proposition la première est tirée de l'article [6] et la deuxième est inspirée de l'article de M.Weber [40]

1$^{\text{ère}}$preuve. Soit $\alpha > 0$, posons $S_0 = 0$, $U_0 = 0$, $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ pour $n \geq 1$ et $\mathcal{U} = \{U_n, n \geq 0\}$. Notre but est d'appliquer le théorème de R.Dudley (paragraphe 3 chapitre 2) pour $E = \mathbb{N}$ muni de la pseudo-métrique $d_\varphi(n,m)$, on a donc besoin d'estimer les nombres d'entropie métrique. Notons par

$$i \wedge j = \min(i,j) \qquad \text{et} \qquad i \vee j = \max(i,j),$$

on note aussi "d" la pseudo-métrique définie sur $\mathbb{N}^2$ par $d(i,i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et par $d(i,j) = \sum_{i\wedge j+1}^{i\vee j} u_k$ pour $i \neq j$. Soit $B_d(r,\epsilon)$ la d-boule ouverte de centre $r \in \mathbb{N}$ et de rayon $\epsilon > 0$. En utilisant d_φ et d, la condition (4.1.1) devient

$$d_\varphi(n,m) \leq d^\alpha(n,m) \qquad \forall n,m \in \mathbb{N}.$$

D'un autre côté, $\sup_{s,t\geq 0} d(s,t) = \mathbf{u}$, par hypothèse $\mathbf{u} < \infty$, considérons la distance usuelles définie sur $\mathbb{R}$ que l'on note d_0 ($d_0(x,y) =\mid x - y \mid, x, y \in \mathbb{R}$), comme $\mathbf{u} < \infty$ on a $\mathcal{N}([0,\mathbf{u}], d_0, \epsilon) < \infty$ et d'aprés les exemples du nombre d'entropie métrique,

$$\mathcal{N}([0,\mathbf{u}], d_0, \epsilon) \leq \left[\frac{\mathbf{u}}{\epsilon}\right] + 1 \leq \frac{2\mathbf{u}}{\epsilon}, \qquad 0 < \epsilon < \mathbf{u}.$$

Du fait que $\mathcal{U} \subset [0,\mathbf{u}]$

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}, d_0, \epsilon) \leq \mathcal{N}([0,\mathbf{u}], d_0, \epsilon) \leq \frac{2\mathbf{u}}{\epsilon} \qquad \text{pour tout } 0 < \epsilon < \mathbf{u}. \tag{4.1.4}$$

Comme $\mathcal{U}$ est ensemble dénombrable et $d(n,m) = d_0(U_n, U_m)$ donc à chaque d-boule ouverte $B_d(n,\epsilon)$ de $(\mathbb{N}, d)$ on associe une et une seul d_0-boule $B_{d_0}(U_n,\epsilon)$ de $(\mathcal{U}, d_0)$ tel que $m \in B_d(n,\epsilon)$si et seulement si $U_m \in B_{d_0}(U_n,\epsilon)$ ce qui nous ramène à $\mathcal{N}(\mathbb{N}, d, \epsilon) = \mathcal{N}(\mathcal{U}, d_0, \epsilon)$, et en combinant avec l'equation (4.1.4) on obtient

$$\mathcal{N}(\mathbb{N}, d, \epsilon) \leq \frac{2\mathbf{u}}{\epsilon} \qquad 0 < \epsilon < \mathbf{u} < \infty,$$

ainsi $\mathcal{N}(\mathbb{N}, d, \epsilon) < \infty$, ce qui entraîne l'existence d'une suite fini d'entiers naturels

$\{l_k,\ 1 \leq k \leq \mathcal{N}(\mathbb{N}, d, \epsilon)\}$ et donc l'existance d'un nombre fini de d-boules ouvertes $\{B_d(l_k, \epsilon),\ 1 \leq k \leq \mathcal{N}(\mathbb{N}, d, \epsilon)\}$ qui forment un recouvrement de $\mathbb{N}$ c.à.d

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{k=1}^{\mathcal{N}(\mathbb{N},d,\epsilon)} B_d(l_k, \epsilon).$$

D'aprés la condition (4.1.1) et le fait que $\alpha > 0$ on a

$$n \in B_d(l_k, \epsilon) \Rightarrow d(l_k, n) < \epsilon \Rightarrow \Big(d(l_k, n)\Big)^{\alpha} < \epsilon^{\alpha} \Rightarrow d_{\varphi}(l_k, n) \leq \Big(d(l_k, n)\Big)^{\alpha} < \epsilon^{\alpha}$$

$$\Rightarrow n \in B_{d_{\varphi}}(l_k, \epsilon^{\alpha}),$$

alors

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{k=1}^{\mathcal{N}(\mathbb{N},d,\epsilon)} B_d(l_k, \epsilon) \subset \bigcup_{k=1}^{\mathcal{N}(\mathbb{N},d,\epsilon)} B_{d_{\varphi}}(l_k, \epsilon^{\alpha}),$$

on en déduit que $\mathcal{N}(\mathbb{N}, d, \epsilon)$ est le nombre de d_{φ}-boules ouvertes nécessaire pour recouvrir $\mathbb{N}$, mais $\mathcal{N}(\mathbb{N}, d_{\varphi}, \epsilon^{\alpha})$ est le nombre minimal de d_{φ}-boules ouvertes nécessaire pour recouvrir $\mathbb{N}$, et donc

$$\mathcal{N}(\mathbb{N}, d_{\varphi}, \epsilon^{\alpha}) \leq \mathcal{N}(\mathbb{N}, d, \epsilon),$$

pour $\epsilon = \delta^{\frac{1}{\alpha}}$ on trouve

$$\mathcal{N}(\mathbb{N}, d_{\varphi}, \delta) \leq \mathcal{N}(\mathbb{N}, d, \delta^{\frac{1}{\alpha}}) \leq \frac{2\mathbf{u}}{\delta^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad 0 < \delta < \mathbf{u}^{\alpha}. \tag{4.1.5}$$

□

<u>*2 ème preuve.*</u> Soit $0 < \varepsilon < \mathbf{u}$

$$\begin{cases} \mathcal{I}_j(\varepsilon) &= [j\varepsilon, (j+1)\varepsilon[, \quad j = 0, 1, ...[\mathbf{u}/\varepsilon], \\ \mathcal{J}^*(\varepsilon) &= \{0 \leq j \leq [\mathbf{u}/\varepsilon] : \mathcal{I}_j(\varepsilon) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}, \\ j^- &= \inf\{L : U_L \in \mathcal{I}_j(\varepsilon)\} \ si \ j \in \mathcal{J}^*(\varepsilon). \end{cases}$$

Alors

$$\forall L \geq 1, \quad \exists\ j \in \mathcal{J}^*(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad 0 \leq U_L - U_{j^-} \leq \varepsilon,$$

de plus

$$card(\mathcal{J}^*(\varepsilon)) \leq [\frac{\mathbf{u}}{\varepsilon}] + 1 \leq 2\frac{\mathbf{u}}{\varepsilon},$$

donc d'aprés la condition (4.1.1)

$$\forall L \geq 1, \quad \exists\ j \in \mathcal{J}^*(\varepsilon) \text{ tel que } \ ||\ S_L - S_{j^-}\ ||_\varphi \leq \varepsilon^\alpha.$$

Soit $\mathcal{N}(\mathbb{N}, ||\ .\ ||_\varphi, \delta)$ le nombre minimal de $||\ .\ ||_\varphi$-boules ouvertes de rayon $\delta > 0$ suffisantes pour recouvrir $\mathbb{N}$,

$$\mathcal{N}(\mathbb{N}, ||\ .\ ||_\varphi, \delta) \leq \frac{2\mathbf{u}}{\delta^{1/\alpha}} \quad (0 \leq \delta \leq \mathbf{u}^\alpha).$$

Revenons ainsi à la démonstration du Théorème 4.1.1. □

Démonstration du Théorème 4.1.1. Vérifions à présent que

$$\mathcal{I}(\mathbb{N}, d_\varphi) = \int_0^{\mathbf{u}^\alpha} \varphi^{-1}\Big(\mathcal{N}(\mathbb{N}, d_\varphi, \delta)\Big) d\delta \ < \infty,$$

où $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$. En utilisant l'inégalité (4.1.5), on obtient

$$\mathcal{I}(\mathbb{N}, d_\varphi) \leq \int_0^{\mathbf{u}^\alpha} \sqrt{\ln\Big(\frac{2\mathbf{u}}{\delta^{\frac{1}{\alpha}}} + 1\Big)} d\delta$$

en posant $y = 1 + 2\mathbf{u}\delta^{\frac{-1}{\alpha}}$, on a $d\delta = -\alpha(2\mathbf{u})^\alpha(y-1)^{-\alpha-1}dy$, l'intégrale devient

$$\mathcal{I}(\mathbb{N}, d_\varphi) \leq \alpha(2\mathbf{u})^\alpha \int_3^{+\infty} [\ln y]^{\frac{1}{2}}(y-1)^{-\alpha-1} \ \ dy$$

ensuite par le changement de variable $z = (\alpha \ln y)^{\frac{1}{2}}$, $dy = (2z/\alpha)\exp\{z^2/\alpha\}dz$ et le fait que $x \geq \frac{x+1}{2}$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbb{N}, d_\varphi) &\leq \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha}(2\mathbf{u})^\alpha \int_{\sqrt{\alpha \ln 3}}^{+\infty} z^2(\exp\{\frac{z^2}{\alpha}\} - 1)^{-\alpha-1} \exp\{\frac{z^2}{\alpha}\}dz, \\ &\leq \frac{2^{2\alpha+2}}{\sqrt{\alpha}}\Big(\int_{\sqrt{\alpha \ln 3}}^{+\infty} z^2 \exp\{-z^2\}dz\Big)\mathbf{u}^\alpha, \end{aligned}$$

on pose

$$C(\alpha) = \frac{2^{2\alpha+2}}{\sqrt{\alpha}} \int_{\sqrt{\alpha \ln 3}}^{+\infty} z^2 \exp\{-z^2\}dz < \infty,$$

ainsi l'intégrale d'entropie $\mathcal{I}(\mathbb{N}, d_\varphi) < \infty$.

En appliquant alors le théorème de Dudley (1.3.1) on trouve

$$\Big\| \sup_{1\leq i<j} \mid \sum_{k=i+1}^{j} X_k \mid \Big\|_\varphi \leq 8C(\alpha)\mathbf{u}^\alpha.$$

□

A présent nous utilisons la conclusion du Théorème 4.1.1 pour étudier la convergence presque sûre et en norme de la suite des sommes partielles $\mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Théorème 4.1.2. *Soit $\mathcal{X} = \{X_k, k \geq 1\}$ une famille de variables aléatoires qui satisfait à la condition des accroissements* (4.1.1)*, alors pour* $0 \leq n < m < \infty$,

$$\Big\| \max_{n<s<t\leq m} \mid \sum_{k=s+1}^{t} X_k \mid \Big\|_\varphi \leq 8C(\alpha)\Big(\sum_{k=n+1}^{m} u_k\Big)^\alpha, \tag{4.1.6}$$

où $C(\alpha)$ est la constante définie par (4.1.3)*. Si de plus $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge alors (4.1.6) reste vraie pour $m = +\infty$ et la suite $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ converge dans $L_\varphi(\Omega)$ et $\mathbb{P}$.p.s vers une variable $S_\infty(\mathcal{X}) \in L_\varphi(\Omega)$ tel que*

$$\|S_\infty(\mathcal{X})\|_\varphi \leq \Big(\sum_{k\geq 1} u_k\Big)^\alpha.$$

Démonstration. Soit $0 \leq n < m < \infty$, considérons la suite $\mathcal{Y} = \{Y_k,\ k \geq 1\}$ définie par $Y_k = X_k$ pour $n < k \leq m$ et 0 ailleurs. De même, soit la suite de réels positifs $\tilde{v} = \{v_k,\ k \geq 1\}$, où $v_k = u_k$ pour $n < k \leq m$ et 0 sinon. La condition (4.1.1) s'écrit alors

$$\| \sum_{k=i+1}^{j} Y_k\|_\varphi \leq \Big(\sum_{k=i+1}^{j} v_k\Big)^\alpha \quad \text{pour} \quad 0 \leq i < j < \infty,$$

rappelons que $\sum_{k\geq 1} v_k = \sum_{k=n+1}^{m} u_k < \infty$.

On applique le Théorème 4.1.1 à la suite des variables aléatoires $\mathcal{Y}$ et la suite des réels positifs $\tilde{v}$, on trouve

$$\begin{aligned}\Big\| \max_{n<s<t\leq m} \mid \sum_{k=s+1}^{t} X_k \mid \Big\|_\varphi &= \Big\| \sup_{1\leq i<j} \mid \sum_{k=i+1}^{j} Y_k \mid \Big\|_\varphi \\ &\leq 8C(\alpha)\Big(\sum_{k\geq 1} v_k\Big)^\alpha = 8C(\alpha)\Big(\sum_{k=n+1}^{m} u_k\Big)^\alpha,\end{aligned}$$

ceci prouve la relation (4.1.6). Retournons à présent au problème de convergence de la suite $\mathcal{S}(\mathcal{X})$, on suppose que $\sum_{k\geq 1} u_k < \infty$, de la condition (4.1.1) découle

immédiatement que $\| \sum_{k=n+1}^{m} X_k \|_\varphi \longrightarrow 0$ quand $n, m \longrightarrow +\infty$, par conséquent la suite $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ est une suite de Cauchy dans $L_\varphi(\Omega)$ et donc elle converge dans $L_\varphi(\Omega)$ vers une variable aléatoire $S_\infty(\mathcal{X}) \in L_\varphi(\Omega)$.
Cepandant pour $n = 0$ et $m \longrightarrow +\infty$,

$$\| \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \|_\varphi = \|S_\infty(\mathcal{X})\|_\varphi \leq \Big(\sum_{k\geq 1} u_k \Big)^\alpha.$$

Pour la convergence presque sûre, on montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\sup_{k\geq 1} \mid S_{n+k}(\mathcal{X}) - S_n(\mathcal{X}) \mid > \varepsilon) = 0,$$

en utilisant l'inégalité de Markov, le fait que $\|.\|_1 \leq \|.\|_\varphi$ et l'inégalité (4.1.6) .
Soit $n, r \geq 1$, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\sup_{1\leq k\leq r} \mid S_{n+k}(\mathcal{X}) - S_n(\mathcal{X}) \mid > \varepsilon \Big) &= \mathbb{P}\Big(\sup_{1\leq k\leq r} \mid \sum_{n+1}^{n+k} X_i \mid > \varepsilon \Big) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \| \sup_{1\leq k\leq r} \mid \sum_{n+1}^{n+k} X_i \mid \|_{L^1} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \| \sup_{1\leq k\leq r} \mid \sum_{n+1}^{n+k} X_i \mid \|_{L_\varphi},
\end{aligned}$$

ainsi

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1\leq k\leq r} \mid S_{n+k}(\mathcal{X}) - S_n(\mathcal{X}) \mid > \varepsilon \Big) \leq \frac{8C(\alpha)}{\varepsilon} (\sum_{n+1}^{n+r} u_i)^\alpha,$$

d'où

$$\lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(\sup_{1\leq k\leq r} \mid S_{n+k}(\mathcal{X}) - S_n(\mathcal{X}) \mid > \varepsilon) \leq \frac{8C(\alpha)}{\varepsilon} (\sum_{n+1}^{+\infty} u_i)^\alpha.$$

Finalement

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{k\geq 1} \mid S_{n+k}(\mathcal{X}) - S_n(\mathcal{X}) \mid > \varepsilon \Big) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{8C(\alpha)}{\varepsilon} (\sum_{n+1}^{+\infty} u_i)^\alpha \longrightarrow 0,$$

ce qui achève la preuve du Théorème (4.1.2). □

4.2 Convergence des séries de variables aléatoires à accroissements d-sous-gaussiens

Dans ce paragraphe, on se focalise sur le problème de convergence des séries de variables aléatoires à accroissements d-sous-gaussiens. L'idée est de réecrire les deux principaux Théorèmes 4.1.1 et 4.1.2 en s'appuyant sur l'équivalence entre les deux normes $\tau(.)$ et $\|.\|_\varphi$ établit dans la Proposition 3.2.3.

Commençons par introduire Quelques notations utilisées dans cette partie. Pour toute suite $\mathcal{Y} = \{Y_k,\ k \geq 1\}$ dans $Sub(\Omega),\ \mathcal{S}(\mathcal{Y}) = \{S_n(\mathcal{Y}),\ n \geq 1\}$ définit la suite de leurs somme partielles, soit $0 \leq n < m$ notons par

$$S^*_{n,m}(\mathcal{Y}) = \max_{n<i<j\leq m} \mid \sum_{k=i+1}^{j} Y_k \mid \quad \text{et} \quad S^*(\mathcal{Y}) = \sup_{1\leq i<j} \mid \sum_{k=i+1}^{j} Y_k \mid .$$

Soit $0 < \alpha \leq 1$, $\tilde{u} = \{u_k, k \geq 1\}$ une suite de réels positifs, rappelons que la concavité de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}^+$ entraîne que

$$|x+y|^\alpha \leq |x|^\alpha + |y|^\alpha,$$

ainsi l'application $d_{\tilde{u},\alpha}$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$d_{\tilde{u},\alpha}(i,i) = 0 \quad \text{et} \quad d_{\tilde{u},\alpha} = \Big(\sum_{k=i\wedge j+1}^{i\vee j} u_k\Big)^\alpha \quad \text{pour} \quad i \neq j,$$

est bien une distance. Quand $u_k = \tau_k^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on écrit $d_{\tilde{\tau}^2,\alpha}$.
Rappelons que d'aprés le Théorème 3.2.1, l'espace $Sub(\Omega)$ est un espace de Banach, ainsi si $\mathcal{Y}$ est une famille de variables aléatoires sous-gaussiennes on a

$$S_j(\mathcal{Y}) - S_i(\mathcal{Y}) \in Sub(\Omega)$$

et pour $0 \leq i < j$, $\tau\Big(S_j(\mathcal{Y}) - S_i(\mathcal{Y})\Big) \leq \sum_{k=i+1}^{j} \tau_k$. Le théorème suivant est une version analogue au Théorème 4.1.1 pour une suite de variables aléatoires à accroissements d-sous-gaussiens.

Théorème 4.2.1. *Soit $\tilde{u} = \{u_k, k \geq 1\}$ une suite de réels positifs, $0 < \alpha \leq 1$ et soit $\mathcal{Y} = \{Y_k, k \geq 1\}$ une suite à accroissement $d_{\tilde{u},\alpha}-$sous-gaussiens, si la série $\sum_{k\geq 1} u_k < \infty$ alors*

$$\|S^*(\mathcal{Y})\|_\varphi \leq 8\sqrt{2+2\sqrt{2}}C(\alpha)\Big(\sum_{k\geq 1} u_k\Big)^\alpha,$$

où $C(\alpha)$ est une constante qui dépend de α uniquement et qui est donnée par la formule (4.1.3)*.*

Démonstration. Soit $0 \leq n < m$ posons $u'_k = (2+2\sqrt{2})^{\frac{1}{2\alpha}} u_k$ pour $k \geq 1$, comme $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ est une suite à accroissements $d_{\tilde{u},\alpha}(n,m)$-sous-gaussiens on a

$$\tau\Big(\sum_{k=n+1}^{m} Y_k\Big) \leq d_{\tilde{u},\alpha}(n,m) = \Big(\sum_{k=n+1}^{m} u_k\Big)^{\alpha}, \tag{4.2.1}$$

or d'aprés l'equivalence entre les deux normes

$$\|\sum_{k=n+1}^{m} Y_k\|_{\varphi} \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}}\,\tau\Big(\sum_{k=n+1}^{m} Y_k\Big) \leq \Big(\sum_{k=n+1}^{m} u'_k\Big)^{\alpha}. \tag{4.2.2}$$

Ceci montre que la condition des accroissements du Théorème 4.1.1 est vérifiée pour la suite de variables aléatoires $\mathcal{Y}$ et la suite de réels positifs $\{u'_k,\ k \geq 1\}$ et donc le résultat découle immédiatement du Théorème 4.1.1. □

De même pour la convergence de la suite $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$.

Théorème 4.2.2. *Soit $\tilde{u} = \{u_k,\ k \geq 1\}$ une suite de réels positifs, $0 < \alpha \leq 1$ et soit $\mathcal{Y} = \{Y_k,\ k \geq 1\}$ une suite à accroissements $d_{\tilde{u},\alpha}$-sous-gaussiens, alors*

$$\|S^*_{n,m}(\mathcal{Y})\|_{\varphi} \leq 8\sqrt{2+2\sqrt{2}}\ C(\alpha)\ d_{\tilde{u},\alpha}, \tag{4.2.3}$$

pour $0 \leq n < m$, et $C(\alpha)$ la constante donnée par la formule (4.1.3)*. Si de plus la série $\boldsymbol{u} = \sum_{k\geq 1} u_k < \infty$ alors la suite $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ converge dans $Sub(\Omega)$, dans $L_{\varphi}(\Omega)$ et presque sûrement vers $S_{\infty}(\mathcal{Y}) \in Sub(\Omega)$ vérifiant*

$$\tau\Big(S_{\infty}(\mathcal{Y})\Big) \leq \boldsymbol{u}^{\alpha} \qquad et \qquad \|S_{\infty}(\mathcal{Y})\|_{\varphi} \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}}\ \boldsymbol{u}^{\alpha}.$$

Démonstration. Soit $u'_k = (2+2\sqrt{2})^{1/2\alpha} u_k$ pour $k \geq 1$, soit $0 \leq n < m$, l'équation (4.2.2) montre que la condition des accroissements (4.1.1) est vérifiée alors le Théorème 4.1.2 s'applique, ce qui nous permet d'obtenir l'equation (4.2.3), si de plus on a $\mathbf{u} = \sum_{k\geq 1} u_k < \infty$ alors la suite $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ converge dans $L_{\varphi}(\Omega)$ et presque sûrement vers $S_{\infty}(\mathcal{Y}) \in L_{\varphi}(\Omega)$.

En reprenant l'inégalité (4.2.1) on remarque que $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ est une suite de Cauchy dans $Sub(\Omega)$, comme c'est un espace de Banach alors la suite $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ converge dans $Sub(\Omega)$ pour la norme $\tau(.)$ vers $S_{\infty}(\mathcal{Y}) \in Sub(\Omega)$.

D'un autre côté posons $n = 0$, faisons tendre m vers l'infini et en utilisant l'équivalence des normes on trouve alors les estimations suivantes

$$\tau(S_\infty) \leq \mathbf{u}^\alpha \qquad \text{et} \qquad \|S_\infty(\mathcal{Y})\|_{L_\varphi} \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}}\mathbf{u}^\alpha. \quad \square$$

4.3 Applications aux séries pondérées de v.a à accroissements d-sous-gaussiens

A présent on passe à l'étude du comportement asymptotique des séries pondérées de variables aléatoires dans $Sub(\Omega)$. Soit $\tilde{a} = \{a_k,\ k \geq 1\}$ une suite de nombres réels, $\mathcal{X} = \{X_k,\ k \geq 1\} \in Sub(\Omega)$, posons pour $n \geq 1$,

$$S_n(\tilde{a}, \mathcal{X}) = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k,$$

et on note la famille des sommes partielles par $\mathcal{S}(\tilde{a}, \mathcal{X}) = \{S_n(\tilde{a}, \mathcal{X}),\ n \geq 1\}$.

Nous commençons par appliquer le Théorème 4.2.2 à la famille des variables aléatoires sous-gaussiennes sans conditions supplémentaires de dépendance, ensuite en plus de la propriété de sous-gaussienneté on traite le cas des variables aléatoires indépendantes, ainsi que les variables aléatoires négativements dépendantes et en dernier on applique le théorème aux variables aléatoires conditionnellement sous-gaussiennes.

Corollaire 4.3.1. *Soit $\mathcal{X}$ une suite de $Sub(\Omega)$ avec $X_k \hookrightarrow Sub(\tau_k)$ pour $k \geq 1$ et supposons que $\sum_{k\geq 1} |a_k|\tau_k < \infty$. Alors $\mathcal{S}(\tilde{a}, \mathcal{X})$ converge dans $Sub(\Omega)$, dans L_φ et presque sûrement vers $S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X}) \in Sub(\Omega)$ tel que*

$$\tau\Big(S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X})\Big) \leq \sum_{k\geq 1} |a_k|\tau_k \quad \textit{et} \quad \|S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X})\|_\varphi \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}} \sum_{k\geq 1} |a_k|\tau_k. \qquad (4.3.1)$$

Démonstration. Soit $k \geq 1$, $u_k = |a_k|\tau_k$ et posons $\tilde{u} = \{u_k,\ k \geq 1\}$, on a $\tau(a_k X_k) = u_k$, d'aprés l'exemple 3.3.2, $\mathcal{S}(\tilde{a}, \mathcal{X})$ est à accroissements $d_{\tilde{u},1}$-sous-gaussiens. En appliquant le Théorème 4.2.2 à la suite $\mathcal{Y} = \{a_k X_k,\ k \geq 1\}$ on montre la convergence de la suite $\mathcal{S}(\tilde{a}, \mathcal{X})$ dans Sub(Ω), dans L_φ et presque sûrement ainsi que l'estimation de la norme de $S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X})$ donnée par la formule (4.3.1). $\square$

Lorsque les variables aléartoires sont indépendantes en plus d'être sous-gaussiennes la suite $S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X})$ est encore à accroissements d-sous-gaussiens donc le Théorème 4.2.2 s'applique toujours.

Corollaire 4.3.2. *Soit* $0 \leq n < m$ *et* $\mathcal{X}$ *une suite variables aléatoires indépendantes de* $Sub(\Omega)$ *avec* $X_k \hookrightarrow Sub(\tau_k)$ *pour* $k \geq 1$*, alors*

$$\|S^*_{n,m}(\tilde{a}, \mathcal{X})\|_\varphi \leq 8\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\ C(1/2)\Big(\sum_{k=n+1}^{m} a_k^2 \tau_k^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

si en plus

$$A^2(\tilde{a}, \tilde{\tau}) = \sum_{k \geq 1} a_k^2 \tau_k^2 < \infty, \tag{4.3.2}$$

alors

$$\|S^*(\tilde{a}, \mathcal{X})\|_\varphi \leq 8\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\ C(1/2) A(\tilde{a}, \tilde{\tau}),$$

et $\mathcal{S}(\tilde{a}, \mathcal{X})$ *converge dans* $Sub(\Omega)$*, dans* L_φ *et presque sûrement vers une v.a* $S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X}) \in Sub(\Omega)$ *tel que*

$$\tau\Big(S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X})\Big) \leq A(\tilde{a}, \tilde{\tau}) \quad et \quad \|S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X})\|_\varphi \leq \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} A(\tilde{a}, \tilde{\tau}).$$

Démonstration. L'exemple 3.3.3 montre que la suite $\mathcal{S}(\tilde{a}, \mathcal{X})$ est à accroissement $d_{\tilde{u}, \frac{1}{2}}$-sous-gaussiens, où

$$\tilde{u} = \{a_k^2 \tau_k^2, k \geq 1\},$$

alors le résultat enoncé découle de l'application du Théorème 4.2.2 à la suite $\{a_k X_k, k \geq 1\}$ avec $\mathbf{u} = A^2(\tilde{a}, \tilde{\tau})$ et $\alpha = 1/2$. □

Remarque 7. Soit $\sigma = \{\sigma_k, k \geq 1\}$ une suite de réels positifs et considérons la suite $\xi = \{\xi_k, k \geq 1\}$ de variables aléatoires gaussiennes indépendantes tel que $\xi_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$. Alors $\tau(\xi_k) = \sigma_k$ pour tout $k \geq 1$. D'un autre côté, dans le livre de Ledoux, Talagrand [28], le Théorème 6.1 assure que la série $\sum_{k \geq 1} a_k \xi_k$ converge presque sûrement et dans L^2 si et seulement si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \tau^2(\xi_k) < \infty$. Ceci confirme que la condition (4.3.2) ne peut être affaibli sans des hypothèses supplémentaires.

Remarque 8. L'étude du comportement des séries de variables aléatoires sous-gaussiennes indépendantes pondérées a été initié par Chow [10] en 1966, il impose la condition d'uniformément bornée au standard τ_k, ce qui n'est pas notre cas.

Passons maintenant à une notion de dépendance plus faible, en considérons une suite de variables aléatoires sous-gaussiennes négativement dépendantes.

Corollaire 4.3.3. *Soit* $0 \leq n < m$ *et* $\mathcal{X}$ *une suite variables aléatoires négativement* *dépendantes de Sub*(Ω) *avec* $X_k \hookrightarrow Sub(\tau_k)$ *pour* $k \geq 1$, *alors*

$$\|S^*_{n,m}(\tilde{a}, \mathcal{X})\|_\varphi \leq 16\sqrt{1+\sqrt{2}}\ C(1/2)\Big(\sum_{k=n+1}^{m} a_k^2 \tau_k^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

si en plus $A^2(\tilde{a}, \tilde{\tau}) = \sum_{k\geq 1} a_k^2 \tau_k^2 < \infty$, *on a*

$$\|S^*(\tilde{a}, \mathcal{X})\|_\varphi \leq 16\sqrt{1+\sqrt{2}}\ C(1/2) A(\tilde{a}, \tilde{\tau})$$

et $\mathcal{S}(\tilde{a}, \mathcal{X})$ *converge dans Sub*(Ω), *dans* L_φ *et presque sûrement vers une v.a* $S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X}) \in Sub(\Omega)$ *tel que*

$$\tau\Big(S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X})\Big) \leq \sqrt{2} A(\tilde{a}, \tilde{\tau}) \qquad \text{et} \qquad \|S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X})\|_\varphi \leq 2\sqrt{1+\sqrt{2}} A(\tilde{a}, \tilde{\tau}).$$

Démonstration. D'aprés l'exemple 3.3.4, la suite $S(\tilde{a}, \mathcal{X})$ est à accroissement $d_{\tilde{u},\frac{1}{2}}$-sous-gaussiens, où

$$\tilde{u} = \{2a_k^2 \tau_k^2, k \geq 1\}.$$

On applique le Théorème 4.2.2 à la suite $\{a_k X_k, k \geq 1\}$ avec $\mathbf{u} = 2A^2(\tilde{a}, \tilde{\tau})$ et $\alpha = 1/2$. $\square$

Remarque 9. Le cas d'une suite $\{X_k, k \geq 1\}$ de variables sous-gaussiennes négativement dépendants a été traité par Amini et al[2] en 2004 sous les conditions $\mathbb{E}(X_n/\mathcal{F}_{n-1}) = 0$ et $a_{nk} \geq 0$ ainsi que l'hypothèse que τ_k soit borné pour tout $k \geq 1$, plus tard en 2007 Amini et al[3] ont repris leurs études sans la condition $\mathbb{E}(X_n/\mathcal{F}_{n-1}) = 0$ avec $a_{nk} \in \mathbb{R}$.

Pour les séries de variables aléatoires conditionnellement sous-gaussiennes, on a

Corollaire 4.3.4. *Soit* $0 \leq n < m$ *et* $\mathcal{X}$ *une suite variables aléatoires* $(\mathcal{B}, c^2)$ *conditionnellement sous-gaussiennes, alors*

$$\|S^*_{n,m}(\tilde{a}, \mathcal{X})\|_\varphi \leq 8\sqrt{2+2\sqrt{2}} C(1/2)\Big(\sum_{k=n+1}^{m} a_k^2 c_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Si en plus $B^2(\tilde{a}, c) = \sum_{k\geq 1} a_k^2 c_k^2 < \infty$, *on a*

$$\|S^*(\tilde{a}, \mathcal{X})\|_\varphi \leq 8\sqrt{2+2\sqrt{2}} C(1/2) B(\tilde{a}, c),$$

et la suite $\mathcal{S}(\tilde{a}, \mathcal{X})$ *converge dans Sub*(Ω), *dans* L_φ *et presque sûrement vers la* *v.a* $S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X}) \in Sub(\Omega)$ *tel que*

$$\tau\Big(S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X})\Big) \leq B(\tilde{a}, c) \quad et \quad \|S_\infty(\tilde{a}, \mathcal{X})\|_\varphi \leq \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} B(\tilde{a}, c).$$

Démonstration. Avec le même raisonnement on montre les résultats de ce corollaire, du fait que $S(\tilde{a}, \mathcal{X})$ est à accroissement $d_{\tilde{u}, \frac{1}{2}}$-sous-gaussiens, où $\tilde{u} = \{a_k^2 c_k^2, k \geq 1\}$. L'application du Théorème 4.2.2 encore une fois à $\{a_k X_k, k \geq 1\}$ avec $\mathbf{u} = B^2(\tilde{a}, c)$ et $\alpha = 1/2$ nous fournit la preuve du corollaire. □

Remarque 10. La convergence des séries de variables aléatoires conditionnellement sous-gaussiennes a été examiné par Azuma[4] en 1967 . Il a montré que

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|S_n(\tilde{a}, \mathcal{X})|}{\sqrt{2 D_n^2 \ln \ln D_n^2}} \leq 1,$$

où $D_n^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2$, sous les conditions suivantes

$$c_k \leq 1 \quad et \quad a_n^2 / D_n^2 \to 0, \quad D_n^2 \to \infty \quad quand \quad n \to +\infty$$

Le paragraphe suivant montre à nouveau l'avantage d'avoir utiliser la notion de processus d-sous-gaussien, il concerne les suites de v.a gaussiennes stationnaires à coefficient de découplage fini, dans ce cas les variables aléatoires ne sont pas nécessairement acceptables ou $(\mathcal{B}, c^2)$-conditionnellement sous-gaussiennes ni indépendantes ou négativement dépendantes, donc les résultats de Amini et al [2] et [3] , Azuma [4], Chow [10], Ouy [33] et Antonini et al[17] ne s'appliquent pas pour ce type de séries.

4.4 Application aux séries de v.a gaussiennes stationnaires

Dans cette partie, on a besoin de rappeler d'abord quelques notions sur la stationnarité des processus ainsi que le coefficient de découplage.

Définition 4.4.1. Un processus stochastique $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ est gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes i.e

$$\forall n \geq 1 \quad \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R} \quad (X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \quad \text{est un vecteur gaussien},$$

d'une manière équivalente $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ est un processus gaussien ssi pour tout

$n \geq 1$, $t_1, ...t_n \in \mathbb{T}$ pour tout $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n a_k X_{t_k}$ est une variable aléatoire gaussienne.

Exemples 4.4.1. 1. Le Mouvement Brownien $B = \{B_t, t \geq 0\}$ est un processus gaussien de moyenne nulle est de fonction de covariance $s \wedge t$.

2. Le pont Brownien $B^0 = \{B_t^0, t \in [0,1]\}$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance $K(s,t) = s \wedge t - st$, pour $s, t \in [0,1]$.

Définition 4.4.2. On dit que le processus $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire (fortement stationnaire) si

$$\mathcal{L}(X_{t+h}, t \in \mathbb{R}) = \mathcal{L}(X_t, t \in \mathbb{R}), \quad \forall h > 0.$$

ou d'une manière équivalente, pour tout $h > 0$, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(X_{t_1+h}, ..., X_{t_n+h}) = \mathcal{L}(X_{t_1}, ..., X_{t_n}).$$

Définition 4.4.3. On dit que le processus $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ est faiblement stationnaire si

i) $\mathbb{E}(X_t) = cste$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

ii) $Cov(X_{s+h}, X_{t+h}) = Cov(X_s, X_t) = Cov(X_0, X_{t-s})$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.

Remarque 11. Un processus fortement stationnaire est faiblement stationnaire mais la réciproque est fausse en générale, la proposition suivante montre que pour un processus gaussien il y a équivalence entre faiblement stationnaire et fortement stationnaire.

Proposition 4.4.1. *Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ un processus gaussien, X est stationnaire ssi $\mathbb{E}(X_t) = cste$ et $Cov(X_s, X_t) = f(t-s)$.*

Définition 4.4.4 (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck)**.** Soit $B = \{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien, posons pour $t \geq 0$,

$$U_t = \exp\{-\frac{t}{2}\} B_{e^t},$$

le processus $U = \{U_t, t \geq 0\}$ est appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Proposition 4.4.2. *Le processus d'Ornstein Uhlenbeck $U = \{U_t, t \geq 0\}$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance*

$$K(s,t) = \exp\{-\frac{\mid s-t \mid}{2}\},$$

De plus pour tout $t \geq 0, \quad U_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Démonstration. 1. Pour tout $t \geq 0, \quad \mathbb{E}(U_t) = \exp\{-\frac{t}{2}\}\mathbb{E}\Big(B_{e^t}\Big) = 0,$

2. soit $n \geq 1,\ 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n \quad et \quad a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k U_{t_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k \exp\{-\frac{t_k}{2}\} B_{e^{t_k}} = \sum_{k=1}^{n} b_k B_{t'_k},$$

avec $b_k = a_k \exp\{-\frac{t_k}{2}\}$ et $t'_k = e^{t_k}$, alors $U = \{U_t, t \geq 0\}$ est bien un processus gaussien.

3. Soit $0 \leq s < t$,

$$\begin{aligned} K(s,t) &= Cov(U_s, U_t) = Cov(\exp\{-\frac{s}{2}\}B_{e^s}, \exp\{-\frac{t}{2}\}B_{e^t}) \\ &= \exp\{-\frac{t+s}{2}\}Cov(B_{e^s}, B_{e^t}) = \exp\{-\frac{t+s}{2}\}e^s \\ &= \exp\{-\frac{|t-s|}{2}\}, \end{aligned}$$

de même si $s > t$, $K(s,t) = \exp\{-\frac{|s-t|}{2}\}$, $Var(U_t) = K(t,t) = 1$ d'où $U_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

□

Définition 4.4.5. Soit $X = \{X_k, k \geq 1\}$ une suite gaussienne stationnaire centrée, le coefficient de découplage est noté $p(X)$ et défini par

$$p(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big|\frac{\mathbb{E}(X_1 X_k)}{\mathbb{E}(X_1^2)}\Big|$$

Nous reprenons un résultat important de Klein, Landau et Shucker ([24],Théorème1) concernant les processus gaussiens stationnaires avec un coefficient de découplage fini.

1. On remarque que si variables aléatoires sont indépendantes alors $p(X) = 1$.
2. Pour toute suite stationnaire $X = \{X_n, n \geq 1\}$, $p(X) \geq 1$.

Théorème 4.4.1. *Soit* $\eta = \{\eta_k,\ k \geq 1\}$ *une suite gaussienne stationnaire centrée avec un coefficient de découplage* $p(\eta)$ *fini. Soit* $(H_k, k \geq 1)$ *une suite de fonctions boreliennes à valeurs complexe, alors pour tout sous ensembles fini* J *de* $\mathbb{N}$ *on a :*

$$\Big|\mathbb{E}\prod_{k \in J} H_k(\eta_k)\Big| \leq \prod_{k \in J} \|H_k(\eta_1)\|_{p(\eta)}. \tag{4.4.1}$$

On propose le processus d'Ornstein Uhlenbeck comme exemple de processus gaussien centré stationnaire avec le coefficient de découplage fini.

Exemple 4.4.1. Soit $B = \{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit aussi $\xi = \{\xi_k, k \geq 1\}$ un processus d'Ornstein Uhlenbeck défini pour $k \geq 1$ par

$$\xi_k = e^{-\frac{k}{2}} B_{e^k},$$

on a

$$\mathbb{E}(\xi_1 \xi_k) = \exp -\frac{(1+k)}{2} \mathbb{E}(B_e B_{e^k}) = \exp -\frac{(k-1)}{2} \quad et \quad \mathbb{E}(\xi_1^2) = 1,$$

donc

$$p(\xi) = \sum_{k \geq 1} \exp -\frac{(k-1)}{2} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}.$$

On peut aborder à présent le problème de la convergence des processus gaussiens stationnaire.

Théorème 4.4.2. *Soit $\xi = \{\xi_k, k \geq 1\}$, $\xi' = \{\xi'_k, k \geq 1\}$ deux suites gaussiennes stationnaires de variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0,1)$ avec un coefficient de découplage fini. Soit $\tilde{a} = \{a_k, k \geq 1\}$ et $\tilde{b} = \{b_k, k \geq 1\}$ deux suites de nombre réels. Pour $n \geq 1$, on pose*

$$\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k \xi_k + b_k \xi'_k), \qquad et \qquad \hat{\mathcal{S}} = \{\hat{S}_n, n \geq 1\}.$$

Alors $\hat{\mathcal{S}}$ est une suite à accroissement $\hat{d}$-sous-gaussien, où

$$\hat{d}^2(i,j) = 2 \max(p(\xi), p(\xi')) \sum_{k=i \wedge j+1}^{i \vee j} (a_k^2 + b_k^2), \tag{4.4.2}$$

pour $i, j \in \mathbb{N}$. Si en plus

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty,$$

alors $\hat{\mathcal{S}}$ converge dans $Sub(\Omega)$, dans L_φ et presque sûrement vers la variable aléatoire $\hat{S}_\infty \in Sub(\Omega)$ vérifiant

$$\tau(\hat{S}_\infty) \leq \Big(2 \max(p(\xi), p(\xi')) \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4.3}$$

Démonstration. Tout d'abord notons que ξ et ξ' ne sont pas indépendantes donc $\hat{S}_n$ n'est pas nécessairement une variable aléatoire gaussienne.

Soit $1 \leq n < m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\mathbb{E}\exp\{\lambda(\hat{S}_m - \hat{S}_n)\} \leq \Big(\mathbb{E}\exp\Big\{2\lambda \sum_{k=n+1}^{m} a_k\xi_k\Big\}\mathbb{E}\exp\Big\{2\lambda \sum_{k=n+1}^{m} b_k\xi'_k\Big\}\Big)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4.4)$$

Posons $Z(\xi) = \exp\Big\{2\lambda\sum_{k=n+1}^{m} a_k\xi_k\Big\}$, $J = \{n+1, ..., m\}$ et appliquons le Théorème 4.4.1 à ξ et ξ' avec $H_k^{\tilde{a}}(x) = \exp(2\lambda a_k x)$ et $H_k^{\tilde{b}}(x) = \exp(2\lambda b_k x)$ (respetivement). On trouve

$$\mathbb{E}[Z(\xi)] \leq \exp\Big\{2p(\xi)\lambda^2 \sum_{k=n+1}^{m} a_k^2\Big\} \quad et \quad \mathbb{E}[Z(\xi')] \leq \exp\Big\{2p(\xi)\lambda^2 \sum_{k=n+1}^{m} b_k^2\Big\},$$

où on a utilisé $\mathbb{E}\exp\{\lambda\mathcal{N}(0,1)\} = \exp(\frac{\lambda^2}{2})$, en remplaçant dans l'équation 4.4.4 on obtient

$$\mathbb{E}\exp\{\lambda(\hat{S}_m - \hat{S}_n)\} \leq \exp\{\lambda^2 \max(p(\xi), p(\xi')) \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)\}.$$

Ceci montre que :

$\hat{\mathcal{S}}$ est une suite à accroissements $\hat{d}$-sous-gaussiens, où $\hat{d}$ est la distance définie par la relation 4.4.2. Ainsi

$$\tau^2(\hat{S}_m - \hat{S}_n) \leq 2\max(p(\xi), p(\xi')) \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2),$$

si en plus $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont dans l^2, alors le Théorème 4.2.2 montre que $\hat{\mathcal{S}}$ converge dans $Sub(\Omega)$, dans L_φ et presque sûrement vers la variable aléatoire $\hat{S}_\infty \in Sub(\Omega)$ et que l'équation 4.4.3 est vérifiée. □

Exemple 4.4.2. Soient $\xi = \{\xi_k, k \geq 1\}$, $\xi' = \{\xi'_k, k \geq 1\}$ deux processus d'Ornstein Uhlenbeck et soit aussi $\tilde{a} = \{a_k, k \geq 1\}$ et $\tilde{b} = \{b_k, k \geq 1\}$ deux suites réelles dans l^2, considérons la suite $\hat{\mathcal{S}} = \{\hat{S}_n, n \geq 1\}$ définie par $\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k\xi_k + b_k\xi'_k)$. En appliquant le Théorème 4.4.2, on en déduit que $\hat{\mathcal{S}}$ est à accroissements $\hat{d}$-sous-gaussiens et que $\hat{\mathcal{S}}$ converge dans $Sub(\Omega)$ dans L_φ et presque sûrement vers la variable sous-gaussienes $\hat{S}_\infty$ telle que

$$\tau(\hat{S}_\infty) \leq \Big[\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \sum_{k\geq 1}(a_k^2 + b_k^2)\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

4.5 Applications à la loi forte des grands nombres

Soit $\tilde{b} = \{b_{nk}, n \geq 1, k \geq 1\}$ une matrice réelles, dans ce dernier paragraphe, on s'intéresse au problème de convergence des séries pondérées de variables aléatoires de type

$$T_n(\tilde{b}, \mathcal{X}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} X_k, \qquad n \geq 1,$$

quand $\mathcal{X} = \{X_k, k \geq 1\}$ fait partie de l'une des classes suivantes :

1. $(\mathcal{ND})$ $\quad \mathcal{X}$ est NOD, $X_k \hookrightarrow Sub(\tau_k)$ et $A_n^2(\tilde{b}, \tilde{\tau}) = \sum_{k\geq 1} b_{nk}^2 \tau_k^2 < \infty$,
2. $(\mathcal{CS})$ $\mathcal{X}$ est $(\mathcal{B}, c^2)$-conditionnellement sous-gaussiennes et $B_n^2(\tilde{b}, c) = \sum\limits_{k\geq 1} b_{nk}^2 c_k^2$ finie.

Notons que dans les deux cas $T_n(b, \mathcal{X})$ est bien définie, en effet :

Soit un $n \geq 1$ fixé, posons

$$u_k(n) = 2\ b_{nk}^2 \tau_k^2 \quad (resp.\ \ u_k(n) = b_{nk}^2 c_k^2)$$

et $\tilde{u}(n) = \{u_k(n), k \geq 1\}$, la suite $\{\sum_{k=1}^m b_{nk} X_k, m \geq 1\}$ est à accroissements $d_{\tilde{u}(n), \frac{1}{2}}$-sous gaussiens, comme

$$A_n^2(\tilde{b}, \tilde{\tau}) < \infty \quad (resp.\ \ B_n^2(\tilde{b}, c) < \infty)$$

en appliquant le Théorème 4.2.2, la suite $\{\sum_{k=1}^m b_{nk} X_k, m \geq 1\}$ converge dans $\mathrm{Sub}(\Omega)$, dans L_φ et presque sûrement vers la variable sous-gaussienne $T_n(\tilde{b}, \mathcal{X}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} X_k$.

Théorème 4.5.1. *Soit $n \geq 1$, $\mathcal{X}$ une suite de $(\mathcal{ND})$(resp. de $(\mathcal{CS})$), alors la suite $T_n(\tilde{b}, \mathcal{X}) \in Sub(\Omega)$ et*

$$\tau(T_n(\tilde{b}, \mathcal{X})) \leq \sqrt{2} A_n(\tilde{b}, \tilde{\tau}) \quad (resp. \tau(T_n(\tilde{b}, \mathcal{X})) \leq \sqrt{2} B_n(\tilde{b}, c)).$$

Si de plus pour tout $t > 0$,

$$\sum_{n\geq 1} \exp\Big\{ - \frac{t^2}{4A_n^2(\tilde{b}, \tilde{\tau})} \Big\} < \infty \quad (resp.\ \ \sum_{n\geq 1} \exp\Big\{ - \frac{t^2}{2B_n^2(\tilde{b}, c)} \Big\} < \infty) \qquad (4.5.1)$$

alors la suite $\mathcal{T}(\tilde{b}, \mathcal{X}) = \{T_n(\tilde{b}, \mathcal{X}), n \geq 1\}$ converge presque sûrement, dans $Sub(\Omega)$ et dans L_φ vers 0.

Démonstration. On suppoqe que $\mathcal{X}$ fait partie de la classe $(\mathcal{ND})$,

$$\tau(T_n(\tilde{b},\mathcal{X})) \leq \sqrt{2}A_n(\tilde{b},\tilde{\tau}). \tag{4.5.2}$$

Soit $t > 0$, par l'inégalité (3.1.5) on a

$$\mathbb{P}\{|T_n(\tilde{b},\mathcal{X})| > t\} \leq 2\exp\Big\{-\frac{t^2}{4A_n^2(\tilde{b},\tilde{\tau})}\Big\},$$

sous la condition (4.5.1) $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\{|T_n(\tilde{b},\mathcal{X})| > t\} < \infty$, alors d'aprés le lemme de Borel-Cantelli $T_n(\tilde{b},\mathcal{X})$ converge presque sûrement vers 0.

D'un autre côté $A_n(\tilde{b},\tilde{\tau}) \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc l'inégalité (4.5.2) entraîne la τ-convergence de la suite $\mathcal{T}(\tilde{b},\mathcal{X})$ vers 0 et l'équivalence des normes τ et $||.||_\varphi$ implique la convergence dans L_φ.

La démonstration pour une suite de variables aléatoires conditionnellement-sous-gaussiennes est la même. □

Remarque 12. Les différents résultats obtenus sur la loi forte des grands nombres par Amini et les autres auteurs dans le cas sous-gaussien NOD sont vérifiés par nos théorèmes et corollaires sous des conditions différentes.

Nous appliquons le Théorème 4.5.1 à la suite $\tilde{b} = \{b_{nk}, n \geq 2, k \geq 1\}$, où

$$b_{nk} = \Big(n\ln^{1+\beta}(n)\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

pour $1 \leq k \leq n$ avec $\beta > 0$ et $b_{nk} = 0$ ailleurs.

Corollaire 4.5.1. *Soit $\mathcal{X}$ une suite de v.a sous-gaussiennes ND (resp. $(\mathcal{B},c)$-conditionnellement sous-gaussiennes) avec $\sup_{k\geq 1}\tau_k < \infty$ (resp.$\sup_{k\geq 1}c_k < \infty$), alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(n\ln^{1+\beta}(n)\Big)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}X_k = 0,$$

presque sûrement, dans L_φ et dans $Sub(\Omega)$.

Démonstration. Soit $\beta > 0$, $A_n^2(\tilde{b},\tilde{\tau}) = (n\ln^{1+\beta}(n))^{-1}\sum_{k=1}^{n}\tau_k^2$, posons $\sup_{k\geq 1}\tau_k = \gamma$ ainsi pour tout $n \geq 2$ fixé

$$A_n^2(\tilde{b},\tilde{\tau}) \leq (\ln^{1+\beta}(n))^{-1}\gamma^2 < \infty.$$

Ensuite il faut montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\frac{t^2 \ln^{1+\beta}(n)}{4\gamma^2}\} < \infty,$$

en effet d'aprés le critère de Riemann $\lim n^2 \exp\{-\frac{t^2 \ln^{1+\beta}(n)}{4\gamma^2}\} = 0$, on obtient alors le résultat énoncé. $\square$

Exemple 4.5.1. Soit $\mathcal{X} = \{X_k, k \geq 1\}$ tel que pour tout $n \geq 1$, $(X_1, ...X_n)$ est un vecteur de loi conjointe de Dirichlet, on a vu dans le Chapitre 1 que $X_1, ...X_n$ sont NOD.

Posons pour tout $k \geq 1$, $Y_k = X_k - \mathbb{E}(X_k)$ de sorte que $\mathcal{Y} = \{Y_k, k \geq 1\}$ soit une suite de v.a NOD sous-gaussiennes, notons que $\mathbb{P}(|Y_k| \leq 2) = 1$ alors $\sup_{k\geq 1} \tau_k \leq 2$. En se basant sur le résultat du Corollaire 4.5.1, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n \ln^{1+\beta}(n)\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}(X_k)) = 0,$$

presque sûrement, dans L_φ et dans $Sub(\Omega)$.

Conclusion

L'objectif de cette thèse est d'établir des conditions suffisantes pour la convergence des séries de variables aléatoires fortement intégrables.

La méthode utilisée fait appel au critère d'entropie métrique de Dudley, son principal avantage est qu'elle permet de traiter le problème de la convergence des séries pondérées de variables aléatoires sous-gaussiennes dans un cadre unifié et d'affaiblir considérablement les conditions de dépendance généralement imposées sur la suite des accroissements.

Notre approche s'est aussi révélée bien adaptée pour étudier le comportement asymptotique des séries de variables aléatoires gaussiennes stationnaires, ce dernier problème n'a pas été traité dans la littérature à notre connaissance. Les résultats obtenus dans cette thèse généralisent et améliorent des résultats antérieurs obtenus par des méthodes classiques.

Perspectives

A l'avenir nous envisageons de compléter le travail effectué lors de la préparation de cette thèse en étudiant les problèmes suivants :

Problème 1. Dans notre résultat principal (Théorème 4.1.1) nous avons supposé que $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge, il serait intéressant de traiter le cas où la série $\sum_{k\geq 1} u_k = +\infty$. Ce type de problème peut donner lieu à un résultat de type loi du logarithme itéré.

Problème 2. L'étude faite au 4^{eme} chapitre est basée sur la distance d définie par $d(n,m) = (\sum_{k=n\wedge m+1}^{n\vee m} u_k)^{\alpha}$. La question qui peut se poser : Peut-on remplacer cette distance par une distance plus générale $d(n,m) = h(n,m)$, où h est une fonction bien choisie.

Problème 3. Dans cette thèse nous nous sommes intéressés aux variables aléatoires sous-gaussiennes, on peut se demander si nos résultats peuvent être généralisés à la classe des variables aléatoires $\phi - sous - gaussiennes$ voir par exemple Antonini et al [17] ; Kozachenko et Buldygin[9], Chapitre 2.

Problème 4. Les conditions suffisantes obtenues pour la convergence des séries de variables aléatoires sous-gaussiennes négativement dépendantes, sont-elles nécessaires comme dans le cas des séries de variables aléatoires gaussiennes (resp. Rademacher) indépendantes, voir à ce sujet Ledoux et Talagrand [28], Chapitre 3.

Bibliographie

[1] K. Alam and K. M. L. Saxena. *Positive dependence in multivariate distributions.* Comm. Statist. Theory Methods A 10 : 1183 -1196, (1981).

[2] M. Amini, H. Azarnoosh, and A. Bozorgnia. *The strong law of large numbers for negatively dependent generalized gaussian random variables.* Stoch. Anal. Appl, 22 :893- 901, (2004).

[3] M. Amini, H. Zarei, and A. Bozorgnia. *Some strong limit theorems of weighed sums for negatively dependent generalized gaussian random variables.* Statist. Probab. Lett, 77 : 1106-1110, (2007).

[4] K. Azuma. *Weighted sums of certain dependent random variables.* Tôhoku. Math. Jour, 19(3) : 357-367, (1967).

[5] H. W. Block, T. H. Savits, and M. Shaked.*Some concepts of negative dependence.*Ann. Probab., 10 : 765-772, (1982).

[6] F. Boukhari and D. Malti *Convergence of series of strongly integrable random variables and applications* . Statistics Probability Letters, vol. 137 : issue C, 191-200, (2018).

[7] A. Bozorgnia, R.F. Patterson, R.L. Taylor. *Limit theorems for ND r.v.âs.* Technical Report ; University of Georgia, (1993).

[8] V. Buldygin and Yu. Kozachenko. *Sub-gaussian random variables*, Ukrainian Math. J, 32 : 480-488, (1980).

[9] V. Buldygin and Yu. Kozachenko. *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* Amer. Math. Soc, (2000).

[10] Y. S. Chow. *Some convergence theorems for independent random variables.* Ann. Math. Statist, 37 : 1482-1493, (1966).

[11] J. L. Doob. *Stochastic Processes.* Wiley, New York. (1953).

[12] R. M. Dudley. *The sizes of compact subsets of hilbert space and continuity of gaussian processes.* J. Funct. Anal, 1 : 290-330, (1967).

[13] N. Ebrahimi and M. Ghosh. *Multivariate Negative Dependence*. Technical Report, Department of statistics, Iowa State University, Ames Iowa, 307-337, (1980).

[14] J. D. ESARY, F.PROSCHAN, and D. W. WALKUP . *Association of random variables, with applications*. Ann. Math. Statist. 44 1466-1474, (1967).

[15] N. Etemadi. *An elementary of the strong law of large numbers*. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 55, 119-122, (1981).

[16] R. Giuliano Antonini. *Subgaussianity and exponential integrability of real random variables : comparison of the norms*. Boll. Un. Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat, 8(1) :147-157, (2000).

[17] R. Giuliano Antonini,Yu. Kozachenko,and A. Volodin. *Convergence of series of dependent φ-subgaussian random variables*. J. Math. Anal. Appl, 338 : 1188-1203, (2008).

[18] W. Hoeffding. *Probability inequalities for sums of bounded random variables*. American Statistical Association Journal, 58 :13â30, (1963).

[19] N. C. Jain and M. B. Marcus. *Continuity of sub-gaussian processes.* In J Kuelbs, editor, Probability on Banach spaces, pages 81-196. Dekker., New York, (1978).

[20] K. Joag-Dev and F. Proschan. *Negative association of random variables with applications.* Ann. Statist, 11 : 286-295, (1983).

[21] J. P. Kahane. *Propriétés locales des fonctions a séries de fourier aléatoires*. Studia. Math, 19 : 1-25, (1960).

[22] J. P. Kahane. *Some Random Series of Functions*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1985).

[23] M. Kearns and L. Saul. *Large deviation methods for approximate probabilistic inference*. In Proceedings of the Fourteenth conference on Uncertainty in artificial intelligence, pages 311 â 319. Morgan Kaufmann Publishers Inc., (1998).

[24] A. Klein, L. J. Landau and D. S. Shucker. *Decoupling inequalities for stationary gaussian processes*. Ann. Probab, 10 : 702-708, (1982).

[25] A. N. Kolmogorov. *On certain asymptotic characteristics of completely bounded metric spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 108, no. 3, 385-388, (Russian)(1956).

[26] A. N. Kolmogorov and V. M. Tikhomirov. *ϵ-entropy and ϵ-capacity of sets in function spaces*, Uspekhi Mat. Nauk 14, no. 2 (86), 3-86, (Russian)(1959).

[27] M.A. Krasnosel'skii and Ya.B. Rutickii. *Convex functions and Orlicz spaces.* P.Noordfoff Ltd, Groningen, (1961).

[28] M. Ledoux and M. Talagrand. *Probability in Banach Spaces.* Springer, Berlin, (2002).

[29] E. Lehmann. *Some concepts of dependence.* Ann. Math. Statist, 37 : 1137-1153, (1966).

[30] P. Matula. *A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables.* Statist. Probab. Lett. 15, 209-213, (1992).

[31] C.M. Newman. *Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables.* In : Y.L. Tong, ed., Inequalities in Statistics and Probability (Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA) pp. 127-140, (1984).

[32] E. Ostrovsky ,L. Sirota *Exact value for subgaussian norm of centered indicator random variable.* arXiv :1405.6749v1 [math.PR] 26 May 2014.

[33] K. C. Ouy. *Some convergence theorems for dependent generalized gaussian random variables.* J. Nat. Chiao Tung Univ, 1 : 227-246, (1976).

[34] G. Pisier. *Some applications of the metric entropy condition to harmonic analysis. Banach spaces* Harmonic Analysis and Probability, U niv. of Connecticut 1980-81. Lecture Notes in Mathematics, vol. 995. Springer, Berlin Heidelberg, pp. 123-154, (1983)

[35] M. M. Rao and Z. D. Ren. *Theory of Orlicz Spaces.* Marcel Dekker, New York, (1991).

[36] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer, Berlin, (2005).

[37] R. Salem et A. Zygmund. *Some properties of trigonometrical series whose terms have random signs.* acta mathem, 91 : 245-301, (1954).

[38] V. N. Sudakov. *Gaussian measures, Cauchy measures and e-entropy.* Soviet Math. Dokl. 10, 310-313 (1969).

[39] R. L. Taylor and T. C. Hu. *Sub-gaussian techniques in proving strong law of large numbers.* Amer. Math. Monthly, 94(3) : 295-299, (1987).

[40] M. Weber. *Estimating random polynomials by means of metric entropy methods.* Math. Inequal. Appl., 3 : 443-457, (2000).

[41] M. Weber. *Some examples of application of the metric entropy method.* Acta Math. Hungar, 105(1-2) : 39-83, (2004).

ملخص
تهتم الأطروحة بدراسة الشروط الكافية لتقارب سلسلات المتغيرات العشوائية المنتمية الى فضاء Orlicz من النوع الأسي. قد قمنا بتطبيق نتائج النظريات المدروسة على سلسلات المتغيرات العشوائية التي تحقق شرط التزايدات. سمحت لنا الطريقة المستعملة بتوحيد دراسة تقارب سلسلات المتغيرات العشوائية التي دالة عزومها محدودة من الأعلى بدالة عزوم المتغير العشوائي غوص.

Abstract

We investigate the convergence of series of random variables with second exponential moments. We give sufficient conditions for the convergence of these series with respect to an exponential Orlicz norm and almost surely. Applying these results to sequences with d-subgaussian increments, we examine the asymptotic behavior of weighted sums of subgaussian random variables in a unified setting.

Keywords: Almost sure convergence, maximal inequalities, subgaussian random variables, exponential integrability, random series.

Résumé

Nous établissons des conditions suffisantes pour la convergence presque sûre et en norme des séries de variables aléatoires appartenant à un espace d'Orlicz de type exponentiel. Ces résultats sont ensuite appliqués aux séries dont les accroissements sont d-sous-gaussiens. Cette approche permet de traiter le problème du comportement asymptotique des séries pondérées de variables aléatoires sous-gaussiennes dans un cadre unifié.

Mots clés: Convergence presque sûre, inégalités maximales, variables aléatoires sous-gaussiennes, intégrabilité exponentielle, séries aléatoires.