

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd - Tlemcen -

Faculté de TECHNOLOGIE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

En : Génie électrique et Electronique

Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle

Par : BENBOUZIANE Mohammed Abdelbaki

Sujet

**Synthèse de régulateur PID
pour les systèmes non linéaires incertains du deuxième ordre**

Soutenu publiquement, le 04/07/ 2019, devant le jury composé de :

Mme CHOUKCHOU BRAHAM Amal	MCA	Univ. Tlemcen	Président
M CHERKI Brahim	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de mémoire
M MECHERNENE Abdelkader	MCA	Univ. Tlemcen	Examineur

ملخص :

من المعروف جيداً أن جهاز التحكم PID الكلاسيكي هو الأكثر استخداماً في العمليات الصناعية ، على الرغم من التقدم الملحوظ في نظرية التحكم الحديثة على مدار الخمسين عاماً الماضية. صحيح أيضاً أن الدراسات النظرية الحالية حول التحكم في PID تركز بشكل أساسي على الأنظمة الخطية ، على الرغم من أن معظم أنظمة التحكم العملية غير خطية و غير يقينية في جوهرها. وبما ان استخدام PID في التحكم في الأنظمة الغير الخطية يقتصر فقط حول نقاط التوازن ، أكد هذا المشروع النهائي للدراسة النظرية الرياضية الجديدة حول الإستقرار الكلي وبعبارة أخرى أنه من الممكن مع اختيار دقيق للمعاملات (متناسبة ، متكاملة ، مشتقة) ، بحيث يمكن للمرء تثبيت نظام غير خطي غير مؤكد من الدرجة الثانية في أي نقطة.

الكلمات المفتاحية : جهاز التحكم ، الأنظمة الخطية ، غير يقينية ، الأنظمة الغير الخطية ، الإستقرار الكلي ، متناسبة ، متكاملة.

Abstract:

Although the PID (Proportional-Integral-Derivative) controller is used most widely and with the most success in engineering systems that are generally non-linear with various uncertainties, almost all existing PID controller research focus on linear systems. The purpose of this thesis is to present a theory on the PID controller for uncertain nonlinear systems, and to prove that it is possible with a rigorous choice of parameters (proportional, integral, derivative), to stabilize an uncertain nonlinear system second order at any point of operation, establishing necessary conditions on the growth rate non-linearity of the system.

Keywords: PID controller, linear, nonlinear systems, proportional, integral, derivative, uncertain

Résumé :

Il est bien connu que le contrôleur PID classique est de loin le plus utilisé dans les processus industriels, malgré les progrès remarquables de la théorie du contrôle moderne au cours des cinquante dernières années. Il est également vrai que les études théoriques existantes sur le contrôle PID se concentrent principalement sur les systèmes linéaires, bien que la plupart des systèmes de contrôle pratiques soient intrinsèquement non linéaires avec des incertitudes. Étant donné que l'utilisation du PID dans le contrôle des systèmes non linéaires n'est limitée qu'aux points d'équilibre, ce projet de fin d'étude vient de réaffirmer la nouvelle théorie mathématique sur la stabilité globale autrement dit qu'il est possible avec un choix rigoureux des paramètres (proportionnel, intégral, dérivé), stabiliser un système non-linéaire incertain du deuxième ordre à n'importe quel point.

Mots-clés : Contrôleur PID, systèmes linéaires, systèmes non linéaires, stabilité globale, proportionnel, intégral, dérivé, incertain.

A mes très chers parents, à mon défunt père, à ma chère mère qui est malade en témoignage et en gratitude de leur dévouement et leur soutiens permanent durant toutes mes années d'études, leurs sacrifices illimités, leur réconfort moral et tous les efforts qu'ils ont consentis pour mon éducation et mon instruction pour me voir réussir un jour.

Remerciements

Tout d'abord je remercie Allah le tout puissant qui m'a gardé en bonne santé afin de faire ce travail et qui m'a permis de vivre ce bonheur.

Tout mes vifs remerciements vont vers mon promoteur Mr CHERKI Brahim pour ses conseils chaleureux, son encadrement, sa disponibilité et son aide précieuse pour réaliser ce modeste travail, pour cela on l'assure de ma sincère gratitude et mon respect le plus profond.

Nous remercions les membres du jury, Mme CHOUKCHOU BRAHAM Amal Maitre de Conférence de l'Université de Tlemcen (présidente de jury) et Mr. MECHERNENE Abdelkader, Maitre de Conférence de l'Université de Tlemcen (Membre de jury) et qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce mémoire.

Mes remerciements au Docteur-Ingénieur BENNACER Djamel en tant qu'ami et responsable de la structure dont j'exerce mes fonctions pour ces encouragements et son aide et de m'avoir facilité la tâche pour poursuivre mes études du Master2.

Je tiens à remercier également toute personne ayant contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce projet.

Sommaire

Introduction	1
1 Revue de littérature	2
1.1 Comprendre le PID : Incertitude, non-linéarité et feedback	4
1.2 Description de l'incertitude	4
1.3 Description des régulateurs PID	5
1.4 Le régulateur PID	5
1.5 Aspects fonctionnels du régulateur PID	6
1.6 Action proportionnelle (P)	7
1.6.1 Principe de l'action proportionnelle	7
1.6.2 Fonction de transfert d'un régulateur proportionnel :	8
1.6.3 Limite du régulateur proportionnel :	8
1.7 Action intégrale et proportionnelle intégrale	8
1.8 Action intégrale seule :	9
1.9 Action proportionnelle intégrale (PI) :	9
1.10 Fonction de transfert d'un régulateur proportionnel intégral (PI) :	10
1.11 Action proportionnelle dérivée(PD) :	10
1.11.1 Principe de l'action :	10
1.11.2 Fonction de transfert du correcteur PD :	11
1.11.3 Filtrage de la dérivée :	11
1.12 Action Proportionnelle intégrale Dérivée (PID) :	12
1.13 Techniques de réglage classiques	12

1.14 Règles Ziegler-Nichols (ZN)	13
1.15 Autres méthodes	14
1.16 Techniques d'optimisation intelligentes et informatiques	14
2 Généralités sur la commande des systèmes non linéaires	16
2.1 Introduction	16
2.2 Les systèmes non linéaires	16
2.3 Représentation des systèmes non linéaires	17
2.3.1 Système autonome	17
2.3.2 Points d'équilibre	18
2.4 Stabilité des systèmes non linéaires	18
2.4.1 Fonction candidate de Lyapunov	19
2.4.2 Théorèmes de stabilité	19
Stabilité locale	19
Stabilité globale	20
2.4.3 Stabilité entrée-sortie	20
2.5 Conclusion	20
3 Réglage du PID selon C. ZHAO et L. GUO	21
3.1 introduction	21
3.2 Formulation du problème	23
3.3 Résultats	24
3.4 Conclusion	31
4 Application sur le pendule inversé	33
4.1 Pendule inversé	33
4.2 Objectif de l'étude d'un pendule inversé	33
4.3 Modélisation du pendule	35
4.3.1 Description de la méthode :	37
4.4 Détermination des paramètres k_p, k_i, k_d selon C. ZHAO et L. GUO	39
4.5 Conclusion	45
Conclusion	48

Liste des abréviations et symboles

$\epsilon(t)$	Erreur statique
ω	Pulsation propre du système
D	Dévié
G	Fonction de transfert du système
I	Intégrale
k_u	Valeur limite de stabilité
K_c	Gain du contrôleur
N	Gain du module 'dérivée filtrée
P	Proportionnel
PID	Proportionnel, Dérivé, Intégral
t	Temps
T_d	Temps de dérivée
T_i	Constante de temps intégral
T_u	Période des oscillations
$u(t)$	Sortie du Contrôleur
u_0	Valeur d'offset

$Y(t)$ Mesure de la variable à réguler

$Y_c(t)$ Consigne

List of Tables

- 1.1 Détermination des paramètres 13
- 4.1 Paramètres de régulation 37

List of Figures

1.1	Système asservi avec perturbation	4
1.2	L'incertitude	4
1.3	Structure de retour linéaire de la forme présent-passé-futur	6
1.4	Sortie régulateur	8
1.5	Sortie d'un régulateur intégral pur	9
1.6	Effet prédictif du terme dérivé	11
1.7	Dérivée filtrée	12
1.8	Réponse en échelon du système du premier ordre	13
3.1	Illustration du domaine Ω_{PID}	25
4.1	HONDA Roadster NC 750 en équilibre à l'arrêt	34
4.2	Robots EMIEW (gauche) and EMIEW2 (droite)	34
4.3	Pendule inversé	35
4.4	mise en oscillation d'un système par contre- réaction	37
4.5	Réponse à une perturbation de $0.1radian$ du système linéaire $X_{10} = \pi/2$, Réf. π	38
4.6	Application du PID classique sur le système non linéaire avec perturbation de $0.1radian$ ($rf = \pi$)	39
4.7	Réponse à une perturbation de $0.1radian$ du système non-linéaire $X_{10} = \pi/2$	41
4.8	Réponse à une perturbation de $0.1radian$ du système non-linéaire, Réf. π	42
4.9	Réponse à une perturbation de $0.1radian$ du système linéaire $X_{10} = \pi/6$, Réf. π	43
4.10	Application du PID classique sur le système réel $X_{10} = \pi/6$, Réf. π	44
4.11	Réponse à une perturbation de $0.1radian$ du système non-linéaire $X_{10} = \pi/6$, Réf. π	45

4.12	Marge de phase en fonction de x_{10} avec les paramètres PID linéaire	46
4.13	Marge de phase en fonction de x_{10} avec les paramètres PID non linéaire	47
4.14	Subsystem(PID)	54
4.15	Pendule inversé + PID	55
4.16	Pendule inversé (linéarisé autour de π) + PID	55

Introduction

Bien que le contrôleur classique PID (proportionnel-intégral-dérivé) soit utilisé le plus largement et avec le plus de succès dans les systèmes d'ingénierie qui sont généralement non linéaires avec diverses incertitudes, la quasi-totalité des recherches existantes sur les contrôleurs PID se concentrent sur les systèmes linéaires. Le but de ce mémoire est de présenter une théorie sur le contrôleur PID pour les systèmes non linéaires incertains, et de prouver qu'il est possible avec un choix rigoureux des paramètres (proportionnel, intégral, dérivé), stabiliser un système non-linéaire incertain du deuxième ordre à n'importe quel point.

Il y a lieu de préciser que ce travail est basé essentiellement sur un article paru en février 2017 sur le journal science china sous-titré : **PID controller design for second order nonlinear uncertain systems** pour Cheng ZHAO & Lei GUO et qui était classé parmi les articles de l'année. Notre travail est présenté dans un mémoire organisé en quatre (04) chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présenterons un état de l'art sur les régulateurs PID, des généralités sur le régulateur PID classique, ses aspects fonctionnels, ses différentes structures, ainsi que des méthodes de synthèse de ses paramètres, puis après nous entamerons la commande des systèmes non linéaires dans le deuxième chapitre puis dans le troisième chapitre nous présenterons la démonstration mathématique publiée dans l'article : PID controller design for second order nonlinear uncertain systems pour Cheng ZHAO & Lei GUO, puis après nous entamerons le chapitre l'application sur le pendule inversé ou nous présenterons les résultats de simulation sous matlab en établissant un lien entre ces résultats et les concepts de marge de phase et de gain.

Revue de littérature

Les régulateurs PID répondent à plus du 90% des besoins industriels et le nombre de régulateurs installés dans une usine pétrolière, par exemple, se compte par milliers. Malheureusement, malgré l'expérience acquise au fil des ans, les valeurs choisies pour les paramètres P, I et D ne sont pas toujours satisfaisantes, ni adaptées au processus à régler. L'histoire des régulateurs est déjà longue et il peut être intéressant de rappeler quelques étapes importantes :

- Au début du 9^{ème} siècle les frères Abou Moussa (Savants Musulmans) ont pu réguler le débit d'eau à travers un dispositif, en contrôlant le paramètre pression (l'air et l'eau). (Voir l'histoire des savants musulmans volontairement occultés : <https://www.youtube.com/watch?v=psZ1ZytJ03o&t=46s>.)
- Les premiers régulateurs de type centrifuge apparaissent vers 1750 pour régler la vitesse des moulins à vent, suivi en 1788 du fameux contrôleur de vitesse d'une machine à vapeur de James Watt.
- La première analyse mathématique d'une machine à vapeur avec régulateur a été réalisée par Maxwell en 1868.
- La première évolution du contrôleur PID a été développée en 1911 par Elmer Sperry.
- En 1922 N. Minorsky développa analytiquement des contrôleurs PID pour le pilotage automatique des navires.
- En 1933 la Compagnie (TIC) Taylor Instrumental lance le premier contrôleur pneumatique doté d'un contrôleur proportionnel entièrement réglable. Quelques années plus tard, les ingénieurs de contrôle ont éliminé l'erreur d'état stationnaire constatée dans

les régulateurs proportionnels en réinitialisant le point à une valeur artificielle tant que l'erreur n'était pas nulle. Cette ré-initialisation "intégrée" l'erreur est devenu le contrôleur proportionnel-intégral.

- En 1940, TIC développa le premier contrôleur pneumatique PID à action dérivée, qui réduisait les problèmes de dépassement.
- En 1942, les règles de réglage de Ziegler et Nichols ont été introduites, les ingénieurs ont été en mesure de trouver et de définir les paramètres appropriés des contrôleurs PID. Au milieu des années 50, les contrôleurs automatiques PID étaient largement adoptés pour une utilisation industrielle.
- En 1963, Horowitz a ajouté un degré de liberté supplémentaire au régulateur PID afin de mieux contrôler les dépassements obtenus lors d'une réponse indicielle. Ce nouveau degré de liberté consiste, en particulier, à ne réinjecter vers le terme proportionnel qu'une partie du signal de sortie.
- Au début des années 1990 et dans le but de fournir des règles d'ajustement simples mais plus performantes que celles de Ziegler-Nichols, Åström et ses collaborateurs ont analysé le comportement dynamique d'un grand nombre de processus. Cette analyse a conduit à l'établissement de tableaux servant aux calculs des paramètres P, I et D à partir de mesures simples.

En 2016, l'IFAC a publié une enquête menée par un comité de l'industrie "pilote" créé par l'IFAC et présidé par Tariq Samad. L'enquête montre que le contrôle PID **a un impact beaucoup plus élevé** que 12 autres technologies de contrôle avancées, et que "nous n'avons toujours rien de comparable avec le PID", voir <http://blog.ifac-control.org/>.

1.1 Comprendre le PID : Incertitude, non-linéarité et feedback

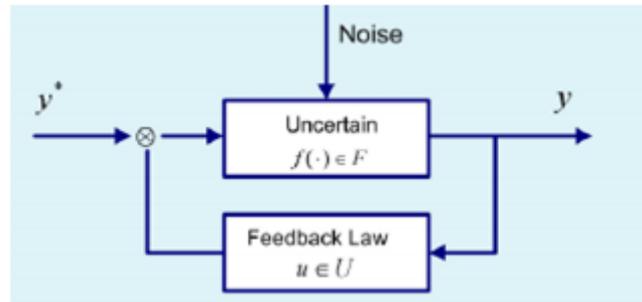


Figure 1.1: Système asservi avec perturbation

- Pour comprendre les PID, nous devons faire face aux incertitudes et aux non-linéarités, car elles existent toujours dans les systèmes réels.
- Questions de base: Combien d'incertitudes peut-il gérer?
- Comme le soulignent Astrom et Hagglund (1995-2006), une meilleure compréhension du contrôle des PID peut améliorer sa pratique généralisée et ainsi contribuer à une meilleure qualité du produit.

1.2 Description de l'incertitude



Figure 1.2: L'incertitude

- L'incertitude est décrite mathématiquement par un ensemble F , paramétrique ou fonctionnel.
- Le contrôle des systèmes incertains est par définition le contrôle de tous les systèmes possibles liés à cet ensemble.

- L'incertitude provient généralement de deux sources: incertitude interne (structure) et externe (perturbation). En général, le premier est plus difficile à gérer que le second. La compréhension de la relation entre l'incertitude paramètre / structure et le mécanisme de retour d'information est un problème fondamental de longue date dans le contrôle automatique.

Feedback est un concept de base en contrôle automatique. Son objectif principal est de réduire les effets de l'incertitude sur les performances de contrôle souhaitées (par exemple, la stabilité, l'optimalité du suivi, etc.).

1.3 Description des régulateurs PID

Un régulateur PID remplit essentiellement trois fonctions :

1. Il fournit un signal de commande $u(t)$ en tenant compte de l'évolution du signal de sortie $y(t)$ par rapport à la consigne $y^*(t)$.
2. Il élimine l'erreur statique grâce au terme intégrateur.
3. Il anticipe les variations de la sortie grâce au terme dérivateur.

1.4 Le régulateur PID

Le régulateur PID classique relie directement le signal de commande $u(t)$ au signal d'écart $e(t)$.

Sa description temporelle est la suivante :

$$U(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(s) ds + k_d \dot{e}(t) \quad (1.1)$$

Avec l'écart défini comme suit :

$$e(t) = y^*(t) - y(t) \quad (1.2)$$

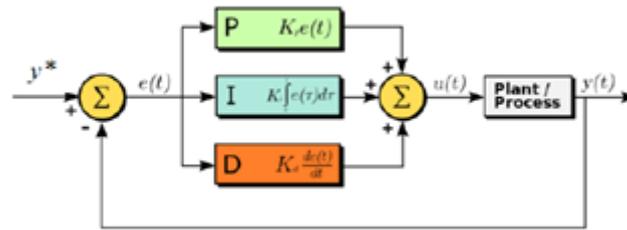


Figure 1.3: Structure de retour linéaire de la forme présent-passé-futur

Sa fonction de transfert s'écrit :

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (1.3)$$

Le concepteur de l'asservissement rencontre deux types de situations auxquelles, il doit faire face :

- Assurer une réponse acceptable pour des signaux de consigne définis en fonction du temps (par exemple : cycle de température pour un traitement thermique) ;
- Fournir des caractéristiques fréquentielles (gain, déphasage) demandées dans une bande de fréquences (par exemple : asservissement du mouvement d'un haut-parleur dans un système haute fidélité).

On impose les qualités de l'asservissement en termes de spécifications temporelles dans le premier cas, en spécifications fréquentielles dans le second cas. Le but de la correction est de doter l'asservissement des qualités attendues, par le calcul et l'implantation du correcteur nécessaire. Les opérateurs essentiels du correcteur sont réalisables à partir d'amplificateurs à courant continu et d'éléments résistances/capacités. La réalisation numérique peut se transposer aisément à partir d'un schéma analogique, en conservant la même organisation fonctionnelle et en associant un intégrateur numérique à chaque intégrateur électronique.

1.5 Aspects fonctionnels du régulateur PID

La réalisation de la boucle d'asservissement par un PID comporte deux aspects essentiels :

- Le réglage du régulateur PID, pour lequel la connaissance d'un modèle dynamique du procédé d'une part et les performances désirées d'autre part déterminent le choix de la méthode de synthèse.

- L'implantation du régulateur dans une version analogique ou numérique et dans une configuration série, parallèle ou mixte.

1.6 Action proportionnelle (P)

1.6.1 Principe de l'action proportionnelle

L'objectif du contrôle par feed-back est de ramener le signal d'erreur $\epsilon(t)$ (différence entre la mesure et la consigne) vers l'entrée. L'action proportionnelle consiste à générer une action qui varie de façon proportionnelle au signal d'erreur :

$$u(t) = u_0 + k_c \epsilon(t) = u_0 + k_c (y^*(t) - y(t)) \quad (1.4)$$

Où:

$u(t)$ est la sortie du contrôleur.

u_0 est une valeur d'offset.

K_c est le gain du contrôleur.

$Y^*(t)$ est la consigne.

$Y(t)$ est la mesure de la variable à réguler.

Le gain k_c est ajustable pour des valeurs normalisées -10% à 110% . C'est un nombre sans dimension. Par convention, on le choisit positif et on distingue deux sens d'action:

- Le sens direct : dans ce cas : l'erreur $\epsilon(t)$ et l'action $u(t)$ varient dans le même sens.
- Le sens inverse : dans ce cas : $\epsilon(t)$ et $u(t)$ varient en sens inverse (c'est le cas habituel). Pour tenir compte des limites physiques du système. On spécifie aussi la zone de variation admissible pour l'action par sa valeur maximale u_{max} et sa valeur minimale u_{min} . Quand le régulateur atteint l'une de ses bornes, on dit qu'il est saturé.

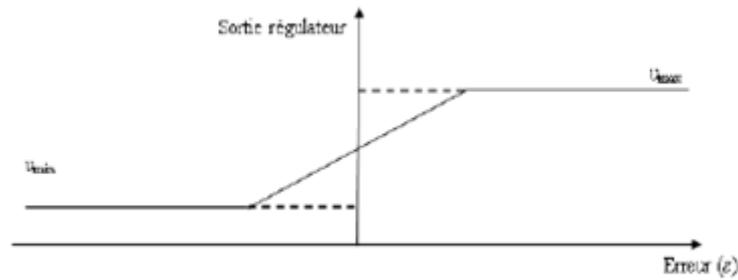


Figure 1.4: Sortie régulateur

1.6.2 Fonction de transfert d'un régulateur proportionnel :

La fonction de transfert du régulateur proportionnel s'obtient en prenant la transformé de Laplace de l'équation(I.1) comme suit :

$$C(s) = \frac{u(s)}{\epsilon(s)} = k_s \quad (1.5)$$

1.6.3 Limite du régulateur proportionnel :

Un inconvénient inhérent au régulateur P est son incapacité à éliminer les erreurs en régime permanent, après un changement de point de consigne ou une charge. A cause de cette limitation, le contrôleur proportionnel ne s'emploie que rarement.

1.7 Action intégrale et proportionnelle intégrale

L'action intégrale complète l'action proportionnelle. Elle permet d'éliminer l'erreur résiduelle en régime permanent. Afin de rendre le système plus dynamique (diminuer le temps de réponse), on diminue l'action intégrale mais, ceci provoque l'augmentation du déphasage ce qui provoque l'instabilité en boucle fermée.

L'action intégrale est utilisée lorsqu'on désire avoir en régime permanent, une précision parfaite, en outre, elle permet de filtrer la variable à régler d'où l'utilité pour le réglage des variables bruitées telles que la pression.

1.8 Action intégrale seule :

La sortie d'un régulateur intégral est de la forme :

$$u(t) = \frac{1}{T} \int_0^t \epsilon(t) dt \quad (1.6)$$

Le coefficient T_i est appelé la constante de temps intégrale et s'exprime en s^{-1} .

L'ajustage de T_i permet de doser l'effet de l'intégrale : T_i représente le temps nécessaire pour que la variation de sortie du contrôleur soit égale à celle de l'amplitude d'une variation en échelon sur l'entrée du régulateur.

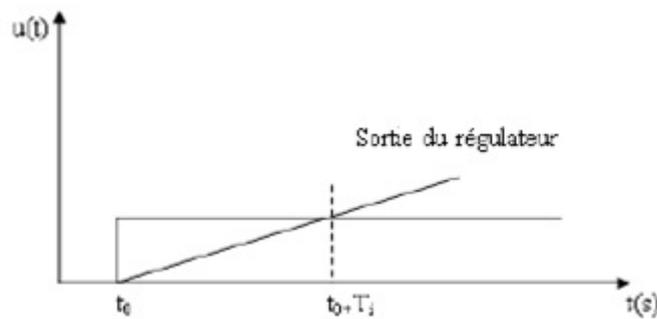


Figure 1.5: Sortie d'un régulateur intégral pur

L'intérêt du contrôleur intégral est de permettre d'éliminer l'erreur du régulateur qui persistait avec un régulateur proportionnel seul.

1.9 Action proportionnelle intégrale (PI) :

Le correcteur intégral est rarement utilisé seul, car son effet ne devient sensible que lorsque l'erreur dure depuis un certain temps. Pour obtenir une réponse initiale plus rapide, on l'utilise avec un correcteur proportionnel. La sortie d'un régulateur PI est de la forme suivante :

$$u(t) = u_0 + k_c(\epsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \epsilon(t) dt) \quad (1.7)$$

1.10 Fonction de transfert d'un régulateur proportionnel intégral (PI) :

La fonction de transfert du régulateur PI s'obtient en prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente :

$$C(s) = \frac{U_s}{\epsilon_s} = k_s \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (1.8)$$

1.11 Action proportionnelle dérivée (PD) :

1.11.1 Principe de l'action :

L'objectif de l'action dérivée est d'anticiper les variations à venir du signal de mesure en appliquant une correction proportionnelle à sa vitesse de variation. L'action dérivée a un effet prédictif.

L'action Dérivée, en compensant les inerties dues au temps mort, accélère la réponse du système et améliore la stabilité de la boucle, en permettant notamment un amortissement rapide des oscillations dues à l'apparition d'une perturbation ou à une variation subite de la consigne.

Dans la pratique, l'action dérivée est appliquée aux variations de la grandeur à régler seule et non de l'écart mesure-consigne afin d'éviter les à-coups dus à une variation subite de la consigne.

L'action D est utilisée dans l'industrie pour le réglage des variables lentes telles que la température, elle n'est pas recommandée pour le réglage d'une variable bruitée ou trop dynamique (la pression). En dérivant un bruit, son amplitude risque de devenir plus importante que celle du signal utile.

La sortie d'un régulateur PD idéal est de la forme :

$$u(u) = u_0 + T_d \left(\frac{\partial \epsilon(t)}{\partial t} \right) \quad (1.9)$$

La constante T_d est appelée temps de dérivée.

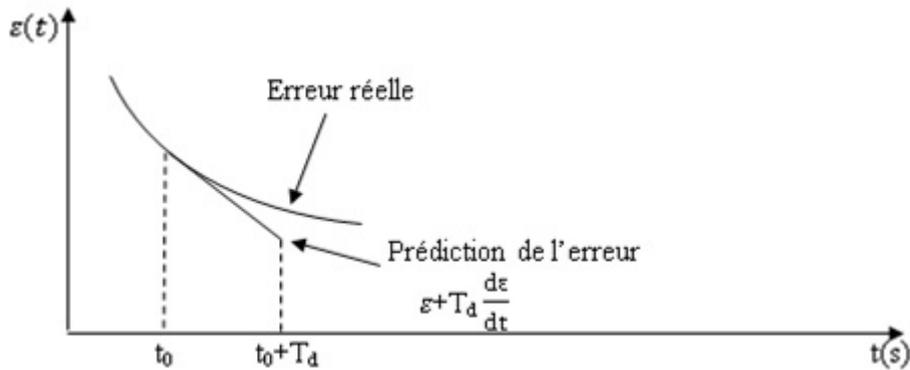


Figure 1.6: Effet prédictif du terme dérivé

1.11.2 Fonction de transfert du correcteur PD :

La fonction de transfert du régulateur PD idéal s'obtient en prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente :

$$C(s) = \frac{U_s}{\epsilon_s} = k_c(1 + T_d s) \quad (1.10)$$

1.11.3 Filtrage de la dérivée :

En pratique, il n'est pas possible de réaliser un régulateur dérivée idéal. On utilise en fait un module de dérivée filtrée :

$$C(s) = \frac{U_s}{\epsilon_s} = \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \quad (1.11)$$

Le réglage de la constante de filtrage T_d/N permet d'amortir et de limiter la sortie du régulateur figure(1.6). Le coefficient N correspond au gain du module 'dérivée filtrée'. En d'autres termes, le bruit de mesure ou les changements de consigne sont amplifiés au plus par un coefficient N .

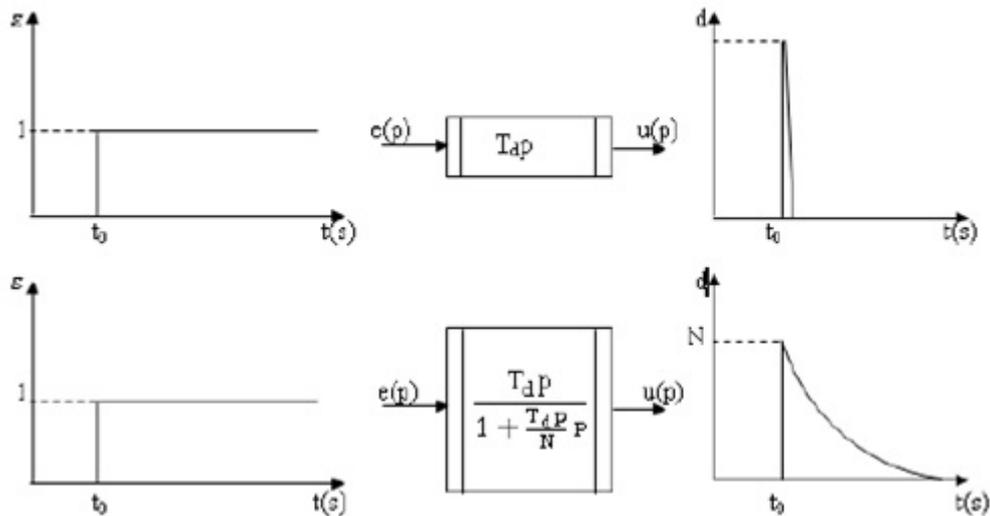


Figure 1.7: Dérivée filtrée

L'effet 'dérivée' est destiné à accélérer la réponse du régulateur. Cette accélération n'est en général pas souhaitée lors des changements de consigne, mais seulement pour corriger une erreur due à une perturbation.

1.12 Action Proportionnelle intégrale Dérivée (PID) :

Les régulateurs rencontrés sur les installations industrielles combinent les effets proportionnel, intégral et dérivée. La sortie d'un régulateur PID standard, avec filtrage de la dérivée calculée sur l'écart consigne-mesure est donc de la forme [3] :

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_{i=0}^t e(\tau) \partial\tau + k_d \dot{e}(t) \quad (1.12)$$

Avec,

$$\frac{T_d}{N} \frac{\partial D(t)}{\partial t} + D(t) = T_d \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial t}$$

1.13 Techniques de réglage classiques

La plupart des techniques classiques émettent des hypothèses sur le modèle d'installation et tentent de déduire les paramètres du contrôleur pour ces modèles généraux. Pour déterminer la

dynamique de ces systèmes, les réponses en échelon des systèmes sont obtenues. Cette réponse est caractérisée par différentes équations à l'aide desquelles différentes méthodes classiques ont été développées. Ziegler Nichol [1] suggère que de nombreux processus industriels ont une réponse en échelon comme indique la figure (1.8). Où, k étant le gain statique et θ le temps mort et τ_1 la constante du temps.

Les paramètres a est déterminé par l'intersection de la ligne (tangente au graphe) avec l'axe des y et θ de l'intersection avec l'axe des x .

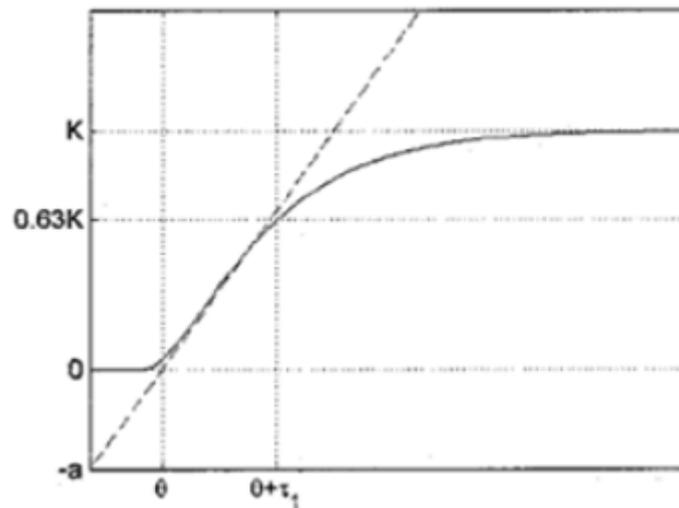


Figure 1.8: Réponse en échelon du système du premier ordre

Controller	K_p	T_i	T_D
P	$1/a$	-	-
PI	$0.9/a$	0.33θ	-
PID	$1/2a$	2θ	0.5θ

Table 1.1: Détermination des paramètres

1.14 Règles Ziegler-Nichols (ZN)

Publiés pour la première fois en 1942, Zeigler et Nichols ont décrit deux méthodes de réglage d'une boucle PID. La première méthode consiste à mesurer le délai de réponse, puis le temps nécessaire pour atteindre la nouvelle valeur de sortie. La seconde dépend de l'établissement de

la période d'une oscillation en régime permanent. Dans les deux méthodes, ces valeurs sont ensuite entrées dans un tableau pour en déduire les valeurs de gain, de temps de ré-initialisation et de taux.

La méthode de Ziegler Nichols n'est pas sans problèmes. Dans certaines applications, il se produit une réponse jugée trop agressive en termes de dépassement et d'oscillation. Un autre inconvénient est que cela peut prendre beaucoup de temps dans les processus qui réagissent lentement. Pour ces raisons, certains praticiens du contrôle préfèrent d'autres règles telles que Rivera, Morari et Skogestad [2].

1.15 Autres méthodes

De nombreuses autres méthodes, notamment le réglage et l'adaptation pour la conception des paramètres PID, ont également été proposées, mais principalement pour les systèmes linéaires. On peut citer les méthodes suivantes :

- Astrom K J, Hagglund T. (1995,2006) [3]
- Blanchini F, Lepschy A, Miani S, et al. (2004) [4]
- Hara S, Iwasaki T, Shiokata D. (2006) [5]
- Ho M T, Lin C Y. (2003) [6]
- Keel LH, Bhattacharyya S P. (2008) [7]
- Killingworth N J, Kristic M.(2006) [8]
- O'Dwyer. (2006) [9]
- Silva G J, Datta A, Bhattacharyya S P.(2005) [10]
- Soylemez M T, Munro N, Baki H. (2003) [11]

1.16 Techniques d'optimisation intelligentes et informatiques

La plupart des contrôleurs PID vendus aujourd'hui intègrent des fonctions de réglage automatique. Les détails de fonctionnement varient d'un fabricant à l'autre, mais tous suivent des

règles selon lesquelles le contrôleur «apprend» comment le processus réagit à une perturbation ou à une modification du point de consigne et calcule les paramètres PID appropriés.

Les contrôleurs PID plus récents et plus sophistiqués, tels que la série de contrôleurs de température et de processus Platinum d'OMEGA, intègrent une logique floue avec leurs capacités de réglage automatique. Cela permet de traiter les imprécisions et la non-linéarité dans des situations de contrôle complexes, telles que souvent rencontrées dans les industries de fabrication et de traitement, et facilite l'optimisation.

On peut citer qlqs techniques d'optimisation intelligente : Algorithme Immunitaire, Optimisation des colonies de fourmis, Technique de fourrage de bactéries, Réseaux de neurones artificiels ... etc.

Généralités sur la commande des systèmes non linéaires

2.1 Introduction

Au-delà de l'analyse des types de comportement des systèmes, se pose le problème de leur utilisation. Un objectif de commande se traduit par la donnée d'une ou plusieurs trajectoires de référence à suivre (boucle ouverte) et, en boucle fermée, par certaines exigences sur la vitesse de poursuite, l'atténuation des perturbations, l'insensibilité aux erreurs et variations paramétriques et la précision du suivi. Bien sur, les réglages de la boucle ouverte et de la boucle fermée interagissent de façon complexe, surtout dans le contexte non linéaire, mais on peut, dans certains cas, arriver à rendre ces deux aspects aussi indépendants que possible pour en faciliter la mise au point. Dans de nombreux cas, en outre, le nombre, la technologie et l'emplacement des capteurs devant permettre de fermer la boucle ne sont pas donnés a priori et entrent dans la conception de la boucle fermée.

2.2 Les systèmes non linéaires

Un système est non linéaire s'il ne vérifie pas le principe de superposition. Les conditions de proportionnalité et d'additivité ne s'appliquent plus aux systèmes non linéaires.

Lors de l'étude des systèmes non linéaires on se heurte à plusieurs difficultés.

- L'analyse par des fonctions de transfert est impossible,

- La notion des pôles disparaît,
- Un système non linéaire possède en général plusieurs points d'équilibre et l'étude de leur stabilité est plus complexe que dans le cas linéaire pour lequel le concept de stabilité est global.

La non linéarité d'un système peut être intrinsèque ou peut être isolée, c'est-à-dire que l'on peut avoir une association d'éléments à caractéristiques non linéaires à un système linéaire. Comme pour les systèmes linéaires, il est possible de distinguer, aussi les modèles non linéaires par les caractères suivants :

- à temps continu / à temps discret,
- invariants dans le temps / variants dans le temps,
- monovariables/ multivariables,
- déterministes / stochastiques.

2.3 Représentation des systèmes non linéaires

La forme la plus utilisée pour la représentation des systèmes non linéaires est :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.1)$$

Où, t est le temps, $x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ est le vecteur de commande ou d'entrée.

$f : R^n \times R^m \times R_+ \rightarrow R^n$: est une fonction non linéaire.

2.3.1 Système autonome

Le système non linéaire (2.1) est dit autonome si la fonction f ne dépend pas explicitement du temps t , c'est-à-dire le système peut être écrit sous la forme :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad \forall t \geq 0$$

Si non, le système (2.1) est dit non autonome.

Parfois on utilise le terme de « invariant dans le temps ou stationnaire » au lieu « d'autonome » et « variant dans le temps » à la place de « non autonome ».

Dans le cas non autonome, si les variations des caractéristiques sont lentes dans le temps, on pourra approximer le système par une séquence de systèmes autonomes.

2.3.2 Points d'équilibre

Le point $x_e \in R^n$ est dit point d'équilibre du système non linéaire non forcé :

$$\dot{x} = f(x(t), t), \forall t \geq 0$$

si $\dot{x} = f(x_e, t) = 0, \forall t \geq 0$ Si x_e est un point d'équilibre du système alors l'équation différentielle :

$$\dot{x} = f(x(t), t), \forall t \geq t_e, x(t_e) = x_e$$

admet une solution unique :

$$x(t) = x_e \forall t \geq t_e$$

2.4 Stabilité des systèmes non linéaires

Dans les études mathématiques de la stabilité on procède généralement avec un modèle mathématique de la dynamique du système et on étudie si le système possède la propriété de stabilité. Avec cette approche, on peut s'assurer que le modèle est stable ou non. Les conclusions concernant la stabilité du modèle ne s'appliquent pas au système physique réel que si le modèle utilisé est assez précis. La théorie de la stabilité joue un rôle central en théorie des systèmes ; différents types de problèmes de stabilité peuvent être rencontrés dans l'étude des systèmes dynamiques.

La stabilité d'un point d'équilibre est généralement étudiée à l'aide du concept de stabilité au sens de Lyapunov. Par définition, si un système est dans un état d'équilibre, il restera dans cet état pour t variant dans le temps. L'étude de la stabilité au sens de Lyapunov consiste en l'étude des trajectoires du système quand l'état initial est «près» d'un état d'équilibre. Cela reflète la

possibilité de perturbations affectant le système, sous forme de conditions initiales non nulles.

L'objet de la théorie de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. La contribution majeure fut apportée par A.M. Lyapunov, en 1892, dont les travaux n'ont été connus qu'à partir des années 60. Il a introduit la majorité des concepts et définitions de base concernant la stabilité des systèmes représentés par des systèmes différentiels arbitraires mais a aussi fourni les principaux résultats théoriques.

2.4.1 Fonction candidate de Lyapunov

Soit $V : R^n \rightarrow R^+$ une fonction, telle que :

1. V est continûment différentiable en tous ces arguments,
2. V est définie positive,
3. Il existe a et b deux fonctions scalaires de R^+ dans R^+ , continues, monotones, non décroissantes telles que : $a(0) = b(0) = 0 \forall x \in R^n : a(\|x\|) \leq V(x) \leq b(\|x\|)$

Alors V est une fonction candidate de Lyapunov. [12]

2.4.2 Théorèmes de stabilité

Stabilité locale

Si dans une boule $B(\rho)$ il existe une fonction scalaire $V(x)$, dont les dérivées partielles d'ordre un sont continues, et telle que :

1. $V(x)$ est définie positive dans $B(\rho)$.
2. $\dot{V}(x)$ est semi-définie négative dans $B(\rho)$.

Alors l'origine est stable. Si $\dot{V}(x)$ est localement définie négative dans $B(r)$, alors l'origine est asymptotiquement stable.

Stabilité globale

S'il existe une fonction scalaire $V(x)$, dont les dérivées partielles d'ordre un sont continues, et telle que :

1. $V(x)$ est définie positive
2. $\dot{V}(x)$ est définie négative.
3. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty$ ($V(x)$ est radialement non bornée)

Alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

2.4.3 Stabilité entrée-sortie

Jusqu'à présent on a défini la stabilité des systèmes à partir de la stabilité de l'état d'équilibre autour d'un point, dans un domaine ou autour d'une trajectoire. Il est également possible de considérer la stabilité entrée / sortie. Soit le système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Où, u est l'entrée du système et y sa sortie. La stabilité entrée / sortie d'un point d'équilibre (u_e, y_e) se définit par : Quelque soit $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ et un domaine de conditions initiales de l'état du système tels que si : $\|u(t) - u_e\| < \alpha$ pour tout t et que $x(0)$ appartient au domaine de condition initiales alors $\|y(t) - y_e\| < \epsilon$ pour tout t .

Il est à noter que la stabilité entrée / sortie est très rarement utilisée. Il est en effet primordial de connaître l'évolution de tout l'état du système. Il n'est pas rare en effet, pour des systèmes non observables, que la sortie ait un comportement stable et que pour autant l'état du système diverge.

2.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré d'une part à quelques rappels sur les propriétés générales des systèmes non linéaires, les éléments de base de la théorie de stabilité des systèmes non linéaires, et des différentes méthodes les plus utilisées pour la commande des systèmes non linéaires.

Réglage du PID selon C. ZHAO et L. GUO

Il est bien connu que le contrôleur classique PID (proportionnel-intégral-dérivé) soit utilisé le plus largement et avec le plus de succès dans les systèmes d'ingénierie, qui sont généralement non linéaires avec diverses incertitudes, la quasi-totalité des recherches existantes sur les contrôleurs PID se concentrent sur les systèmes linéaires. Dans ce chapitre on présentera les résultats de C. ZHAO et L. GUO sur le contrôleur PID pour les systèmes non linéaires incertains, et on montrera que tout système dynamique non linéaire incertain du second ordre peut être stabilisé globalement par le contrôleur PID, tant que la non-linéarité satisfait à une condition de Lipschitz.

3.1 introduction

En fait, le contrôleur PID peut réduire l'influence de diverses incertitudes grâce à des signaux de retour comprenant l'action proportionnelle («présent»); et il a la capacité d'éliminer les décalages d'état stable via l'action intégrale («passé»); et il peut également anticiper la tendance par l'action dérivée («future»).

On va construire une variété tridimensionnelle dans laquelle les trois paramètres PID peuvent être choisis arbitrairement pour stabiliser globalement une vaste classe de systèmes dynamiques incertains non linéaires du second ordre, à condition de disposer de certaines connaissances sur

la borne supérieure des dérivées de la fonction incertaine non linéaire.

En outre, la célèbre deuxième loi de Newton en mécanique joue toujours un rôle fondamental dans la modélisation des systèmes dynamiques, qui est en fait une équation différentielle du second ordre de la position d'un corps en mouvement, et qui peut être bien régulée par le contrôleur PID, comme cela sera montré de manière rigoureuse par la suite.

Bien sûr, l'une des tâches les plus difficiles pour l'implémentation du contrôleur PID consiste à concevoir les trois paramètres du contrôleur, qui sont traditionnellement ajustés soit par des essais ou bien par expériences, ou par les deux, entre autres les règles de Ziegler-Nichols [1] sont l'une des méthodes les plus remarquables pour la conception des paramètres PID, elles reposent sur certaines caractéristiques de la dynamique de processus extraites d'expériences conduites soit par la méthode de réponse progressive, soit par la méthode de réponse en fréquence.

De nombreuses autres méthodes, y compris le réglage et l'adaptation pour la conception des paramètres PID, ont également été proposés et étudiés principalement pour les systèmes linéaires [13,14].

Cependant, pour justifier l'efficacité remarquable des contrôleurs PID sur des systèmes réels, nous devons faire face à des systèmes dynamiques non linéaires et incertains et comprendre la capacité (capability) du contrôleur PID [15]. Par ailleurs, une meilleure compréhension de la capacité d'un contrôleur PID peut considérablement améliorer sa pratique (généralisée) et contribuer ainsi à une meilleure qualité du produit.

Pour comprendre la capacité (capability) du contrôleur PID, nous suivons un cadre théorique similaire à celui de la recherche de la capacité maximale du mécanisme de rétroaction, où le maximum de la capacité de retour est définie par la plus grande classe possible de fonctions non linéaires pouvant être traitées par le mécanisme de retour, où la taille de la classe fonctionnelle incertaine est caractérisée par la constante de Lipschitz correspondante [16], sauf que nous ne travaillerons ici qu'avec des boucles de contrôle en temps continu.

Pour être plus précis, on montrera que, tant que la connaissance de la borne supérieure des

dérivées de la fonction incertaine non linéaire est disponible, une classe de fonctions incertaines et un manifold simple en trois dimensions peut être construit, de sorte que le contrôleur PID puisse globalement stabiliser la classe correspondante de systèmes dynamiques non linéaires incertains, à chaque fois que les trois paramètres PID sont choisis dans cette variété.

3.2 Formulation du problème

Considérons un corps en mouvement dans R qui est considéré comme un système contrôlé. Notons $p(t)$, $v(t)$, $a(t)$ sa position, sa vitesse et son accélération à l'instant t , respectivement. Supposons que les forces externe agissant sur le corps consistent en f et u , où $f = f(p, v, t)$ est une fonction non linéaire de la position p , et de la vitesse v et du temps t et u est la force de commande. Il existe de nombreux exemples qui satisfont ces hypothèses. Les exemples classiques contiennent un oscillateur à ressort, un pendule, une vibration atténuée, etc. Par la seconde loi de Newton, nous avons l'équation au temps t :

$$ma = f(p, v, t) + u \quad (3.1)$$

où m est la masse. Notre objectif de contrôle est de concevoir un contrôleur par retour de sortie pour garantir que pour toute position initiale et toute vitesse initiale, la trajectoire de position suit une valeur de référence constante donnée $y \in R$ et, dans le même temps, la vitesse du corps tend à 00.

Notre force de contrôle est décrite par le contrôleur PID classique:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_{i=0}^t e(\tau) \partial\tau + k_d \dot{e}(t) \quad (3.2)$$

où e est l'erreur de contrôle $e(t) = y^* - p(t)$ et k_p , k_i , k_d sont les paramètres du contrôleur à concevoir. La variable de contrôle est donc la somme de trois termes: le terme P (qui est proportionnel à l'erreur), le terme I (qui est proportionnel à l'intégrale de l'erreur) et le terme D (qui est proportionnel à la dérivée de l'erreur).

Sans perte de généralité, nous supposons que le corps a la masse unitaire $m = 1$. Notons

que $v = \dot{p}$, $a = \ddot{p}$ puis l'équation(3.1) peut être réécrite comme suit :

$$\ddot{p} = f(p, \dot{p}, t) + u, \quad x_1 = p \text{ et } x_2 = \dot{p}$$

puis l'équation dans l'espace d'état de ce système mécanique de base sous contrôle PID est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t) + u(t) \\ u(t) = k_p e(t) + k_i \int_{i=0}^t e(\tau) d\tau + k_d \dot{e}(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Où, $x_1(0), x_2(0) \in R$ et $e(t) = y^* - x_1(t)$.

On montre que les trois paramètres du contrôleur k_p, k_i, k_d peuvent être conçus explicitement de sorte que la position du corps suive une valeur de consigne constante y^* sous la loi de commande (2) pour toute position et vitesse initiales, tant que $f = f(x_1, x_2, t)$ est une fonction continûment différentiable dont les limites supérieures sont connues pour ses dérivées partielles par rapport aux variables x_1 et x_2 .

3.3 Résultats

On présente une théorie ainsi que la méthode de conception du contrôleur PID dans différentes conditions de la classe des fonctions incertaines non linéaires.

Tout d'abord, on définit un espace fonctionnel:

$$F_{L_1, L_2} = \{f \in C_1(R^2 \times R), |df/dx_1| \leq L_1, |df/dx_2| \leq L_2, \forall x_1, x_2 \in R, \forall t \in R^+\}$$

Où, L_1 et L_2 sont des constantes positives, et $C_1(R^2 \times R)$ désigne l'espace de toutes les fonctions de $R^2 \times R$ à R qui sont localement Lipschitz dans (x_1, x_2) uniformément dans t et continues par morceaux en t , avec dérivées partielles continues par rapport à (x_1, x_2) .

Théorème 1: Considérons le système contrôlé par PID (3) avec une inconnue quelconque $f \in F_{L_1, L_2}$. Supposons que pour tout $t \in R$ et $y \in R$, $f(y, 0, t) = f(y, 0, 0)$. Ensuite, pour tout

$L_1, L_2 > 0$, il existe une variété tridimensionnelle $\Omega_{PID} \subset R^3$, défini par:

$$\Omega_{PID} = \left\{ k_p, k_i, k_d \in R^3, k_p > L_1, k_d > L_2, k_i > 0, (k_p - L_1)(k_d - L_2) - k_i > L_2 \sqrt{k_i(k_d + L_2)} \right\} \quad (3.4)$$

Une illustration : $L_1 = 5$ et $L_2 = 5$

L'ensemble Ω_{pid} lorsqu'il est limité au domaine $0 \leq k_p, k_i, k_d \leq 50$

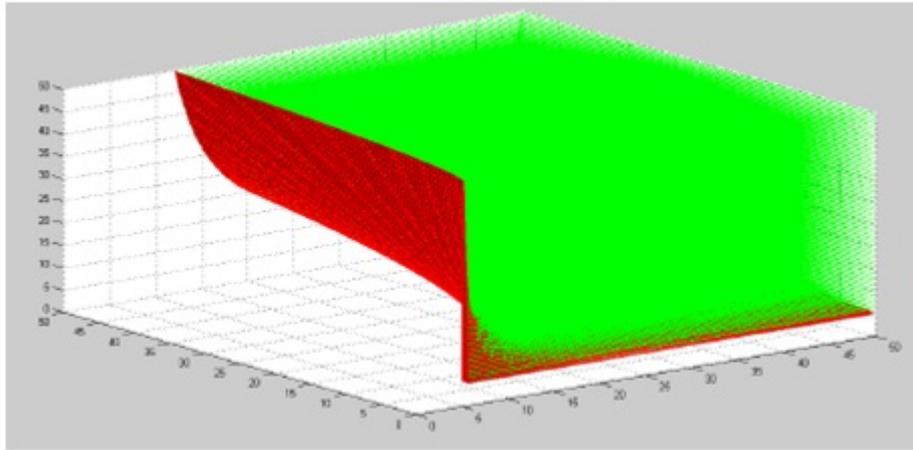


Figure 3.1: Illustration du domaine Ω_{PID}

de telle sorte que chaque fois que les paramètres du contrôleur (k_p, k_i, k_d) sont pris dans Ω_{pid} , le système en boucle fermée **(3)** satisfera à la limite $t \rightarrow \infty$ $x_1(t) = y^*$ et à la limite $t \rightarrow \infty$ $x_2(t) = 0$ pour tout valeur initiale $(x_1(0), x_2(0)) \in R^2$ et toute valeur consigne constante $y^* \in R$.

Remarque 1 : La sélection des trois paramètres du contrôleur offre une grande flexibilité en raison de la définition précise de Ω_{pid} . Le **théorème 1** donne un résultat de convergence globale, pour lequel les limites supérieures des dérivées partielles jouent un rôle clé, et nous remarquons que sans ces limites, il serait impossible au contrôleur PID d'atteindre un niveau de stabilisation globale en général [6]. Nous notons également que la sélection des trois paramètres ne repose pas sur les valeurs initiales (position et vitesse) ni sur la consigne y^* .

Remarque 2 : D'après le théorème ci-dessus, nous trouvons que le paramètre de l'intégrale k_i du contrôleur PID peut être pris arbitrairement petit, mais ne peut être égal à zéro, car sinon il n'y aurait pas d'action intégrale. En même temps, pour tout $k_p > L_1$ et $k_d > L_2$ fixes, nous

avons $(k_p, k_i, k_d) \in \Omega_{pid}$ pour tout k_i suffisamment petit > 0 . De plus, à partir de la preuve du **théorème 1**, on peut constater que la classe de fonctions incertaine F_{L_1, L_2} peut également être élargi en remplaçant les conditions sur les dérivées partielles par certaines restrictions globales de type Lipschitz.

S'il n'y a plus de contraintes sur la fonction inconnue $f(x_1, x_2, t)$, par exemple f est indépendante de t et est linéaire dans la deuxième variable x_2 , alors une plus grande variété de paramètres peut être trouvée pour stabiliser le système. La proposition suivante prouve rigoureusement ce fait.

On présente l'espace fonctionnel suivant:

$$G_{L_1, L_2} = \{f \in C^2(\mathbb{R}^2) \mid |df/dx_1| \leq L_1, |d^2f/dx_2^2| \leq L_2\} \quad (3.5)$$

$x_2 \in \mathbb{R}$, où $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ sont des constantes et $C^2(\mathbb{R}^2)$ l'espace de deux fonctions continuellement différentiables de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Proposition 1 : Considérons le système (3.3) contrôlé par PID où la fonction inconnue $f \in G_{L_1, L_2}$ ne dépend pas du temps t . Ensuite, pour tout $f \in G_{L_1, L_2}$ et toute consigne $y^* \in \mathbb{R}$, le système (3.3) en boucle fermée satisfait $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = y^*$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$ pour toute valeur initiale $(x_1(0), x_2(0)) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si les paramètres PID (k_p, k_i, k_d) se trouvent dans la variété tridimensionnelle suivante:

$$\dot{\Omega}_{pid} = \{k_p, k_i, k_d \in \mathbb{R}^3, k_p > L_1, k_d > L_2, k_i > 0, (k_p - L_1)(k_d - L_2) - k_i > 0\} \quad (3.6)$$

On remarque que lorsque $(y^*, 0)$ est un point d'équilibre des systèmes non contrôlés, le terme I n'est pas nécessaire pour la régulation.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour suivre un point de consigne donné (point d'équilibre) avec le contrôle de PD pour une classe de systèmes incertains affines non linéaires à deux dimensions.

On définit un espace fonctionnel F_{L_1, L_2} , $y^* \subset C^1(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2)$ comme suit:

$$\left\{ f = (f_1, f_2) \mid \frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0, -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^{-1} \det(Df) \leq L_1, \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^{-1} \text{tr}(Df) \leq L_2, \forall x_1, x_2 \in R, f(y^*, 0) = 0 \right\}$$

Où, $\det(Df)$ est le déterminant de la matrice jacobienne de f définie par:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

et $\text{tr}(Df)$ est la trace de Df définie par :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

.

Théorème 2 : Considérons le système non linéaire affine avec l'inconnu $f \in F_{L_1, L_2, y^*}$, tel que :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + u \end{cases}$$

Où, u est la commande PD : $u = k_p e(t) + k_d \dot{e}(t)$ et $e(t) = y^* - x_1(t)$.

Alors, pour tout $f \in F_{L_1, L_2, y^*}$, le système en boucle fermée (3.8) vérifie que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = y^*$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$ pour toute valeur initiale $(x_1(0), x_2(0)) \in R^2$ si et seulement si les paramètres PD sont situés dans la variété bidimensionnelle $\Omega_{PD} = (k_p, k_d) \in R^2 \mid k_p > L_1, k_d > L_2$.

On remarque que si $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} < 0, \forall x_1, x_2 \in R$, le théorème 2 est toujours valable, à condition que les inégalités «>» et «≤» soient remplacées par «<» et «≥» respectivement dans les définitions de F_{L_1, L_2, y^*} et ω_{PD} .

Corollaire 1 : Si $f_1(x_1, x_2) = x_2$, alors l'espace de fonction F'_{L_1, L_2, y^*} dans le théorème 2 est réduit à:

$$\left\{ F'_{L_1, L_2, y^*} = f_2 \in C^1(R^2) \mid \left| \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right| \leq L_1, \left| \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right| \leq L_2, \forall x_1, x_2 \in R, f_2(y^*, 0) = 0 \right\}$$

Enfin, il convient de mentionner que pour les systèmes de premier ordre, le contrôle PI est enfin indiqué, que pour les systèmes de premier ordre, le contrôle PI est suffisant. La proposition suivante donne une description rigoureuse.

On définit,

$$\{F_L = f \in H(R \times R^+) : |f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in R, \forall t \in R^+\}$$

Où, $L > 0$ est une constante et $H(R \times R^+)$ est l'espace des fonctions de $R \times R^+$ dans R , qui sont continues par morceaux dans la deuxième variable t .

Proposition 2 : Considérons le système non linéaire de premier ordre suivant $\dot{x} = f(x, t) + u$, où l'inconnu $f \in F_L$ et le contrôle PI sont définis par $u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau$.

Puis pour tout $f \in F_L$ et toute valeur de consigne y^* satisfaisant $f(y, t) = f(y^*, 0)$ pour tout $t \in R^+$, le système en boucle fermée est globalement stable et satisfait à la $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = y^*$ si et seulement si Les paramètres PI appartiennent à la variété bidimensionnelle suivante:

$$\{\Omega_{pi} = (k_p, k_i) \in R^2 \quad k_p > L, k_i > 0\}$$

. En fait, si les paramètres $PI(k_p, k_i)$ sont pris à partir de ω_{PI} , la convergence de la $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = y^*$ a un taux exponentiel pour toute valeur initiale $x(0) \in R$.

Remarque 3 : Si le canal de contrôle contient un paramètre inconnu, disons b (par exemple, $u(t)$ est remplacé par $bu(t)$ dans les systèmes de contrôle), où b est une constante positive inconnue avec une limite inférieure connue $b > 0$, alors tous les résultats dans les théorèmes ci-dessus, les propositions et le corollaire restent vrais, à condition que (bk_p, bk_i, bk_d) soient choisis sur les variétés respectives.

Preuve du théorème 1 : Nous introduisons quelques notations. Notons, $x(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau + \frac{f(y^*, 0, 0)}{k_i}$, $y(t) = e(t)$, $z(t) = \dot{e}(t)$, $g(y, z, t) = -f(y^* - y, -z, t) + f(y^*, \theta, t)$, puis le système (3.3) se transforme en :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = g(y, z, t) - k_i x - k_p y - k_d z, \end{cases} \quad (3.7)$$

Avec $f \in F_{L_1, L_2}$, il est facile de voir que $g \in F_{L_1, L_2}$ et $g(0, 0, t) = 0$ pour tout $t > 0$. Par conséquent $(0, 0, 0)$ est un équilibre de (3.7). Notons que $g(y, z, t)$ peut être exprimé par $g(y, z, t) = b(y, t)y + a(y, z, t)z$, où les fonctions $b(y, t)$ et $a(y, z, t)$ sont définis par :

$$b(y, t) = \begin{cases} \frac{g(y, 0, t)}{y} & y \neq 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0, t) & y = 0, \end{cases}$$

$$\text{et } a(y, z, t) = \begin{cases} \frac{g(y, z, t) - g(y, 0, t)}{z} & z \neq 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y}(y, 0, t) & z = 0, \end{cases}$$

Évidemment, nous avons $b(y, t) \leq L_1$, $|a(y, z, t)| \leq L_2$ pour tout y, z, t d'après le théorème de la valeur moyenne et la définition de F_{L_1, L_2} .

Puisque pour tout $t > 0$ et $y \in R$, $f(y, 0, t) = f(y, 0, 0)$, il est facile de voir que $b(y, t) = g(y, 0, 0)$.

y est simplement une fonction de y , désignée désormais par $b(y)$. De toute évidence, $b(\cdot)$ est continu.

Par conséquent, l'équation (3.7) en boucle fermée peut être réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = A(x, y, z, t) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

Avec,

$$A(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_i & -k_p + b(y) & -k_d + a(y, z, t) \end{bmatrix}$$

Pour construire une fonction de Lyapunov, on note : $\psi = \frac{(\psi_0 + \psi_1)}{2}$ où $\psi_0 = \inf_{y, z, t} -a(y, z, t) + k_d$, $\psi_1 = \sup_{y, z, t} -a(y, z, t) + k_d$ et $\phi_0 = \inf_y \phi(y)$ où $\phi(y) = -b(y) + k_p$.

Il est facile de voir que, $\phi_0 > k_p - L_1 > 0$ et $\psi_0 \geq k_d - L_2 > 0$ par le fait que $k_p > L_1$ et $k_d > L_2$.

On adopte maintenant une méthode similaire à celle utilisée pour les équations différentielles autonomes, et on montre que la forme quadratique suivante plus un terme intégral est bien une fonction de Lyapunov [7].

$$V(x, y, z) = [x, y, z]P[x, y, z]^T + \int_0^y (\phi(\tau) - \phi_0)\tau d\tau$$

où la matrice constante P est :

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu k_i & k_i & 0 \\ k_i & \phi_0 + \mu\psi & \mu \\ 0 & \mu & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Il n'est pas difficile de vérifier que P est une matrice définie positive (voir le lemme B1 dans l'annexe B; par conséquent, $V(x, y, z)$ est une fonction définie positive radicalement non liée dans x, y, z .

Ensuite, par de simples calculs basés sur les définitions de P et $A(x, y, z, t)$, il en résulte que la dérivée par rapport au temps de $V(x, y, z)$ le long des trajectoires de (3.8), est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) &= [x, y, z](PA(x, y, z, t) + A(x, y, z, t)^T P)[x, y, z]^T + (\phi(y) - \phi_0)yz \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1\mu\phi(y) & \frac{\mu(\psi + a(y, z, t) - k_d) + \phi_0 - \phi(y)}{2} \\ 0 & \frac{\mu(\psi + a(y, z, t) - k_d) + \phi_0 - \phi(y)}{2} & \mu + a(y, z, t) - k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + (\phi(y) - \phi_0)yz \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1\mu\phi(y) & \frac{\mu(\psi + a(y, z, t) - k_d)}{2} \\ 0 & \frac{\mu(\psi + a(y, z, t) - k_d)}{2} & \mu + a(y, z, t) - k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= -[y, z]Q(y, z, t) \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Avec $Q(y, z, t)$ matrice symétrique exprimée comme suite :

$$Q(y, z, t) = \begin{bmatrix} -k_i\mu\phi(y) & \frac{-\mu}{2}[\psi + a(y, z, t) - k_d] \\ \frac{-\mu}{2}[\psi + a(y, z, t) - k_d] & -\mu - a(y, z, t) + k_d \end{bmatrix}$$

On prouve maintenant que $Q(y, z, t)$ est en réalité défini positif pour tout $y, z \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$.

Notons $\alpha = -\frac{\mu}{2}(\psi + a(y, z, t) - k_d)$ et $\beta = -\mu - a(y, z, t) + k_d$, notons que par les définitions de ϕ_0, ψ_0, ψ_1 (éqs. B1 et B3 de l'annexe B), on a :

$$-k_i + \mu\phi(y) \geq -k_i + \mu\phi_0 > 0 \quad (3.10)$$

$$-\mu + \psi_1 \geq \beta \geq -\mu + \phi_0 > 0 \quad (3.11)$$

$$|\psi + a(y, z, t) - k_d| \leq L_2 \quad (3.12)$$

Où, on a utilisé le fait que $\psi = \frac{(\psi_1 + \psi_0)}{2}$ et $|a(y, z, t)| \leq L_2$.

Donc, par (B2), (3.10) - (3.12), on sait que $(k_i + \mu(y))\beta \geq (-k_i + \mu\phi_0)(-\mu + \psi_0) \geq \frac{\mu^2}{4}L_2^2 \geq \alpha^2$.

Par cette dernière et (3.10), (3.11), il est facile de voir que la matrice $Q(y, z, t)$ est définie positive pour tout y, z, t .

Certains calculs standard permettent d'obtenir la valeur propre minimale de $Q(y, z, t)$ comme :

$$\lambda_{\min} Q(y, z, t) = h(y, \alpha, \beta) \triangleq \frac{1}{2} - K_1 + \mu\phi(y) + \beta - \sqrt{(-k_1 + \mu\phi(y) - \beta)^2 + 4\alpha^2}$$

On définit $\lambda(y) = \inf h(y, \alpha, \beta)$, où l'infimum est pris pour tout $|\alpha| \leq \mu L_2$ et $\beta \in [-\mu + \psi_0, -\mu + \psi_1]$.

Il est facile de voir que $\lambda(\cdot)$ est une fonction positive de y . On sait aussi que $\lambda(\cdot)$ est une fonction continue du lemme B2 de l'annexe B.

Enfin, on applique le théorème A1 de l'annexe A pour conclure la démonstration de ce théorème.

Si on prend $W(x, y, z) = \lambda(y)(y^2 + z^2)$, toutes les conditions du théorème A1 sont alors remplies. D'où toutes les solutions de (3.7) sont bornées et satisfont $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(y(t))(y^2(t) + z^2(t)) = 0$.

Puisque $y(t)$ est borné, il existe un δ positif > 0 tel que $\lambda(y(t)) > \delta$.

Donc $\lim_{t \rightarrow \infty} (y^2(t) + z^2(t)) = 0$, ce qui donne $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = y$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$.

Par conséquent, la preuve du théorème 1 est complète.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une théorie mathématique ainsi qu'une méthode de conception pour le contrôle bien connu par PID d'une classe de base de systèmes dynamiques incertains non linéaires de second ordre, et avons examiné plusieurs questions connexes, notamment la

stabilisation globale, la régulation asymptotique.

On remarque que les règles de conception des PID sont assez simples et nécessaires pour la stabilisation globale.

Application sur le pendule inversé

4.1 Pendule inversé

Comme application on a choisi le pendule inversé qui représente un système non linéaire de second ordre, un pendule inversé est un pendule simple. Il présente une position d'équilibre instable s'il est maintenu vertical à 180° , mais cette position est maintenue par un système de contrôle.

Un pendule inversé est un système dynamique non linéaire instable, il est considéré comme un très bon exemple pour les systèmes instables et non linéaires. Il est utilisé pour tester les performances des techniques de commande pour des constantes de temps très rapides.

4.2 Objectif de l'étude d'un pendule inversé

L'importance de l'étude du pendule inversé est devenue plus importante que jamais vu que non seulement il est utilisé dans l'industrie robotique des usines, mais il est plus utiliser dans les objet de la vie quotidienne de l'humain, qui est un exemple d'un double pendule inversé lui-même , et cela se traduit par différent exemples comme la nouvelle moto de HONDA roadster *NC750* qui ne tombe pas même à l'arrêt, elle utilise un dispositif d'un double pendule inversé parallèle appelé «RidingAssist» pour assurer la stabilité, ce dispositif s'active si la vitesse de la moto est inférieur à $4,8\text{km/h}$ ou elle est à l'arrêt, le premier pendule c'est la fourche, et le deuxième pendule est la fourche de la roue arrière, des moteurs agissent sur sa fourche et ses roues afin de corriger son assiette et la maintenir en équilibre. [17]



Figure 4.1: HONDA Roadster NC 750 en équilibre à l'arrêt

On a dit que l'humain est un exemple d'un pendule inversé, et ceci grâce à sa marche qui peut être modélisée par un pendule double inversé dont les deux axes principaux sont les chevilles et les hanches. Nos articulations travaillent sans arrêt pour nous maintenir debout. C'est le même principe utilisé dans la robotique humanoïde [18].



Figure 4.2: Robots EMIEW (gauche) and EMIEW2 (droite)

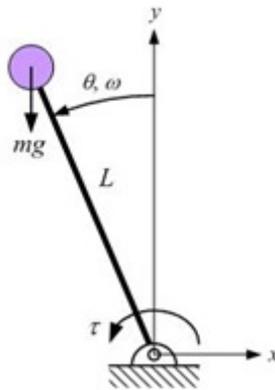


Figure 4.3: Pendule inversé

- θ l'angle formé entre la tige et la verticale
- m la masse du pendule
- l la longueur de la tige
- g l'accélération de la pesanteur

4.3 Modélisation du pendule

D'après la loi fondamentale de la dynamique appliqué à la masse m on a :

$$\sum M_t = J\ddot{\theta}$$

J : Moment d'inertie

$$J\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - b\dot{\theta} + \Gamma$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + u$$

$$\text{Avec } u = \frac{\Gamma}{ml^2}$$

On pose, $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$.

Le modèle est décrit comme suit :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{b}{ml^2}x_2 + u$$

On linéarisant ce modèle autour de (x_{10}, x_{20}) .

En dérivant cette fonction par rapport à x et par rapport à u , (matrice jacobienne) on trouve

:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Le système linéarisé autour de (x_{10}, x_{20}) est :

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{g}{l}\cos(x_{10})\tilde{x}_1 - \frac{b}{ml^2}\tilde{x}_2u$$

$$y = \tilde{x}_1 = C\tilde{x}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_{10}) & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{l}\cos(x_{10}) & s + \frac{b}{ml^2} \end{pmatrix} \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + s\frac{b}{ml^2} + \frac{g}{l}\cos(x_{10})} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{ml^2} & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_{10}) & s \end{bmatrix}$$

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{\frac{1}{ml^2}}{s^2 + s\frac{b}{ml^2} + \frac{g}{l}\cos x_{10}}$$

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 0.04s + 20\cos x_{10}}$$

On détermine les paramètres k_p, k_i, k_d par la méthode du point critique (méthode classique), pour deux valeurs de $x_{10} : \pi/2, \pi/6$ puis on applique ces pid's sur notre système non linéaire.

4.3.1 Description de la méthode :

On augmente le gain k_p jusqu'à ce que la boucle oscille à une amplitude constante, $k_p = k_{crit}$. En déterminant k_{crit} et T_{crit} , on calcule les paramètres k_p , k_i et k_d selon le tableau ci-dessous :

Paramètres	Valeur
K_p	$0.6K_{crit}$
K_i	$0.5T_{crit}$
K_d	$0.125T_{crit}$

Table 4.1: Paramètres de régulation

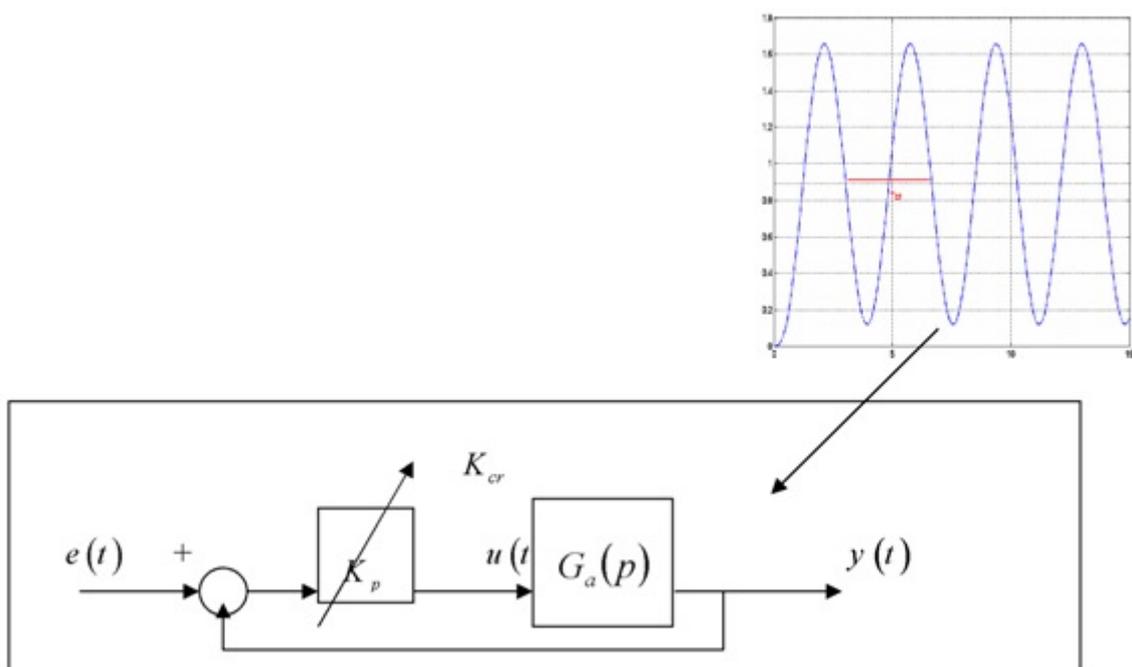


Figure 4.4: mise en oscillation d'un système par contre-réaction

On détermine les paramètres PID pour $x_{10} = \pi/2$. $G(s) = 4/(s^2 + 0.04s)$

On trouve $T_{crit} = 6.5807 - 3.1071 = 3.4736$

- $K_p = 0.6 \times 5.05 = 3.03$
- $T_i = 0.5 \times 3.4736 = 1.735$
- $T_d = 0.125 \times 3.4736 = 0.4342$

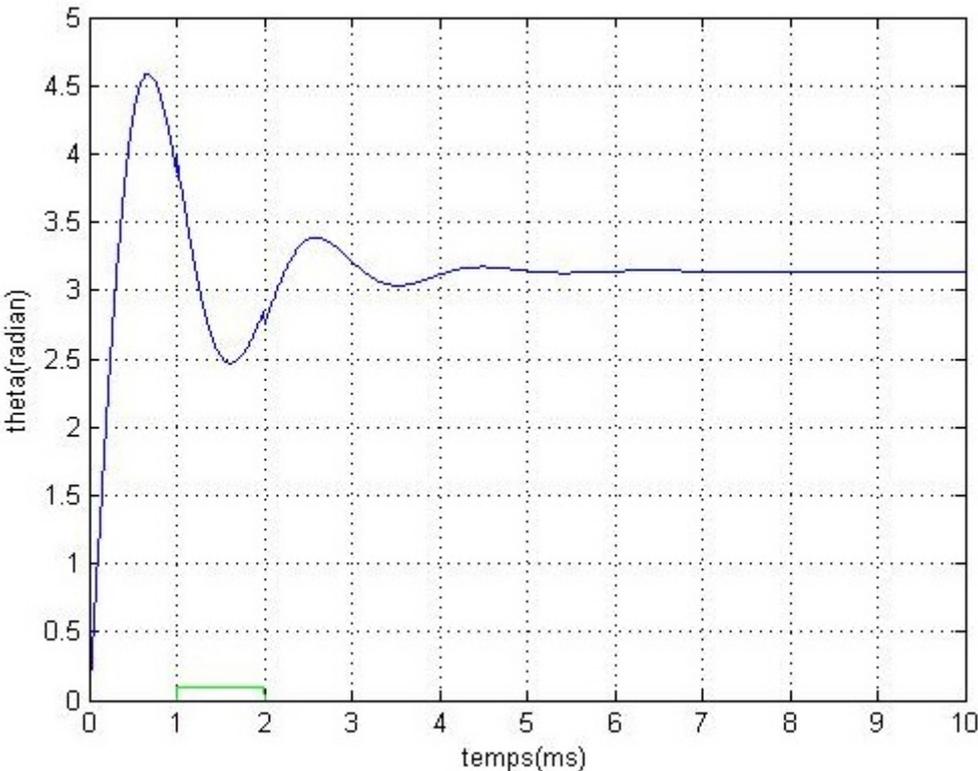


Figure 4.5: Réponse à une perturbation de 0.1radian du système linéaire $X_{10} = \pi/2$, Réf. π

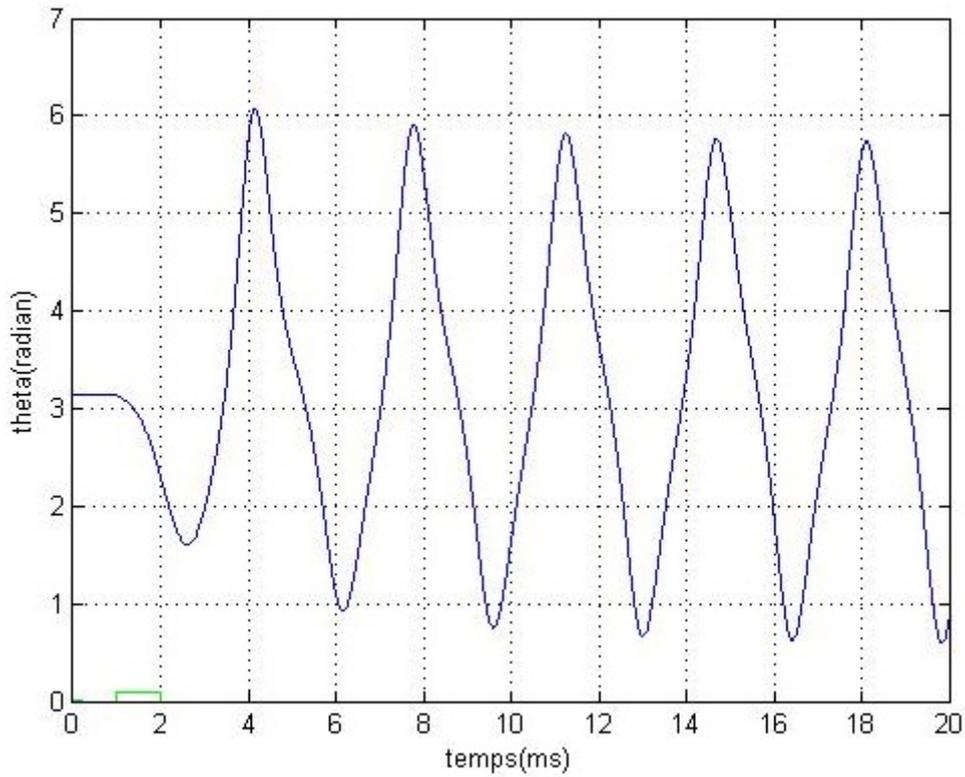


Figure 4.6: Application du PID classique sur le système non linéaire avec perturbation de 0.1radian ($rf = \pi$)

4.4 Détermination des paramètres k_p , k_i , k_d selon C. ZHAO et L. GUO

On a le domaine :

$$\Omega_{pid} = k_p, k_i, k_d \in \mathbb{R}^3, k_p > L_1, k_d > L_2, k_i > 0, (k_p - L_1)(k_d - L_2) - k_i > L_2 \sqrt{k_i(k_d + L_2)}$$

On cherche k_p en fonction de k_i et k_d .

$$(k_p - L_1)(k_d - L_2) - k_i > L_2 \sqrt{k_i(k_d + L_2)} \quad \Rightarrow \quad (k_p - L_1) > \frac{k_i}{k_d - L_2} + k_d - L_2 \sqrt{k_i(k_d + L_2)}$$

$$k_p > L_1 + \frac{k_i}{k_d - L_2} \sqrt{k_i(k_d + L_2)}$$

On a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \leq L_1 ; \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \leq L_2$$

On calcule les valeurs minimum de L_1 et L_2 ?

A l'équilibre pour $u = 0$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| = \frac{mgl}{dm^2} \cos x_1$$

puisque: $|\cos x_1| \leq 1$, donc,

$$\max \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| = g/l$$

donc pour notre cas $g = 10$, $l = 0.5$, $b = 0.01$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| = \frac{g}{l} = 20$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| = \frac{b}{ml^2} = 0.04$$

Donc $L_1 = 20$ et $L_2 = 0$.

$$k_p > L_1 + \frac{k_i}{k_d - L_2} \sqrt{k_i(k_d + L_2)}$$

,

$L_1 = 20$, $L_2 = 0.04$, en prenant : $K_i = 1.73$, $K_d = 0.434$ et on calcule k_p . $k_p > 23,99$, on prend $k_p = 24$

- $k_p = 24$
- $k_i = 1.73$
- $k_d = 0.43$

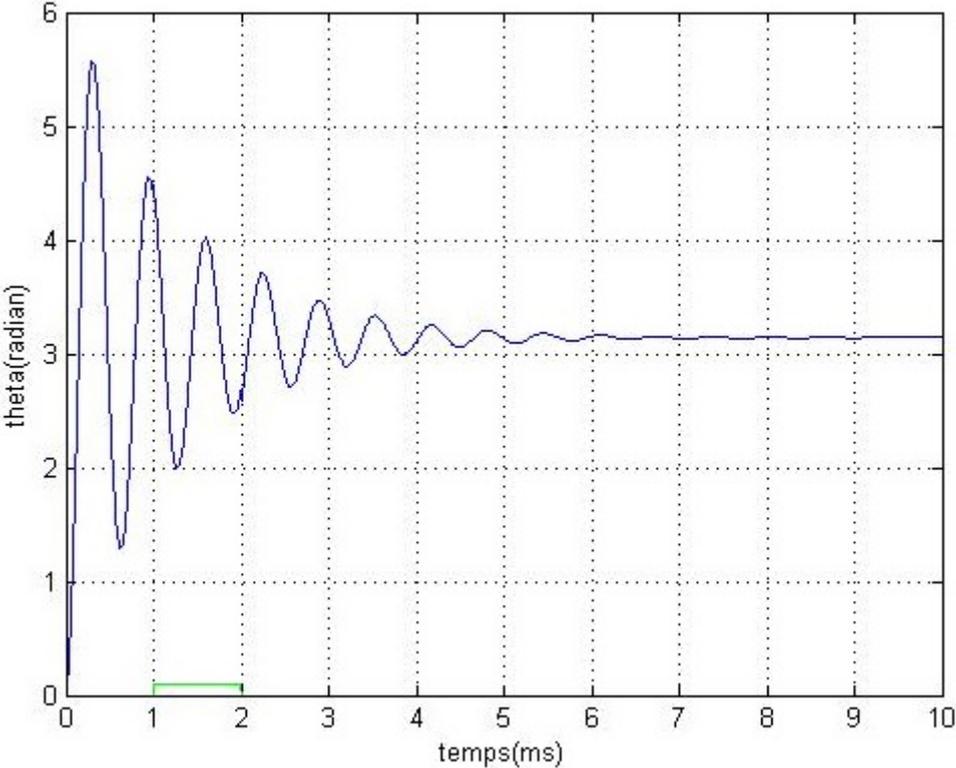


Figure 4.7: Réponse à une perturbation de 0.1radian du système non-linéaire $X_{10} = \pi/2$

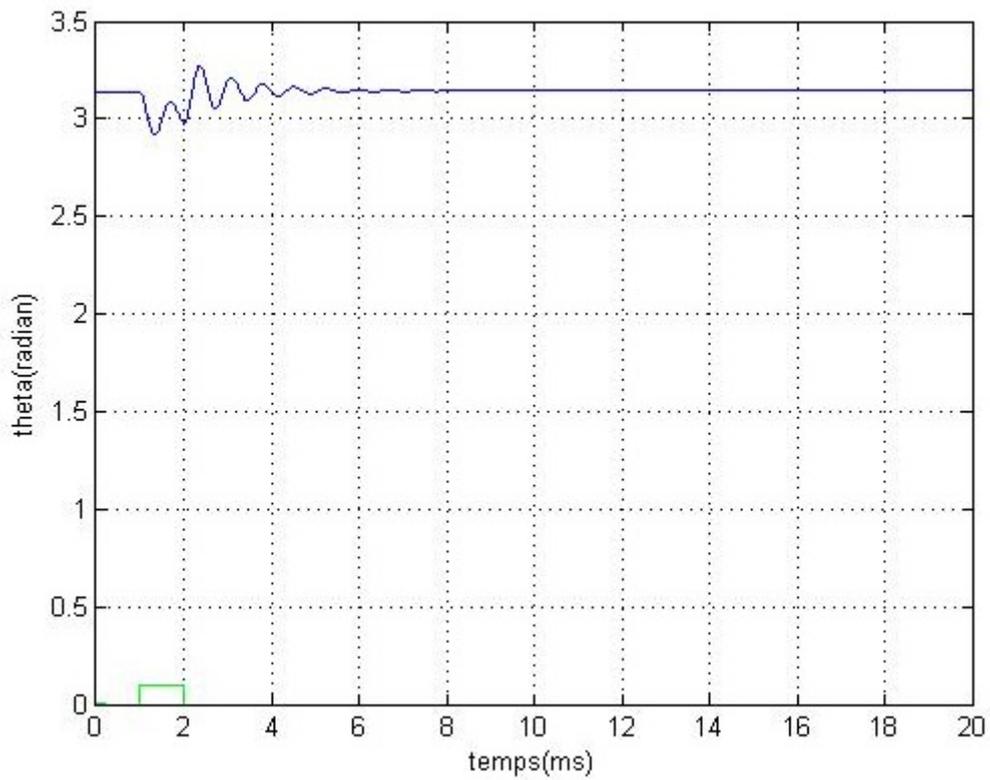


Figure 4.8: Réponse à une perturbation de 0.1 radian du système non-linéaire, Réf. π

de la même façon, pour $x_10 = \pi/6$.

$$G(s) = 4/(s^2 + 0.04s + 0.8661)$$

On trouve $k_{crit} = 4.4552 - 3.0871 = 1.3681$

- $k_p = 3.03$
- $k_i = 0.684$
- $k_d = 0.20$

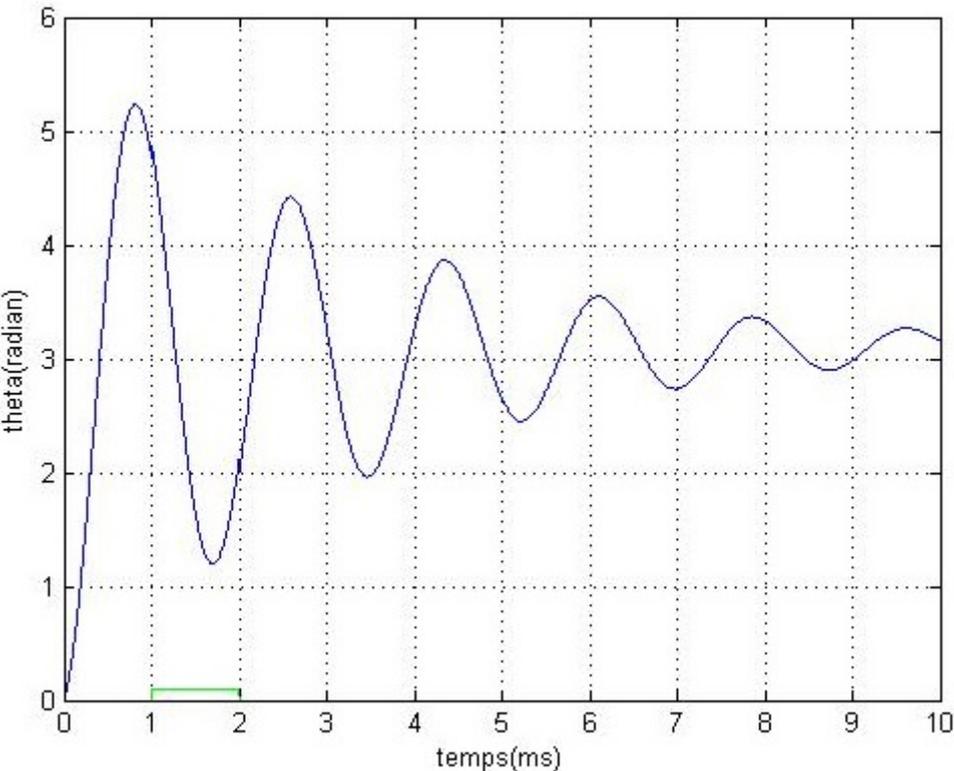


Figure 4.9: Réponse à une perturbation de 0.1radian du système linéaire $X_{10} = \pi/6$, Réf. π

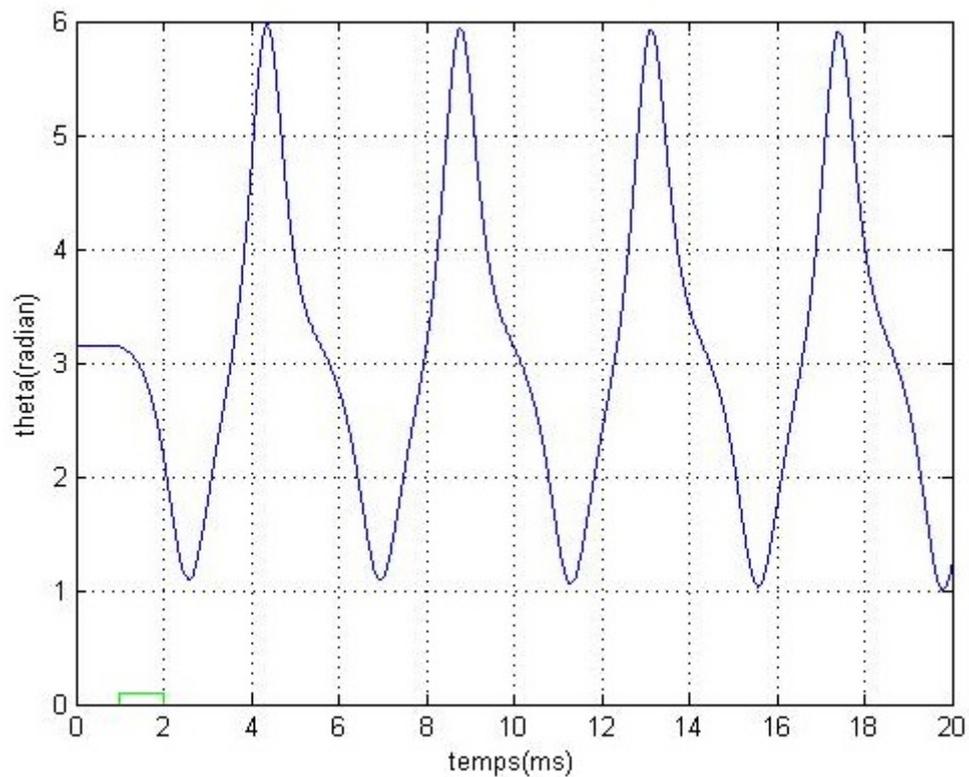


Figure 4.10: Application du PID classique sur le système réel $X_{10} = \pi/6$, Réf. π

De la même façon, on détermine les nouveaux paramètres PID selon la théorie présentée auparavant :

$$k_p > L_1 + \frac{k_i}{k_d - L_2} \sqrt{k_i(k_d + L_2)}$$

, $L_1 = 20$, $L_2 = 0.04$, en prenant : $K_i = 3.35$, $K_d = 0.83$ et on calcule k_p .

$k_p > 21,66$, on prend $k_p = 22$

- $k_p = 22$
- $k_i = 0.68$
- $k_d = 0.20$

L'application du nouveau PID sur notre système donne le graphe suivant :

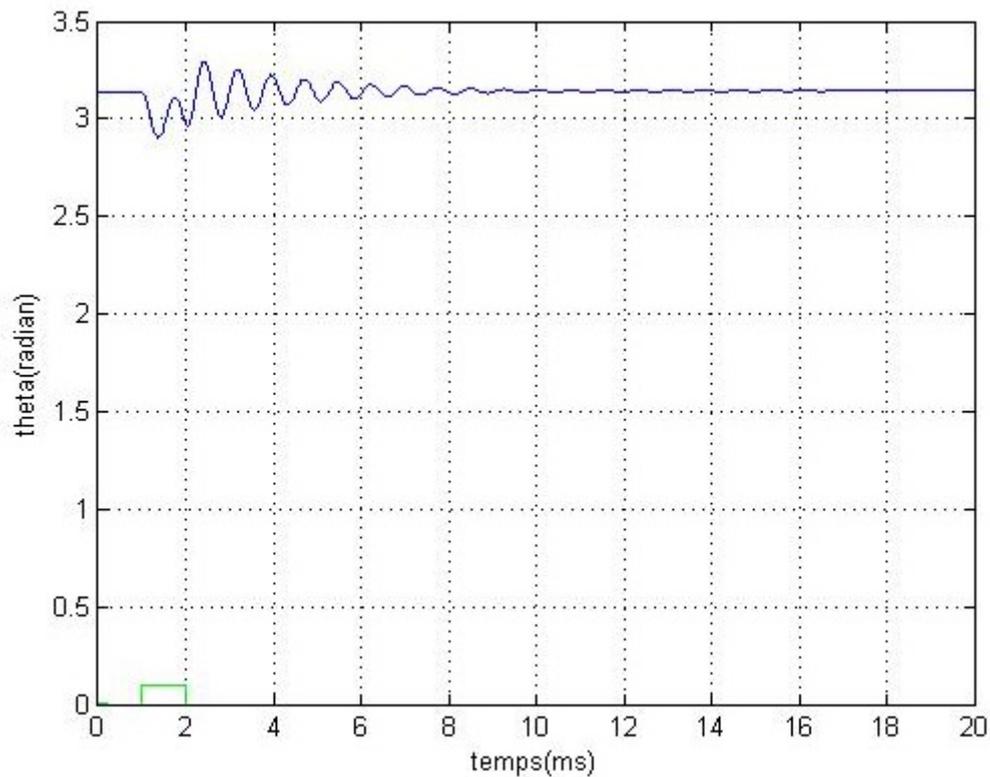


Figure 4.11: Réponse à une perturbation de 0.1radian du système non-linéaire $X_{10} = \pi/6$, Réf. π

4.5 Conclusion

On remarque que l'application des PID dont les paramètres sont calculés selon les résultats obtenus au troisième chapitre sur notre système non linéaire donne des boucles stables contrairement à celles calculés par méthode classique.

Pour avoir une idée plus claire sur la stabilité obtenue pour n'importe quelle valeur de x_{10} , on va lier ça avec le concept de marge de phase et la marge de gain pour essayer en quelque sorte de mesurer cette stabilité.

Pour cela un code source Matlab est élaboré pour tracé la fonction Marge de phase en fonction de x_{10} pour les deux cas de figure.

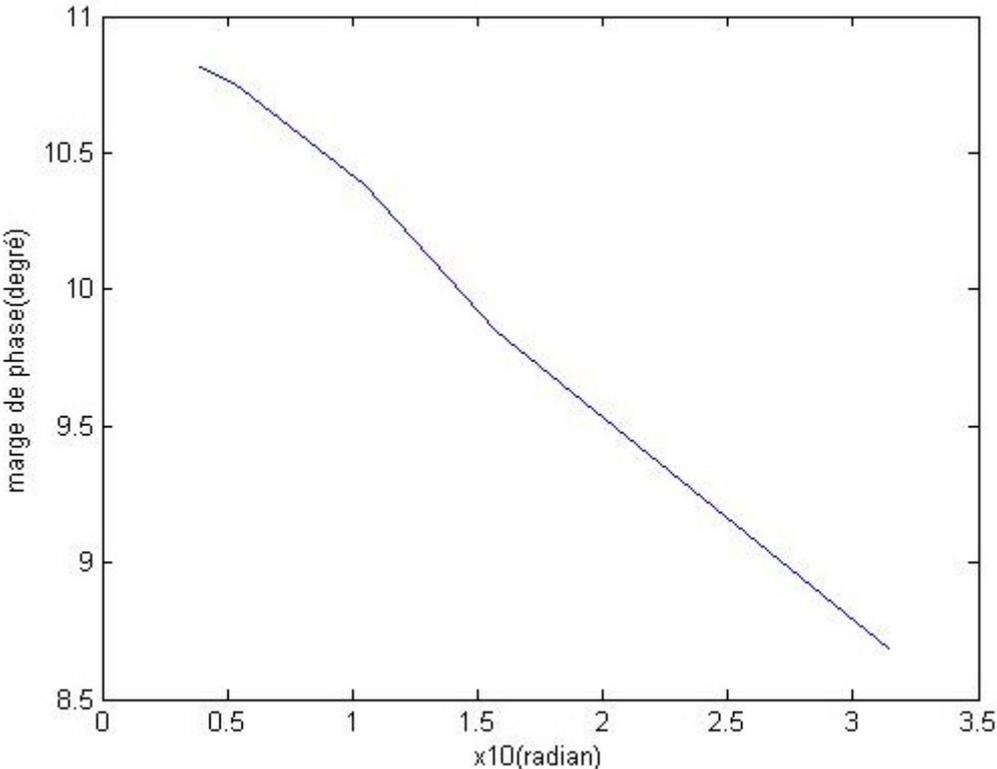


Figure 4.12: Marge de phase en fonction de x_{10} avec les paramètres PID linéaire

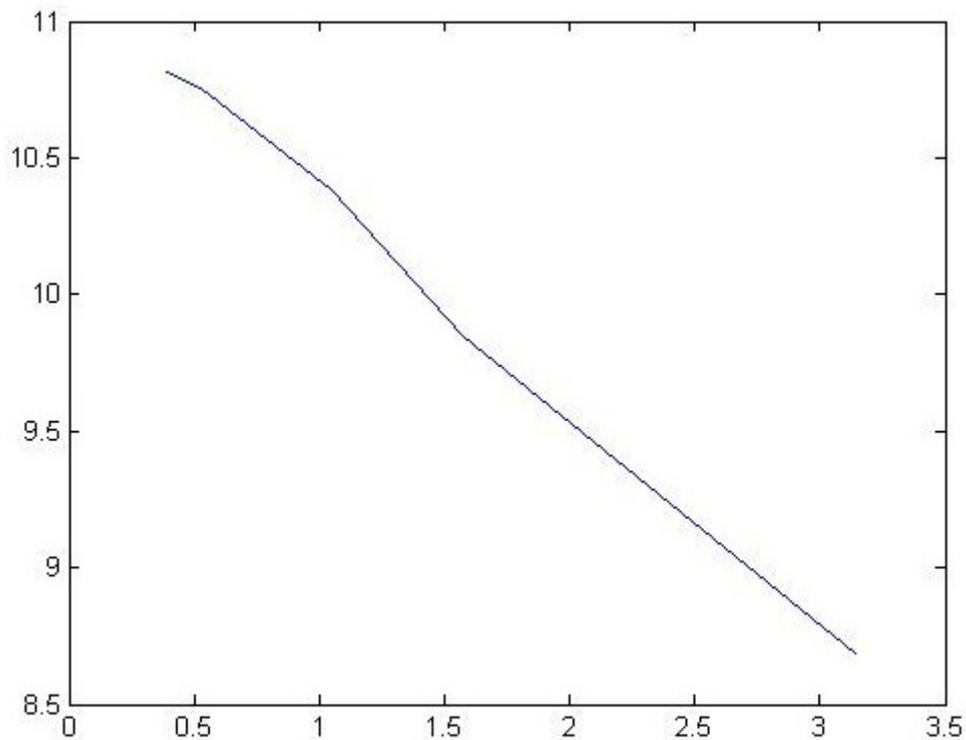


Figure 4.13: Marge de phase en fonction de x_{10} avec les paramètres PID non linéaire

Remarques :

- Pour des paramètres k_p, k_i, k_d , PID non linéaire : le système se stabilise à n'importe quel valeur de x_{10} vu que la marge de phase est strictement positive (la valeur minimale est égale à 8),
- pour des paramètres k_p, k_i, k_d , PID linéaire : le système est instable pour des valeurs de x_{10} qui dépasse 1.5radian , la marge de phase varie entre -53 et 36 .

On remarque que le système est plus stable pour des valeurs inférieures de x_{10} .

Conclusion

Dans cette étude on a présenté une théorie mathématique avec une méthode de conception pour le contrôleur PID bien connu d'une classe de base de second ordre non linéaire pour les systèmes dynamiques incertains.

Nous avons étudié plusieurs questions connexes, notamment la stabilisation globale et régulation asymptotique.

Les règles de conception des PID sont assez simples et nécessaire à la stabilisation globale. Cette théorie et ces méthodes de conception démontrent que le contrôleur PID est en effet assez robuste en ce qui concerne les paramètres de conception et les incertitudes non linéaires.

Limites du PID:

- Les résultats théoriques ci-dessus peuvent ne pas être valables dans les cas suivants: La non-linéarité a un taux de croissance "plus rapide" que la croissance linéaire. exemple, $f(x_1; x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^\delta$ où $\delta \geq \frac{1}{2}$.
- Systèmes décrits par des équations différentielles d'ordre 3.

Quelques perspectives futurs :

- Étendre les résultats et les méthodes sur les PID à des systèmes incertains non linéaires plus généraux
- Améliorer les résultats existants sur le contrôle des systèmes non linéaires incertains, soit en améliorant la structure du PID, soit en utilisant les méthodes analytiques développées ici.
- Prendre en charge les autres critères de performances à savoir : la précision et la rapidité.

Annexe A

Théorème A1 (LaSalle-Yoshizawa) : Considérons le système non linéaire variable dans le temps suivant :

$$\dot{x} = f(x, t)$$

Où, $f : R^n \times R_+ \rightarrow R^n$ est localement un Lipschitz dans x uniformément dans t et continuellement par morceaux dans t .

Soit $x = 0$ un point d'équilibre de ce système, c'est-à-dire que $f(0, t) = 0, \forall t \geq 0$.

Soit $V(x) \in C^1(R^n \rightarrow R)$ une fonction continuellement différentiable, positive définie et radiale non liée de telle sorte que :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -W(x) \leq 0, \forall x \in R^n$$

Où, W est une fonction continue. Ensuite, toutes les solutions de ce système sont globalement liées uniformément et satisfont

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0$$

Voir[A1 -A2] Théorème A2 : Considérons l'équation autonome de troisième ordre suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -cx - \phi(y)y - \psi(y)z, \end{cases}$$

Où $\phi(y)$ et $\psi(y)$ sont des fonctions continues de y et c est une constante, puis l'origine est globalement asymptotiquement stable si :

$$\inf_{y \in R} \phi(y) > 0, \inf_{y \in R} \psi(y) > 0 \text{ et } \inf_{y \in R} \phi(y) \cdot \inf_{y \in R} \psi(y) > c$$

Le résultat dans le théorème suivant est une version en deux dimensions d'une conjecture générale sur la stabilité globalement asymptotique, appelée conjecture de Markus-Yamabe (ou conjecture de Jacobienne), qui s'est avérée vraie pour le modèle à deux dimensions.[A3-A4]

Théorème A3 (Markus-Yamabe) : Soit $f \in C^1(R^n, R^n), f(0) = 0$.

Considérons l'équation différentielle autonome à n dimensions, $\dot{x} = f(x)$

Si pour tout $x \in R^n$ les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial f}{\partial x}$ de f en x si les parties réelles sont négatives, on suppose alors que la solution zéro de l'équation différentielle est globalement stable.

Annexe B

Lemme B1: La matrice P définie par (9) est définie positive. Preuve. Pour montrer que la matrice P est définie positive, nous montrons d'abord que les trois inégalités suivantes :

$$\mu < \psi_0, \quad (B1)$$

$$4(-k_i + \mu\phi_0)(-\mu + \psi_0) > \mu^2 L_2^2, \quad (B2)$$

$$-k_i + \mu\phi_0 > 0. \quad (B3)$$

Notez que par définition du ω_{pid} , on a:

$$(k_p - L_1)(k_d - L_2) > k_i + L_2\sqrt{k_i(k_d + L_2)}, \text{ ainsi } \phi_0\psi_0 > k_i + L_2\sqrt{k_i(k_d + L_2)}$$

Par conséquent : $0 < \psi_0 < L_2 + k_d$, on a $\phi_0\psi_0 - k_i > L_2\sqrt{k_i\psi_0} > 0$

$$(\phi_0\psi_0 - k_i)^2 > L_2^2 k_i \psi_0 \quad (B4)$$

Par conséquent l'équation **(B1)** est vrai tant que :

$$\mu - \psi_0 = \frac{-(2\phi_0\psi_0 - 2k_i + L_2^2\psi_0)}{4\phi_0 + L_2^2} < 0$$

De plus, en réécrivant **(B4)** comme :

$$(\phi_0\psi_0 - k_i)^2 - (4\phi_0 + L_2^2)k_i\psi_0 > 0, \quad (B5)$$

On sait que :

$$4(-k_i + \mu\phi_0)(-\mu + \psi_0) - \mu^2 L_2^2 = -(4\phi_0 + L_2^2)\mu^2 + (4\phi_0\psi_0 + k_i)\mu - 4k_i\psi_0 =$$

$$\frac{4[-(4\phi_0 + L_2^2)k_i\psi_0 + (\phi_0\psi_0 + k_i)^2]}{4\phi_0 + L_2^2} > 0$$

D'où l'équation (B2) est également valide et par conséquent (B3) découle de (B1) et (B2). Ensuite, par (B1) et (B3), il est facile de vérifier que P est défini positif, puisque les trois inégalités suivantes sont valables:

$$\mu k_i > 0$$

$$\det = \begin{bmatrix} \mu k_i & k_i \\ k_i & \phi_0 + \mu\psi \end{bmatrix}$$

Et,

$$\det = \begin{bmatrix} \mu k_i & k_i & 0 \\ k_i & \phi_0 + \mu\psi & \mu \\ 0 & \mu & 1 \end{bmatrix} = k_i(\mu\phi_0 + \mu^2\psi - k_i - \mu^3) > k_i(\mu^2\psi_0 - \mu^3) = k_i\mu^2(\psi_0 - \mu) > 0$$

Lemme B2: Soit $f(.,.)$ une fonction continue définie dans $R \times K$, où $K \subset R^n$ est un ensemble compact. Définissez $h(y) = \inf(y, w)$, puis $h(.)$ est une fonction continue de y .

Preuve : Tout d'abord, nous prouvons que $A_c = \{y \in R : h(y) > c\}$ est ouvert pour tout $c \in R$. Supposons que $h(y_0) > c$ pour un peu de y_0 , puis $f(y_0, w) > h(y_0) > c$ pour tout $w \in K$ selon la définition de $h(.)$. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $f(y, w) \geq \frac{h(y_0) + c}{2}$.

pour tout y qui satisfait $|y - y_0| < \delta$ et pour tout $w \in K$, puisque f est uniformément continu dans $[y_0 - 1, y_0 + 1] \times K$. D'où $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset A_c$, ce qui donne la propriété d'ouverture de A_c .

Ensuite, nous prouvons que $B_c = \{y \in R : h(y) < c\}$ est également ouvert pour tout c . Supposons que $h(y_0) < c$ pour certains y_0 . Puisque K est compact.

il existe un $w_0 \in K$ tel que $h(y_0) = f(y_0, w_0)$. Par la propriété continuité de f au point (y_0, w_0) , nous concluons qu'il existe un $\eta > 0$ tel que $f(y, w) \leq \frac{h(y_0) + c}{2}$ pour tout y satisfaisant $|y - y_0| < \eta$ D'où $h(y) \leq f(y, w_0) \leq \frac{h(y_0) + c}{2}$ pour $y \in (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$. Nous concluons que B_c est également ouvert pour tout $c \in R$. En conclusion, $h(.)$ est une fonction continue de y .

Annexe C

Tracée de la fonction marge de phase en fonction $x_1(0)$

```
clc
mph = [];
kp = 3.05;
ki = 1.73;
kd = 0.43;
s = tf('s');
x10 = [pi/8 pi/6 pi/3 pi/2 pi];
for i = 1:5
num = 4*(kd*s^2 + kp*s + ki)
den = s^3 + 0.04*s^2 + 20*s*cos(x10(i));
f = num/den;
[gm pm] = margin(f);
mph = [mph, pm];
end
plot(x10, mph);
```

Annexe D

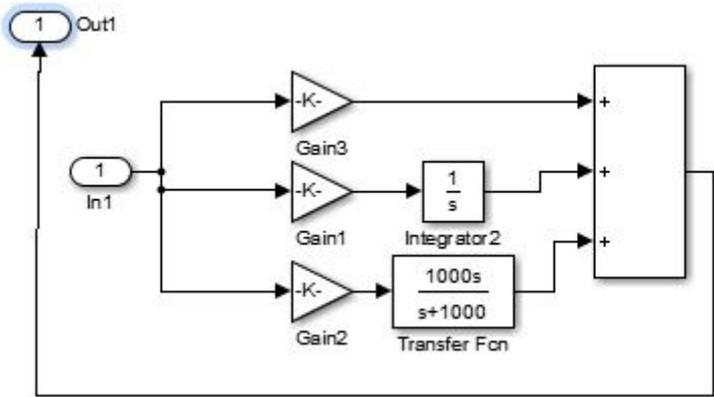


Figure 4.14: Subsystem(PID)

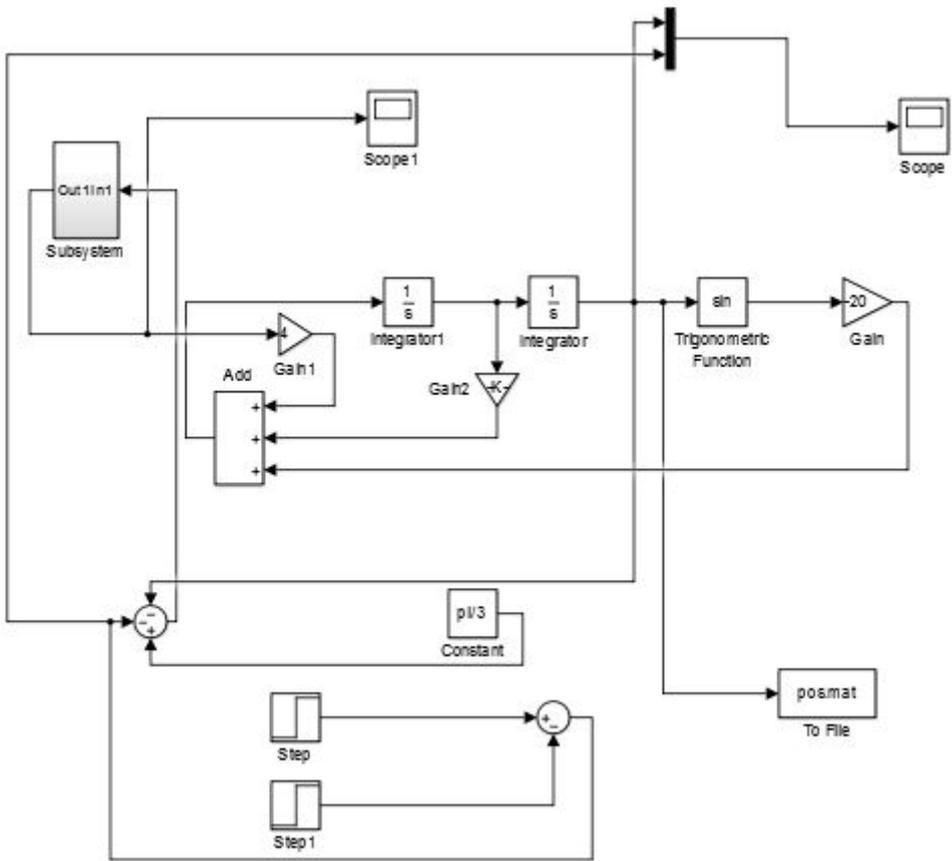


Figure 4.15: Pendule inversé + PID

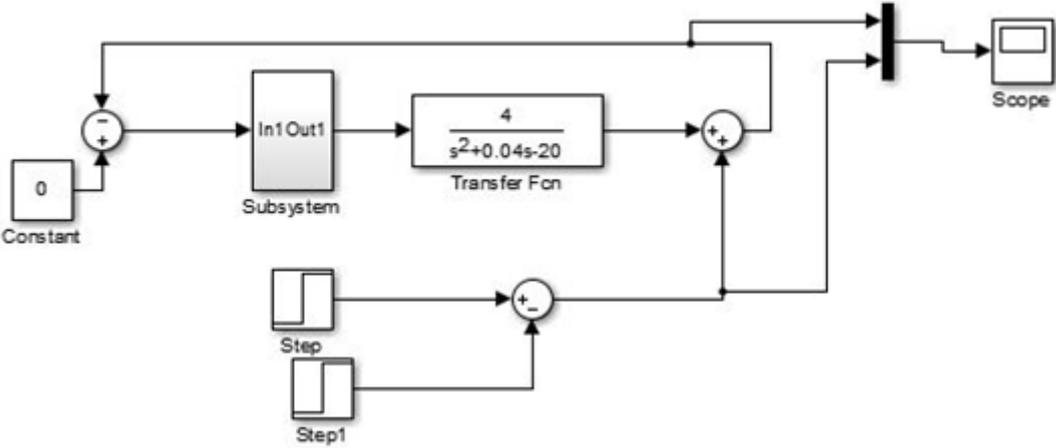


Figure 4.16: Pendule inversé (linéarisé autour de π) + PID

Bibliographie

- [1]. Ziegler J G, N.N.B., *Optimum settings for automatic controllers. J Dyn Syst Measur Control.* 1993. **115** p. 220–222.
- [2]. Rivera D. E., Mourari M. et Skogested, *Internal model control. 4.PID controller design.* Ind. Eng. Chem. Res. 1986. **25(1)** p. 252–265
- [3]. Astrom K J, H.T., *Advanced PID Control.* ISA 2006: The Instrumentation, Systems, and Automation Society
- [4]. Blanchini F, L.A., Miani S, et al. , *Characterization of PID and lead/lag compensators satisfying given HI specifications.* IEEE Trans Automat Control, 2004. **49**: p. 736–740.
- [5]. Hara S, I.T., Shiokata D. , *Robust PID control using generalized KYP synthesis: direct open-loop shaping in multiple frequency ranges.* IEEE control syst, , 2006. **26**: p. 80–91.
- [6]. Ho M T, L.C.Y., *PID controller design for robust performance.* IEEE Trans Automat Control, 2003. **48**: p. 1404–1409.
- [7]. Killingworth N J, K.M., *PID tuning using extremum seeking: online, model-free performance optimization* IEEE control systems 2006. **26** p. 70–79.
- [8]. Killingworth N J, K.M., *PID tuning using extremum seeking: online, model-free performance optimization* IEEE control systems 2006. **26** p. 70–79.
- [9]. Brendan O'Dwyer, *Theorising accountability for NGO advocacy.* 2006, University of Amsterdam Business school
- [10]. Silva G J, D.A., Bhattacharyya S P., *PID Controllers for Time-Delay Systems*2005, Boston: Birkhäuser
- [11]. Söylemez M T, M.N., Baki H, *Fast calculation of stabilizing PID controllers* Automatica 2003. **39**: p. 121–126.
- [12]. *Further results on limitations of sampled-data feedback.* Journal of Systems Science and Complexity, 2014. **27** (5): p. 817–835.
- [13]. Nicholas Petit, Pierre Rouchon. *Automatique : Dynamique et contrôle des système.* Enginnering school. MINES ParisTech, 2009, pp.236.
- [14]. Cours régulation, Université de Caen Slides 47 à 50. Available from: http://www.grey.unicaen.fr/emagarot/pdf/CM_regul_slides_2007.pdf
- [15]. L., G., *Some perspectives on the development of control theory (in Chinese).* J Sys Sci Math Sci, 2011. **31**: p. 1014–1018
- [16]. Marie, *Analyse numérique et equations différentielles,* Demaily Analyse, Gourdon. Fichier : [Théorème de Cauchy-Lipshitz.pdf](#)
- [17]. ; Available from: <http://www.moto.honda.fr/motorcycles/range/adventure/nc750x/overview.html>.
- [18]. Jory Lafaye : *Commande des mouvements et de l'équilibre d'un robot humanoïde à roues omnidirectionnelles.* Automatique / Robotique. Université de Grenoble Alpes, 2015.