

1.1 Introduction :

Ce chapitre commence par la définition d'une plaque (§1.2). L'exposé introduit ensuite l'analyse tensorielle (§1.3). Nous soulignons dans une première étape la définition des transformations de coordonnées (§1.3.1). Nous définissons le tenseur métrique Euclidien et la dérivée covariante dans le paragraphe (§1.3.2) et (1.3.3).

A partir de la notion de déformation (§1.4), fondée sur la variation du produit scalaire de deux vecteurs élémentaires, nous obtenons le tenseur de déformation de Green-Lagrange. Une étude de l'équilibre du milieu déformable est faite dans (§1.5.1) pour obtenir le tenseur de contrainte (§1.5.2). Dans le paragraphe (§1.6) nous exprimons les relations contraintes-déformations (loi de HOOKE généralisée), les expressions des énergies de déformation et cinétique de la plaque sont donnée dans (§1.7), (§1.8). Et enfin nous terminons ce chapitre par la détermination des équations du mouvement (§1.9).

1.2 Définition :

Une plaque est un solide défini par deux plans parallèles à un plan de référence, distants entre eux une distance H , appelée épaisseur de la plaque.

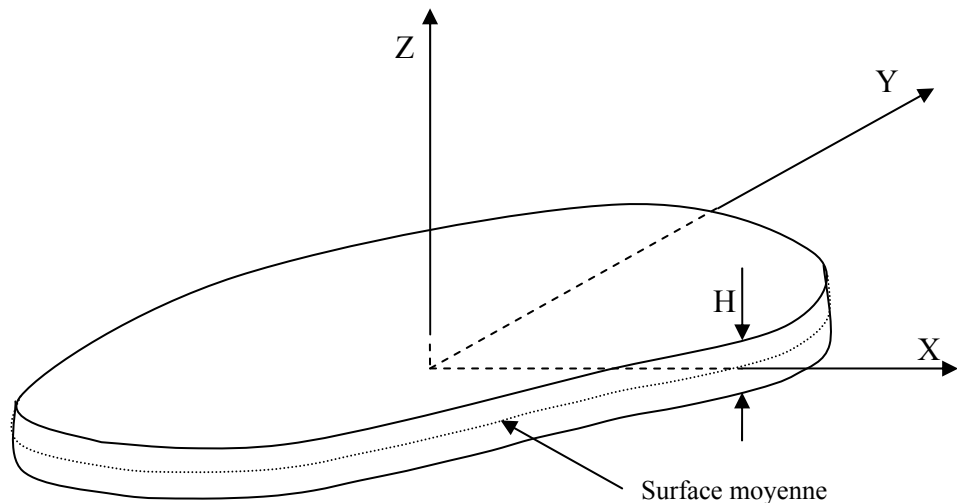


FIG.1.1 : Plaque de forme quelconque

Dans la littérature, l'étude de la majorité des plaques est basée sur deux hypothèses, la première est celle de Kirchhoff (théorie des plaques minces), la seconde est celle de Mindlin (théorie des plaques épaisses). Ces deux hypothèses transforment le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel.

1.3 Analyse tensorielle :

Les lois physiques, pour être valables, elles doivent être indépendantes de tout système de coordonnées particulier utilisé pour les exprimer mathématiquement. Une étude des conséquences de cette condition conduit à l'analyse tensorielle, laquelle est d'un grand emploi en théorie de la relativité générale, en géométrie différentielle, en mécanique, en élasticité, en hydrodynamique, en théorie de l'électromagnétisme et dans de nombreuses autres branches de la science ou de la technique.

1.3.1 Transformations de coordonnées :

L'analyse tensorielle permet l'étude du changement de composantes d'une quantité tel un vecteur par rapport aux transformations de coordonnées :

X^1, X^2, X^3 : Coordonnées d'un point dans un repère de référence.

$\bar{X}^1, \bar{X}^2, \bar{X}^3$: Un groupe de nouvelles variables.

$\bar{X}^i = f^i(X^1, X^2, X^3)$ ($i = 1, 2, 3$) Equation de la transformation

$X^i = g^i(\bar{X}^1, \bar{X}^2, \bar{X}^3)$ ($i = 1, 2, 3$) Equation de la transformation inverse

Pour garantir une telle transformation est réversible dans une certaine région \mathbf{R} des variables X^1, X^2, X^3 , il suffit que :

a / les fonctions f^i sont continues et possèdent des valeurs uniques et les dérivées partielles premières continues dans la région \mathbf{R} .

b / le déterminant Jacobien ne s'annule pas dans la région \mathbf{R}

$$J = \frac{\left| \frac{\partial \bar{X}^i}{\partial X^j} \right|}{\left| \frac{\partial \bar{X}^i}{\partial X^j} \right|} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{X}^1}{\partial X^1} & \frac{\partial \bar{X}^1}{\partial X^2} & \frac{\partial \bar{X}^1}{\partial X^3} \\ \frac{\partial \bar{X}^2}{\partial X^1} & \frac{\partial \bar{X}^2}{\partial X^2} & \frac{\partial \bar{X}^2}{\partial X^3} \\ \frac{\partial \bar{X}^3}{\partial X^1} & \frac{\partial \bar{X}^3}{\partial X^2} & \frac{\partial \bar{X}^3}{\partial X^3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.1)$$

1.3.2 Tenseur métrique Euclidien :

La mesure de la déformation au cours de la transformation d'un solide s'effectue en suivant l'évolution d'un repérage des points du solide. Pour notre part, le choix de deux types de coordonnées (Cartésiennes et générales), nous permet de suivre directement l'évolution du matériau à partir d'une grandeur caractéristique, appelée tenseur métrique Euclidien ou tenseur fondamental.

X^1, X^2, X^3 : Coordonnées Cartésiennes.

$\theta^1, \theta^2, \theta^3$: Coordonnées générales.

$$\theta^i = \theta^i(X^1, X^2, X^3) \quad (1.2)$$

$$X^i = X^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (1.3)$$

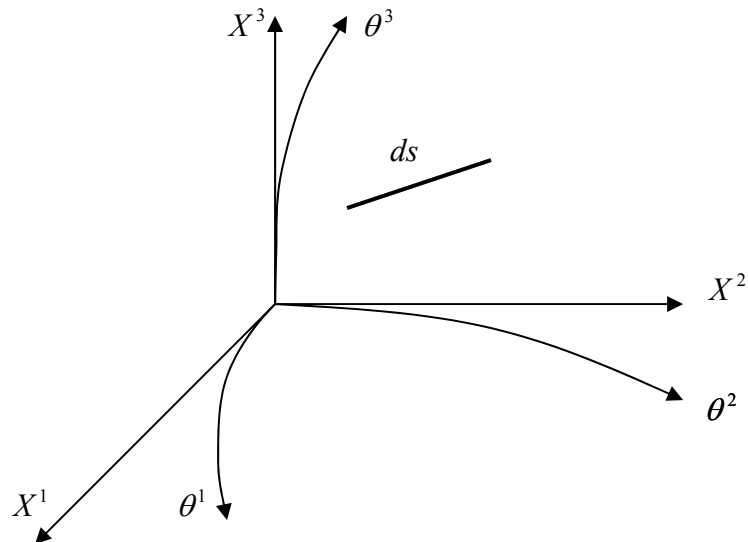


FIG 1.2 : Élément linéaire dans deux systèmes de coordonnées

Considérons un élément linéaire ayant trois composantes données par les différentiels dX^1, dX^2, dX^3 .

$$ds^2 = dX^i \cdot dX^i \quad (1.4)$$

Selon les lois ordinaires de différentiation nous avons :

$$dX^i = \frac{\partial X^i}{\partial \theta^k} \cdot d\theta^k \quad (1.5)$$

Remplaçons (1.5) dans (1.4) nous obtenons :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial X^i}{\partial \theta^k} \frac{\partial X^i}{\partial \theta^m} \cdot d\theta^k d\theta^m \quad (1.6)$$

Nous posons :

$$g_{km} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial X^i}{\partial \theta^k} \frac{\partial X^i}{\partial \theta^m} \quad (1.7)$$

D'où l'équation (1.6) devient :

$$ds^2 = g_{km} \cdot d\theta^k d\theta^m \quad (1.8)$$

D'après l'équation (1.7) nous avons :

$$g_{km} = g_{mk}$$

Donc pour tous k et m les fonctions g_{km} sont symétriques.

Les fonctions g_{km} sont appelées les composantes covariantes du tenseur métriques Euclidien dans le système de coordonnées $\theta^1, \theta^2, \theta^3$, ces composantes en fonction des vecteurs de base s'écrivent.

$$g_{km} = g_k \cdot g_m \quad (1.9)$$

Les composantes contravariantes son déduisent par :

$$g^{ki} \cdot g_{im} = \delta_m^k \quad (1.10)$$

où δ_m^k est le delta de Kronecker définit par :

$$\delta_m^k = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.11)$$

Nous définissons le vecteur de base \mathbf{g} par :

$$\bar{\mathbf{g}}_k = \frac{\partial X^j}{\partial \theta^k} \bar{\mathbf{I}}_j \quad (1.12)$$

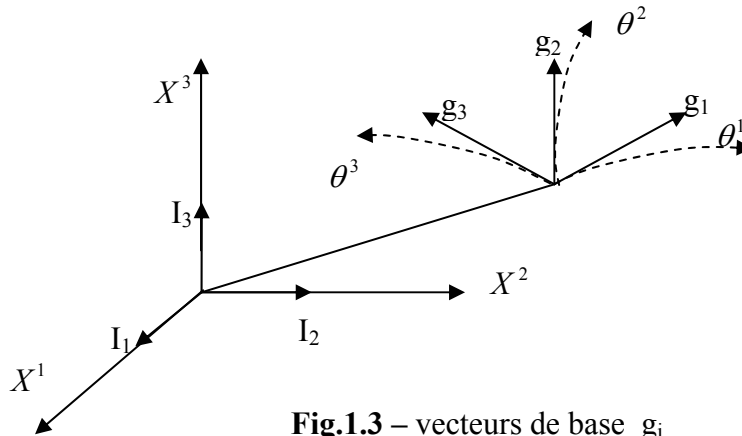


Fig.1.3 – vecteurs de base \mathbf{g}_i

1.3.3 Dérivation covariante du champ vectoriel :

Soit v_i un champ vectoriel covariant, la dérivée covariante de v_i est définie par :

$$v_i |_{,j} = v_{i,j} - \Gamma_{ij}^r \cdot v_r \quad (1.13)$$

où $v_{i,j}$ est la dérivée partielle donnée par $v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial X^j}$

et Γ_{ij}^r est le symbole de Christoffel donné par :

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} \cdot g^{ra} \left(\frac{\partial g_{aj}}{\partial X^i} + \frac{\partial g_{ia}}{\partial X^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^a} \right) \quad (1.14)$$

1.4 Tenseur de déformation :

Nous considérons deux configurations d'une plaque à l'instant $t = 0$ et à l'instant t (figure (1.4)), dans deux repères curvilignes différents.

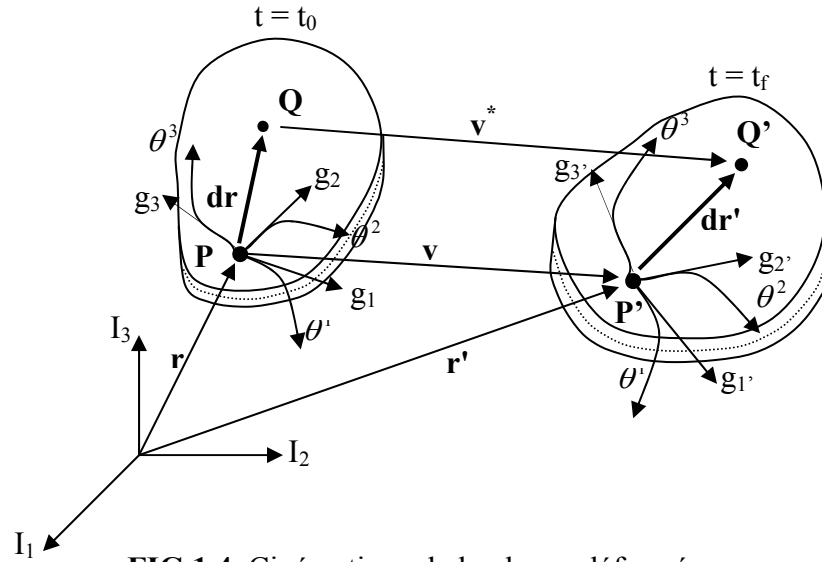


FIG 1.4 Cinématique de la plaque déformée

La déformation du solide élastique est obtenue par la soustraction des carrés des variations élémentaires avant et après déformation du solide [3].

$$\begin{aligned}
 dr'.dr' - dr.dr &= ds'^2 - ds^2 = (g'_i \cdot g'_j - g_i \cdot g_j) \cdot d\theta^i \cdot d\theta^j \\
 &= (g'_{ij} - g_{ij}) d\theta^i \cdot d\theta^j \\
 &= 2 \cdot e_{ij} \cdot d\theta^i \cdot d\theta^j
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

où e_{ij} sont les composantes du tenseur de déformation qui peuvent être déterminées par :

$$e_{ij} = (g'_{ij} - g_{ij}) / 2 \tag{1.16}$$

Exprimons les composantes du tenseur métrique avant déformation par les composantes métriques après déformation, nous obtenons les composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange [3].

$$e_{ij} = (u_i|_j + u_j|_i + u^k|_i u_k|_j) / 2 \tag{1.17}$$

où $u_i \Big|_j$ est la dérivée covariante du déplacement u_i donnée en fonction du symbole de Christoffel par la relation suivante :

$$u_i \Big|_j = u_{i,j} - \Gamma_{ij}^r \cdot u_r \quad (1.18)$$

où $u_{i,j}$ est la dérivée partielle du déplacement u_i .

Dans le repère Cartésien et par hypothèse de linéarité géométriques (petites déformations) les termes quadratiques dans l'équation (1.18) seront négligés, et les composantes de déformations linéarisées seront :

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (1.19)$$

Le développement de l'équation (1.19) donne les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1} \\ e_{12} &= (u_{1,2} + u_{2,1})/2 \\ e_{13} &= (u_{1,3} + u_{3,1})/2 \\ e_{22} &= u_{2,2} \\ e_{33} &= u_{3,3} \\ e_{23} &= (u_{2,3} + u_{3,2})/2 \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

1.4.1 Composantes physiques du tenseur de déformation

Dans l'équation (1.15), $d\theta^i$ est un vecteur dont les composantes physiques sont $\sqrt{g_{ij}} d\theta^i$.

Nous pouvons écrire l'équation (1.15) sous la forme :

$$ds'^2 - ds^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{e_{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} \left(\sqrt{g_{ii}} d\theta^i \right) \left(\sqrt{g_{jj}} d\theta^j \right) \quad (1.21)$$

Nous définissons les composantes physiques du tenseur de déformation par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} .e_{ij} \quad (1.22)$$

Ces composantes dans le repère Cartésien deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

1.5 Tenseur de contrainte:

1.5.1 Equilibre du milieu déformable :

Nous considérons un domaine matériel D caractérisé par le solide S de volume V et de frontière Γ (figure (1.5)) dont une partie Γ_u a ses déplacements imposés et une partie Γ_e subit des sollicitations extérieures (du type efforts de surfaces, efforts de contact). Le solide est également soumis à des forces de volume f_v (principalement le poids propre ou des termes d'inertie).

Sous l'action de ces différents efforts extérieurs, il apparaît dans le solide des efforts de cohésion qui permettent le maintien de la matière sollicitée et assurent l'équilibre du solide.

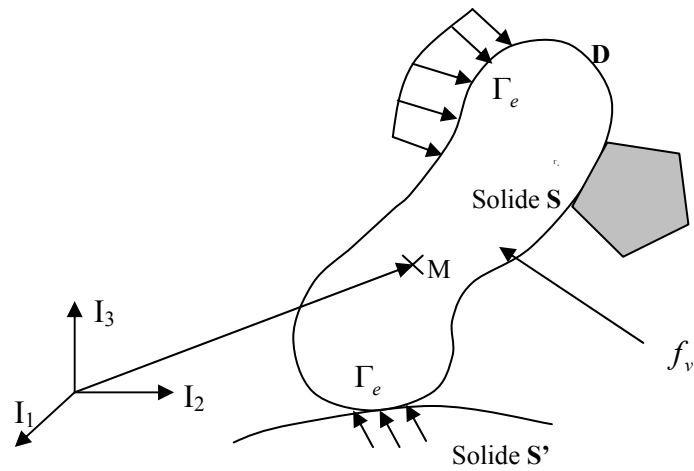


FIG .1.5 : Equilibre du solide

1.5.2 Tenseur de contraintes de Cauchy :

Pour mettre en évidence les efforts de cohésion, nous introduisons une coupure fictive du domaine matériel D (figure (1.6)) :

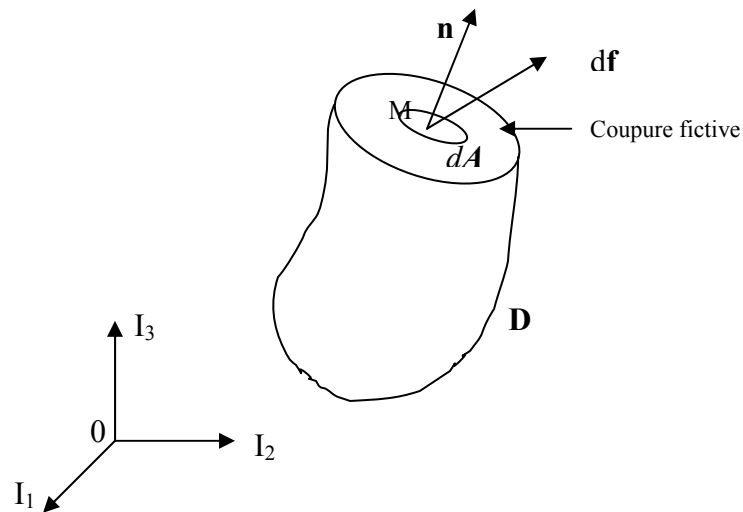


FIG.1.6 – Effort de cohésion-contraintes

Sur cette coupure, en un point M , le vecteur élémentaire des efforts de cohésion df s'exerce sur l'élément de surface dA de normale n . Dans la configuration $C(t)$, ramenée aux vecteurs de base g_i , nous avons :

$$dA = dA_i g^i \tag{1.24}$$

$$d\mathbf{f} = df^i g_i \quad (1.25)$$

Nous postulons (hypothèse de Cauchy) une relation linéaire entre les composantes df^i et dA_j donnée par :

$$df^i = \sigma^{ij} dA_j \quad (1.26)$$

Les composantes σ^{ij} sont les composantes contravariantes d'un tenseur, noté σ , appelé tenseur de contraintes de Cauchy.

$$\sigma = \sigma^{ij} g_i \cdot g_j = \sigma_{ij} g^i \cdot g^j \quad (1.27)$$

Les composantes σ_{ij} sont les composantes covariantes du tenseur σ

Nous définissons alors le vecteur densité des forces de surface, noté \mathbf{t} dont les composantes sont données par :

$$\mathbf{t}^i = \frac{df^i}{dA_j} = \sigma^{ij} n_j \quad (1.28)$$

1.6 Relation contraintes-déformations :

Pour un matériau élastique isotrope dans lequel il n'y a pas de changement de température, la loi de HOOKE (relation contraintes-déformations) généralisée en coordonnées générales est :

$$\tau^{ij} = E^{ijkl} \cdot e_{kl} \quad (1.29)$$

où τ^{ij} est le tenseur de contraintes, e_{kl} est le tenseur de déformation, et E^{ijkl} est le tenseur d'élasticité du 4^{ème} ordre, donné en fonction des coefficients de Lamé λ et μ par :

$$E^{ijkl} = \lambda \cdot g^{ij} g^{kl} + 2\mu \cdot g^{ik} \cdot g^{jl} \quad (1.30)$$

Le développement de la relation (1.29) donne :

$$\left. \begin{aligned}
 \tau^{11} &= E^{1111} \cdot e_{11} + E^{1122} \cdot e_{22} + E^{1133} \cdot e_{33} \\
 \tau^{22} &= E^{2211} \cdot e_{11} + E^{2222} \cdot e_{22} + E^{2233} \cdot e_{33} \\
 \tau^{33} &= E^{3311} \cdot e_{11} + E^{3322} \cdot e_{22} + E^{3333} \cdot e_{33} \\
 \tau^{23} &= E^{2323} \cdot e_{23} \\
 \tau^{13} &= E^{1313} \cdot e_{13} \\
 \tau^{12} &= E^{1212} \cdot e_{12}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

1.6.1 Composantes physiques du tenseur de contraintes :

Les composantes physiques du tenseur de déformation e^{ij} sont données par la relation (1.22). De même le tenseur des contraintes τ^{ij} est un tenseur d'ordre deux, sa composante physique σ_{ij} est donnée en fonction du tenseur métrique Euclidien covariant g_{ij} par la relation suivante :

$$\sigma^{ij} = \frac{\tau^{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} \quad (1.32)$$

Le remplacement des équations (1.22), (1.30) et (1.32) dans l'équation (1.31) donne les composantes physiques du tenseur de contraintes :

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{11} \\
 \sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{22} \\
 \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{33} \\
 \sigma_{23} &= 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{23} \\
 \sigma_{13} &= 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{13} \\
 \sigma_{12} &= 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{12}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Les trois dernières équations (1.33) peuvent être exprimées en fonction de la déformation angulaire γ_{ij} , ce qui donne en utilisant la notation X,Y,Z :

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx} \\
 \sigma_{yy} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy} \\
 \sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz} \\
 \sigma_{yz} &= \mu\gamma_{yz} \\
 \sigma_{xz} &= \mu\gamma_{xz} \\
 \sigma_{xy} &= \mu\gamma_{xy}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

1.7 Energie de déformation :

L'énergie de déformation est donnée par la relation :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (1.35)$$

L'équation (1.32) sous forme matricielle devient :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (1.36)$$

Pour un matériau isotrope et dans le repaire cartésien l'équation (1.29) devient

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.37)$$

où \mathbf{C} est la matrice d'élasticité donnée par :

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & sym & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

La substitution de (1.37) dans (1.36) donne l'équation de l'énergie de déformation en fonction de la matrice d'élasticité et du vecteur de déformation :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \quad (1.39)$$

Le vecteur de déformation peut être écrit sous forme d'un produit d'une matrice différentielle et du vecteur de déplacement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \quad (1.40)$$

où \mathbf{L} est un opérateur différentiel et \mathbf{U} est le vecteur déplacement donnés par :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.42)$$

Le remplacement de l'équation (1.40) dans l'équation (1.39) donne l'expression de l'énergie de déformation en fonction du champ de déplacement :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{U}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{U} dV \quad (1.43)$$

1.8 Energie cinétique :

L'expression de l'énergie cinétique se présente sous la forme :

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \int_V (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (1.44)$$

Cette expression sous forme matricielle est donnée par :

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \int_V \dot{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{U} dV \quad (1.45)$$

où $\dot{\mathbf{U}}$ est le vecteur des dérivées des composantes du vecteur de déplacement par rapport au temps, et ρ est la masse volumique du matériau.

1.9 Détermination des équations du mouvement :

Soit L_g la fonction de Lagrange définie à partir de l'énergie cinétique E_C (1.45) et de l'énergie potentielle E_d (1.43), alors :

$$L_g = E_C - E_d \quad (1.46)$$

Cette fonction permet d'obtenir les équations du mouvement de la plaque par la formule suivante (appelée formule de Lagrange) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) + \frac{\partial E_d}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (1.47)$$

où \mathbf{q} est le vecteur des coordonnées généralisées et $\dot{\mathbf{q}}$ est le vecteur de vitesses généralisées.

Pour les petits mouvements des corps élastiques les énergies cinétique et de déformation s'expriment respectivement comme forme quadratique des vitesses et des déplacements par.

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (1.48)$$

$$E_d = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (1.49)$$

où \mathbf{M} est la matrice masse, et \mathbf{K} est la matrice de rigidité.

Les équations du mouvement libre s'écrivent en fonction des vecteurs de déplacement et d'accélération généralisées :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = 0 \quad (1.50)$$

dont la solution est une fonction sinusoïdale du type $\mathbf{X} = \mathbf{A} e^{i\omega t}$ ce qui permet d'écrire :

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{X} = 0 \quad (1.51)$$

où ω est la pulsation propre du système vibratoire.