



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

POUR L'OBTENTION DE DIPLOME DE MASTER

SPECIALITE : GENIE MECANIQUE

OPTION : MAINTENANCE INDUSTRIELLE

Thème

Modélisation et détection des fissures dans les poutres par analyse modale

Présenté par : Mr. Benazzouz Mohamed.

Soutenu le : Juin 2015

Composition du jury :

Président :	Mr. ZINAI S.M.	MC-B	U.A.B. Tlemcen
Encadreur:	Mr. HAMZA-CHERIF S.M.	MC-B	U.A.B. Tlemcen
Co-Encadreur:	Mr. GUZZEN SAMIR	MC-B	U.A.B. Tlemcen
Examineurs:	Mr. BELALIA S.A	MC-A	U.A.B. Tlemcen
	Mr. BELKAID S.M.	MA-A	U.A.B. Tlemcen

Année universitaire: 2014-2015.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dédicace

Dédicace

Je tiens à rendre hommage à mon père, à maman pour son indéfectible assistance et son soutien tout le long de ma formation ; les mots ne peuvent pas exprimer mon entière gratitude et ma reconnaissance pour leurs sacrifices et à tout la famille.

A tous mes amis sans exception.

Remerciements

Remerciements

Avant de commencer à parcourir cette mémoire, j'aimerais faire quelques remerciements.

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, Le tout puissant, de m'avoir donné la santé,

La volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je remercie Mr. SM HAMZA CHERIF pour l'encadrement, ses précieux conseils et toute la Confiance qu'il m'a accordée tout au long de cette mémoire.

Je remercie du fond de mon cœur, mes parents qui m'ont soutenue, encouragée et motivée

Tout au long de mes études.

A messieurs les membres du jury

Je remercie :

Monsieur ZINAI ABDELBAKI qui m'a fait l'honneur de bien vouloir accepter la présidence de ce mémoire. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférence et de ma profonde gratitude.

Messieurs les examinateurs BELALIA S.A et BELKAID MOHAMED

Qu'ils veuillent trouver ici l'expression de mon profond respect pour avoir eu l'amabilité

De vouloir bien faire partie du jury de mon mémoire.

Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de

Mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

MR.Benazzouz Mohamed

ملخص

وجدير بالذكر أن عمل هذه الأطروحة هو دراسة سلوك اهتزاز الروافد المتصدعة إخضاعها للضغوط (الشد - الانحناء) منمذجة على شكل نوابض . دراسة نظرية سمحت بالحصول على الطاقة الحركية و الكامنة للبنية المستندة لنموذج لاولر برنولي إلى تحديد معادلات الحركة من حيث المبدأ هاملتون. نسخة p- لطريقة العناصر المتناهية استعملت لنمذجة البنية. عنصر منتهي تسلسلي من فصيلة رافدة ذات عقدتين وأربع درجات حرية بكل عقدة تطور. بعد ذلك نقدم طريقة الحساب العددي من الترددات الطبيعية، للدراسة والمصادقة، النتائج التي تم الحصول عليها تم مقارنتها مع نتائج باحثين في الميدان.

Résumé

Le travail de cette mémoire est consacré à l'étude du comportement vibratoire de poutres fissurées soumis à des sollicitations composées (traction-flexion) modélisées comme ressorts, une étude théorique permettant l'établissement des énergies cinétique et de déformation basé sur le modèle EULER BERNOULLI nécessaires à la détermination des équations du mouvement à partir de principe *d'Hamilton*. Une version-*p* de la méthode des éléments finis est utilisée pour modéliser la structure étudiée. Un élément fini hiérarchique de type poutre avec 4 degrés de liberté par nœud est développé, par la suite nous avons introduit une méthode de calcul numérique des fréquences propres, une étude de validation faite, les résultats trouvés sont comparés aux résultats obtenus dans la littérature.

Abstract

The work of this thesis is concerned with the study of the vibratory behavior of the cracked shafts made subject to stresses (traction - flexion) modeled as springs, A Theoretical study to establish the strain and stress energy of the shaft is based on the EULER Bernoulli beam model needed to determine the equations of motion from Hamilton principle. A p- version of the finite element method is used to model the structure studied. A héarchique finite element type beam with 4 degrees of freedom per node. Afterwards we introduce a method of numerical calculation of natural frequencies, a validation study, found the results are compared with results obtained in the literature.

Sommaire

Sommaire

Résumé.....	i
Sommaire.....	iv
Liste de figures.....	v
Liste de tableaux.....	vi
Liste des symboles	vii
Introduction générale	1

Chapitre I : Théorie des poutres EULER BERNOULLI

I.1 Définition.....	3
I.2 Hypothèse EULER BERNOULLI.....	4
I.3 Champ de déplacements.....	4
I.4 Relation contrainte déformation.....	4
I.5 Energie de déformation de la poutre.....	5
I.6 Energie cinétique de la poutre.	5
I.7 équation du mouvement de la poutre.....	6
I.7 .1 Principe d'Hamilton.....	6

Chapitre II : Modélisation dynamique d'un arbre de transmission fissurée

II.1 Définition de la fissure.....	8
II.2 Modes de propagation d'une fissure.....	8
II.3 Modèle éléments finis d'une poutre fissurée à section rectangulaire.....	9
II.4 Matrice de flexibilité locale d'un faisceau fissuré avec une section transversal circulaire.....	12
II.5 Matrice de flexibilité dans le cas d'une section circulaire.....	12

Chapitre III : Modélisation par la version- p de la méthode des éléments finis

III.1 Introduction.....	15
III.2 Sélection des Fonctions de Forme et modélisation de l'élément poutre.....	15
III.3 Détermination de la matrice de rigidité élémentaire de l'arbre.....	18
III.4 Détermination de la matrice masse élémentaire de l'arbre.	19
III.5 Détermination de la matrice rigidité d'un arbre avec fissure.....	19
III.6 Détermination de la matrice masse et de la matrice rigidité globale de l'arbre.....	20

Chapitre VI : Organisation de la programmation

VI-1. Introduction.....	21
VI -2. Schéma de calcul.....	21
VI-3. Description du programme.....	23
a-Fichier de données	23
b-programme de calcul.....	23
c-Sous programme pour le calcul des matrices masse et de rigidité globale.....	23
d- Résolution.....	24
VI-3.Calcul des paramètres de fréquence.....	24

Chapitre V : Validations, comparaisons et analyse de cas

V-1 Introduction	25
V-2 Validations et comparaisons des résultats dans le cas d'un arbre sans fissure et avec fissuration.....	25
V-2.1 poutre sans fissure à section circulaire.....	25
V-2.2 poutre fissurée à section circulaire.....	26
A-Influence de l'ouverture de la fissure sur les fréquences propres.....	26
A-1 comparaison dans le cas d'une poutre encastree - libre.....	26
A-2 comparaison dans le cas d'une poutre encastree- encastree.....	27
A-3 comparaison dans fissure dans le cas d'une poutre appuyée – appuyée.....	28

Conclusion Général.....	30
--------------------------------	-----------

Références bibliographique.

Liste des figures

Figure I.1 : structure d'une poutre avant et après déformation.....	2
Figure II.1 : Illustration des trois modes de propagation d'une fissure.....	8
Figure II.2 : Modèle de l'élément fissurée.....	8
Figure II.3 . Géométrie de la poutre en porte-à-faux avec ouverture	12
Figure II.4 : Géométrie d'une section transversale circulaire fissurée.....	12
Figure III.1 : éléments poutre 3D a deux nœuds.....	14
Figure III.2 : composant d'un système lié avec deux ressorts (flexion- traction).....	18
Figure VI.1 : schéma de calcul.....	21

Liste du tableau

Liste des tableaux

Tableau 5.1 : Tableau 5.1 comparaison des Solution exacte avec les résultats obtenu les cas suivant (Encastré –encasté), (Encastré –libre), (Appuyé-appuyé).....	25
Tableau 5.2 : comparaison dans le cas d'une poutre encastrée - libre	26
Tableau 5.3 : comparaison dans le cas d'une poutre encastrée- encastrée.....	27
Tableau 5.4 : comparaison dans le cas d'une poutre appuyée – appuyée.....	28

Liste des symboles

Liste des symboles :

ρ : masse volumique

A : aire de la section droite de la poutre

E : le module de Young

G : le module d'élasticité transversal

U_0 : Déplacement longitudinal suivant x de la ligne moyenne .

W_0 : Déplacement transversale suivant z de la ligne moyenne. :

$w_{0,x}$: Rotation de la section droite de la poutre.

$W_{0,xx}$: la courbure

ε_{xx} : déformation de la poutre

σ_{xx} : contrainte normale suivant x

E_d : Energie de déformation de la poutre

T : Energie cinétique de la poutre

V : Energie potentielle de la poutre

W : travail des forces extérieurs

L : Lagrangien

K_I : facteur d'intensité d contrainte en mode 1(mode ouverture de la fissure)

K_{II} : facteur d'intensité d contrainte en mode 2(mode de cisaillement plan)

K_{III} : facteur d'intensité d contrainte en mode 3(mode de cisaillement anti plan)

C_{ij} : coefficient de flexibilité totale

$C^{(0)}_{ij}$: coefficient de flexibilité de élément non fissuré

Liste des symboles

$C^{(1)}_{ij}$: coefficient de flexibilité de élément fissuré

$W(0)$ est l'énergie de déformation de l'élément non fissuré

$W(1)$ est l'énergie de déformation de l'élément fissuré.

I_y, I_z : les moments d'inertie de la section transversale sur les axes , respectivement y et z

J : le moment d'inertie polaire de la section transversale

κ : coefficient de cisaillement.

$[K_{cr}]$: la matrice de rigidité de la fissure .

$[K_e]$: matrice de rigidité élémentaire.

$[M_e]$: matrice de masse élémentaire.

ϑ : coefficient de Poisson,

a : le profondeur de la fissure

h_x : La taille de la bande

R : rayon de la section transversale du faisceau

u_i : déplacement additionnel provoqué par la fente

dA : La surface élémentaire.

C_{11} : coefficient de flexibilité due à la traction

C_{22} : coefficient de flexibilité due à l'effort tranchant.

C_{33} : coefficient de flexibilité due à la flexion

C_{13} : coefficient de flexibilité due au couplage(traction flexion)

a_x : la limite de la bande de fissure.

b : la largeur de la poutre

Liste des symboles

h : la hauteur de la poutre

c^{-1} : L'inverse de la matrice de rigidité de la fissure

ω : la pulsation propre .

ξ : coordonnées adimensionnelles

f_i et g_i : Le groupe des fonctions de forme pour les déplacements, U, W

p_u : Nombre de fonction de forme dans la direction longitudinale suivant x .

p_w : Nombre de fonction de forme de la direction transversale suivant z .

$[N]$: la matrice des fonctions de forme.

Introduction

Introduction

Le problème de vibration d'une poutre fissurée attire l'attention de nombreux chercheurs au cours des dernières années. L'existence d'une fissure dans une structure aura une incidence sur ses caractéristiques dynamiques telles que les fréquences naturelles et les formes des modes propres. En conséquence, les fréquences naturelles et les formes de mode propres de la structure contiennent des informations sur l'existence, l'emplacement et la taille de la fissure. Afin d'étudier la vibration d'une poutre fissurée, le problème consiste à établir la raideur locale de la fissure. Chondros [1] a développé une théorie de vibration d'une poutre fissurée pour la vibration latérale d'une poutre Euler-Bernoulli fissurée. La fissure a été modélisée comme étant un ressort continu en utilisant le champ de déplacement au voisinage de la fissure trouvé à partir la mécanique de rupture. Les résultats obtenus ont montré que la fréquence naturelle de la poutre ayant une fissure diminue lorsque la profondeur de la fissure augmente. Orhan [2] a étudié les fréquences propres d'une poutre fissurée en faisant varier la position et la profondeur de la fissure. Dans cette étude, la méthode des éléments finis (FEM) a été appliquée, la matrice de flexibilité de la fissure a été calculée en utilisant les facteurs d'intensité de contrainte.

Gudmundson [3] a utilisé la combinaison de la méthode de perturbation et la matrice de transfert pour étudier l'influence des petites fissures sur les fréquences propres des structures minces. Zhang et al [4] ont utilisé la matrice de transfert pour l'analyse des fréquences et des modes propres d'une poutre fissurée en porte à faux. Kisa et al [5] ont présenté une méthode d'analyse de vibration des poutres fissurées à l'aide d'une combinaison d'éléments finis et les méthodes de synthèse modale. La poutre est divisée en deux éléments liés par une matrice de flexibilité, qui incorpore les forces d'interactions. Saez et al [6] ont présenté une méthode simplifiée pour l'évaluation de la fréquence fondamentale pour les vibrations de flexion des poutres fissurées de type Euler-Bernoulli. La plupart des modèles utilisent des éléments poutres 1D en utilisant la version p de la méthode des éléments finis.

Dans ce même contexte, le but de ce travail est d'analyser les vibrations libres des poutres fissurées en utilisant la méthode des éléments finis hiérarchiques. Deux éléments poutres à quatre degrés de liberté sont utilisés dans la modélisation. L'influence de l'accouplement entre flexion le mouvement longitudinal sur les fréquences propres est considéré. Les résultats trouvés peuvent être appliquées pour la détection des fissures d'une poutre.

Le mémoire est organisé en cinq chapitres :

Introduction

Après l'introduction et la revue de littérature, le premier chapitre est consacré à la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Les énergies cinétiques et de déformation du système sont déterminées.

Dans le deuxième chapitre la modélisation des poutres fissurée est faite. La matrice de flexibilité est déterminée dans le cas d'une section rectangulaire et circulaire.

La méthode des éléments finis est développée dans le troisième chapitre, les matrices de rigidité et masse du système sont déterminées.

Le quatrième chapitre est consacré à l'organisation de la programmation. Un schéma de calcul est développé.

Le cinquième chapitre est consacré à la validation et interprétations des résultats obtenus.

Le mémoire est clôturé par une conclusion et des perspectives.

Chapitre I : Théorie des poutres d'Euler-Bernoulli

Les théories des poutres sont des modèles mathématiques utilisés dans le calcul des structures (statique et dynamique). Parmi les modèles les plus utilisées on a :

- la théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement ;
- la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet du cisaillement.

Cette étude concerne les poutres d'Euler-Bernoulli.

I.1 Définition

On appelle « poutre » un solide engendré par des surfaces, appelées « sections droites », telles que :

- les centres de gravité des sections forment une courbe continue, appelée « courbe moyenne » ; son rayon de courbure est grand devant sa longueur ;
- les sections sont perpendiculaires à la courbe moyenne ; elles varient de manière continue et « lente » ;
- la dimension des sections est petite devant la longueur de la courbe moyenne ;

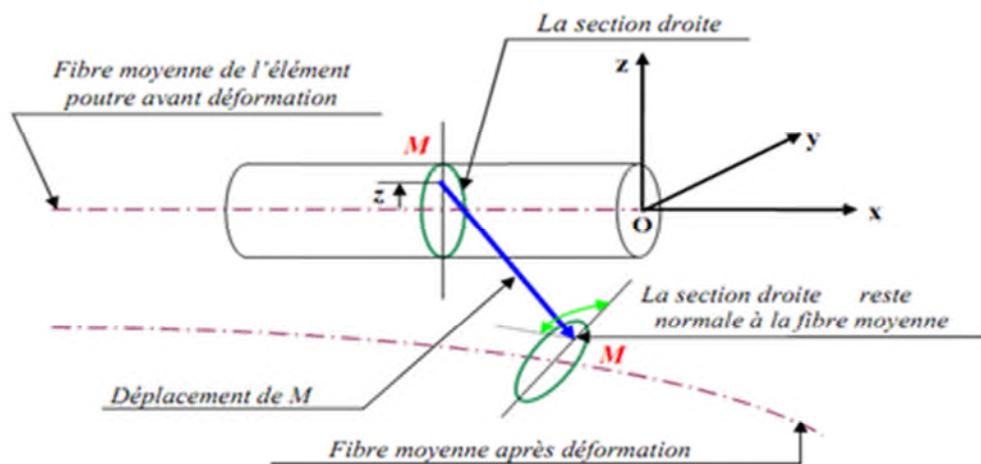


Figure I.1 : Structure d'une poutre avant et après déformation.

I.2 Hypothèses

Pour mener les calculs avec le modèle d'Euler-Bernoulli on considère les hypothèses suivantes [7] :

- la section droite est indéformable après déformation,
- la section droite reste perpendiculaire à la ligne moyenne après déformation,
- le cisaillement est négligé due à l'effort tranchant.

L'hypothèse de Bernoulli permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion : le risque de rupture est alors dû à l'extension des fibres, et la flèche est due au moment fléchissant. Cette hypothèse n'est pas valable pour les poutres courtes car ces dernières sont hors des limites de validité du modèle de poutre, à savoir que la dimension des sections doit être petite devant la longueur de la courbe moyenne.

I.3 Champ de déplacements

Le champ de déplacement est le suivant (Fig. 1):

$$U(x, z, t) = U_0(x, t) - zW_{0,x}(x, t)$$

$$W(x, z, t) = W_0(x, t)$$

Avec :

U_0 : Déplacement longitudinal suivant x de la ligne moyenne .

W_0 : Déplacement transversale suivant z de la ligne moyenne.

$W_{0,x}$ ($= \frac{\partial W_0}{\partial x}$): Rotation de la section droite de la poutre.

I.4 Relation contrainte déformation

La déformation dans la poutre est donnée par

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial U(x,z,t)}{\partial x} = U_{0,x} - zW_{0,xx}(x, t) \quad (I.1)$$

La contrainte normale suivant x est donnée par la loi de Hooke

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = E [U_{0,x} - zW_{0,xx}] \quad (I.2)$$

E : Module d'élasticité longitudinal.

I.5 Energie de déformation de la poutre

L'énergie de déformation est donnée par

$$E_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV \quad (I.3)$$

Qu'on peut l'écrire ainsi

$$E_d = \frac{1}{2} \int_V E [(U_{0,x})^2 + z^2 W_{0,xx}^2 - 2z(U_{0,x})(W_{0,xx})] dx dA \quad (I.4)$$

Le moment statique est nul du moment que la ligne moyenne passe par le centre de surface de la section droite, d'où

$$E_d = \frac{1}{2} \int_L EA(U_{0,x})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI_z(W_{0,xx})^2 dx \quad (I.5)$$

Avec :

A : aire de la section droite de la poutre

I_z : Moment d'inertie de la section droite de la poutre

$dV (= dx dA)$: Élément de volume

I.6 Energie cinétique de la poutre

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) dm \quad (I.6)$$

Qu'on peut l'écrire ainsi

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho [(\dot{U}_0)^2 + z^2 \dot{W}_{0,x}^2 - 2z(\dot{U}_0(\dot{W}_{0,x}) + \dot{W}_0^2)] dV \quad (I.7)$$

Dans le cas du modèle Euler Bernoulli l'inertie de rotation est négligée, d'où :

$$T = \frac{1}{2} \int_L \rho \cdot A [(\dot{U}_0)^2 + (\dot{W}_0)^2] dx \quad (I.8)$$

Avec:

$$dm = \rho \cdot dV$$

I.7 Equations du mouvement de la poutre

I.7.1 Principe d'Hamilton

Appelé aussi principe de moindre action, elle permet de remplacer les équations d'équilibre de Newton pour des milieux élastiques par une formulation variationnelle.

L'utilisation du principe d'Hamilton permet de donner les équations du mouvement ainsi que les conditions aux limites associées ce qui n'est pas le cas des équations d'équilibre de Newton.

Dans le principe d'Hamilton, le système est caractérisé par les fonctions énergies :

1) Energie cinétique T

2) Energie potentielle V

Pour la détermination des équations différentielles du mouvement nous appliquons l'action d'Hamilton :

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (I.9)$$

Où L est le lagrangien du système.

La moindre action de Hamilton est donnée par

$$\delta I = 0$$

D'où

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0 \quad (I.10)$$

Chapitre I Théorie des poutres EULER BERNOULLI

Pour un système conservatif on a

$$L = T - V$$

Avec

$$V = E_d - W \tag{I.11}$$

W : Travail des forces extérieures (dans le cas des vibrations libres W est nul).

Le principe de moindre action est donné par :

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta E_d) dt = 0 \tag{I.12}$$

Après intégration par partie les équations de mouvement obtenues sont :

$$\rho A \ddot{U}_0(x, t) - E A U_{0,xx}(x, t) = 0 \tag{I.13}$$

$$\rho A \ddot{W}_0(x, t) + E A W_{0,xxxx}(x, t) = 0 \tag{I.14}$$

Eq.9 représente l'équation du mouvement de la traction.

Eq.10 représente l'équation du mouvement de la flexion.

Les conditions aux limites cinématiques associées sont :

$$U_0 = 0$$

$$W_0 = 0$$

$$W_{0,x} = 0$$

Chapitre II : Modélisation dynamique d'un arbre fissuré

II.1 Définition

La fissure est un « défaut » ou une discontinuité brutale qui apparaît dans une structure sous l'effet de contraintes internes ou externes, entraînant une grande concentration de contrainte à son fond.

II.2 Modes de propagation d'une fissure

Toute fissure témoigne de l'existence de concentration de contraintes sur les structures fissurées.

Il existe trois façons d'appliquer une force pour permettre à une fissure de se propager :

- Le premier appelé **Mode I** ou d'ouverture : la contrainte de traction est normale au plan de la fissure. Le mode I est caractérisé par une grandeur que nous appellerons K_I .
- La deuxième appelée **Mode II** ou de cisaillement plan, la contrainte de cisaillement agit parallèlement au plan de la fissure et perpendiculaire au front de fissure. Le mode II est caractérisé par K_{II}
- Enfin, le troisième, appelé **Mode III** ou de cisaillement anti-plan ou encore de déchirure, la contrainte de cisaillement agit parallèlement au plan de la fissure et parallèlement au front de fissure. Le mode III est caractérisé par K_{III} [8].

K_I, K_{II} et K_{III} sont appelés facteurs d'intensité de contrainte.

De manière générale, une fissure se propage dans un matériau sous une combinaison de contraintes dans les trois modes précédents.

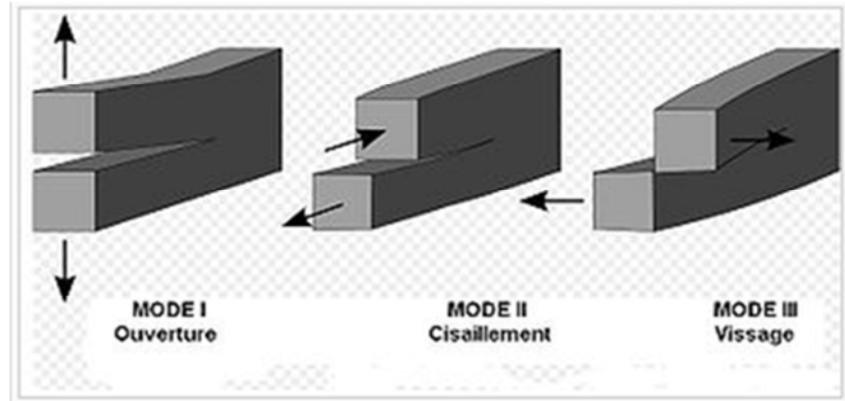


Figure II.1 : Illustration des trois modes de propagation d'une fissure.

II.3 Modélisation d'une poutre fissurée à section rectangulaire

Prenons une poutre uniforme avec section rectangulaire ayant une fissure située à une distance L_c de l'extrémité gauche. Afin de dériver la matrice de rigidité d'un élément fissurée, d'abord on obtient la matrice de flexibilité puis la matrice de raideur par inversion de la matrice de flexibilité.

La Figure II.2 présente le modèle de l'élément fissurée. L'élément est chargé avec des forces de cisaillement P_2, P_3, P_8, P_9 ; les moments de flexion P_4, P_5, P_{11}, P_{12} ; les forces axiales P_1, P_7 ; et moments de torsion P_6, P_{10} [9].

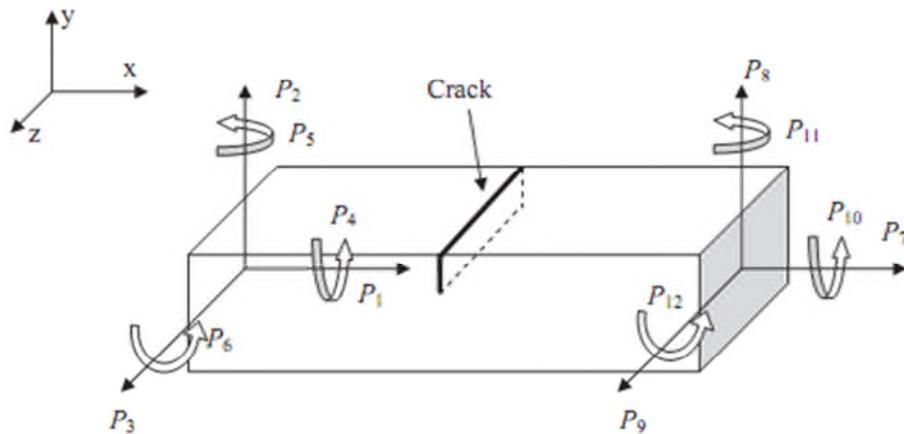


Figure II.2 : Modèle de poutre fissurée.

Chapitre II Modélisation dynamique d'une poutre fissurée

En utilisant le théorème de Castigliano, les composantes de la matrice de flexibilité sont déterminées :

$$C_{ij} = \frac{\partial W^{(1)}}{\partial P_i \partial P_j} ; \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{II.1})$$

$W^{(1)}$ Est l'énergie de déformation de la fissure, exprimée par [9] :

$$W^{(1)} = \int \frac{1-\nu^2}{E} [\sum_1^6 (K_{Ii})^2 + \sum_1^6 (K_{IIIi})^2 + (\nu + 1) \sum_1^6 (K_{IIIi})^2] dA \quad (\text{II.2})$$

Où ν est le coefficient de Poisson du matériau.

K_I, K_{II} et K_{III} Sont les facteurs d'intensité de contrainte pour le type d'ouverture. Ils peuvent être calculés de la manière suivante [9] :

Mode I :

$$K_{I1} = \sigma_1 \sqrt{\pi a} F_1(\alpha)$$

$$K_{I5} = \sigma_5 \sqrt{\pi a} F_1(\alpha)$$

$$K_{I6} = \sigma_6 \sqrt{\pi a} F_2(\alpha)$$

avec :

$$K_{I2} = K_{I3} = K_{I4} = 0$$

Mode II :

$$K_{II2} = \sigma_2 \sqrt{\pi a} F_{II}(\alpha)$$

$$K_{II4} = \sigma_4 \sqrt{\pi a} F_{II}(\alpha) ,$$

avec :

$$K_{II1} = K_{II3} = K_{II5} = K_{II6} = 0$$

Mode III :

$$K_{III3} = \sigma_3 \sqrt{\pi a} F_{III}(\alpha) ,$$

$$K_{III4} = \sigma_{4III} \sqrt{\pi a} F_{III}(\alpha) ,$$

$$K_{III1} = K_{III2} = K_{III5} = K_{III6} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Chapitre II Modélisation dynamique d'une poutre fissurée

$$\alpha = \frac{a}{h_x}$$

Où a est la profondeur de la fissure, h_x est l'épaisseur de la poutre.

Les σ_i ($i = 1, \dots, 6$) sont les contraintes associées

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{P_1}{A} \\ \sigma_2 &= \frac{kP_2}{A} \\ \sigma_3 &= \frac{kP_3}{A} \\ \sigma_4 &= \frac{P_4}{A} \\ \sigma_{4III} &= \frac{P_4}{A} \\ \sigma_5 &= \frac{P_5 z}{I_y} \\ \sigma_6 &= \frac{P_6}{I_z} \frac{h_x}{2}\end{aligned}\tag{II.4}$$

D'où A est la section droite de la poutre, alors que I_y et I_z sont les moments d'inertie suivant y et z , respectivement. Le coefficient k est appelé coefficient de cisaillement transversal.

Où les fonction F_1, F_2, F_{II} et F_{III} sont données par

$$\begin{aligned}F_1(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2} \frac{0.752 + 2.02(\alpha) + 0.37(1 - \sin(\frac{\pi\alpha}{2}))^3}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}} \\ F_2(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2} \frac{0.923 + 0.199(1 - \sin(\frac{\pi\alpha}{2}))^4}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}} \\ F_{II}(\alpha) &= \frac{1.222 - 0.561(\alpha) + 0.085(\alpha)^2 + 0.18(\alpha)^3}{\sqrt{1 - (\alpha)}} \\ F_{III}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2}}\end{aligned}\tag{II.5}$$

II.4 Matrice de flexibilité dans le cas d'une section rectangulaire

En raison de la concentration de l'énergie de déformation à la zone périphérique à la pointe de la fissure, l'existence de fissures dans les structures est une source d'une flexibilité locale qui a ensuite une influence sur la performance dynamique des structures. Ces coefficients de flexibilité sont exprimés par des facteurs d'intensité de contraintes à travers le théorème de Castigliano dans le domaine élastique linéaire. A partir du théorème de Castigliano les composantes de la matrice de flexibilité dans le cas d'une section rectangulaire de cotés b et h sont données par [10] :

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{2\pi}{Eb^2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{a_x} \alpha F_1^2(\alpha) d\alpha dz \\
 C_{15} = C_{51} &= \frac{24\pi}{Eb^4} \int_{-b/2}^{b/2} z \int_0^{a_x} \alpha F_1^2(\alpha) d\alpha dz \\
 C_{16} = C_{61} &= \frac{12\pi}{Eb^2h} \int_{-b/2}^{b/2} z \int_0^{a_x} \alpha F_1(\alpha) F_2(\alpha) d\alpha dz \\
 C_{22} &= \frac{2k^2\pi}{Eb^2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{a_x} \alpha F_{II}^2(\alpha) d\alpha dz \\
 C_{24} = C_{42} &= \frac{2k^2\pi}{Eb^2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{a_x} \alpha F_{II}^2(\alpha) d\alpha dz \\
 C_{33} &= \frac{2k^2(\nu + 1)\pi}{Eb^2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{a_x} \alpha F_{III}^2(\alpha) d\alpha dz \\
 C_{34} = C_{43} &= \frac{2k(\nu+1)\pi}{Eb^2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{a_x} \alpha F_{III}^2(\alpha) d\alpha dz \tag{II.6}
 \end{aligned}$$

Du moment que la section de la poutre A est rectangulaire alors $h_x = h$ et $a_x = a$.

II.5 Matrice de flexibilité dans le cas d'une section circulaire

Considérons une section circulaire de rayon R avec ouverture ou a est la profondeur de la fissure et h_x la taille de la bande située à une distance x , (Figure II.4) et écrit comme suit :

$$h_x = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$b = \sqrt{R^2 - (R - a)^2}$$

$$a_x = \sqrt{R^2 - x^2} - (R - a)$$

En injectant h_x , a_x , et b dans les équations précédentes, on obtient les composantes de la matrice de flexibilité dans le cas d'une section circulaire.

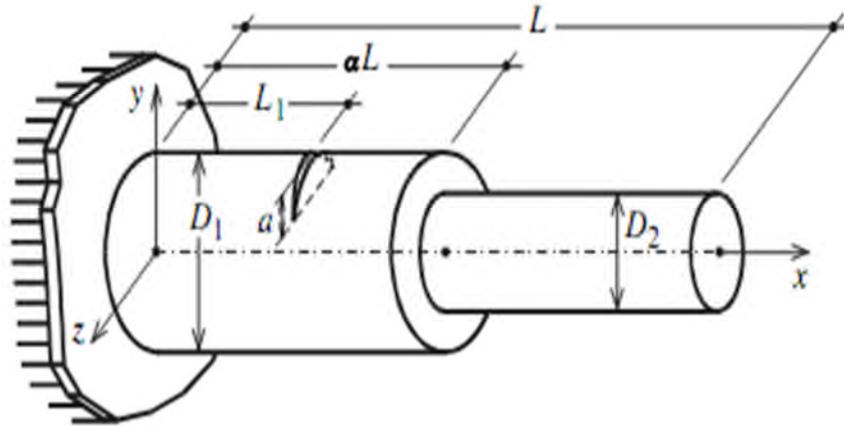


Figure II.3. Géométrie de la poutre en porte-à-faux avec ouverture.

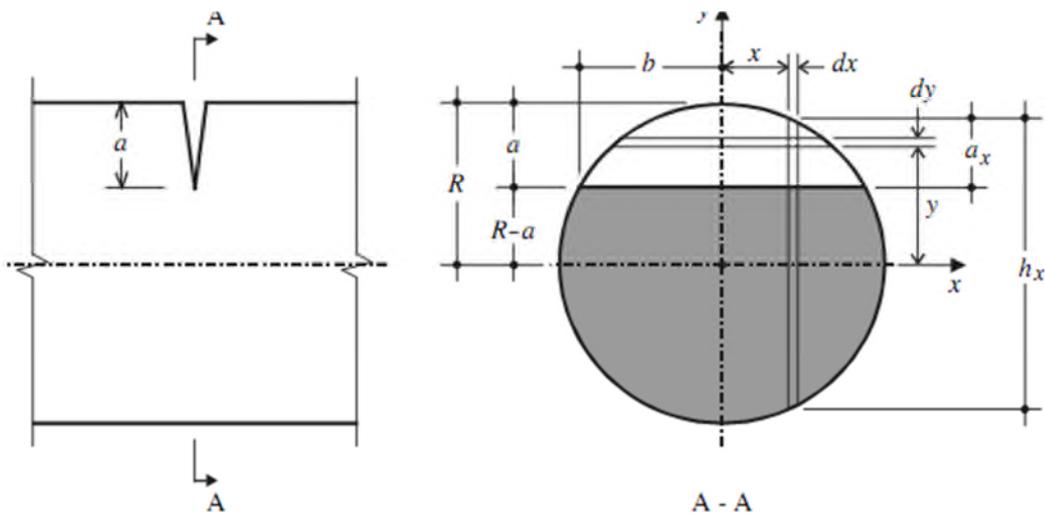


Figure II.4 : Géométrie d'une section transversale circulaire fissurée.

la matrice de flexibilité dû à la fissure est donnée par:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & C_{15} & C_{16} \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ 0 & C_{42} & C_{43} & C_{44} & 0 & 0 \\ C_{51} & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & 0 & 0 & 0 & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

L'inverse de la matrice C est la matrice de rigidité du point nodal, elle est donnée par :

$$K_{cr} = C^{-1} \quad (\text{II.8})$$

Chapitre III. Modélisation par la version- p de la méthode des éléments finis

III.1 Introduction

Dans la version- p de la méthode des éléments finis, l'erreur peut être contrôlée non seulement par l'affinage du maillage mais aussi en augmentant le degré des fonctions de forme de tous les éléments. Généralement le degré des fonctions de forme est noté p. Cette version est plus simple et sa convergence est plus rapide [10].

Cette version de la méthode des éléments finis peut être aperçue comme étant un cas spécial de la méthode classique de Rayleigh Ritz.

Parmi les fonctions de formes utilisées dans la méthode des éléments finis hiérarchiques, on a: Les fonctions polynomiales, Les fonctions trigonométriques et Les fonctions polynomiales et trigonométriques [11].

Ces dernières fonctions de formes sont utilisées dans la suite de l'étude.

III.2 Sélection des Fonctions de Forme et modélisation de l'élément poutre

Dans notre étude, la poutre est modélisé par des éléments poutres 1D hiérarchiques à 4 degrés de liberté par nœud ($U_0, W_0, W_{0,x}$ et $W_{0,xx}$). L'élément à deux nœuds 1 et 2 est représenté sur la figure 3.1. Dans le cas d'un arbre épaulé plusieurs éléments peuvent être utilisés.

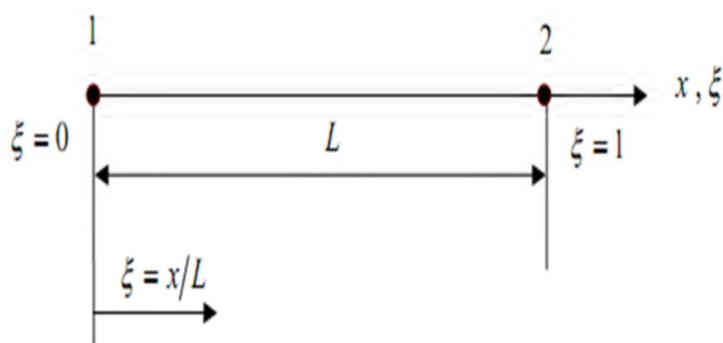


Figure III.1 : éléments poutre 1D a deux nœuds.

Les coordonnées locales sont liées aux coordonnées adimensionnelles par la relation :

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \text{Avec } (0 \leq \xi \leq 1) \quad (\text{III.1})$$

Le groupe des fonctions de forme pour les déplacements U et W sont donné par :

$$[f_1, f_2, \dots, f_{r+2}] \quad (\text{III.2})$$

D'où

$$\begin{cases} f_1 = 1 - \xi \\ f_2 = \xi \\ f_3 = \sin[(n-2) \cdot \pi \cdot \xi] \end{cases}$$

Les fonctions f sont utilisées pour U_0

Et :

$$g_1 = 1 - 10 \cdot \xi^3 + 15 \cdot \xi^4 - 6 \cdot \xi^5$$

$$g_2 = \xi - 6 \cdot \xi^3 + 8 \cdot \xi^4 - 3 \cdot \xi^5$$

$$g_3 = \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{3}{2} \cdot \xi^3 + \frac{3}{2} \cdot \xi^4 - \frac{1}{2} \cdot \xi^5$$

$$g_4 = 10 \xi^3 - 15 \cdot \xi^4 + 6 \cdot \xi^5$$

$$g_5 = -4 \xi^3 + 7 \cdot \xi^4 - 3 \cdot \xi^5$$

$$g_6 = \frac{1}{2} \cdot \xi^3 - \xi^4 + \frac{1}{2} \cdot \xi^5$$

$$g_n = \sin[(n-6) \cdot \pi \cdot \xi] + (n-6) \cdot \pi \cdot [-\xi + 6 + 4(-1)^{(n-6)}] \cdot \xi^3 - [8 + 7 \cdot (-1)^{(n-6)}] \xi^4 + 3 \cdot [1 + (-1)^{(n-6)}] \xi^5 \quad (\text{III.3})$$

Les fonctions g sont utilisées pour W_0

Chapitre III Modélisation par la version- p de la méthode des l'élément finis

Les deux fonctions de forme du groupe (f_1, f_2) sont celles de la méthode des éléments finis nécessaires à la description des déplacements aux nœuds de l'élément.

Les déplacements sont exprimés en fonctions des matrices des fonctions de forme sont :

$$U_0 = [N_u]\{X\} \quad (III.4)$$

$$W_0 = [N_w]\{Z\} \quad (III.5)$$

Ou $[N_u] = [f_1 \ f_2 \ , \dots \dots \ , \ f_{pu}]$, Avec $\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{pu} \end{Bmatrix}$

Et $[N_w] = [g_1 \ g_2 \ , \dots \dots \ , \ g_{pw}]$, Avec $\{Z\} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{pw} \end{Bmatrix}$

Avec :

p_u : Nombre de fonction de forme dans la direction longitudinale suivant x.

p_w : Nombre de fonction de forme de la direction transversale suivant z.

Le vecteur déplacement $\begin{pmatrix} U_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$ est donné par :

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ W_0 \end{pmatrix} = [N]\{q\} \quad (III.6)$$

Avec :

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_u] & 0 \\ 0 & [N_w] \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad \{q\} = \{q_u, q_w\}^T$$

Où $[N]$ est la matrice des fonctions de forme.

III.3 Détermination de la matrice de rigidité élémentaire de la poutre

En introduisant les matrices des fonctions de forme $[N_u]$, $[N_w]$ dans l'énergie de déformation indiquée dans l'expression (I.5) on trouve :

$$\begin{aligned}
 E_d &= \frac{1}{2} \int_0^l E \cdot A \cdot \{X\}^T \cdot \frac{\partial [N_u]^T}{\partial x} \frac{\partial [N_u]}{\partial x} \cdot \{X\} dx + \frac{1}{2} \int_0^l E \cdot I_z \cdot \{Z\}^T \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial x^2} \cdot \{Z\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \{X\}^T \int_0^l E \cdot A \cdot \frac{\partial [N_u]^T}{\partial x} \frac{\partial [N_u]}{\partial x} \cdot \{X\} dx + \frac{1}{2} \{Z\}^T \int_0^l E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial x^2} \cdot \{Z\} dx
 \end{aligned}
 \tag{III.7}$$

L'expression de l'énergie de déformation en coordonnées adimensionnelles est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2L} \{X\}^T \int_0^l E \cdot A \cdot \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_u]}{\partial \xi} \cdot \{X\} d\xi + \frac{1}{2(L)^3} \{Z\}^T \int_0^l E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \cdot \{Z\} d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \{X\}^T \int_0^1 \frac{E \cdot A}{L_e} \cdot \frac{\partial^1 f_{P_u}}{\partial \xi^1}(\xi) \frac{\partial^1 f_{P_u}}{\partial \xi^1}(\xi) \cdot \{X\} d\xi + \frac{1}{2} \{Z\}^T \int_0^1 \frac{E \cdot I_z}{(L_e)^3} \cdot \frac{\partial^2 g_{P_w}}{\partial \xi^2}(\xi) \frac{\partial^2 g_{P_w}}{\partial \xi^2}(\xi) \cdot \{Z\} dx
 \end{aligned}
 \tag{III.8}$$

Donc on peut écrire la matrice de rigidité élémentaire k_e de la poutre sous la forme suivante :

$$k_e = \begin{bmatrix} [k_u] & 0 \\ 0 & [k_w] \end{bmatrix}
 \tag{III.9}$$

De la formule (III.7), on trouve la forme de la matrice de rigidité élémentaire K_e :

$$K_e = \begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{EA}{2l} [N_{u,\xi}]^T [N_{u,\xi}] d\xi & 0 \\ 0 & \int_0^1 \frac{EI_z}{2l^3} [N_{w,\xi\xi}]^T [N_{w,\xi\xi}] d\xi \end{bmatrix}
 \tag{III.10}$$

III.4 Détermination de la matrice masse élémentaire de la poutre

D'après l'équation de l'énergie cinétique de l'élément poutre donnée par l'équation (I.6)

Sous forme simplifiée on a :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{U}_0^2 + \dot{W}_0^2) dV \quad (\text{III.11})$$

L'expression de l'énergie cinétique de la poutre en coordonnées adimensionnelles est :

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \{\dot{X}\}^T [N_u]^T [N_u] \{\dot{X}\} dx + \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \{\dot{Z}\}^T [N_w]^T [N_w] \{\dot{Z}\} dx \quad (\text{III.12})$$

Donc on peut écrire la matrice masse élémentaire M_e de l'arbre tournant sous la forme suivante :

$$M_e = \begin{bmatrix} [M_u] & 0 \\ 0 & [M_w] \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

La forme de la matrice masse élémentaire est donnée par :

$$M_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho A \int_0^l [N_u]^T [N_u] d\xi & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \rho A \int_0^l [N_w]^T [N_w] d\xi \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

III.5 Détermination de la matrice rigidité d'une poutre fissurée



Figure III.2 : composant d'un système lié avec deux ressorts (flexion- traction).

La matrice de rigidité de la fissure $[K_{Cr}]$ est donnée comme suit :

$$K_{Cr} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{11}} & \frac{-1}{C_{11}} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{C_{13}} & 0 & 0 & \frac{1}{C_{11}} & \dots & \dots \\ \frac{-1}{C_{11}} & \frac{1}{C_{11}} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{C_{13}} & 0 & 0 & \frac{1}{C_{13}} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \frac{1}{C_{13}} & \frac{1}{C_{13}} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{C_{33}} & 0 & 0 & \frac{-1}{C_{33}} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{-1}{C_{33}} & \dots & \dots & \frac{1}{C_{33}} & \dots & \dots \\ \frac{1}{C_{13}} & \frac{1}{C_{13}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (III.15)$$

C_{11} : coefficient de flexibilité due à la traction

C_{33} : coefficient de flexibilité due à la flexion

C_{13} : coefficient de flexibilité due au couplage(traction flexion) .

III.6 Détermination de la matrice masse et de la matrice rigidité globale de la poutre

Les matrices globales du système sont exprimées par le système d'équations suivantes:

$$[M_G]\{\ddot{q}\} + [K_G]\{q\} = \{0\} \quad (III.16)$$

Avec :

$[M_G]$: Matrice masse globale du système.

$[K_G]$: Matrice rigidité globale du système.

$\{q\}$: Vecteur de déplacement globale.

Chapitre VI : Organisation de la programmation

VI-1.Introduction

Le programme se fait par un logiciel MATHCAD v14 a pour but de déterminer les fréquences propres d'une poutre fissuré soumis à des sollicitations composées (traction flexion) .en introduisant la méthode des éléments finis avec les conditions aux limites et différents paramètres physiques et géométriques.

Et pour l'exécution de notre programme en utilise un micro-ordinateur composé d'un processeur Intel (R) core i3-3120M CPU @2.50GHZ avec une mémoire de capacité de 4.00 Go (RAM).

Ce programme comporte :

- Un fichier de données.
- Le programme de calcul.
- Un fichier de sortie.

VI -2. Schéma de calcul

La **Figure VI.1** représente les différentes étapes de programmation, ces étapes sont les suivantes :

1. Lecture des données concernant le nombre de fonction de forme, propriétés mécaniques et les données géométriques avec les coefficients de flexibilité de la fissure de la poutre.
2. Calcul des matrices de rigidité élémentaires $[K_{uu}], [K_{ww}][K_c], .$
3. Calcul des matrices masse élémentaires $[M_{uu}], [M_{ww}],$
4. Formation des matrices globales $[M], [K]$
5. Introduction des conditions aux limites
6. calcul des fréquences propres.

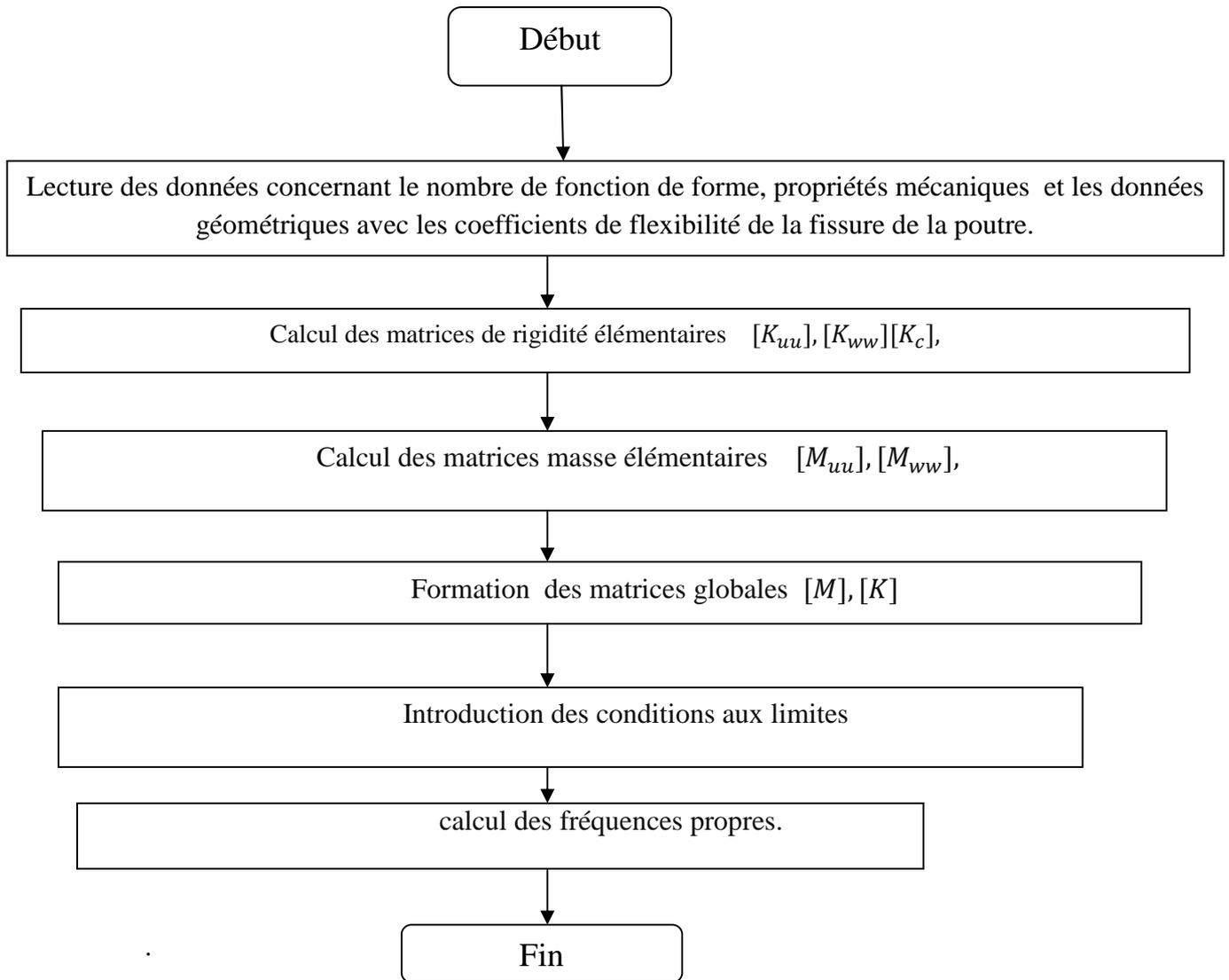


Figure VI.1 : schéma de calcul

VI-3. Description du programme

a-Fichier de données

Toutes les données nécessaires pour le calcul des fréquences (paramètres élémentaires physiques et géométriques de la poutre fissuré) sont introduites.

Ces données sont :

E : module d'Young ou module d'élasticité longitudinal

ν : coefficients de poisson

ρ : Masse volumique

L : Longueur de l'arbre.

d_e : Diamètre extérieur de la poutre

d_i : Diamètre intérieur de la poutre

A : section droite d'élément poutre

I : moment d'inertie de la poutre

P_u : Nombre de fonction de forme dans la direction longitudinale x .

P_w : Nombre de fonction de forme de la direction transversale z .

C_{11} : coefficient de flexibilité due à la traction

C_{33} : coefficient de flexibilité due à la flexion

C_{13} : coefficient de flexibilité due au couplage (traction flexion)

ω : la pulsation propre

b-programme de calcul

Le programme "**poutre fissuré**" permet de déterminer les fréquences propres d'une poutre fissurée.

c-Sous programme pour le calcul des matrices masse et de rigidité globale

Après avoir introduit les données nécessaires, la première étape consiste à calculer les matrices masse et de rigidité élémentaire à partir un sous programme < matrice élémentaire>, ensuite en introduit la matrice de rigidité de la fissure. On les conditions aux limites après la formation des matrices masse et rigidité globale du système.

d- calcul des fréquences propres :

Dans notre cas on traite un problème de vibrations sont libres :

Ce programme permet de calculer :

Les pulsations propres ω du système.

VI-4.Calcul des paramètres de fréquence

Une fois les matrices masse et de rigidité formée, les paramètres de fréquence seront déterminées en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$[-\omega^2[M] + [K]\{q\} = 0 \tag{VI.1}$$

Une transformation du problème généralisé en un problème standard est effectuée.

$$[-\omega^2[I] + [B]\{q\} = 0 \tag{VI.2}$$

Avec

$$[B] = [M]^{-1}[K] \tag{VI.3}$$

La matrice [M] est une matrice symétrique ce qui permet de la décomposer en utilisant la méthode de Choleski.

$$[M] = [L]^T[L] \tag{VI.4}$$

[L] est une matrice triangulaire inférieure, en injectant (VI.4) dans (VI.1) il résulte :

$$[[L]^{-T}[L]^{-1}[K] - -\omega^2[I]]\{q\} = 0 \tag{VI.5}$$

La matrice [B] est ainsi donnée par :

$$[B] = [L]^{-T}[L]^{-1}[K] \tag{VI.6}$$

La matrice [B] est obtenue en deux étapes :

1. **Résoudre le système** $[L][D]=[K]$ pour $[D]=[L]^{-1}[K]$
2. **Résoudre le système** $L^T[D]=[B]$ pour $[B]=[L]^{-T}[L]^{-1}[K]$

Le système d'équations (VI.5) a les mêmes valeurs propres que le système d'équations (VI.1).le problème est maintenant standard, du fait que la matrice [B] est symétrique, les méthodes de Householder et QR peuvent être appliquées.

Chapitre V : Validations, comparaisons et analyse de cas

V-1 Introduction

Nous présenterons dans ce chapitre une analyse dynamique d'une poutre fissurée soumise à des sollicitations composées (traction flexion) provoquée par les conditions de l'environnement. La première partie de ce chapitre met en évidence la validité du programme développé, ainsi une étude comparative est faite avec des travaux de différents auteurs. La deuxième partie fait l'objet d'une étude d'une poutre fissurée soumise à des différents paramètres qui influent sur sa structure.

V-2 Validations et comparaisons des résultats dans le cas d'une poutre sans fissure :

Les résultats obtenus seront validés avec des résultats de la littérature. Différentes conditions aux limites sont considérées.

V-2.1 poutre sans fissure à section circulaire.

Tableau 5.1 comparaison des Solutions exactes avec les résultats obtenus dans les cas suivants (Encastré – encastré), (Encastré – libre), (Appuyé – appuyé) [12].

Propriétés mécaniques :

$$E = 1 \quad \rho = 1 \quad L_p = 1000$$

$$R = 2 \quad b = 1$$

Données géométriques :

$$\text{Longueur des éléments : } L = \begin{pmatrix} \frac{L_p}{2} \\ \frac{L_p}{10000} \\ L_p - \frac{L_p}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Section de la poutre : } A = \begin{pmatrix} \pi \cdot R^2 \\ \pi \cdot R^2 \\ \pi \cdot R^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Moment d'inertie de la poutre : } I = \begin{bmatrix} \pi \cdot \frac{(2 \cdot R)^4}{64} \\ \pi \cdot \frac{(2 \cdot R)^4}{64} \\ \pi \cdot \frac{(2 \cdot R)^4}{64} \end{bmatrix}$$

Validation, comparaison et analyse des cas

Poutre		(mode 1)	(mode 2)	(mode3)
E-L	Solution exacte	3,516	22,030	61,685
	Résultats	3.515	22.033	61.701
A-A	Solution exacte	9,869	39,478	88,826
	Résultats	9.865	39.476	88.830
E-E	Solution exacte	22,37	61,67	120.902
	Résultats	22.372	61.669	120.912

V-2.2 poutre fissurée à section circulaire.

A -Influence de l'ouverture de la fissure sur les fréquences propres.

Tableau 5.2 : comparaison dans le cas d'une poutre encastree - libre

1. Dans le cas de la flexion

<i>Position de la fissure (a)</i>	SOLLICITATION	Fréquences Propres		
		1	2	3
a=0 (Solution exacte)		3.515	22.033	61.701
0.4	Flexion	3.424	19.884	61.693
0.8	Flexion	2.064	11.42	61.677
1	Flexion	1.336	10.422	61.675
1.2	Flexion	0.876	10.094	61.674

2. Dans le cas de la traction flexion

<i>Position de la fissure</i>	SOLLICITATION	Fréquences Propres		
		1	2	3
a=0 (Solution exacte)		3.515	22.033	61.701
0.4	Traction Flexion	3.424	4.551	19.884
0.8	Traction Flexion	1.576	2.064	11.42
1	traction flexion	1.068	1.336	10.422
1.2	Traction flexion	0.749	0.876	10.094

Tableau 5.3 : comparaison dans le cas d'une poutre encastree- encastree

1. Dans le cas de la flexion

<i>Position de la fissure</i>	SOLLICITATION	Fréquences Propres		
		1	2	3
a=0 (Solution exacte)		22,37	61,67	120.902
0.4	Flexion	20.806	61.674	110.795
0.8	Flexion	15.051	61.674	90.179
1	Flexion	14.417	61.674	88.835
1.2	Flexion	14.207	61.674	88.418

2. Dans le cas de la traction flexion

<i>Position de la fissure</i>	SOLLICITATION	Fréquences Propres		
		1	2	3
a=0 (Solution exacte)		22,37	61,67	120.902
0.4	Traction Flexion	20.806	61.674	110.795
0.8	Traction Flexion	15.051	61.674	90.179
1	traction flexion	14.417	61.674	88.835
1.2	traction flexion	14.207	64.674	88.418

Tableau 5.4 : comparaison dans le cas d'une poutre appuyée – appuyée.

1. Dans le cas de la flexion

<i>Position de la fissure</i>	SOLLICITATION	Fréquences Propres		
		1	2	3
a=0 (Solution exacte)	Solution exacte	9,869	39,478	88,826
0.4	Flexion	8.88	39.478	81.235
0.8	Flexion	3.336	39.478	63.621
1	Flexion	1.986	39.478	62.342
1.2	Flexion	1.265	39.478	61.942

2. Dans le cas de la traction flexion

<i>Position de la fissure</i>	SOLLICITATION	Fréquences Propres		
		1	2	3
a=0 (Solution exacte)		9,869	39,478	88,826
0.4	Traction Flexion	4.551	8.88	39.478
0.8	Traction Flexion	1.576	3.336	39.478
1	traction flexion	1.068	1.986	39.478
1.2	traction flexion	0.749	1.265	39.478

Interprétations des résultats :

A partir des conditions aux limites associées (encastrée- libre, encastrée- encastrée, appuyée – appuyée). Les tableaux suivant (5.1), (5.2), (5.3) donne les 3 premiers fréquences propres en fonction des dimensions de la fissure. Les résultats obtenu montrent qu'il ya un changement des fréquences en présence d'une fissure.les fréquences diminuent lorsque la dimension de la fissure augmente.

Conclusion

L'étude concerne l'analyse des vibrations d'une poutre fissurée, le but de ce présent travail est de pouvoir détecter la présence d'une fissure en utilisant analyse modale.

La méthode des éléments finis hiérarchique est utilisé pour modéliser le système.

Un programme éléments finis à été développée pour résoudre le problème, une étude comparative montrent que les résultats trouvés sont identiques à ceux de la littérature.

Les résultats trouvés montrent que la présence d'une fissure influe sur les fréquences propres de la poutre.

Biographie

Références bibliographiques

- [1] T.G. Chondros, A.D. Dimarogonas, J. Yao, A continuous cracked beam vibration theory, *Journal of Sound and Vibration* 215 (1) (1998) 17–34.
- [2] S. Orhan, Analysis of free and forced vibration of a cracked cantilever beam, *NDT&E International* 40 (2007) 443–450.
- [3] P. Gudmundson, The dynamic behavior of slender structures with cross-sectional cracks, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 31 (1983)
- [4] W. Zhang, Z. Wang, H. Ma, Crack identification of stepped cantilever beam combining wavelet analysis with transform matrix, *Acta Mechanica Solida Sinica* 22 (4) (2009) 360–368.
- [5] M. Kisa, J. Brandona, M. Topcu, Free vibration analysis of cracked beams by a combination of finite elements and component mode synthesis methods, *Computers and Structures* 67 (1998) 215–223.
- [6] J. Fernandez-Saez, L. Rubio, C. Navarro, Approximate calculation of the fundamental frequency for bending vibrations of cracked beams, *Journal of Sound and Vibration* 225 (2) (1999) 345–352.
- [7]:cours David Ryckelynck, INTRODUCTION A LA THEORIE DES POUTRES, 16 mars 2012
- [8] Sylvie Pommier, Gravouil, Nicolas Méos, Alain Combescure, la simulation numérique de la propagation des fissures, Lavoisier.
- [9] Khoa Viet Nguyen, Mode shapes analysis of a cracked beam and its application for crack detection, *Journal of Sound and Vibration*, 2013.
- [10] BOUKHALFA Abdelkrim, Comportement vibratoire des arbres tournants en matériaux composites, 12 Mai 2009.
- [11] A. Houmat, A Sector Fourier p- element Applied to Free Vibration Analysis of Sector Plates, *Journal of Sound and Vibration*, 243 (2001)

Biographie

[12] Hamza cherif S.M.Cours dynamiques des structures.