



**République Algérienne Démocratique Et Populaire**  
**Ministère De L'enseignement Supérieur**  
**Et De La Recherche Scientifique**  
**Université Abou Bakr Belkaid-Tlemcen**  
**Faculté De Technologie**  
**Département de Génie Electrique et Electronique**



**Mémoire de projet de fin d'études pour l'obtention du diplôme de Master**  
**En Génie Industriel**  
**Spécialité : Ingénierie de la production**

**Intitulé :**

**Modélisation et optimisation des systèmes automatisés de  
stockage/déstockage classiques**

Présenté par :

**ZEROUAL Fatima Zahra**

**Devant les jurys :**

<b>Président</b>	M. F. MALIKI	MAA	UABB Tlemcen
<b>Examineur</b>	Mme. Y. HOUBAD	MAA	UABB Tlemcen
<b>Examineur</b>	Mme. I. LARIBI	MAB	UABB Tlemcen
<b>Encadreur</b>	Mme. L. GHOMRI	MCA	UABB Tlemcen
<b>Co-Encadreur</b>	M. A. RIMOUCHE	MCB	UABB Tlemcen

Année universitaire 2018-2019

# DEDICACES

*Je dédie ce travail...*

## *A Mon très cher Père*

*Homme modeste, humble, l'admiration que j'ai pour toi est sans limite. L'amour que tu as porté à tes enfants, la dignité, l'éducation et le sens de l'honneur nous servent de modèle. Ta patience sans fin, ta compréhension et ton encouragement sont pour moi le soutien indispensable que tu as toujours su m'apporter. Je te dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain et je ferai toujours de mon mieux pour rester ta fierté et ne jamais te décevoir. Ce travail le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation. Que Dieu le tout puissant te préserve, t'accorde santé, bonheur, quiétude de l'esprit et te protège de tout mal.*

## *A Ma très chère Mère*

*Tu m'as comblé avec ta tendresse et affection tout au long de mon parcours. Tu n'as cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études, tu as toujours été présente à mes côtés pour me consoler quand il fallait. En ce jour mémorable, pour moi ainsi que pour toi, reçoit ce travail en signe de ma vive reconnaissance et ma profonde estime. Quoique je puisse dire et écrire, je ne pourrais exprimer ma grande affection et ma profonde reconnaissance. J'espère ne jamais te décevoir, ni trahir ta confiance et tes sacrifices. Puisse le tout puissant te donner santé, bonheur, réussite et longue vie afin que je puisse te combler à mon tour.*

## *A Mon cher frère*

*Ta présence à mes côtés m'a toujours donné l'impression d'être proche de toute la famille. Sans toi ma vie ne serait que simple. Je voudrais t'exprimer à travers ces quelques lignes tout l'amour et toute l'affection que j'ai pour toi. Je t'aime petit frère !*

# Remerciement

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail, particulièrement lorsque il m'avoir accompagné durant mon parcours et aidé à arriver à cette étape. Sans lui, je n'en serais pas là.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance à mes encadreurs GHOMRI Latefa et RIMOUCHE Alli pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la direction de ce mémoire, leurs patiences, leurs disponibilités, leurs orientations et surtout leurs judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie aussi Mr. MALIKI Fouad, Mme. HOUBAD Yamina et Mme. LARIBI. Imane d'avoir accepté d'évaluer mon travail au sein du jury de soutenance.

Je remercie BOUMEZIRENE Thiziri pour son soutien et sa disponibilité, elle m'a apporté le support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Je désire aussi à remercier mon très cher père, ma chère mère et mon chère frère pour leurs soutiens, leurs présences et leurs confiances en moi, m'ont toujours poussé vers l'avant.

Également je remercie mes meilleurs amis BESSEGHIR Hakima, BOUAMRANE Mansora et MEKKAOUI Manel pour leur soutien.

Comme l'a dit un jour l'ancien président des Etats-Unis, Bill Clinton, "Nous ne pouvons construire notre propre avenir sans aider les autres à construire le leur." Par cette citation, je voudrais remercier toutes personnes et tous mes professeurs qui m'ont formé, m'ont aidé, étaient présent pour moi et suivi mes pas pour arriver à cette étape.

# Table des matières

Introduction Générale .....	01
-----------------------------	----

## CHAPITRE 1

### Introduction aux systèmes automatisés de stockage/déstockage AS/RS

1.1 Introduction .....	4
1.2 Systèmes automatisés de stockage/déstockage AS/RS .....	4
1.2.1 Définition .....	4
1.2.2 Fonction .....	5
1.2.3 Terminologie .....	5
1.2.4 Types d'AS/RS.....	5
1.2.5 Avantages d'AS/RS.....	10
1.2.6 Inconvénients d'AS/RS.....	11
1.3 Méthodologies de stockage.....	11
1.3.1 Stockage dédié.....	12
1.3.2 Stockage aléatoire ouvert.....	12
1.3.3 Stockage aléatoire par classe.....	12
1.4 Conception d'un AS/RS .....	12
1.5 Mesures de performances d'un AS/RS.....	13
1.6 Techniques d'évaluation de performance .....	13
1.6.1 Mesures directes .....	14
1.6.2 Modélisation.....	14
1.6.3 Simulation pour l'évaluation des performances .....	15
1.7 Etat de l'art .....	15
1.8 Conclusion.....	17

## CHAPITRE 2

### Approximation de fonction de temps de simple cycle d'un l'AS/RS multi Allées

2.1 Introduction .....	19
2.2 Description de l'AS/RS multi allées .....	19
2.3 Fonctionnement de l'AS/RS multi allées .....	20
2.4 Expression analytique discrète du temps de simple cycle pour l'AS/RS multi Allées .....	23
2.5 Expression analytique continue du temps de simple cycle pour l'AS/RS multi allées .....	24
2.5.1 Temps de simple cycle E(SC) .....	24
2.6 Présentation de la régression linéaire et la régression non linéaire .....	30
2.7 Description de la méthode des moindres carrés : .....	30
2.8 Approximation au sens des moindres carrés.....	35
2.8.1 Ajustement de courbe : .....	36
2.9 Conclusion.....	38

## CHAPITRE 3

### Optimisation des dimensions d'un AS/RS multi allées pour un temps de simple cycle

3.1 Introduction .....	40
3.2 Méthaeuristiques .....	42
3.3 Méthode du recuit simulé .....	42
3.3.1 Algorithme de recuit simulé.....	44
3.4 Optimisation du temps de simple cycle pour un AS/RS multi allées .....	45
3.5 Formulation du problème .....	46
3.5.1 Détermination de critères .....	46
3.6 Continuité, coercivité et domaines de définition pour les fonctions $F1$ et $F2$ .....	48
3.7 Recherche des extrema .....	50
3.7.1 Recherche de points critiques pour la fonction $F1$ .....	50
3.7.2 Recherche de points critiques pour la fonction $F2$ .....	53
3.8 Adaptation du recuit simulé pour l'AS/RS multi allées .....	55

3.9 Dimensions optimales d'un AS/RS multi allées du simple cycle .....	58
3.10 Nombre des casiers optimaux d'un AS/RS multi allées du simple cycle .....	59
3.11 Conclusion .....	62

## CHAPITRE 4

### Modélisation mathématique de temps de simple cycle de l'AS/RS à rack glissants

4.1 Introduction .....	64
4.2 Description de l'AS/RS multi allées .....	64
4.3 Fonctionnement de l'AS/RS à racks glissants .....	65
4.4 Expression analytique discrète du temps de simple cycle pour l'AS/RS à rack glissant .....	66
4.5 Expression analytique continue du temps de simple cycle pour l'AS/RS à rack glissant .....	67
4.5.1 Temps de simple cycle $E(SC)$ .....	67
4.6 Temps de déplacement horizontal $SCh$ .....	69
4.6.1 Formulation mathématique du premier cas ( $tp < tR$ ) .....	70
4.6.2 Formulation mathématique du deuxième cas ( $tp > tR$ ) .....	79
4.7 Produit de convolution pour le premier cas $Th < Tp - TR$ .....	83
4.7.1 Expressions mathématiques du temps de déplacement total $E(SC)$ .....	87
4.8 Produit de convolution pour le deuxième cas $Th > Tp - TR$ .....	90
4.8.1 Expressions mathématiques du temps de déplacement total $E(SC)$ .....	92
4.9 Temps de simple cycle moyen pour l'AS/RS à racks glissants .....	95
4.10 Conclusion .....	99
Conclusion générale .....	100
Références Bibliographiques .....	102

# Table des figures

## CHAPITRE 1

FIGURE 1.1 : PRINCIPAUX CONSTITUANTS D'UN AS/RS .....	5
FIGURE 1.2 : AS/RS A CHARGE UNITAIRE.....	6
FIGURE 1.3 : AS/RS A MINI CHARGE .....	6
FIGURE 1.4 : AS/RS A ETAGERES PROFONDES (BEKKARA, 2018)[] .....	7
FIGURE 1.5 : AS/RS A PERSONNE EMBARQUEE.....	7
FIGURE 1.6 : AS/RS A CONVOYEUR GRAVITATIONNEL(BESSENOUCI)[].....	8
FIGURE 1.7 : AS/RS A CARROUSEL .....	9
FIGURE 1.8 : AS/RS MULTI ALLEES .....	9
FIGURE 1.9 : AS/RS A RACK GLISSANT .....	10
FIGURE 1.10 : TECHNIQUE D'EVALUATION DE PERFORMANCE.....	14

## CHAPITRE 2

FIGURE 2.1 : AS/RS MULTI ALLEES .....	20
FIGURE 2.2 : DEPLACEMENT DE LA MACHINE S/R.....	20
FIGURE 2.3 : SIMPLE CYCLE.....	21
FIGURE 2.4 : DOUBLE CYCLE .....	22
FIGURE 2.5 : REPRESENTATION DES NOTATIONS UTILISEES .....	23
FIGURE 2.6 : DISTRIBUTION DISCRETE EXACTE DES VARIABLES SCH1 ET SCH2 .....	25
FIGURE 2.7 : DISTRIBUTION CONTINUE APPROCHEE DES VARIABLES SCH1 ET SCH2.....	25
FIGURE 2.8 : DISTRIBUTION ALEATOIRE DE LA VARIABLE SCH MODELISANT LE DEPLACEMENT HORIZONTAL DE LA MACHINE S/R .....	26
FIGURE 2.9 : LES CAS POSSIBLES LORS DU CALCUL DU TEMPS DE CYCLE DE LA MACHINE E(SC) .....	27
FIGURE 2.10 : REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UN NUAGE DE POINT.....	31
FIGURE 2.11 : REPRESENTATION DE L'UTILISATION DES MOINDRES CARRES SUR MATLAB ...	36
FIGURE 2.12 : NUAGE DE POINT OBTENU PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES .....	37
FIGURE 2.13 : COURBE REPRESENTANTE LA FONCTION APPROXIMATIVE .....	37

## CHAPITRE 3

FIGURE 3.1 : L'ORGANIGRAMME DE L'ALGORITHME DE METROPOLIS .....	44
---	----

## CHAPITRE 4

FIGURE 4.1 : CONFIGURATION D'UN AS/RS A RACKS GLISSANTS .....	65
FIGURE 4.2 : REPRESENTATION DES TEMPS DE DEPLACEMENT.....	67
FIGURE 4.3 : DISTRIBUTION DU MAXIMUM ENTRE LE DEPLACEMENT HORIZONTAL TPET LE TEMPS GLISSEMENT DES RACKS TR .....	71
FIGURE 4.4 : DISTRIBUTION DU MAXIMUM ENTRE LE DEPLACEMENT HORIZONTAL TPET LE TEMPS GLISSEMENT DES RACKS TR .....	73
FIGURE 4.5 : DISTRIBUTION DU TEMPS DE DEPLACEMENT VERTICAL TV.....	74
FIGURE 4.6 : DISTRIBUTION DU TEMPS DE DEPLACEMENT TOTALE DE LA MACHINE S/R .....	77
FIGURE 4.7 : DISTRIBUTION DU TEMPS DE DEPLACEMENT TOTALE DE LA MACHINE S/R .....	79
FIGURE 4.8 : DISTRIBUTION DU MAXIMUM ENTRE TP ET TR.....	81
FIGURE 4.9 : DISTRIBUTION DU MAXIMUM ENTRE TP ET TR.....	81
FIGURE 4.10 : DISTRIBUTION DES FONCTIONS F(X) ET G(X) .....	83
FIGURE 4.11 : DISTRIBUTION DU SOMME DE DEUX TEMPS DE DEPLACEMENTS HORIZONTAUX..	86
FIGURE 4.12 : PRESENTATION DES DEFERENTS CAS POSSIBLES .....	87
FIGURE 4.13 : PRESENTATION DES DEFERENTS CAS POSSIBLES .....	93

# Liste des tableaux

## CHAPITRE 3

<b>TABLEAU 3.1 :</b> COMPARAISON ENTRE LES RESULTATS DONNES PAR LE RECUIT SIMULE .....	59
<b>TABLEAU 3.2 :</b> COMPARAISON ENTRE LES RESULTATS ANALYTIQUE ET LES RESULTATS DES RELATIONS (49), (50) ET (51) .....	59
<b>TABLEAU 3.3 :</b> LE TEMPS MINIMAL DE SIMPLE CYCLE .....	61

## CHAPITRE 4

<b>TABLEAU 4.1 :</b> DISTRIBUTIONS DISCRETES EXACTES ET CONTINUE APPROCHEE DES VARIABLES $t_p$ , $t_h$ , $t_v$ ET DU CONSTANT $t_r$ AVEC LEURS FONCTIONS DE DENSITE .....	68
<b>TABLEAU 4.2 :</b> DISTRIBUTIONS DES VARIABLES $t_p$ , $t_h$ , $t_v$ ET DU CONSTANT $t_r$ AVEC LEURS FONCTIONS DE REPARTITION.....	69
<b>TABLEAU 4.3 :</b> DISTRIBUTION DU MAXIMUM ENTER LE DEPLACEMENT HORIZONTAL ET LE TEMPS DE GLISSEMENT DES RACKS .....	71
<b>TABLEAU 4.4 :</b> DISTRIBUTION DU TEMPS DE DEPLACEMENT HORIZONTAL POUR LE PREMIER CAS ( $t_p < t_r$ ) .....	72
<b>TABLEAU 4.5 :</b> CALCULE DU TEMPS DE DEPLACEMENT TOTAL DE LA MACHINE S/R POUR LE PREMIER CAS .....	75
<b>TABLEAU 4.6 :</b> CALCULE DU TEMPS DE DEPLACEMENT TOTAL DE LA MACHINE S/R POUR LE DEUXIEME CAS.....	76
<b>TABLEAU 4.7 :</b> CALCULE DU TEMPS DE DEPLACEMENT TOTAL DE LA MACHINE S/R POUR LE TROISIEME CAS .....	78
<b>TABLEAU 4.8 :</b> DISTRIBUTION DU MAXIMUM ENTER LE DEPLACEMENT HORIZONTAL ET LE TEMPS DE GLISSEMENT DES RACKS .....	80
<b>TABLEAU 4.9 :</b> CALCULE DU SOMME DES TEMPS DE DEPLACEMENTS HORIZONTALS $MAX(t_p, t_r)$ ET $t_h$ .....	82
<b>TABLEAU 4.10 :</b> CALCULE DU SOMME DES TEMPS DE DEPLACEMENTS HORIZONTALS $MAX(t_p, t_r)$ ET $t_h$ POUR LE PREMIER CAS .....	83
<b>TABLEAU 4.11 :</b> DIFFERENTS CAS POSSIBLE.....	84
<b>TABLEAU 4.12 :</b> LES EXPRESSIONS DE DIFFERENTS CAS DU TEMPS DE DEPLACEMENT TOTAL....	89
<b>TABLEAU 4.13 :</b> DIFFERENTS CAS POSSIBLE.....	91
<b>TABLEAU 4.14 :</b> LES EXPRESSIONS DE DIFFERENTS CAS DU TEMPS DE DEPLACEMENT TOTAL ...	94

## Introduction générale

Le développement d'une entreprise devient difficile particulièrement à cause de la concurrence qui augmente jour par jour entre les firmes afin d'avoir un grand part dans le marché et rester compétitif et pour accroître sa productivité. Il parait donc important pour une entreprise atteindre ces objectifs cela nécessite d'optimiser sa chaîne logistique. La logistique gérée tout ce qui concerne le transport, le stockage et l'entrepôt, etc., le stockage des marchandise a une importance capitale et parmi les facteurs qui a un impact majeur sur la performance des l'entreprises, peut avoir un impact positif ou négatif sur l'efficacité d'une entreprise parce que l'achat et l'entreposage des marchandises (la matière première, les outillages, pièces de rechange...) nécessitent beaucoup d'argent c'est pourquoi une bonne gestion des stocks garantit un gain d'argent et du temps par la réduction des temps d'attente au niveau de la production ou bien au niveau de la préparation d'une commande pour que un système de stockage réagir très rapidement à une demande de stockage ou bien de déstockage [1].

Tout récemment, les entreprises ont accordé une importance considérable aux systèmes automatisés de stockage/déstockage (AS / RS). Ces systèmes représentent un substitut innovant à la gestion des entrepôts. Ils étaient largement utilisés depuis les années 60 dans divers secteurs en raison des avantages importants qu'ils présentent dans les environnements de distribution et de production [2]. Les principaux avantages de ces systèmes sont la réduction de coûts de main-d'œuvre et d'espace particulièrement, la facilité et la rapidité de traitement des matériaux et fournir des charges de n'importe quelle type (outils, palettes, pièces de rechange...). Principalement composés des racks chacun a des casiers de stockage pour stocker les charges unitaires, des machines de stockage/déstockage qui peuvent se déplacer de manière autonome pour stocker ou déstocker les produits, d'une série d'allées former par des espaces vides entre les racks, où la machine S/R peut se déplacer [3] et d'un ou plusieurs stations dépôt/livraison dans chaque allée pour déposer ou récupérer les charges. Ils existent plusieurs types d'AS/RS peuvent être distinguées selon certaines fonctions et applications, parmi ces types nous avons choisi d'étudier les AS/RS multi allées et à racks glissants dans ce travail.

En considération de l'optimisation d'espace et les coûts d'investissement. Parmi les paramètres utilisés le temps moyen nécessaire pour servir une opération de stockage/déstockage. Nous avons dédié ce travail à l'évaluation de ce paramètre dans le cas des AS/RS multi allées et à racks glissants.

Dans le premier chapitre nous présentons des généralités sur les AS/RS qui contiennent une définition, les composants et leurs fonctions, une description des différents types des AS/RS est accomplie, leurs avantages et leurs inconvénients. En suite, nous exposons les différentes méthodologies de stockage, les mesures et les techniques d'évaluation de performances des AS/RS, terminant par une revue de la littérature de ces systèmes.

Le deuxième chapitre est consacré à trouver une fonction approximative d'un AS/RS multi allées pour un temps de simple cycle. Premièrement nous expliquons la notion mathématique de la méthode utilisée pour obtenir la fonction approximative en utilisant le logiciel Maple, qu'elle est la méthode des moindres carrés, puis nous présentons la technique de l'approximation au sens moindres carrées, et à la fin une interprétation des résultats obtenus

Dans le troisième chapitre, nous proposons d'optimiser le temps moyen de simple cycle d'un AS/RS multi allées dans le cas où l'emplacement qui abritera ce système de stockage n'est pas encore construit. Nous allons traiter le problème d'optimisation des dimensions d'AS/RS multi allées en minimisant la fonction du temps de simple cycle établie par Ghomri et al [4] et la fonction approximative pour un temps de simple cycle minimal. Ces fonctions sont basées sur l'optimisation d'une fonction non linéaire en nombre réel à trois variables avec contraintes liées à la taille du système et à la constance de cette taille et des contraintes de causalité des durées de transports horizontaux et verticaux. La recherche des points critiques revient à résoudre des systèmes d'équations non linéaire, faisant appel au logiciel Maple.

Le quatrième et le dernier chapitre représente la modélisation mathématique de temps de simple cycle pour l'AS/RS à rack glissant. Présentons la formulation du modèle mathématique du temps moyen de simple cycle et la procédure adoptée dans le développement de ce modèle.

**CHAPITRE 1 :**  
**Introduction aux systèmes automatisés**  
**de stockage/déstockage AS/RS**

## **1.1 Introduction**

Le stockage est un élément très important dans les entreprises, que ce soit pour stocker ou récupérer des matières premières, des produits finis ou des outillages etc. Pendant une période donnée bien déterminée. Le nombre de produits stockés détenus peut facilement atteindre des dizaines de milliers, pour cette raison les grandes entreprises cherchent d'adopter une politique de gestion des stocks économique, robuste et efficace en termes de temps et d'investissement pour maintenir un avantage concurrentiel parmi eux, surtout en période de mondialisation accélérée [5]. Les systèmes automatisés de stockage/déstockage AS/RS répondent aux besoins ci-dessus et présentent les avantages suivants: densité de stockage élevée, stockage et récupération rapides et fiables avec une intervention humaine minimale, et suivi des stocks en temps réel.

Dans ce premier chapitre, nous présentons des généralités sur les systèmes automatisés de stockage/déstockage AS/RS qui contiennent une définition, les composants des AS/RS ainsi que leurs fonctions. Ensuite une description des différents types des AS/RS est accomplie, leurs avantages et leurs inconvénients. Par la suite, nous exposons les différentes méthodologies de stockage, les mesures et les techniques d'évaluation de performances des AS/RS, terminant par un état de l'art qui regroupe les travaux les plus importants dans le domaine des AS/RS.

## **1.2 Systèmes automatisés de stockage/déstockage AS/RS**

### **1.2.1 Définition**

Les systèmes de stockage et de déstockage (AS/RS) sont une combinaison d'équipement et de commandes qui manipulent, stockent et récupèrent automatiquement les matériaux (composants, outils, matières premières et sous-ensembles) avec une grande rapidité et précision. Par conséquent, ils sont largement utilisés dans les entreprises industrielles pour gérer les produits avec une utilisation rentable du temps, de l'espace et de l'équipement [6].

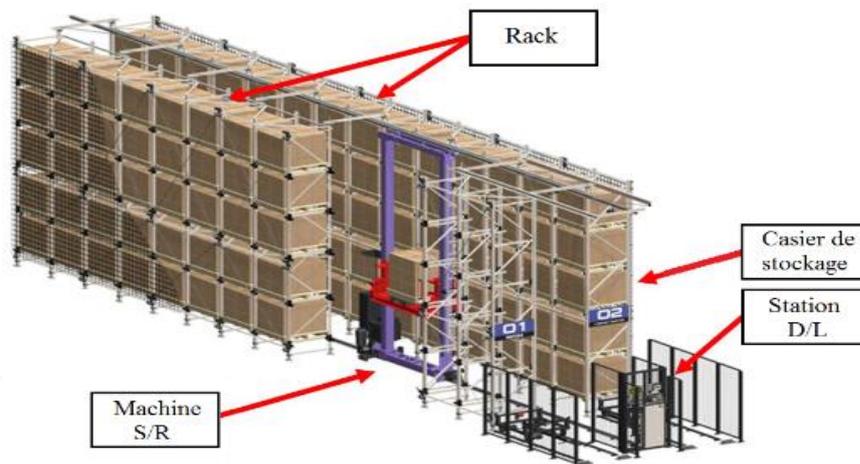
### 1.2.2 Fonction

Les systèmes automatisés de stockage et de déstockage effectuent un ensemble de base d'opération sans intervention humaine :

- Stockage automatique d'un article dans un emplacement prédéterminé après avoir reçu cet article d'un point de traitement ou d'interface.
- Déstockage d'un article d'un emplacement de stockage.
- Transport de cet article vers un point de livraison ou d'interface spécifique.

### 1.2.3 Terminologie

Un AS / RS consiste des racks chacun a des cellules (casiers) de stockage pour stocker les charges unitaires, des transstockeurs qui sont des machines de stockage/déstockage entièrement automatisées qui peuvent se déplacer de manière autonome pour stocker et déstocker les produits, d'une série d'allées former par des espaces vides entre les racks, où les transstockeurs peuvent se déplacer [3] et d'un ou plusieurs stations dépôt/livraison dans chaque allée pour déposer ou récupérer les charges dans le système. La figure (1.1) présente les principaux constituants d'un AS/RS.



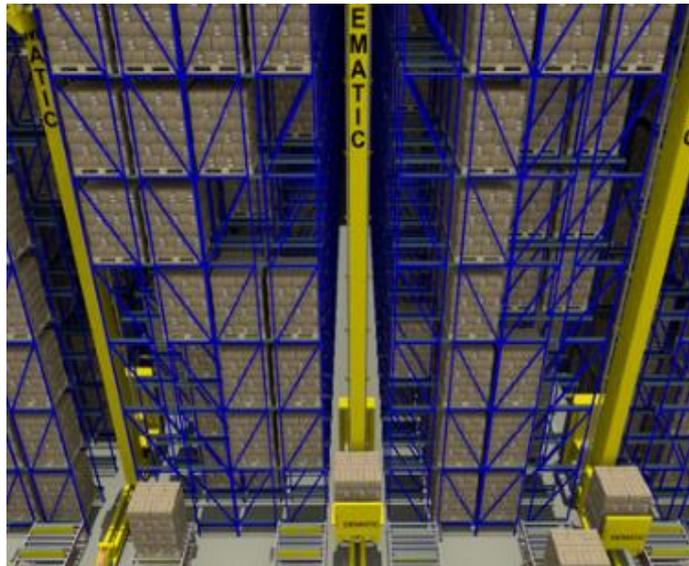
**Figure1.1** : Principaux constituants d'un AS/RS

### 1.2.4 Types d'AS/RS

Plusieurs catégories importantes d'AS / RS peuvent être distinguées selon certaines fonctions et applications. **GUEZZEN(2014)** explique les différents types d'AS / RS [3]. Nous pouvons citer, parmi les plus importantes :

### **1.2.4.1 AS/RS à charge unitaire**

L'unité de charge AS / RS est utilisée pour stocker et récupérer des charges palettisées ou stockées dans des conteneurs de taille standard. Les charges sont généralement supérieures à 200 kg par unité.



**Figure 1.2 : AS/RS a charge unitaire**

### **1.2.4.2 AS/RS à mini charge**

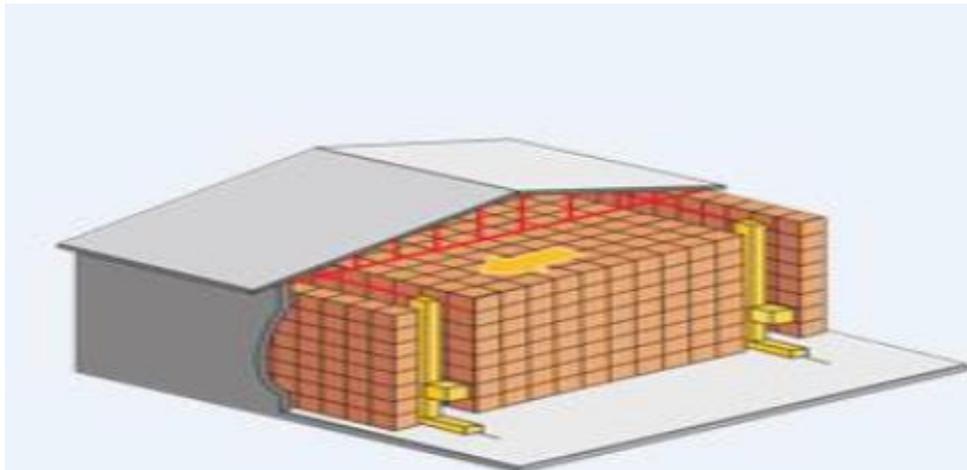
Ce système est conçu pour manipuler de petites charges telles que des pièces individuelles, des outils et des fournitures contenues dans des bacs ou des tiroirs du système de stockage.



**Figure1.3 : AS/RS à mini charge**

### **1.2.4.3 AS/RS à étagères profondes**

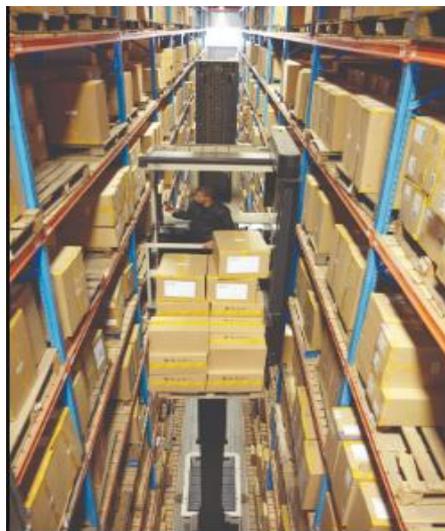
Ce système est utilisé quand on a une quantité importante de charges unitaires à stocker. Les articles sont stockés dans une mémoire profonde avec jusqu'à 10 articles dans un seul rack, une charge après l'autre.



**Figure1.4 :** AS/RS à étagères profondes [7]

### **1.2.4.4 AS/RS à personne embarquée**

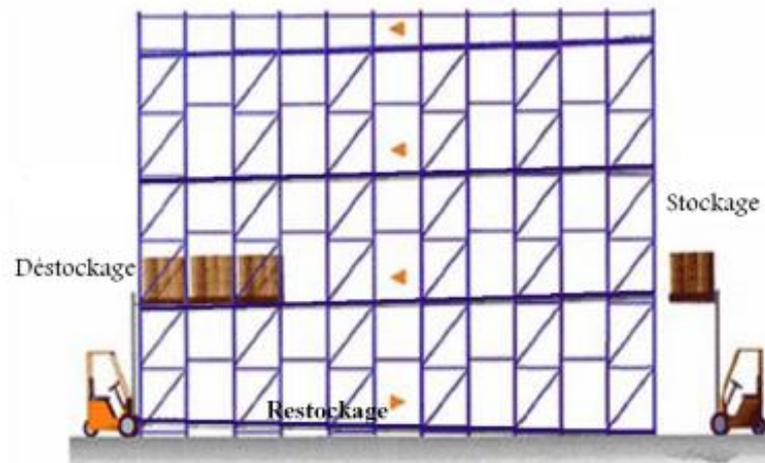
Ce système permet de stocker des articles dans des quantités inférieures à la charge unitaire. Un opérateur humain monte sur le chariot de la machine S / R pour ramasser des articles individuels dans un bac ou un tiroir. Le système permet de sélectionner des articles individuels directement à leurs emplacements de stockage.



**Figure1.5 :** AS/RS à personne embarquée

### **1.2.4.5 AS/RS à convoyeur gravitationnel**

Ce système est constitué d'un seul rack profond contenant plusieurs bacs, chacun équipé d'un convoyeur gravitaire incliné. Le système comprend deux machines: une à l'avant du rack pour stocker les produits et l'autre à l'arrière du rack pour récupérer les produits [5].



**Figure1.6 :** AS/RS à convoyeur gravitationnel [9]

### **1.2.4.6 AS/RS à carrousel**

Les systèmes AS / RS a carrousels sont utilisés pour le stockage de petites pièces. Un carrousel peut être défini comme "une série de casiers reliés entre eux par une chaîne continue et montés sur une piste ovale allongée" [10].l'ensemble de casiers sont montés sur une piste qui tourne horizontalement apportant les produits à l'opérateur qui permette d'élimine les temps de parcours des allées pour récupérer les objets du magasin. Les carrousels sont une bonne alternative au système à mini charge.

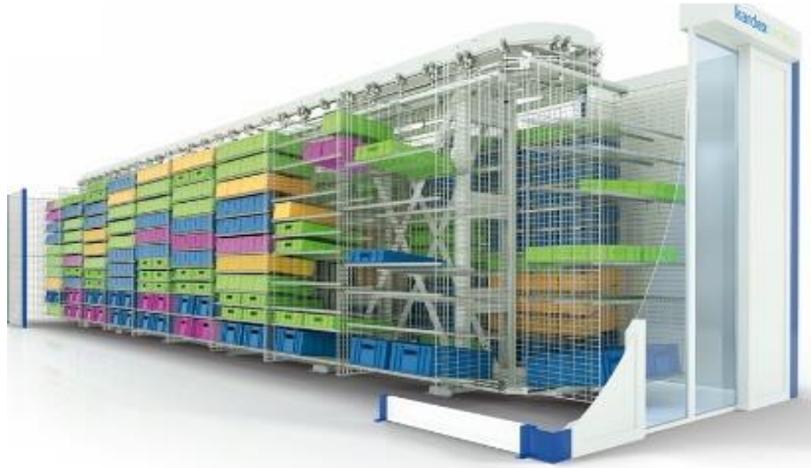


Figure1.7 : AS/RS à carrousel

#### 1.2.4.7 AS/RS multi allées

L'AS/RS multi allées est une variation de l'AS/RS à charge unitaire. Leurs machines S/R se déplacent simultanément, verticalement le long des colonnes formant les racks et horizontalement le long des allées de desserte et le long de l'allée commune dont l'une des extrémités est équipée d'une station de dépôt/livraison (D/L), peuvent servir plusieurs allées à la fois. Une description plus détaillée de ce type sera présentée dans le chapitre 2.



Figure1.8 : AS/RS multi allées

#### 1.2.4.8 AS/RS à racks glissants (racks mobiles)

Les AS/RS à racks glissants sont une variation des AS/RS multi allées. Lorsqu'une opération de stockage ou déstockage est prévue dans les racks, un seul couloir mobile est utilisé pour accéder à plusieurs rangées de racks correspondants. Pour ouvrir une allée entre

n'importe quels deux racks mitoyens, le système glisse latéralement sur des rails de guidage dans le sol. Au début, il existe une seule allée de service, celle-ci pouvant « se déplacer » entre n'importe quel deux racks mitoyens (en vérité ce n'est pas l'allée qui se déplace mais les racks) [11].



**Figure1.9 : AS/RS à rack glissant**

### **1.2.5 Avantages d'AS/RS**

Les objectifs possibles qu'une entreprise peut vouloir atteindre en installant un système de stockage automatisé sont nombreuses nous pouvons citer :

- Capacité de stockage accrue dans un espace limité : pour le même espace, un AS/RS augmente considérablement la capacité de stockage et améliore l'utilisation des espaces de stockage verticalement et horizontalement pour créer une plus grande densité de stockage.
- Réduction des coûts de main-d'œuvre : l'automatisation de la majorité des opérations dans les AS/RS permet d'éliminer le besoin d'augmenter de la main-d'œuvre et de supprimer les coûts permanents liés à un nouvel employé, tels que, les charges sociales, les augmentations de salaire, la formation, etc.
- Réduction des temps de réponse : les systèmes AS/RS possèdent des temps de réponse très réduits, pour localiser, stocker ou déstocker des articles, par rapport aux systèmes classiques de stockage [11].
- Augmentation de la précision, de la productivité et de l'efficacité : une palette de produit livrée du magasin au mauvais département peut, par exemple, causer de la

confusion et des embouteillages. Les systèmes AS / RS permet de réduire le gaspillage et d'augmenter le rendement. Et tout cela permettra à les opérations de devenir plus précise et donc rentable.

- Réduction des détériorations : l'automatisation permet de la diminution des risques de casse des produits et de la protection des marchandises stockées contre les dommages. Ils offrent des opérations plus sûres.

### **1.2.6 Inconvénients d'AS/RS**

Les AS/RS peuvent offrir beaucoup d'intérêts mais, d'un autre côté, ils présentent quelques inconvénients dont les plus importants sont :

- Investissement initial élevé : Comme dans de nombreux projets d'automatisation, l'achat d'un AS / RS coûte plus cher à court terme que l'embauche de personnel ou l'utilisation d'autres équipements. Cet investissement initial peut constituer un défi pour les petites entreprises qui n'ont pas facilement accès au capital [12]. Par exemple, pour un AS/RS de 10000 casiers, 5 machines S/R et un convoyeur de 60m, l'investissement initial varie entre 2 et 3 millions de Dollars US [13].
- Les AS/RS après l'installation sont très difficiles à modifier.
- Une trop grande dépendance à l'automatisation comportera également de grands risques. Par exemple, lorsqu'un accident est coupé, l'électricité est limitée en été ou lorsque le système est arrêté accidentellement, que devrions-nous faire? [12].

### **1.3 Méthodologies de stockage**

Les systèmes de stockage peuvent être soit dédiés soit ouverts. Dans les systèmes dédiés, chaque produit possède sa propre aire de stockage [11]. Dans les systèmes ouverts, un article peut être stocké dans n'importe quel emplacement vide de l'entrepôt tel que le choix de cet emplacement se fait d'une manière aléatoire. Nous pouvons distinguer trois méthodes importantes de stockage : le stockage dédié, le stockage aléatoire ouvert et le stockage aléatoire par classe :

### **1.3.1 Stockage dédié**

Le stockage dédié, également appelé stockage à emplacement fixe, est l'attribution d'emplacements de stockage spécifiques pour chaque produit stocké tel que l'espace est partagé en blocs, chacun est réservé à un article déterminé. Avec le stockage multi produit, l'espace de stockage est nécessaire pour chacun des produits [12].

### **1.3.2 Stockage aléatoire ouvert**

La stratégie de stockage la plus simple est la stratégie de stockage aléatoire, elle n'utilise aucune information sur la charge de l'unité, de sorte que tout produit peut être stocké dans n'importe quel casier [13]. Le stockage aléatoire ouvert ignore les caractéristiques et du temps de résidence de l'unité de charge. Le principal avantage de cette stratégie est qu'elle utilise beaucoup moins d'espace que la stratégie stockage dédié où le gain d'espace est de l'ordre de 40% [13].

### **1.3.3 Stockage aléatoire par classe**

Dans les systèmes automatisés de stockage/déstockage les produits sont généralement différents, il y a des produits très utilisés et donc stockés et déstockés fréquemment, d'autres moins utilisés ayant une durée de stockage plus importante [15]. Donc le critère pour diviser les charges unitaires est leur temps de résidence plutôt que la fréquence d'accès de leur produit. Les produits dans un AS/RS ne restent pas stockés la même durée. Si les produits qui restent stockés peu de temps sont placés près de la station de livraison et les produits qui restent plus longtemps sont placés loin de la station.

Le stockage par classe permet de minimiser le temps de cycle, des réductions du temps de cycle peuvent atteindre 40% [13].

## **1.4 Conception d'un AS/RS**

La disposition de l'aire de stockage est importante dans la minimisation des coûts et temps de stockage/déstockage. Un emplacement mal conçu entraînerait de grandes pertes au niveau de l'investissement et au niveau du fonctionnement. Parmi les paramètres les plus importants qui doivent être pris en considération pour une bonne conception d'un système AS/RS [16], [17], on a :

- Dimension de la charge : En général, les produits à stocker ou à déstocker sont de tailles (largeur, hauteur, profondeur et poids) différentes, une bonne conception d'un système AS/RS serait idéal pour que l'on puisse stocker le plus de matériaux possibles [7].
- Structure de l'étagère.
- Nombre de casiers, de machine S/R, d'allées, d'étagères, etc.
- Durée de cycle : cycle simple, cycle double, etc.
- Taux d'utilisation des machines.

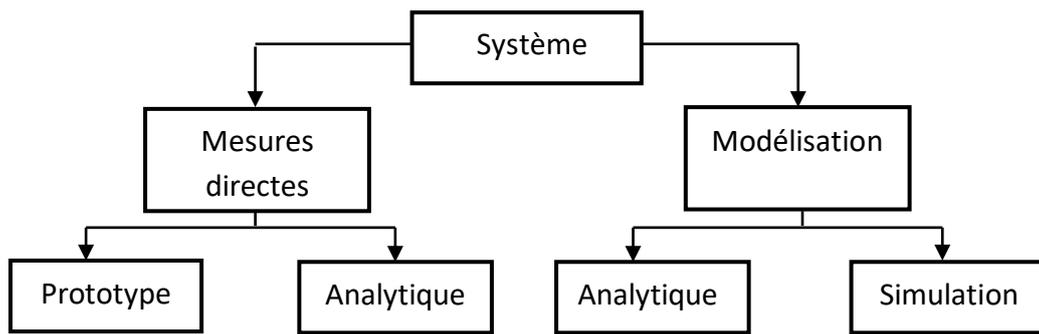
### 1.5 Mesures de performances d'un AS/RS

Les systèmes automatisés de stockage/déstockage utilisent des mesures de performances pour optimiser l'espace et les coûts d'investissement [15]. Nous pouvons citer les principales mesures :

- **Espace de stockage utilisé** : l'espace de stockage utilisé dans les AS/RS ou la quantité de produits qu'on peut stocker dépend du type de ce dernier.
- **Le taux d'utilisation de la machine S/R** : il correspond à la fréquence des opérations de stockage et de déstockage et au nombre de demandes traitées sur une période de temps.
- **Le temps de cycle** : le temps de cycle parmi les paramètres les plus importants pour certain type d'AS/RS, il influe directement sur les performances globales du système de production. Dans notre travail on utilise ce critère comme mesure de performance pour les AS/RS multi allées et à rack glissant.

### 1.6 Techniques d'évaluation de performance

Les différentes techniques d'évaluation de performance d'un système sont schématisées dans la figure (1.10) [18]. Elles peuvent être classées en trois grandes catégories : les mesures directes, les méthodes analytiques et la simulation informatique.



**Figure1.11** : Technique d'évaluation de performance

### 1.6.1 Mesures directes

Les mesures directes sont effectuées sur un système réel, une maquette ou un prototype physique représentant le système étudié. La réalisation de mesures directes sur un AS/RS ne peut être acceptée que dans le cas d'une démarche de progrès, d'amélioration continue, elles ne peuvent être pratiquées dans le cas de systèmes non existants et la réalisation de prototypes physiques coûte trop chère et nécessitent des budgets très importants [3].

### 1.6.2 Modélisation

Le processus de la modélisation consiste à décomposer le système à étudier en plusieurs tâches, dans le but de simplifier son analyse. La modélisation analytique est un formalisme mathématique pour représenter le système étudié et pour créer un modèle traduisant le comportement du système réel, elle est utilisée couramment dans l'évaluation des performances des systèmes automatisés de stockage/déstockage [18]. Les techniques permettant d'étudier de manière analytique un système de production sont nombreuses [19], nous citons par exemple:

- **la programmation linéaire** : est une technique mathématique d'optimisation (maximisation ou minimisation) consiste à optimiser une fonction objective sous certaines contraintes linéaires conduisant à une solution statique.
- **la programmation dynamique** : consiste à trouver une solution optimale d'un problème à partir d'une solution optimale d'un sous problème [20].

- **les réseaux de Pétri** : sont un outil mathématique permettant de décrire des relations existant entre des conditions et des événements, de modéliser le comportement de systèmes dynamiques à événements discrets [21].
- **les chaînes de Markov** : sont utilisées dans la modélisation des systèmes stochastiques et dans lesquelles on définit l'état d'un système par un comportement entièrement probabiliste. L'utilisation de modèles markoviens pour l'analyse de performance des systèmes est souvent limitée car il nécessite l'identification de tous les états du système et les probabilités de changement d'état [19].

### **1.6.3 Simulation pour l'évaluation des performances**

La simulation intervient souvent dans le cas de systèmes beaucoup trop complexes pour donner lieu à un modèle mathématique fiable. Ceci est particulièrement vrai quand le système est soumis à des phénomènes dynamiques et des situations aléatoires. Évaluer les performances ou optimiser le fonctionnement du système avec des méthodes exactes et à tester les résultats par un modèle de simulation permet de reproduire un fonctionnement plus réaliste du système. La simulation peut donner une vue globale du fonctionnement d'un AS/RS, prendre en compte toutes les contraintes de fonctionnement (politiques de stockage) et les caractéristiques du système (taille du système, vitesse de la machine S/R....) [3].

## **1.7 Etat de l'art**

Parmi les principaux objectifs des AS/RS est la minimisation de temps du cycle de la machine S/R pour cela beaucoup de travaux ont été consacrés au temps de cycle moyen de la machine S/R. Hausman et al [22] ont été parmi les premiers qui ont modélisé le temps de simple cycle pour un AS/RS à charge unitaire par des expressions analytiques continues pour différentes stratégies de stockage. Une approximation continue du rack de stockage a été utilisée par Bozer et White [17] pour développer une expression mathématique permettant de calculer le temps de simple et de double cycle.

Hwang et al [23] ont proposé une expression mathématique pour les AS/RS multi allées pour chaque rack, ils ont développé une expression analytique du temps de cycle. Egbelu [24] a développé des méthodes pour minimiser le temps de cycle. Chang et al [25] ont

proposé un modèle pour le temps de cycle avec plusieurs vitesses et prenant en compte l'accélération/décélération de la machine S/R. Dallari et al [26] ont déterminé les temps de cycle pour chaque méthodologie de stockage en fonction de la forme des aires de stockage. Azzouz [27] a été intéressé à l'optimisation des dimensions du rack d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel pour un temps de cycle minimal. Peters et al [28] ont proposé des solutions analytiques au problème de positionnement du point de repos de la machine S/R.

Park [29] a proposé une stratégie de détermination du point de repos optimal pour des racks à distribution non uniforme. Il est présenté des relations analytiques basées sur la probabilité que la prochaine opération soit un stockage ou un déstockage. Sari et al [30] ont développé une expression mathématique continue du temps de cycle des AS/RS à convoyeur gravitationnel. Potrc et al [31] ont proposé un modèle avec heuristique pour le temps de cycle du stockage aléatoire pour les AS/RS à charge unitaire et multi allées.

Ghomri et al [4] ont développé un modèle analytique continue permettant un calcul approximatif du temps de simple cycle des AS/RS multi allées, puis Kouloughli et Sari [32] ont utilisé l'expression obtenu par Ghomri et al [4] pour trouver les dimensions optimales d'un AS/RS multi allées pour un temps de cycle minimal. Sari [33] a établi des expressions analytiques discrètes pour les AS/RS multi allées et à racks glissants. Ghomri et al [34] ont développé deux modèles analytiques continus permettant un calcul du temps moyen de simple cycle, dans le premier modèle le cas où le temps de glissement des racks est inférieur au temps de déplacement le long de l'allée principale, et dans le deuxième modèle le cas où le temps de glissement des racks est supérieur au temps de déplacement le long de l'allée principale. Kouloughli et Sari [35] ont fixé l'une des trois dimensions des AS/RS multi allées et ont déterminé les deux dimensions optimales restantes. Sari et Kouloughli [36] se sont intéressés à développer une expression analytique pour le temps de cycle d'un nouveau type d'AS/RS à profondeur multiple composé d'une seule machine S/R.

## **1.8 Conclusion**

Ce chapitre est commencé par des généralités sur les AS/RS qui montrent leur importance capitale dans l'industrie particulièrement dans les systèmes de production et dans les centres de distribution. Nous avons défini leur fonctionnalité et leurs composants ainsi que leurs avantages et inconvénients. Ensuite nous avons cité les plus importants types des AS/RS qui existent, par la suite nous avons étudié les méthodologies de stockage, les mesures utilisées et les techniques d'évaluation de performances des AS/RS.

Ce chapitre se termine par un état de l'art présentant les principaux travaux concernant les AS/RS qui introduit le but de notre travail. Cela est suivi par le deuxième chapitre qui sera consacré pour la recherche et l'optimisation d'une fonction approximative de l'expression du temps moyen de simple cycle pour l'AS/RS multi.

## **CHAPITRE 2 :**

**Approximation de fonction de temps de simple cycle d'un l'AS/RS multi Allées**

## **2.1 Introduction**

Pour étudier un système, il est nécessaire de construire une représentation plus proche possible du fonctionnement d'un système réel, qui consiste à mettre au point un ensemble d'équations pour en faire un support mathématique performant pour l'analyse, pour la simulation aussi bien pour l'optimisation [37]. Dans les problèmes issus de la modélisation, les fonctions qui sont développées parfois ne peuvent être étudiées de manière efficace, donc il existe la technique de l'approximation qui permet de les représenter par des fonctions plus simple de manière approchée. Il existe de nombreuses méthodes d'approximation précisant une fonction  $f$  qui approxime une fonction  $g$  dans certaines conditions.

Nous verrons dans ce chapitre, la technique de l'approximation au sens des moindres carrés ou on cherche à approcher l'expression analytique du simple cycle d'un AS/RS multi allées établi par [4]. Nous commençons par une description de la configuration de système automatisé AS/RS multi allées. En suite nous allons expliquer la notion mathématique de la méthode des moindres carrés et l'approximation au sens des moindres carrés. S'en suivra une interprétation des résultats obtenus.

## **2.2 Description de l'AS/RS multi allées**

Un AS / RS multi allées est composé d'un ensemble de racks fixes, disposés par paires de manière parallèle et séparés par des allées. Chacune de ces allées, appelée allée de desserte, donne accès aux deux racks. Une allée commune, perpendiculaire aux racks, relie tous couloirs de desserte. Une machine de stockage/déstockage qui sert tous les racks consiste d'un mât vertical ou d'une paire de mâts soutenant le chariot hissé, qui peut être élevé ou abaissé, elle se déplace sur le rail monté au sol avec un rail de guidage supérieur.

La machine S / R est capable de circuler sur deux axes horizontaux (profondeur dans l'allée de desserte et sur l'allée commune) et un axe vertical (le long des colonnes formants les racks). Ce mouvement est appelé déplacement de Tchebychev (figure 2.1) [5]. Le long de l'allée commune dont l'une des extrémités est équipée d'une station de dépôt/ livraison (P/D).

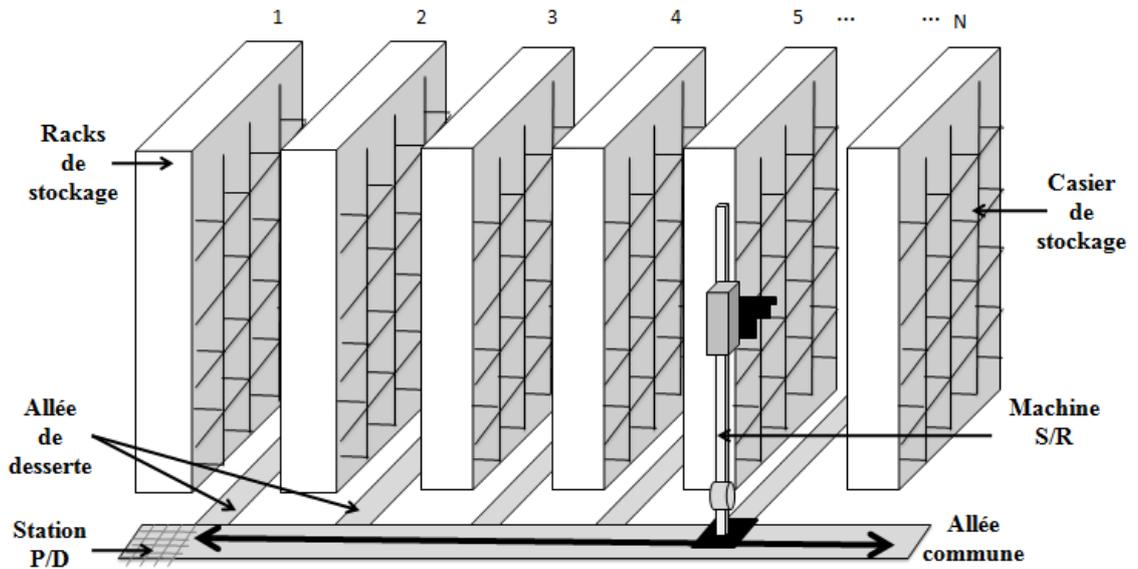


Figure2.1 : AS/RS multi allées

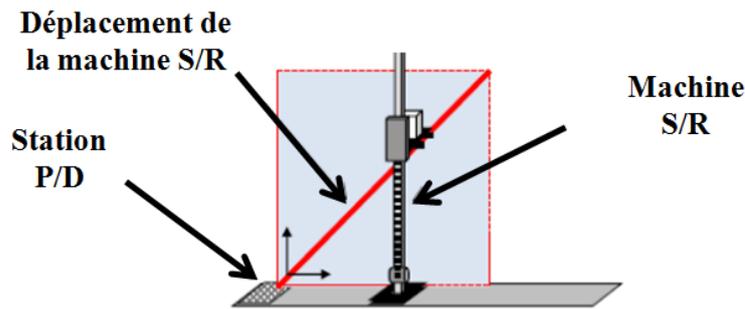


Figure2.2 : Déplacement de la machine S/R [5]

### 2.3 Fonctionnement de l'AS/RS multi allées

Dans l'état initial, la machine S / R se trouve à la station dépôt/livraison. Pour une opération de stockage, la machine S / R se déplace simultanément dans les directions horizontale (profondeur dans l'allée de desserte et sur l'allée commune) et verticale (le long des colonnes formants les racks) jusqu'à ce qu'elle arrive à l'emplacement prédéterminé pour placer le produit. Pour une opération de déstockage, la machine S / R se déplace vers le casier à partir de laquelle l'article doit être récupéré, le prend, puis retourne à la station P / D. La machine de stockage/déstockage peut agir en simple ou double cycle :

- **Simple cycle**

La machine S/R effectue une seule opération soit une opération de stockage soit une opération de déstockage. Elle se déplace à partir de la station dépôt/livraison simultanément dans le sens horizontale (profondeur dans l'allée de desserte et sur l'allée commune) et verticale (le long des colonnes formants les racks) jusqu'au casier de stockage/déstockage, elle dépose ou récupère l'article et revient à la station dépôt/livraison

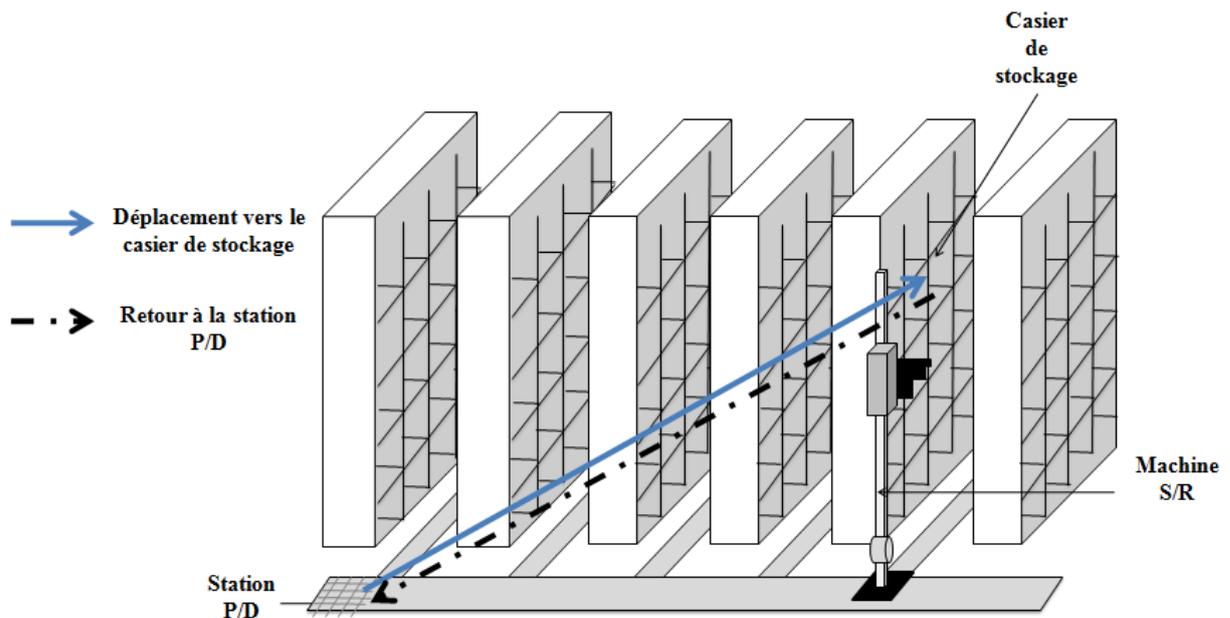


Figure2.3 : Simple cycle

- **Double cycle :**

La machine S/R effectue les deux opérations en même temps. Elle se déplace à partir de la station dépôt/livraison simultanément dans le sens horizontale et verticale jusqu'au casier de stockage pour déposer le produit, puis elle se déplace vers le casier de déstockage pour récupérer le produit et revient à la station dépôt/livraison.

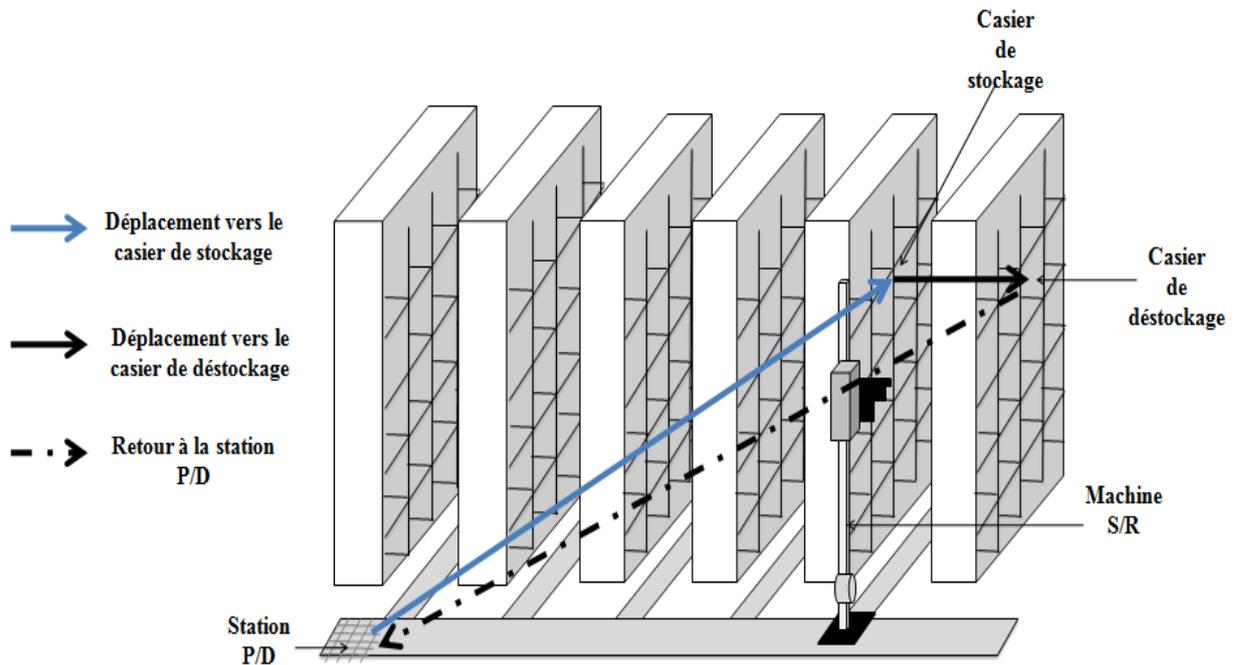


Figure2.4 : Double cycle

- **Notation**

Les termes suivants ont été utilisés pour présenter l'expression analytique discrète et continue :

$M$  Nombre de racks dans un AS/RS multi-allées

$M/2$  Nombre d'allées dans un AS/RS multi-allées

$N$  Nombre de casiers total

$N_h$  Nombre de casiers par ligne (casiers horizontaux)

$N_v$  Nombre de casiers par colonne (casiers verticaux)

$t'_h$  Temps de déplacement horizontal d'un casier au suivant

$t'_v$  Temps de déplacement vertical d'un casier au suivant

$t'_p$  Temps de déplacement d'une allée à la suivante

$t_h$  Temps de déplacement horizontal du premier casier au dernier d'un rack

$t_v$  Temps de déplacement vertical du premier casier au dernier d'un rack

$t_p$  Temps de déplacement de la première à la dernière allée

$E(SC)$  Temps moyen simple cycle

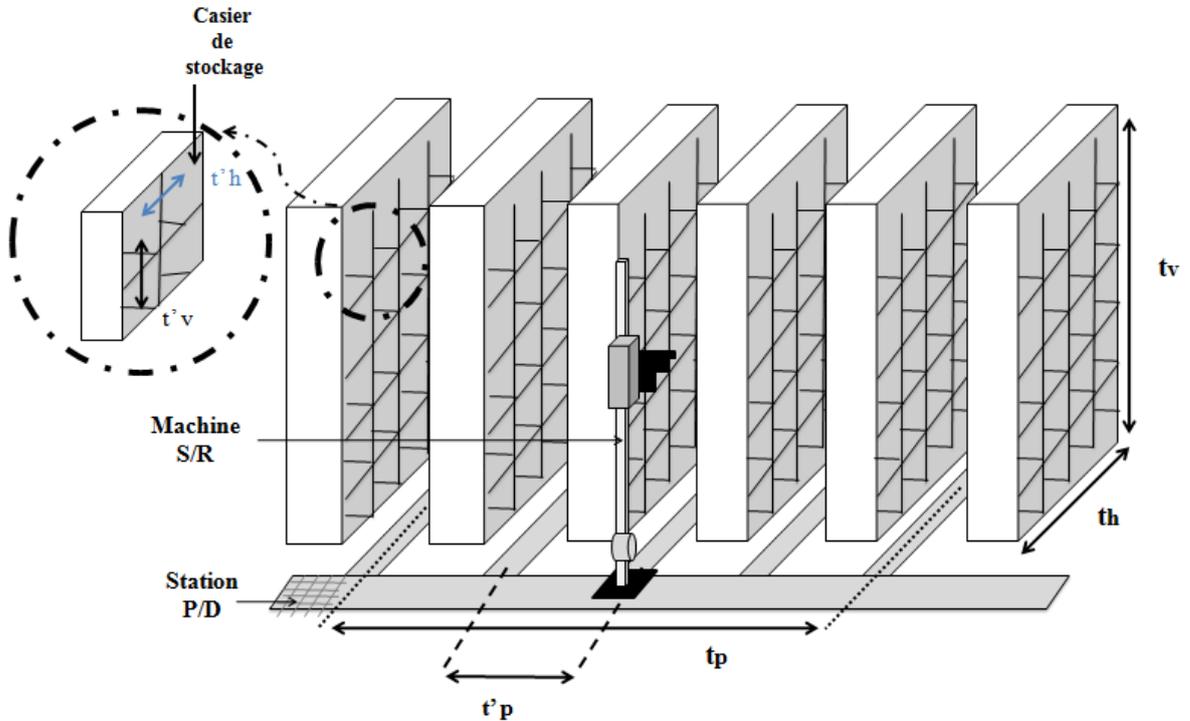


Figure 2.5 : Représentation des notations utilisées

• **Hypothèses :**

- La machine S/R se déplacer simultanément verticalement et horizontalement avec une vitesse constante, elle agit en simple ou double cycle.
- L'AS/RS est composé de  $N$  casiers,  $M$  racks et  $M/2$  allées de dessertes.
- Les délais dus à l'accélération/décélération de la machine S/R sont négligés [3].
- Le nombre total de casiers  $N = M * N_h * N_v$  [38].

**2.4 Expression analytique discrète du temps de simple cycle pour l'AS/RS multi Allées**

Sari [11] a proposé cette approche exacte, cette approche est basée sur la détermination des temps de transports de tous les casiers et le calcul de la moyenne de ces temps.

Le temps global que met la machine S/R pour atteindre un casier de coordonnées (i, j) dans la k<sup>ème</sup> allée est le maximum entre le déplacement horizontal et le déplacement vertical [3]. Ce déplacement est appelé de Tchebychev.

$$\max((t'_h \cdot i + t'_p \cdot (k - 1)), t'_v \cdot (j - 1)) \quad (1)$$

Avec :

$t'_h \cdot i + t'_p \cdot (k - 1)$  : Déplacement horizontal pour un casier de coordonnées (i, j)

$t'_v \cdot (j - 1)$  : Déplacement vertical pour un casier de coordonnées (i, j)

Le temps de cycle moyen de la machine pour visiter tous les casiers est donné par l'expression discrète suivante :

$$\overline{E(SC)} = \frac{4}{N} \sum_{k=1}^{M/2} \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_v} \max[(t'_h * i + t'_p * (k - 1)), t'_v * (j - 1)] \quad (2)$$

## 2.5 Expression analytique continue du temps de simple cycle pour l'AS/RS multi allées

Ghomri et al [4] ont formulé l'expression analytique continue qui évalue le temps moyen simple cycle pour le système multi allées. Ils ont considéré un rack comme une surface continue où une corbeille a des coordonnées (x, y), atteindre une corbeille dans un rack atteint des coordonnées (x, y) sur la surface continue. L'expression contient trois variables  $t_p$ ,  $t_h$  et  $t_v$  correspondant à des durées de déplacement horizontaux et verticaux.

### 2.5.1 Temps de simple cycle E(SC)

Le temps de simple cycle de l'AS/RS multi-allées E(SC) est composé d'un temps de déplacement horizontal  $SC_h = (t_h + t_p)$  et d'un temps de déplacement vertical  $SC_v = t_v$ . Le temps de déplacement de la machine S/R pour atteindre un casier de stockage ou de déstockage est égal au maximum entre  $SC_h$  et  $SC_v$ , nous pouvons écrire:

$$E(SC) = 2\max(SC_h, SC_v) = 2\max(t_h + t_p, t_v) \quad (3)$$

$t_h$  et  $t_p$  sont des durées de temps et sont donc des variables aléatoires discrètes de distribution uniforme qui sont approchées par des distributions uniformes continues.

La loi discrète uniforme est une loi de probabilité discrète qui peut être caractérisée en disant que chaque valeur d'un ensemble fini de valeurs possibles  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  a la même probabilité  $1/n$ . Donc :  $t_p$  peut prendre  $M/2$  valeurs possibles  $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{(M/2-1)}$ , suit une loi uniforme lorsque la probabilité de n'importe quelle valeur  $k_n$  est égale à  $2/M$  et le même raisonnement avec la variable  $t_h$  qui peut prendre  $N_h$  valeurs possibles  $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{N_h}$ , suit une loi uniforme lorsque la probabilité de n'importe quelle valeur  $k_n$  est égale à  $\frac{1}{N_h}$ . Les fonctions de distribution discrètes exactes et continue approximative des variables  $t_p$  et  $t_h$  sont représentés dans la figure (2.6).

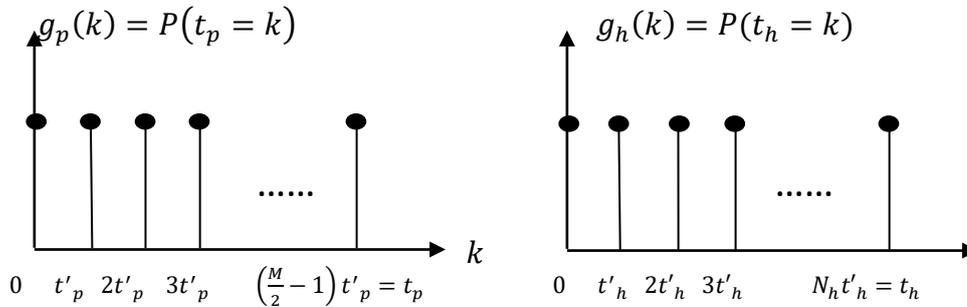


Figure 2.7 : Distribution discrète exacte des variables SCH1 et SCH2

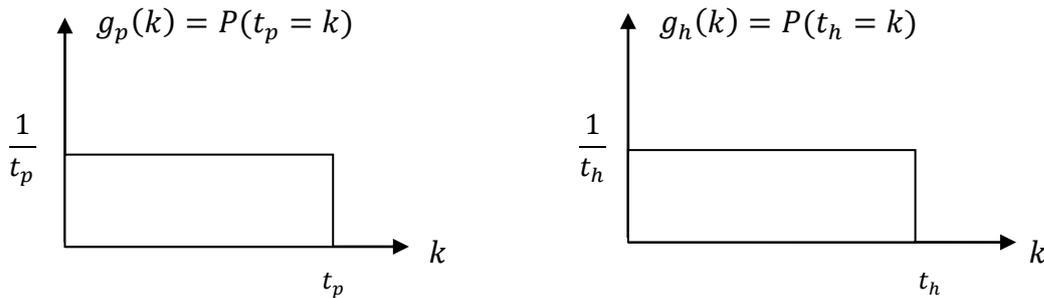


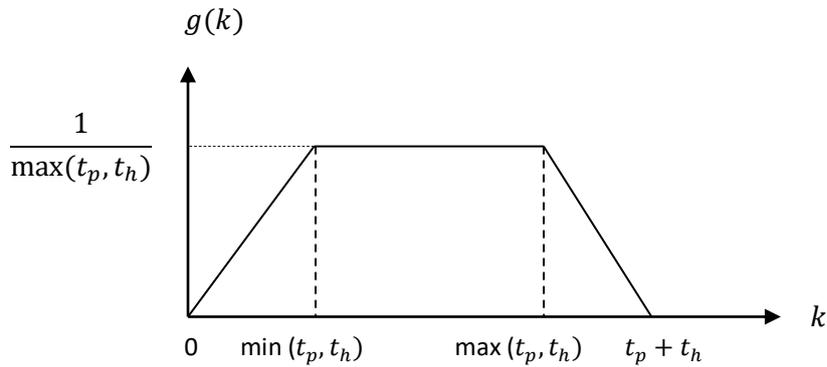
Figure 2.8 : Distribution continue approchée des variables SCH1 et SCH2

$$g_p(k) = \begin{cases} \frac{1}{t_p} & k < t_p \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad g_h(k) = \begin{cases} \frac{1}{t_h} & k < t_h \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La distribution  $g(k)$  du temps de déplacement horizontal qui est la somme de  $t_h$  et de  $t_p$  égale au produit de convolution des fonctions  $g_p(k)$  et  $g_h(k)$ :

$$g(k) = g_p(k) * g_h(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_p(x) * g_h(x - k) dx = \int_0^x g_p(x) * g_h(x - k) dx \quad (4)$$

Après calcul de (4), on obtient l'équation suivante et son schéma représentatif à la figure (2.9):



**Figure 2.10 :** Distribution aléatoire de la variable SCH modélisant le déplacement horizontal de la machine S/R

$$g(k) = \begin{cases} \frac{k}{t_p * t_h} & k < \min(t_p, t_h) \\ \frac{1}{\max(t_p, t_h)} & \min(t_p, t_h) \leq k < \max(t_p, t_h) \\ \frac{t_p + t_h - k}{t_p t_h} & \max(t_p, t_h) \leq k < t_p + t_h \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5)$$

La fonction de distribution de temps verticale pour  $t_v$  est donnée par:

$$h_v(k) = \begin{cases} \frac{1}{t_v} & k < t_v \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6)$$

Sachant que le temps total de déplacement de la machine S/R est le maximum entre le temps de déplacement horizontal et vertical :

$$E(SC) = 2\max(th + tp, tv) = 2\max(SC_h, SC_v) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} k * f(k)dk \quad (7)$$

La fonction de distribution  $f(k)$  du temps de simple cycle est donc :

$$f(k) = G(k).h(k) + H(k).g(k) \quad (8)$$

Où :

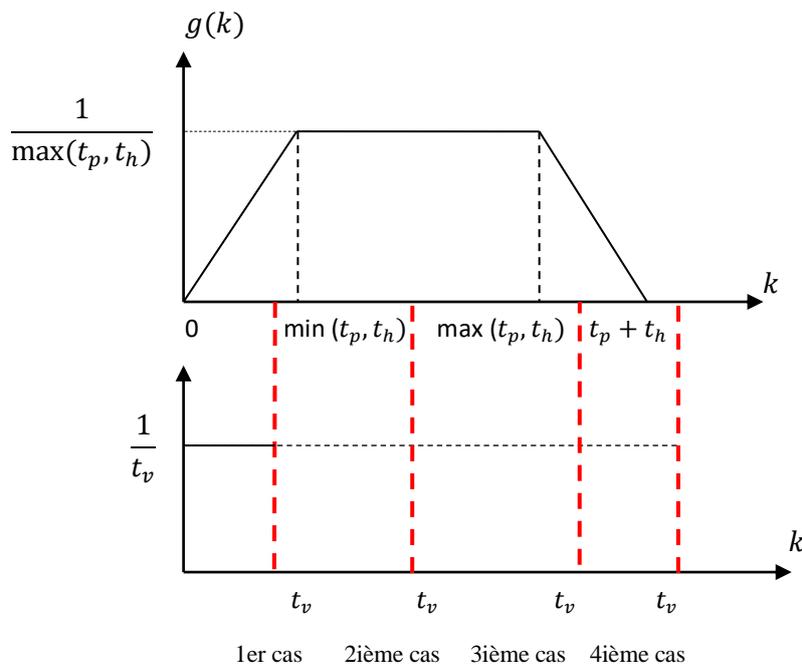
$$G(k) = P(SC_h < k) = \int_{-\infty}^k g(t)dt \quad (9)$$

Et

$$H(k) = P(SC_v < k) = \int_{-\infty}^k h(t)dt \quad (10)$$

(9) et (10) sont les fonctions de répartition des déplacements horizontal et vertical.

Après le calcul de la distribution du temps de cycle de la machine S/R nous avons 4 cas :



**Figure2.11 :** Les cas possibles lors du calcul du temps de cycle de la machine E(SC)

- 1er cas:  $t_v < \min(t_p, t_h)$
- 2ième cas:  $\min(t_p, t_h) < t_v < \max(t_p, t_h)$
- 3ième cas:  $\max(t_p, t_h) < t_v < (t_p + t_h)$
- 4ième cas:  $t_v > (t_p + t_h)$

Pour chaque cas, nous obtenons les résultats qui représentent l'expression analytique continue qui évalue le temps moyen de simple cycle pour le système multi allées E(SC):

$$E(SC) = \begin{cases} t_p + t_h + \frac{t_v^3}{12 t_p t_h} & 0 \leq t_v < \min(t_p, t_h) \\ t_p + t_h + \frac{t_v^3}{12 t_p t_h} - \frac{(t_v - \min(t_p, t_h))^4}{12 t_p t_h t_v} & \min(t_p, t_h) \leq t_v < \max(t_p, t_h) \\ t_p + t_h + \frac{t_v^3}{12 t_p t_h} - \frac{(t_v - \min(t_p, t_h))^4 + (t_v - \max(t_p, t_h))^4}{12 t_p t_h t_v} & \max(t_p, t_h) \leq t_v < t_p + t_h \\ t_p + t_h + \frac{t_v^3}{12 t_p t_h} + \frac{(t_v - \min(t_p, t_h) - \max(t_p, t_h))^4 - (t_v - \min(t_p, t_h))^4 + (t_v - \max(t_p, t_h))^4}{12 t_p t_h t_v} & t_p + t_h \leq t_v \end{cases} \quad (11)$$

On considère que :

$$t_p * t_h * t_v = 1 \Leftrightarrow t_v = \frac{1}{t_p * t_h}$$

Nous obtenons donc une fonction avec deux variables  $t_p$  et  $t_h$  :

$$\begin{aligned}
 E(SC) = & \left\{ \begin{aligned}
 & \min(t_p, t_h) + \max(t_p, t_h) + \frac{1}{12 \min(t_p, t_h)^4 * \max(t_p, t_h)^4} \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{1}{\min(t_p, t_h) * \max(t_p, t_h)} < \min(t_p, t_h) \\
 & \min(t_p, t_h) + \max(t_p, t_h) + \frac{1}{12 \min(t_p, t_h)^4 * \max(t_p, t_h)^4} - \frac{1}{12} * \left( \frac{1}{\min(t_p, t_h) * \max(t_p, t_h)} - \min(t_p, t_h) \right)^4 \\
 & \qquad \qquad \qquad \min(t_p, t_h) \leq \frac{1}{t_p * t_h} < \max(t_p, t_h) \\
 & \min(t_p, t_h) + \max(t_p, t_h) + \frac{1}{12 \min(t_p, t_h)^4 * \max(t_p, t_h)^4} - \frac{1}{12} * \left( \frac{1}{\min(t_p, t_h) * \max(t_p, t_h)} - \min(t_p, t_h) \right)^4 \\
 & \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{12} * \left( \frac{1}{\min(t_p, t_h) * \max(t_p, t_h)} - \max(t_p, t_h) \right)^4 \qquad (12) \\
 & \qquad \qquad \qquad \max(t_p, t_h) \leq \frac{1}{t_p * t_h} < t_p + t_h \\
 & \min(t_p, t_h) + \max(t_p, t_h) + \frac{1}{12 \min(t_p, t_h)^4 * \max(t_p, t_h)^4} \\
 & + \frac{1}{12} * \left( \frac{1}{\min(t_p, t_h) * \max(t_p, t_h)} - \min(t_p, t_h) - \max(t_p, t_h) \right)^4 - \frac{1}{12} * \left( \frac{1}{\min(t_p, t_h) * \max(t_p, t_h)} - \min(t_p, t_h) \right)^4 \\
 & \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{12} * \left( \frac{1}{\min(t_p, t_h) * \max(t_p, t_h)} - \max(t_p, t_h) \right)^4 \\
 & \qquad \qquad \qquad t_p + t_h \leq \frac{1}{\min(t_p, t_h) * \max(t_p, t_h)}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la méthode des moindres carrés pour trouver une fonction approximative d'un système automatisé de stockage/déstockage multi allées pour un temps de simple cycle à partir d'un nuage de point. Afin d'entreprendre cette partie, nous avons utilisé l'expression analytique du simple cycle d'un AS/RS multi allées établie par Ghomri et al [4] (équation 12). Pour appliquer les moindres carrés nous avons simplifié cette expression pour laquelle devient une équation avec deux variables. Une description plus détaillée de cette simplification sera présentée dans le chapitre 3. Nous expliquons dans cette section la notion mathématique de cette méthode et l'approximation au sens des moindres carrés. S'en suivra une interprétation des résultats obtenus.

## 2.6 Présentation de la régression linéaire et la régression non linéaire

La régression est une technique permettant de déterminer une relation statistique entre deux variables ou plus, dans laquelle un changement dans une variable dépendante (variable expliquée) est associé à un changement dans une ou plusieurs variables indépendantes (variables explicatives). Les paramètres de la variable dépendante sont présentés comme suit :

$y_i$  : Variable expliquée ;

$\beta_1$  : Paramètres du model, inconnus, non aléatoires ;

$\varepsilon_i$  : L'écart entre  $y_i$  en réalité et  $y_i$  estimé, variables aléatoires inconnues ;

$x_{i_p}$  : Variables explicatives, nombres connus.

$$y_i = \beta_1 * x_{i_1} + \beta_2 * x_{i_2} + \dots + \beta_p * x_{i_p} + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$$

En régression, on parle de modèle linéaire et non linéaire ou de modèle de **régression linéaire** ou **régression non linéaire**.

Dans la régression linéaire, la variable dépendante est modélisée par une fonction linéaire, et dans la régression non linéaire, la variable dépendante est modélisée par une fonction non linéaire. Il existe nombreuses méthodes pour estimer ces modèles de régression nous choisissons la méthode des moindres carrés pour estimer le modèle de régression non linéaire, puisque l'expression analytique du simple cycle d'un AS/RS multi allées établie par Ghomri et al [4] est une fonction non linéaire.

## 2.7 Description de la méthode des moindres carrés :

La méthode des moindres carrés est une notion mathématique permettant d'apporter à un nombre d'éléments susceptibles de comporter des erreurs un ajustement, généralement entachées des erreurs de mesure, afin d'obtenir des données proches de la réalité puisque elle adapte certains types de courbes et de surfaces aux données [39]. Deux ensembles de données de taille  $n$ ,  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  et  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , sont obtenus expérimentalement ou mesurés sur une population.

Ces données  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$  peuvent être représentées par un nuage de  $n$  points dans le plan. Le problème de la régression consiste à rechercher une relation entre les  $x$  et les  $y$ , par exemple de la forme  $y = a x + b$ , dans ce cas on parle de la régression linéaire. Mais même si cette relation est effectivement présente, les données mesurées ne vérifient pas en général cette relation exacte.

L'ensemble des données  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$  peuvent faire l'objet d'une représentation graphique suivante :

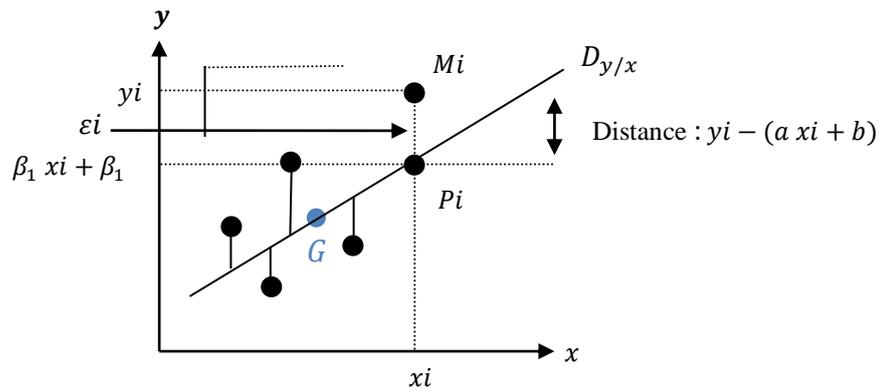


Figure 2.12 : Représentation graphique d'un nuage de point

• **Notation :**

- $\epsilon_i$  Résidu
- $D_{y/x}$  Droite de régression de  $y$  en  $x$  obtenu par les moindres carrés
- $P_i$  Valeur prédite
- $M_i$  Valeur observée
- $G$  Point moyen (centre de gravité du nuage de points)
- $\bar{x}$  Moyen des  $x$
- $\bar{y}$  Moyen des  $y$

Nous avons une forme de dispersion de points au tour de la droite de régression de  $y$  en  $x$  obtenu par la méthode des moindres carrés. Ce nuage de points est caractérisé par le point moyen  $G$  qui va se trouver sur la droite  $D_{y/x}$  pour coordonnées  $G(\bar{x}; \bar{y})$  (voir figure 2.13).

Le but de la méthode est de rechercher la droite qui s'ajuste le mieux possible à ce nuage de points en clair est de trouver la meilleure droite passant par les points. Pour déterminer la droite  $D_{y/x}$  en minimisant la somme des carrées des distances entre la valeur prédite  $P_i$  et la valeur observée  $M_i$  c'est-à-dire pour la quelle l'équation (1) soit minimale.

$$\sum_{i=1}^n (P_i - M_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i)^2 \quad (13)$$

Lorsque le point  $M_i$  à pour ordonnée ( $y_i$ ) et le point  $P_i$  à pour ordonnée ( $\beta_1 x_i + \beta_2$ ) parce qu'il est sur la droite de l'équation  $y = \beta_1 x + \beta_2$  le résidu  $\varepsilon_i$  entre  $M_i$  et  $P_i$  appelé aussi l'écart devient :

$$E = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_1 x_i + \beta_2))^2 \quad (14)$$

Si nous voulons estimer une équation plus proche de la réalité, en minimisant la somme de ces erreurs (équation 13) pour obtenir les meilleures valeurs de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

Pour obtenir la valeur de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  nous allons chercher la dérivée partielle de (14) par rapport à la variable  $\beta_1$  et à la variable  $\beta_2$ , nous obtenions:

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_1 x_i + \beta_2)) x_i \quad (15)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_2} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_1 x_i + \beta_2)) \quad (16)$$

Pour minimiser E on pose :

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_1} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_2} = 0$$

Avant tout, on va montrer que la droite  $D_{y/x}$  passe par le point moyen de coordonné  $G(\bar{x}; \bar{y})$

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_2} = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_1 x_i + \beta_2)) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_1 x_i + \beta_2)) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n (\beta_1 x_i + \beta_2) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (\beta_1 x_i + \beta_2)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \beta_2$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i + n \beta_2$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{n \beta_2}{n} \quad (17)$$

On a:

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \bar{y}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

On obtient donc :

$$\bar{y} = \beta_1 \bar{x} + \beta_2 \quad (18)$$

(18) traduit que :

$$G(\bar{x}; \bar{y}) \in D_{y/x}$$

Donc, la droite  $D_{y/x}$  obtenus par la méthode des moindres carrés passe obligatoirement par le point moyen  $G(\bar{x}; \bar{y})$  qui s'appelle aussi le centre de gravité du nuage de points.

Nous allons calculer la valeur de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  :

On a :

$$\bar{y} = \beta_1 \bar{x} + \beta_2 \Rightarrow \beta_2 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x} \quad (19)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_1} = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_1 x_i + \beta_2)) x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i y_i - (\beta_1 x_i^2 + \beta_2 x_i)) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \beta_1 x_i^2 + \sum_{i=1}^n \beta_2 x_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \beta_1 x_i^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{y} - \beta_1 \bar{x}) x_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \beta_1 x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i \bar{y} - \sum_{i=1}^n \beta_1 x_i \bar{x}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - \beta_1 \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{n} = \beta_1 \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} + \bar{y} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} - \beta_1 \bar{x} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{n} = \beta_1 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \right] + \bar{x} \bar{y}$$

$$\beta_1 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \right] = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y} \quad (20)$$

On remarque que :

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \text{ est la variance de } x \text{ et } \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y} \text{ est la covariance de } x ; y$$

Donc, (20) devient :

$$\beta_1 * v(x) = \text{Cov}(x,y) \quad (21)$$

On déduit que :

$$\beta_1 = \frac{\text{Cov}(x,y)}{v(x)} \quad (22)$$

Après le calcul de  $\beta_1$ , nous déterminons donc  $\beta_2$  en résolvant l'équation :

$$\beta_2 = \bar{y} - \beta_1 * \bar{x} \quad (23)$$

## 2.8 Approximation au sens des moindres carrés

L'approximation concerne la façon dont les fonctions peuvent être approchées par de plus simples fonction, comme les moindres carrés que nous allons utiliser comme une méthode d'approximation. L'objectif est de donner une approximation aussi précise que possible d'une fonction réelle donnée, de façon à fournir des données peuvent provenir de mesures expérimentales ou de calculs numériques possibles. Ce but est atteint en employant un polynôme de degré  $m$ , en rapetissant le domaine sur lequel le polynôme doit approcher la fonction [40].

Soient  $n$  points distincts (résultats de mesures ou calculs numérique)

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

On veut chercher une représentation de ces données, en cherchant un polynôme de degré  $m < n - 1$  qui approche au mieux les données précédents.

On appelle polynôme aux moindres carrés de degré  $n$ , tout polynôme  $f(x)$  vérifiant

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \leq \sum_{i=1}^n (y_i - p(x_i))^2 \quad (24)$$

Le polynôme aux moindres carrés de degré  $m$ , parmi tous les polynômes, minimise la somme des carrés des distances entre la valeur prédite et la valeur observée (voir l'équation) (13)

Notons :

$$f(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) = \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i + \dots + \beta_n x_i^m))^2 \quad (25)$$

Les coefficients du polynôme vérifient les relations :

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_k} = 0 \quad 0 \leq k \leq n$$

Ainsi l'approximation par moindres carrés se ramène à la résolution d'un système linéaire.

Nous nous sommes donc servis de cette méthode pour approximer la fonction (1) établie par Ghomri et al [4] par une fonction plus simple. Nous avons ainsi utilisé le logiciel MATLAB qui nous permettait d'obtenir directement les meilleurs coefficients d'un polynôme de degré n sur un ensemble de points  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$  par l'ajustement de courbe.

### 2.8.1 Ajustement de courbe :

L'ajustement de courbe est une technique d'analyse d'une courbe expérimentale, consistant à construire une courbe à partir d'une fonction mathématique et d'ajuster les paramètres de cette fonction pour se rapprocher de la courbe mesurée. Plusieurs méthodes existent pour ajuster les paramètres de la courbe nous avons choisi la méthode des moindres carrés et la commande `cftool` lance l'outil interactif de curve/surface fitting de MATLAB. Dans notre cas nous avons approximer la fonction ESC (1) avec ces paramètres [40].

$\{(a_i, b_i), i = 0.4, \dots, 2.8\}$  est l'ensemble des points choisi comme représentées sur la figure (2.14).

```

Untitled.m x +
1 - a =[0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.4 ,0.8
2 - b =[0.4 ,0.8 ,0.81 ,0.82 ,0.83 ,0.84 ,0.85 ,0.86 ,0.87 ,0.871 ,0.872 ,0.873 ,0.874 ,0.875 ,0.876 ,0.877 ,0.878 ,0.879
3 - ESC =[6.27986667 ,3.26153333 ,3.22704655 ,3.19358155 ,3.16110513 ,3.12958568 ,3.09899314 ,3.06929888 ,3.04047562 ,3.03
4 - cftool;
5 -
    
```

**Figure 2.15 :** Représentation de l'utilisation des moindres carrés sur MATLAB

Nous avons obtenu une forme de dispersion de points qui représente un nuage de point obtenu par la méthode des moindres carrés :

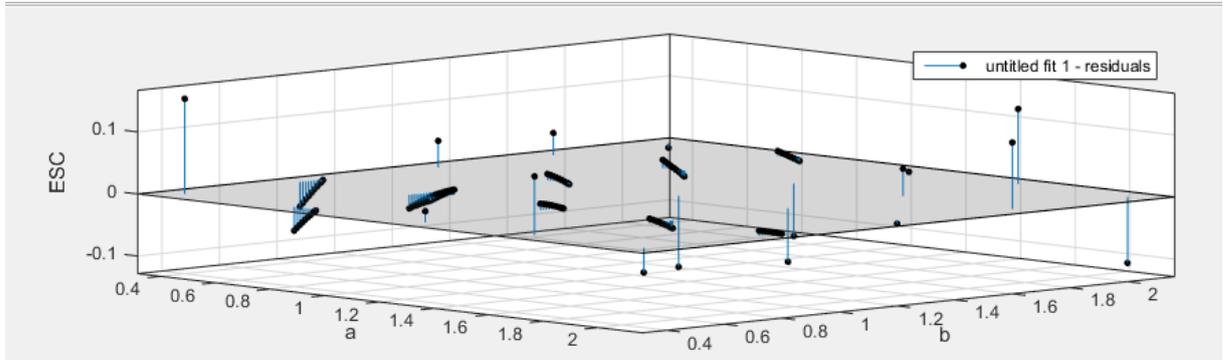


Figure 2.16 : Nuage de point obtenu par la méthode des moindres carrés

Après l'exécution du programme précédant (figure 2.17) nous avons obtenu la fonction polynomiale suivante :

$$F_2(x, y) = 22.71 - 33.13x - 33.07y + 22.88x^2 + 29.47x y + 22.81y^2 - 7.584x^3 - 10.49x^2 y - 10.1x y^2 - 7.668y^3 + 1.024x^4 + 1.314x^3 y + 1.615x^2 y^2 + 1.217x y^3 + 1.059y^4 \quad (26)$$

Sa modélisation graphique est représentée sur la figure (2.18) :

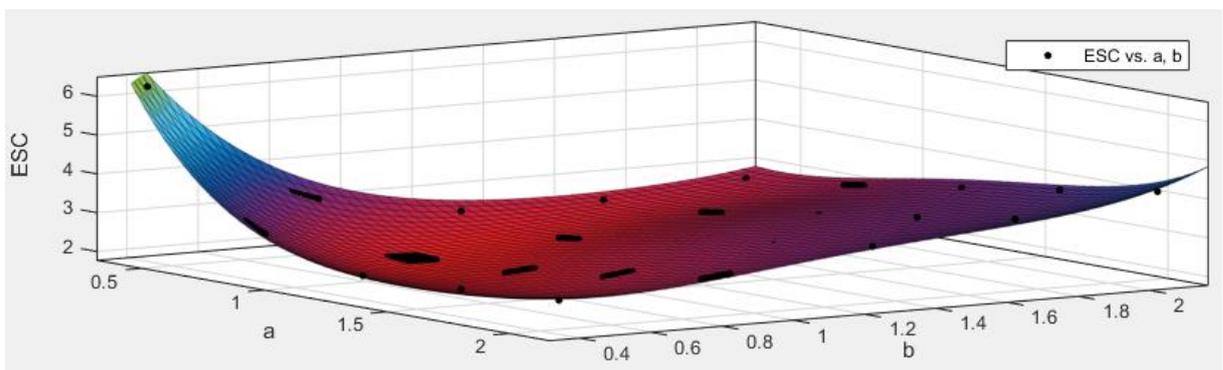


Figure2.19 : Courbe représentante la fonction approximative

On remarque que la fonction polynomiale  $F_2$  est strictement positive

## **2.9 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté de façon plus précise les AS/RS multi Allées leur définition, leur fonctionnement et leur modèle mathématique discret et continue, et après nous avons expliqué la notion mathématique de la méthode des moindres carrés et la technique de l'approximation au sens des moindres carrés qui nous a aidé à trouver une fonction approximative d'un système automatisé de stockage/déstockage du type multi allées pour un temps de simple cycle.

Dans le chapitre qui suit on passera à la partie de l'optimisation des dimensions de l'AS/RS multi allées pour minimiser le temps de simple cycle de la machine S/R. Nous optimisons les dimensions de l'AS/RS multi allées de trois manières. D'abord en utilisant le modèle analytique, ensuite en utilisant la fonction approximative d'un système automatisé de stockage/déstockage multi allées qui nous avons la trouvé dans le chapitre présent, et enfin en utilisant une métaheuristique pour déterminer les dimensions optimales de l'AS/RS multi allées.

## **CHAPITRE 3 :**

**Optimisation des dimensions d'un AS/RS  
multi allées pour un temps de simple cycle**

### **3.1 Introduction**

Les ingénieurs se heurtent quotidiennement à des problèmes technologiques de complexité grandissante, qui surgissent dans des secteurs très divers, comme la conception des systèmes mécaniques, la recherche opérationnelle, ... . Le problème à résoudre peut fréquemment être exprimé sous la forme générale d'un problème d'optimisation. L'optimisation est de trouver une alternative offrant les performances les plus rentables ou les plus élevées possibles dans les contraintes données, en maximisant les facteurs souhaités et en minimisant ceux qui ne le sont pas [41]. Résoudre un problème d'optimisation consiste à trouver la ou les meilleures solutions vérifiant un ensemble de contraintes et d'objectifs définis par l'utilisateur. Il n'y a pas de méthode unique disponible pour résoudre efficacement tous les problèmes d'optimisation. Un grand nombre de méthodes a été développé pour tenter d'apporter une réponse satisfaisante à ces problèmes. Parmi celles-ci, nous distinguons deux grandes classes de méthodes: les méthodes exactes et les méthodes basées sur les heuristiques « Métaheuristiques ».

Les métaheuristiques peuvent être classées de nombreuses façons. On peut distinguer celles qui travaillent avec une population de solutions de celles qui ne manipulent qu'une seule solution à la fois. Les méthodes qui tentent itérativement d'améliorer une solution et décide à chaque itération quel sera le point suivant sont appelées méthodes de recherche locale ou méthodes de trajectoire. Ces méthodes construisent une trajectoire dans l'espace des solutions en tentant de se diriger vers des solutions optimales. Les exemples les plus connus de ces méthodes sont : La recherche Tabou et le Recuit Simulé. Les algorithmes génétiques et Les algorithmes de colonies de fourmis présentent les exemples les plus connus des méthodes qui travaillent avec une population. Ces méthodes ils ne traitent pas d'une seule solution, mais ils manipulent un ensemble de solutions à chaque itération. Ce types de métaheuristique à pour but d'améliorer les solutions d'une itération à une autre. Dans ce chapitre Nous donnons d'abord, un aperçu général sur les Métaheuristiques. Ensuite, nous présentons les principes fondamentaux de la méthode du recuit simulé en citant leur définition et leur algorithme de bases [42].

Un problème d'optimisation est défini par :

- **Espace d'état** : est l'ensemble de domaines de définition des variables du problème.
- **Variables du problème** : peuvent être de nature diverse (réelle, entière, etc.) et sont exprimées de données qualitatives ou quantitatives.
- **Fonction objectif** : représente le but à atteindre (minimisation de coût, de durée, d'erreur, ...). Elle définit un espace de solution optimal au problème.
- **Contraintes** : définit des conditions sur l'espace d'état que les variables doivent satisfaire. Ces contraintes sont souvent des contraintes d'inégalité ou d'égalité et permettent en général de limiter l'espace de recherche.
- **Méthode d'optimisation** : une fois définit la fonction à optimiser, il s'agit de choisir une méthode adaptée au problème posé. Les méthodes d'optimisation peuvent être réparties en deux grandes classes pour la résolution des problèmes :

- **Méthodes exactes**

Les méthodes exactes ou déterministes sont utilisé pour trouvé au moins une solution optimale. Permettent de résoudre les problèmes de manière exacte en un temps finit c'est-à-dire d'obtenir une solution dont l'optimalité en un temps et avec une taille raisonnable. La résolution de problèmes par ces méthodes n'est pas toujours facile en particulier les problèmes difficiles. En effet comme le temps de calcul nécessaire pour trouver une solution risque d'augmenter exponentiellement avec la taille du problème, les méthodes exactes rencontrent généralement des difficultés face aux problèmes de taille importante [43].

- **Méthodes approchées**

Une méthode approchée ou heuristique est une méthode d'optimisation qui a pour but de trouver une solution réalisable en un temps raisonnable d'une fonction objectif. Ces méthodes peuvent s'appliquer à des problèmes faciles ou très difficiles. Depuis une dizaine d'années une nouvelle génération de méthodes approchées puissantes consacrées aux

problèmes d'optimisation difficile ont été découverts, ces méthodes appelées les métaheuristiques [43].

### **3.2 Métaheuristiques**

Le mot métaheuristique comporte de la composition de deux mots : le mot heuristique qui provient du verbe grec 'heuriskein' et qui signifie 'tend à trouver', dans un sens plus large, une heuristique est une technique pour étudier les méthodes qui améliorent l'efficacité d'un processus de recherche, le mot méta est un préfixe qui provient du grec et qui signifie 'qui englobe ou qui appartient à un niveau supérieur'. Les métaheuristiques sont des stratégies qui fournissent des solutions de bonne qualité en temps raisonnable à des problèmes difficiles pour lesquels on ne connaît pas de méthode classique plus efficace [44].

Les métaheuristiques sont des méthodes créées pour échapper aux minima locaux vers un optimum global et cela à travers un progrès vers ce dernier progressivement. On peut partager les métaheuristiques en deux grandes classes : les métaheuristiques à solution unique qui sont basées sur une recherche de voisinage commençant par une solution initiale, puis l'améliore pas à pas par un choix d'une nouvelle solution dans son voisinage jusqu'à obtenir des solutions optimales et les métaheuristiques à population de solutions ou à solution multiple qui commencent la recherche avec un fourniment de solutions qu'elles font évoluer par mesure des itérations. Le but d'utiliser une population de solutions au lieu d'une seule solution augmente la possibilité d'émergence de solutions de bonne qualité et améliore le facteur de la diversité d'une recherche [44].

### **3.3 Méthode du recuit simulé**

Historiquement, l'idée principale du recuit simulé a été proposée par Metropolis dans les années 50 qui permet de décrire l'évolution d'un système thermodynamique, le nom et l'inspiration de cette méthode sont tirés de pratique issue de la thermodynamique, en particulier de la façon avec laquelle un métal est chauffé puis refroidi pour obtenir un alliage sans défaut. À l'origine, lorsqu'on chauffe un métal solide, il devient liquide à une certaine température et les atomes qui composent ce métal peuvent circuler librement. Contrairement

lorsqu'on baisse très lentement la température, on donne aux atomes le temps d'atteindre l'équilibre pour obtenir un solide [45]. Au cas où cet abaissement de température ne se ferait pas assez lentement, il pourrait apparaître des défauts.

Donc il faudrait les corriger en réchauffant la matière légèrement de façon à permettre aux atomes de retrouver la liberté de mouvement, pour améliorer la qualité et obtenir une structure plus stable du métal. Du point de vue chimique, la stabilité du métal tient à l'agencement des atomes et au fait que leurs états respectifs atteignent alors un minimum global d'énergie [46].

Le cœur du processus est dans le refroidissement lent qui autorise un temps suffisamment long pour que les atomes se redistribuent à mesure que leur mobilité diminue. Physiquement, le mécanisme naturel de minimisation de l'énergie repose sur la distribution de probabilité de Boltzmann. Ainsi, la probabilité  $P$  qu'un système physique passe d'un niveau d'énergie  $E_1$  à un niveau  $E_2$  est donnée par :

$$p = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} \quad (27)$$

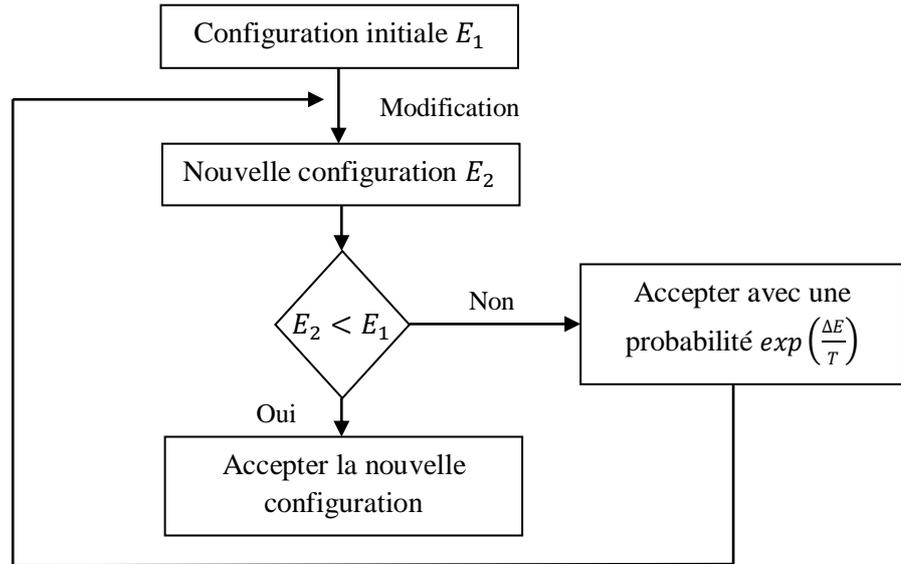
D'où :

$k$  est la constante de Boltzmann,  $k = 1.380510^{-23} \text{ j/K}$

$T$  est la température absolue

$E$  est l'énergie

Pour simuler l'évolution d'un système physique vers son équilibre thermodynamique à une température  $T$ , on utilise l'algorithme de Metropolis. On commence par une configuration initiale, et on lui fait subir une modification aléatoire. Si cette modification fait diminuer l'énergie  $E$  (la fonction objectif), on doit directement l'accepter. Sinon, elle est tout de même acceptée mais avec une probabilité égale à  $\exp\left(\frac{\Delta E}{T}\right)$ . La température varie au cours de la recherche, elle est élevée au début, puis diminue vers 0. Lorsque la température est proche d'un zéro, on est proche d'un minimum de l'énergie. (Voir figure 3.1)



**Figure 3.2 :** L'organigramme de l'algorithme de Metropolis

### 3.3.1 Algorithme de recuit simulé

Le recuit simulé applique l'algorithme de Metropolis itérativement, pour déterminer une séquence de configurations afin d'obtenir l'équilibre thermodynamique :

1. Choisir une température de départ  $T = T_{max}$  avec  $T > 0$  et une solution initiale  $s = s_0$  ;
2. Générer une solution aléatoire dans le voisinage de la solution actuelle  $s \rightarrow s'$  ;
3. Comparer les deux solutions  $\Delta f = f(s') - f(s)$ 
  - Si  $\Delta f \leq 0$  on effectue la transformation suivante :  $s$  devient  $s'$ . Sinon on accepte la transformation précédente avec probabilité  $\exp(-\frac{\Delta f}{T})$
4. On diminue la température, par exemple  $T = 0.999T$ , on recommence jusqu'à la température  $T$  soit proche de zéro.

**Algorithme1.** Recuit simulé

---

1.  $s = s_0$  ;
  2. Calculer  $f(s_0)$ ;
  3.  $T = T_{max}$
  4. **Répéter**
  5. Choisir  $s'$  un voisin aléatoire de  $s$  ;
  6. Calculer  $\Delta f = f(s') - f(s)$ ;
  7. **Si**  $\Delta f \leq 0$  **Alors**
  8.  $s = s'$  ;
  9. **Sinon**
  10. Choisir  $r$  dans  $[0,1]$  suivant une distribution uniforme ;
  11. **Si**  $r \leq e^{-\frac{\Delta f}{T}}$  **Alors**
  12.  $s = s'$  ;
  13. **Sinon**
  14.  $s'$  est rejetée ;
  15. **Fin Si** ;
  16. **Fin Si** ;
  17. Mettre à jours de la température  $T$  ;
  18. **Jusqu'à** ce que le critère d'arrêt soit vérifié ( $T < T_{min}$ ) ;
- 

### 3.4 Optimisation du temps de simple cycle pour un AS/RS multi allées

Le but du travail est de trouver les dimensions optimales d'un AS/RS multi allées pour minimiser le temps moyen de cycle. Trois cas différents se présentent :

- **1er cas** : l'emplacement qui abritera ce système de stockage n'est pas encore construit, on cherche donc les trois dimensions optimales.
- **2ième cas** : avoir une ou deux dimensions pour les locaux utilisées pour abriter les AS/RS, on cherche donc les autres dimensions optimales qui n'existent pas.
- **3ième cas** : on cherche d'installer un système automatisé de stockage/déstockage dans un emplacement (un local) qui existe déjà.

Dans cette section, on cherche les trois dimensions optimales  $t_p$ ,  $t_v$  et  $t_h$  d'un AS/RS multi allées dans le cas où l'emplacement qui abritera ce système de stockage n'est pas encore construit. Nous optimisons les dimensions de l'AS/RS multi allées de trois manières. D'abord en utilisant le modèle analytique, en optimisant l'expression du temps de simple cycle établie par Ghomri et al [4] (équation 12). Nous passerons à l'optimisation de la fonction approximative (équation 26) pour un temps de simple cycle minimal, et enfin en utilisant la méthode de recuit simulé. Ces expressions sont basées sur l'optimisation d'une fonction non linéaire en nombre réel à trois variables avec contraintes liées à la taille du système et à la constance de cette taille et des contraintes de causalité des durées de transports horizontaux et verticaux.

### **3.5 Formulation du problème**

#### **3.5.1 Détermination de critères**

Pour notre problème d'optimisation, nous avons deux contraintes :

Les trois variables  $t_p$ ,  $t_h$  et  $t_v$  correspondant à des durées de déplacements horizontaux et verticaux, sont positives et non nulles, donc on a des contraintes d'inégalités liées à la positivité de ces variables :

$$t_p > 0$$

$$t_h > 0$$

$$t_v > 0$$

Le nombre de casiers du système est constant, donc on a une contrainte d'égalité liée à la constance de la taille du système de stockage :

$$t_p * t_h * t_v = cst \quad (28)$$

• **Démonstration**

Supposons que la taille du système est constante c'est-à-dire le volume du système est constant [15].

$$N = \text{Constante}$$

$$N = M * N_h * N_v \quad (29)$$

On a:

$$t_p = t'_p * M \Rightarrow M = \frac{t_p}{t'_p}$$

$$t_v = t'_v * N_v \Rightarrow N_v = \frac{t_v}{t'_v}$$

$$t_h = t'_h * N_h \Rightarrow N_h = \frac{t_h}{t'_h}$$

(26) devient alors :

$$N = \frac{t_p}{t'_p} * \frac{t_h}{t'_h} * \frac{t_v}{t'_v}$$

$N, t'_p, t'_h$  et  $t'_v$  sont constants donc :  $t_p * t_h * t_v = \text{constant}$ .

On considère que la valeur du constant égal à 1, nous obtenons donc une fonction avec deux variables:

$$t_p * t_h * t_v = 1 \Leftrightarrow t_v = \frac{1}{t_h t_p} \quad (27)$$

Pour simplifier l'équation (11), nous supposons que :

$$a = \text{Min}(t_h, t_p)$$

$$b = \text{Max}(t_h, t_p)$$

$$c = t_v = \frac{1}{t_h t_p}$$

Ce changement de variables nous a donné deux fonctions à deux variables, la première  $F_1$  pour l'expression établie par Ghomri et al [4], et la deuxième qui nous a permis de faire l'approximation de  $F_1$  par  $F_2$  la fonction approximative du système automatisé de stockage/déstockage du type multi allées pour le simple cycle.

$$F_1(a,b) = \begin{cases} a + b + \frac{1}{12a^4 b^4} & 0 \leq \frac{1}{ab} < a \\ a + b + \frac{1}{12a^4 b^4} - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{ab} - a\right)^4 & a \leq \frac{1}{ab} < b \\ a + b + \frac{1}{12a^4 b^4} - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{ab} - a\right)^4 - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{ab} - b\right)^4 & b \leq \frac{1}{ab} < a + b \\ a + b + \frac{1}{12a^4 b^4} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{ab} - a - b\right)^4 - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{ab} - a\right)^4 - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{ab} - b\right)^4 & a + b \leq \frac{1}{ab} \end{cases} \quad (28)$$

$$F_2(x,y) = 22.71 - 33.13x - 33.07y + 22.88x^2 + 29.47xy + 22.81y^2 - 7.584x^3 - 10.49x^2y - 10.1xy^2 - 7.668y^3 + 1.024x^4 + 1.314 * x^3 * y + 1.615 * x^2 * y^2 + 1.217 * x * y^3 + 1.059 * y^4 \quad (29)$$

### 3.6 Continuité, coercivité et domaines de définition pour les fonctions $F_1$ et $F_2$

Les variables des fonctions  $F_1$  et  $F_2$  représentent des durées de déplacement, elles sont strictement positives donc leur domaine d'étude est:

$$D = \mathbb{R}_+^*$$

Donc :

$$D = ] 0, +\infty[ \times ] 0, +\infty[$$

La fonction  $F_1$  est continue et coécive sur  $D$ , ceci est détaillé dans [38].

$$\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} F_2(x,y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (22.71 - 33.13x - 33.07y + 22.88x^2 + 29.47xy + 22.81y^2 - 7.584x^3 - 10.49x^2 - 10.1xy^2 - 7.668y^3 + 1.024x^4 + 1.314 * x^3 * y + 1.615 * x^2 * y^2 + 1.217 * x * y^3 + 1.059 * y^4) \quad (30)$$

On pose :

$$x = r \cos \theta \quad r > 0$$

$$y = r \sin \theta \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} F_2(x,y) &= \lim_{(r) \rightarrow +\infty} (1.059(r \sin \theta)^4 + 1.024(r \cos \theta)^4 + 1.217(r \cos \theta)(r \sin \theta)^3 + 1.314(r \cos \theta)^3(r \sin \theta) \\ &\quad - 7.668(r \sin \theta)^3 - 7.584(r \sin \theta)^3 + 1.615(r \sin \theta)^2(r \sin \theta)^2 + 22.88(r \cos \theta)^2 - 10.49(r \cos \theta)^2 + 22.71 \\ &\quad - 10.1(r \cos \theta)(r \sin \theta)^2 + 22.81(r \sin \theta)^2 - 33.07(r \sin \theta) + 29.47(r \cos \theta)(r \sin \theta) - 33.13(r \cos \theta)) \\ &= \lim_{(r) \rightarrow +\infty} (r^4(1.059(\sin \theta)^4 + 1.024(\cos \theta)^4) + r^3(1.217(\cos \theta)(\sin \theta)^3 + 1.314(\cos \theta)^3(\sin \theta)) \\ &\quad - 7.668(\sin \theta)^3 - 7.584(\sin \theta)^3 + r^2(1.615(\sin \theta)^2(\sin \theta)^2 + 22.88(\cos \theta)^2 + 22.81(\sin \theta)^2) - 10.49(\cos \theta)^2 + 22.71 \\ &\quad - 10.1(r \cos \theta)(r \sin \theta)^2 - 33.07(r \sin \theta) + 29.47(r \cos \theta)(r \sin \theta) - 33.13(r \cos \theta)) \quad (31) \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} F_2(x,y) = +\infty$$

$F_2$  est tend vers l'infini à l'infini, donc elle est coécive, la fonction  $F_2$  est la somme d'une fonction polynôme, donc  $F_2$  est continue sur  $D$ .

Les deux fonctions sont des fonctions continues et coécrivent sur  $D$ , donc elles admettent un minimum sur leur domaine de définition  $D$

### 3.7 Recherche des extrema

On étudie le comportement d'une fonction de plusieurs variables à valeurs réelles. Une telle fonction peut avoir des valeurs extrémales : des minima (des valeurs les plus petites) ou des maxima (des valeurs les plus grandes) sur tout le domaine de définition ou bien sur une certaine partie. On les appelle des extrema. Lorsque nous avons un problème d'optimisation des dimensions de l'AS/RS multi allées, nous allons minimiser le temps de simple cycle des deux fonctions. Nous avons déduire précédemment que les deux fonctions admettent un minimum positif, donc dans cette partie nous allons chercher les extremums locaux de  $F_1$  et  $F_2$ . Ceci revient à rechercher les points critiques. Du point de vue calcule, la recherche de ces points critiques revient à résoudre des systèmes d'équations non linéaire, faisant appel au logiciel Maple.

#### 3.7.1 Recherche de points critiques pour la fonction $F_1$

- Calcul des dérivées partielles :

$$\frac{\partial F_1}{\partial a} = 1 - \frac{1}{3a^5 b^4} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{ab} - a \right)^3 \left( -\frac{1}{a^2 b} - 1 \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\frac{1}{ab} - b}{a^2 b} \right)^3 \quad (32)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial b} = 1 - \frac{1}{3a^4 b^5} + \frac{1}{3} \left( \frac{\frac{1}{ab} - a}{ab^2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{ab} - b \right)^3 \left( -\frac{1}{ab^2} - 1 \right) \quad (33)$$

Nous avons donc, le système suivant à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{3a^5 b^4} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{ab} - a \right)^3 \left( -\frac{1}{a^2 b} - 1 \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\frac{1}{ab} - b}{a^2 b} \right)^3 = 0 \\ 1 - \frac{1}{3a^4 b^5} + \frac{1}{3} \left( \frac{\frac{1}{ab} - a}{ab^2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{ab} - b \right)^3 \left( -\frac{1}{ab^2} - 1 \right) = 0 \end{array} \right. \quad (34)$$

La résolution du système avec le logiciel Maple, nous a donné une solution réelle :

$$a_0 = 0.8752726559, b_0 = 0.8752726559$$

$$p^*(0.8752726559, 0.8752726559)$$

En vérifiant avec Maple que :

$$\nabla f(p^*) = 0$$

> evalf(subs(ab\_min, Gradient));

$$[2.6 \cdot 10^{-10}, 2.6 \cdot 10^{-10}]$$

On remarque que les valeurs des variables sont presque nulles, donc :  $p^*(0.8752726559, 0.8752726559)$  est un point critique, nous allons déterminer la nature de ce point. On applique le théorème (Stewart) [38].

- **Définition (Stewart, 2006)**

Soit  $f(x_0, y_0)$  une fonction définie sur  $D \in R^2$

Un point  $(x_0, y_0) \in D$  est dit point critique pour la fonction  $f$  si:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad (35)$$

Et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (36)$$

Soit  $(x_0, y_0)$  un point critique, on pose :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad (37)$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad (38)$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \quad (39)$$

- 1- Si  $r t - s^2 > 0$  et  $r > 0$  alors  $(x_0, y_0)$  est un minimum local.
- 2- Si  $r t - s^2 > 0$  et  $r < 0$  alors  $(x_0, y_0)$  est un maximum local.
- 1- Si  $r t - s^2 < 0$  et  $r > 0$  alors  $(x_0, y_0)$  est un point selle.
- 2- Si  $r t - s^2 = 0$  et  $r > 0$  on ne peut rien dire.

• **Calcul des dérivées secondes**

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial a^2} = \frac{5}{3a^6 b^4} - \left(\frac{1}{ab} - a\right)^2 \left(-\frac{1}{a^2 b} - 1\right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{1}{ab} - a\right)^3}{a^3 b} - \frac{\left(\frac{1}{ab} - b\right)^2}{a^4 b^2} - \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{1}{ab} - b\right)^3}{a^3 b} \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial b^2} = \frac{5}{3a^4 b^6} - \frac{\left(\frac{1}{ab} - a\right)^2}{a^2 b^4} - \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{1}{ab} - a\right)^2}{a b^3} - \left(\frac{1}{ab} - b\right)^2 \left(-\frac{1}{a b^2} - 1\right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{1}{ab} - b\right)^3}{a b^3} \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial a \partial b} = \frac{4}{3a^5 b^5} + \frac{\left(\frac{1}{ab} - a\right)^2 \left(-\frac{1}{a^2 b} - 1\right)}{a b^2} - \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{1}{ab} - a\right)^3}{a^2 b^2} + \frac{\left(\frac{1}{ab} - b\right)^2 \left(-\frac{1}{a b^2} - 1\right)}{a^2 b} - \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{1}{ab} - b\right)^3}{a^2 b^2} \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = 17.35036051 > 0$$

$$r = 4.575843951 > 0$$

Et donc  $p^*(0.8752726559, 0.8752726559)$  est un minimum local.

### 3.7.2 Recherche de points critiques pour la fonction $F_2$

- Calcul des dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} = & -33.13 + 45.76x + 29.47y - 22.752x^2 - 20.98xy - 10.1y^2 \\ & + 4.096x^3 + 3.942x^2y + 3.230xy^2 + 1.217y^3 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial y} = & -33.07 + 29.47x + 45.62y - 10.49x^2 - 20.2xy - 23.004y^2 \\ & + 1.314x^3 + 3.230x^2y + 3.651xy^2 + 4.236y^3 \end{aligned} \quad (44)$$

Nous avons donc, le système suivant à résoudre :

$$\left\{ \begin{aligned} & -33.13 + 45.76x + 29.47y - 22.752x^2 - 20.98xy - 10.1y^2 \\ & \quad + 4.096x^3 + 3.942x^2y + 3.230xy^2 + 1.217y^3 = 0 \\ & -33.07 + 29.47x + 45.62y - 10.49x^2 - 20.2xy - 23.004y^2 \\ & \quad + 1.314x^3 + 3.230x^2y + 3.651xy^2 + 4.236y^3 = 0 \end{aligned} \right. \quad (45)$$

La résolution du système avec Maple, nous a donnée une solution réelle :

$$x_0 = 0.894054, y_0 = 0.888325$$

$$x^*(0.894054, 0.8883252402)$$

On vérifiant avec Maple que :

$$\nabla f(x^*) = 0$$

> evalf(subs(ab\_min, Gradient));

$$[-3.2 \cdot 10^{-9}, 2. \cdot 10^{-9}]$$

On remarque que les valeurs des variables sont presque nulles, donc :

$x^*(0.894054, 0.8883252402)$  est un point critique, nous allons déterminer la nature de ce point.

- **Calcul des dérivées secondes :**

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = 45.76 - 45.504x - 20.98y + 12.288x^2 + 7.884x y + 3.230y^2 \quad (46)$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = 45.62 - 20.2x - 46.008y + 3.230x^2 + 7.302x y + 12.708y^2 \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} = 29.47 - 20.98x - 20.2y + 3.942x^2 + 6.460x y + 3.651y^2 \quad (48)$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} = 10.41209868 > 0$$

$$r = 4.947051713 > 0$$

Et donc  $x^* = (0.894054, 0.8883252402)$  est un minimum local.

On remarque que ce minimum  $x^* = (0.894054, 0.8883252402)$  est approximativement égal au minimum de la fonction  $F_1$  qui est égale à  $p^*(0.8752726559, 0.8752726559)$

### 3.8 Adaptation du recuit simulé pour l'AS/RS multi allées

Nous présentons dans cette partie l'algorithme du recuit simulé adaptée au problème d'optimisation du temps simple cycle d'AS/RS multi allées avec une interprétation des résultats obtenus.

---

**Algorithme 2.** Recuit simulé

---

1. Sélectionner un point de départ  $s_0 = (t_p, t_h)$  ;
  2. Calculer la fonction  $f(s_0)$ ;
  3. Initialiser la valeur de la température  $T = T_0$  ;
  4. **Tant que** ( $T > 0.0001$ ) **Faire**
  5.       **Pour** chaque itération  $i$  de 1 à  $N$  **Faire**
  6.               Choisir  $s'$  un voisin aléatoire de  $s_0$  ;
  7.               Calculer la fonction  $f(s')$ ;
  8.               Calculer  $\Delta f = f(s') - f(s_0)$ ;
  9.               **Si**  $\Delta f \leq 0$  **Alors**
  10.                Accepté  $s'$  ;  $s_0 = s'$  ;
  11.                **Sinon**
  12.                 Calculer  $\exp(-\frac{\Delta f}{T})$  ;
  13.                 Générer un nombre aléatoire (d'une distribution uniforme)  $r \in [0,1]$  ;
  14.                 **Si**  $r \leq \exp(-\frac{\Delta f}{T})$  **Alors**
  15.                 Accepté  $s'$  ;  $s_0 = s'$  ;
  16.                 **Sinon** Rejeter  $s'$  ;
  17.                 **Fin Si** ;
  18.                **Fin Si** ;
  19.        **Fin Pour** ;
  20.         $T = \alpha * T$ ;
  21. **Fin Tant que**
- 

Initialement, on choisit un point de départ aléatoire  $s_0 = (t_p, t_h)$  entre 0 et 2. Supposons que le point choisit est de  $s_0 = (0.3275133, 1.4108423, 2.164176)$  et la valeur de la fonction du temps de simple sera cycle égale à  $f(s_0) = 2.594030962$ .

Supposant maintenant que la valeur suivante est  $s' = (0.32709134, 1.4107442, 2.1670988)$ . La valeur de la fonction du temps de simple sera cycle égale à  $f(s') = 2.596144192$

On remarque que la valeur de  $f(s')$  est supérieure à  $f(s_0)$ , soit on doit accepter ce changement soit le refuser, il dépend de la probabilité suivante :

$$\exp\left(\frac{f(s') - f(s_0)}{T}\right) > r$$

Cette règle d'acceptation est appelée critère de Metropolis un nombre est généré aléatoirement  $r \in [0,1]$ . Si cette probabilité est satisfaite, alors on accepte ce changement, sinon elle sera refusée.

$$f(s_0) = f(s')$$

Et

$$s_0 = s'$$

Nous remarquons que la température est un paramètre contrôlant le critère d'acceptation. À une température élevée, la probabilité d'acceptation tendant vers 1 et alors, toute solution voisine sera acceptée, mais quand la température est petite, la probabilité d'acceptation tendant vers 0 et alors, les mauvaises solutions seront de moins en moins souvent acceptées. La baisse progressive de la température, appelée 'Schéma de refroidissement' [47]. On réduit la température  $T$  selon un facteur de décroissement calculé comme suit :

$$T = \alpha T_{int}$$

Où  $\alpha$  est une constante compris entre 0 et 1. Pour avoir une décroissance lente de la température, il faut que la valeur de cette constante soit plus proche de 1. La valeur de cette température diminuée peu à peu par paliers, selon un schéma de refroidissement.

La règle de refroidissement, définissant l'évolution de la température dépend de la température initiale  $T_{int}$ , le coefficient de refroidissement  $\alpha$  et la longueur du palier, qui est le nombre d'itérations pour lequel la température est constante, la valeur du palier peut rester constante (en général dépendante de la taille de voisinage et de la taille du problème) ou décroître en même temps que la température [47]. L'algorithme s'arrête lorsque la température atteint une valeur presque nulle [48].

**Tableau 3.1 :** Comparaison entre les résultats donnés par le recuit simulé

$N_{ité}$	$T_{int}$	$T_{fin}$	$\alpha$	$E(SC)$	$t_p$	$t_h$	$t_v$
10000	200	$9.536743 \cdot 10^{-5}$	0.5	3	1	1	1
1000000	100	$6.14094 \cdot 10^{-5}$	0.6	2.2296543	1.0213956	1.166973	0.8389677
1000000	1000	$9.979389 \cdot 10^{-5}$	0.9	2.271778	1.4279498	0.79320055	0.8828848
1000000	10000.1	$9.8275 \cdot 10^{-5}$	0.9	2.0986369	0.6197727	1.2857769	1.2548794
1000000	55	$9.914688 \cdot 10^{-5}$	0.99	1.9867688	0.87446034	0.8770489	1.3038753
1000	55	$7.146416 \cdot 10^{-5}$	0.7	3	1	1	1
1000	150	$9.99750 \cdot 10^{-5}$	0.99	2.2158718	1.5027742	0.5388227	1.2349813
1000000	10000	$9.8274 \cdot 10^{-5}$	0.9	2.21845	0.523385	1.5039523	1.2704121
<b>1000000</b>	<b>10000.1</b>	<b><math>9.984252 \cdot 10^{-5}</math></b>	<b>0.99</b>	<b>1.9867653</b>	<b>0.87506497</b>	<b>0.8754226</b>	<b>1.3053949</b>
1000	1000	$9.97359 \cdot 10^{-5}$	0.99	3	1	1	1
1000.25	50000	$9.1052 \cdot 10^{-5}$	0.9	2.4131641	1.2535576	1.139597	0.70001024

Les résultats du tableau (3.1) nous a donne des différents temps de simple cycle minimaux quand nous avons varié les paramètres du recuit simulé (le nombre d'itération, température initiale et le coefficient de refroidissement).

Lorsque nous avons évalué la température, en choisissant une température initiale suffisamment élevée égale à 10000.1 et avec les  $10^6$  itérations, en réduisant cette température selon le coefficient de refroidissement  $\alpha = 0.99$  qu'il est proche de 1 jusqu'à la température atteint une valeur presque nulle  $T_{fin} = 9.984252 \cdot 10^{-5}$  on a obtient un temps de simple cycle minimal égal à  $x^* = (0.87506497, 0.8754226)$ . Ce dernier est approximativement égale au minimum lorsque nous avons optimisé la fonction  $F_1$  dans la partie précédente utilisant une méthode classique d'optimisation qui est égal à  $p^*(0.8752726, 0.8752726)$

### **3.9 Dimensions optimales d'un AS/RS multi allées du simple cycle**

Pour déterminer les dimensions optimales d'un AS/RS multi allées nous choisissons le modèle analytique établie par Ghomri et al [4]. L'expression analytique continue du temps de simple cycle de l'AS/RS multi allées est soumise à deux contraintes : la première est liée à la positivité des dimensions temporelles du système et la deuxième est liée à la constance de la taille du système. Nous n'avons aucune contrainte supplémentaire sur les dimensions de l'AS/RS juste les deux contraintes précédentes car l'emplacement qui abritera ce système de stockage n'est pas encore construit, lorsque nous avons prend arbitrairement la constante =1 nous avons donc trouvé un minimum qui représente les trois dimensions optimales de ce type de système [15]. Dans cette partie, nous recherchons les dimensions optimales pour des différentes tailles du système en faisant varier la taille (la constante) de 1 à 10, nous utilisons le logiciel Maple lorsque les calculs étaient complexes, en utilisant la commande NLPSolve qui résout un programme non linéaire (NLP), qui implique le calcul du minimum d'une fonction objectif, soumise à des contraintes. En suit, nous allons vérifier les relations suivantes si elles sont vraie

$$t_p = a_0 \sqrt[3]{c} \quad (49)$$

$$t_h = b_0 \sqrt[3]{c} \quad (50)$$

$$t_v = \frac{1}{a_0 b_0} (\sqrt[3]{c})^2 \quad (51)$$

Les résultats obtenus sont donnés par le tableau suivant :

**Tableau 3.2 :** Comparaison entre les résultats analytique et les résultats des relations (49), (50) et (51)

$c$	$t_p$	$t_h$	$t_v$	$E(SC)$	$a_0 \sqrt[3]{c}$	$b_0 \sqrt[3]{c}$	$\frac{1}{a_0 b_0} \sqrt[3]{c}$
1	0.8752726559	0.8752726559	1.305308836	1.986765443	0.8752726559	0.8752726559	1.305308836
2	1.1027744435	1.1027744435	0.8222930392	2.243648909	1.102774444	1.102774444	0.8222930392
3	1.2623616119	1.2623616119	0.6275270361	2.537645783	1.262361612	1.262361612	0.6275270361
4	1.3894087287	1.3894087394	0.5180121555	2.784817845	1.389408735	1.389408735	0.5180121555
5	1.4966951882	1.4966951883	0.4464093427	2.996699796	1.496695189	1.496695189	0.4464093427
6	1.5904759677	1.5904759677	0.3953172607	3.182987111	1.590475968	1.590475968	0.3953172607
7	1.6743363570	1.6743363570	0.3567094251	3.350021916	1.674336357	1.674336357	0.3567094251
8	1.7505453096	1.7505453096	0.3263272098	3.502035620	1.750545312	1.750545312	0.3263272098
9	1.8206404923	1.8206404923	0.3016835328	3.641971264	1.820640492	1.820640492	0.3016835328
10	1.8857177739	1.8857177739	0.2812202635	3.771956749	1.885717773	1.885717773	0.2812202635

Nous pouvons remarquer que les résultats de relations précédentes et les résultats de  $t_p$ ,  $t_h$ , et  $t_v$ , sont très proches, donc les relations (49), (50) et (51) sont correctes pour des différentes tailles du système.

### 3.10 Nombre des casiers optimaux d'un AS/RS multi allées du simple cycle

Lorsque nous avons trouvé les dimensions optimales pour un volume d'AS/RS multi allées égal a un, nous allons déterminer le nombre des casiers optimal de ce système dans le but que le temps du déplacement de la machine doit être minimal. À cette fin, en utilisant l'expression discrète proposée par Sari [11]. (Équation 1). Le nombre de casiers total donné par la relation suivante :

$$N = M * N_h * N_v$$

Pour déterminer le nombre de casiers total, nous allons calculer le nombre de casiers par ligne (casiers horizontaux  $N_h$ ) et le nombre de casiers par colonne (casiers verticaux  $N_v$ ) et le nombre de racks ( $M$ ), donc nous avons:

$$M = \frac{t_p}{t'_p}$$
$$N_h = \frac{t_h}{t'_h}$$
$$N_v = \frac{t_v}{t'_v}$$

On considère généralement les valeurs de  $t'_p$ ,  $t'_v$  et  $t'_h$  comme suit :

$$t'_p = 3$$

$$t'_h = 1$$

$$t'_v = 1$$

Donc le nombre de casiers total est :

$$N = \frac{t_p}{t'_p} * \frac{t_h}{t'_h} * \frac{t_v}{t'_v}$$

$$N = \frac{t_p}{3} * t_h * t_v$$

Nous supposons que le volume du système que nous voulons obtenir soit 1000, donc les dimensions optimales pour obtenir ce dernier sont :

$$t_p = 0.8752726559 * 10 \approx 8.75$$

$$t_h = 0.8752726559 * 10 \approx 8.75$$

$$t_v = 1.305308836 * 10 \approx 13.05$$

On prend la partie entière de ces dimensions  $t_p$ ,  $t_h$  et  $t_v$ , la partie entière de  $x$  est le plus grand entier  $n$  qui est inférieur ou égal à  $x$ , tel que  $n \leq x < n + 1$ , nous a donné les résultats suivantes :

$t_p$  prend soit les valeurs 8 ou 9

$t_h$  prend soit les valeurs 8 ou 9

$t_v$  prend soit les valeurs 13 ou 14

Nous allons permuter les dimensions précédentes pour que le volume de notre système que nous souhaitons l'obtenir soit 1000, nous pouvons distinguer quatre cas possibles, chaque cas est obtenu dans les conditions suivantes, permutation sans répétition des dimensions et le nombre des racks doit être un nombre pair. Donc on obtient :

- 1<sup>er</sup> cas: 9, 8, 13

- 2<sup>eme</sup> cas: 9, 9, 13

- 3<sup>eme</sup> cas: 9, 9, 14

- 4<sup>eme</sup> cas: 9, 8, 14

Pour chaque cas nous allons le nombre de casiers optimal pour que la valeur du temps de simple cycle correspondante soit minimale, faisant appel au logiciel Maple. Nos résultats présentés sur le tableau suivant :

**Tableau 3.3 :** Le temps minimal de simple cycle

cas	$M$	$N_h$	$N_v$	E(SC)
1 <sup>er</sup> cas	8	8	13	17.63461538
2 <sup>eme</sup> cas	8	9	13	17.88888889
3 <sup>eme</sup> cas	8	9	14	18.82539683
4 <sup>eme</sup> cas	8	8	14	18.5892857

On remarque que la valeur la plus petite d'E(SC) est celle du premier cas égale à 15.80769231, donc le nombre de casiers optimal est :

$$N = 8 * 8 * 13$$

$$N = 832$$

### **3.11 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons optimisé les dimensions de l'AS/RS multi allées de trois manières. D'abord en utilisant le modèle analytique, ensuite en utilisant une fonction approximative, et enfin en utilisant une métaheuristique. Nous nous sommes intéressés à l'optimisation du temps moyen de simple cycle d'un AS/RS multi allées dans le cas où l'emplacement qui abritera ce système de stockage n'est pas encore construit. Nous avons traité le problème d'optimisation des dimensions d'AS/RS multi allées, en minimisant la fonction du temps de simple cycle établie par Ghomri et al [4] et la fonction approximative pour un temps de simple cycle minimal en tenant compte des contraintes de causalité des durées de transports horizontaux et verticaux et une contrainte liée à la taille du système. La recherche des points critiques nous a permis de déterminer les dimensions optimales d'AS/RS multi allées, faisant appel au logiciel Maple.

En suite, nous avons adapté l'algorithme de recuit simulé pour minimiser le temps de simple cycle d'AS/RS multi Allées. Nous avons présenté d'abord la méthode de recuit simulé qui est un algorithme de d'optimisation et qui possède les propriétés de converger théoriquement vers un minimum globale. Puis nous avons varié les paramètres de cette méthode pour vérifier l'influence de ces paramètres sur la qualité des résultats obtenues et sur notre problème. Ceci nous a menés à obtenir un minimum globale qui est approximativement égal au minimum de la première fonction  $F_1$

## **CHAPITRE 4 :**

### **Modélisation mathématique de temps de simple cycle de l'AS/RS à rack glissants**

## **4.1 Introduction**

Jusqu'à aujourd'hui, Les AS/RS amènent un intérêt de plus en plus grandissant, à cause des avantages importants qu'ils présentent (un faible coût au niveau de la main-d'œuvre, une meilleure exploitation de l'espace de stockage,...). Nonobstant le fait que les AS/RS disposent d'un grand nombre d'avantages, ils affichent quelques problèmes liées à leur structure de grandes dimensions par exemple la mesure des performances d'un AS/RS peut se faire par rapport à ses temps de cycle, c'est-à-dire voir comment ce système se comporte en régime permanent lorsqu'il est sollicité pour accomplir sa fonction (effectuer des transactions de stockage/déstockage) du point de vu de la rapidité [49].

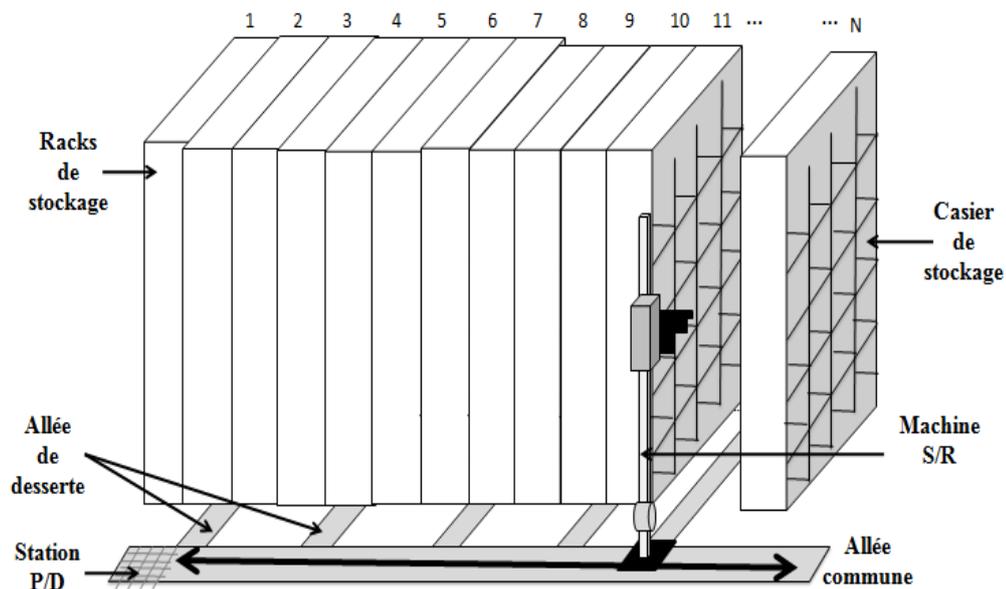
Dans ce chapitre nous essayons de transférer les problèmes posés par ces systèmes à des modèles théoriques traduisant le comportement du système qui nous permettent de résoudre ces différents problèmes. Plusieurs modèles sont développés et il n'existe aucune réponse toute faite pour choisir le modèle le mieux adapté pour cette raison nous nous proposons de développer le temps de simple cycle des AS/RS à racks glissant puisque il est parmi les paramètres les plus importants d'un AS/RS qui influe sur les performances du système global pour en faire un support mathématique performant, pour l'analyse, pour la simulation aussi bien pour l'optimisation. Tout d'abord nous commençons par une description de la configuration d'AS/RS à racks glissant et leur fonctionnement.

## **4.2 Description de l'AS/RS multi allées**

Les AS/RS à racks glissant sont une variation des AS/RS multi-allées, ils sont appelés aussi AS/RS à racks mobiles. Ces systèmes sont composés d'un ensemble de racks déposés en parallèles placés sur des rails qui leur permettent de faire un déplacement latéralement de telle manière qu'on puisse ouvrir une allée entre n'importe quels deux racks voisins. Une machine de stockage/déstockage qui sert tous les racks utilisé pour les opérations de stockage et de déstockage.

A l'état initial, il existe une seule allée aléatoire de service placée entre n'importe quels deux racks voisins ou la machine se déplace verticalement, horizontalement et transversalement pour faire les opérations de stockage et de déstockage. La particularité de

ces systèmes est que les allées de service n'apparaissent que lorsqu'une opération de stockage ou déstockage est prévue dans les racks correspondants [38].



**Figure 4.1 :** Configuration d'un AS/RS à racks glissants

### 4.3 Fonctionnement de l'AS/RS à racks glissants

Dans l'état initial, la machine S / R se trouve à la station dépôt/livraison. Pour une opération de stockage ou déstockage, la machine S / R se déplace simultanément dans les directions horizontale (profondeur dans l'allée de desserte et sur l'allée commune) et verticale (le long des colonnes formants les racks) jusqu'à ce qu'elle arrive à l'emplacement prédéterminé pour stocker ou déstocker le produit, au même temps les racks glissent pour ouvrir l'allée correspondante pour que la machine peut attendre le casier prévu. Une fois l'opération terminée, la machine retourne au point de dépôt/livraison.

Le fonctionnement de la machine S/R pour ce type est le même que dans les AS/RS multi-allées, elle peut réaliser en simple et en double cycle.

- **Notations**

Les hypothèses et les notations pour l'AS/RS à racks glissants sont les mêmes qui sont mentionnées dans le chapitre deux mais dans ce chapitre, nous allons définir un nouveau

terme ( $t_r$ ). Ce temps  $t_r$  représente le temps de glissement des racks ou bien le temps nécessaire pour ouvrir une allée.

#### 4.4 Expression analytique discrète du temps de simple cycle pour l'AS/RS à rack glissant

Sari [11] a développé le temps de cycle moyen comme étant la moyenne des temps de déplacement de tous les casiers du système. Cette section résume sa méthodologie de calcul. Le déplacement horizontal nécessaire pour atteindre un casier de coordonnées (i, j) est donné par:

$$t'_h \cdot i + \max(t_r; t'_p \cdot (k - 1)) \quad (52)$$

Le déplacement vertical nécessaire pour atteindre ce même casier de coordonnées (i, j) est donné par:

$$t'_v \cdot (j - 1) \quad (53)$$

Grâce au déplacement de Tchebychev, le temps global que met la machine S/R pour atteindre un casier de coordonnées (i, j) dans la k<sup>ème</sup> allée est le maximum entre le déplacement horizontal et le déplacement vertical.

$$\max[t'_h \cdot i + \max(t_r, t'_p \cdot (k - 1)), t'_v \cdot (j - 1)] \quad (54)$$

Le temps global que met la machine S/R pour retourner au point d'entrée / sortie ne dépend pas de  $t_r$  est donné par:

$$\max[t'_h \cdot i + t'_p \cdot (k - 1), t'_v \cdot (j - 1)] \quad (55)$$

Ainsi, le temps de cycle moyen pour tous les casiers est donné par l'expression suivante:

$$\overline{E(SC)} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{M/2} \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_v} (\max[t'_h \cdot i + \max(t_r, t'_p \cdot (k - 1)), t'_v \cdot (j - 1)] + \max[t'_h \cdot i + t'_p \cdot (k - 1), t'_v \cdot (j - 1)]) \quad (56)$$

#### 4.5 Expression analytique continue du temps de simple cycle pour l'AS/RS à rack glissant

En se basant sur les travaux de Ghomri et al [4]. Nous allons développer et présenter les expressions analytiques continues qui évaluent le temps moyen de simple cycle d'un AS/RS à racks glissants.

##### 4.5.1 Temps de simple cycle E(SC)

Le temps de simple cycle de l'AS/RS à racks glissants E(SC) est composé d'un temps de déplacement horizontal  $SC_h = \max(t_R, t_p) + t_h$  qui inclut le temps de déplacement horizontal du premier casier au dernier d'un rack  $t_h$ , le temps de glissement des racks  $t_r$  et le temps de déplacement horizontal de la première à la dernière allée  $t_p$ , est composé d'un temps de déplacement vertical  $SC_v = t_v$ . Le temps de déplacement horizontal  $SC_h$  est égal au somme du maximum entre le temps de déplacement  $t_p$  et le temps de glissement des racks  $t_r$  et du temps de déplacement  $t_h$  voir (figure)

$$SC_h = \max(t_R, t_p) + t_h \quad (57)$$

Le temps de déplacement de la machine S/R pour atteindre un casier de stockage ou de déstockage est égal au maximum entre  $SC_h$  et  $SC_v$ , nous pouvons écrire:

$$E(SC) = \max((\max(t_p, t_R) + t_h), t_v) \quad (58)$$

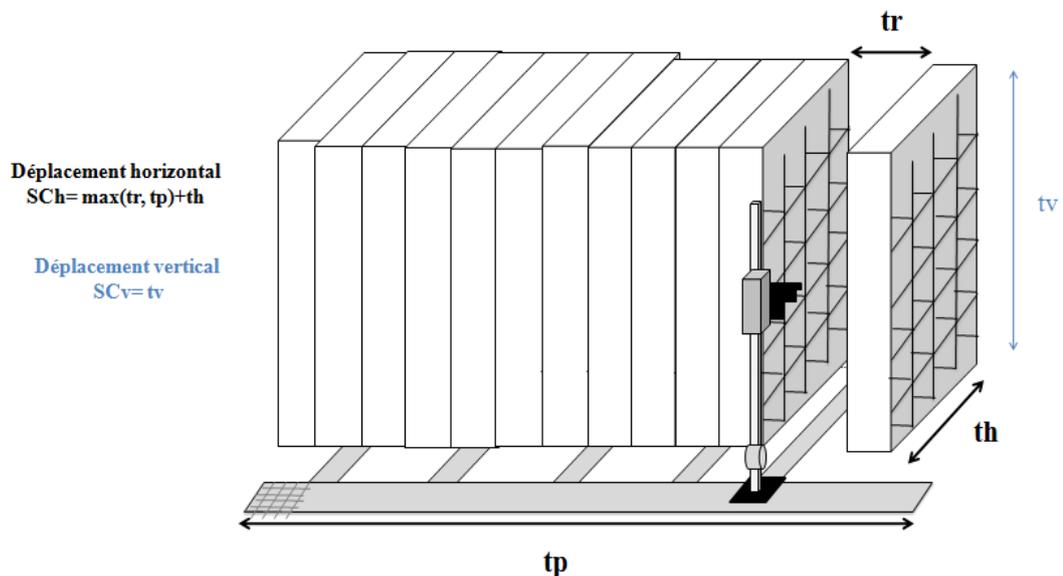


Figure 4.2 : Représentation des temps de déplacement

$t_p, t_h, t_v$  et  $t_R$  sont des durées de temps et sont donc des variables aléatoires discrètes uniformément distribution qui sont approchées par des distributions uniformes continues, a partir de la loi discrète uniforme, les fonctions de distribution discrètes exactes et de distribution continue approximative de ces variables sont représentés dans le tableau (4.1)

**Tableau 4.2 :** Distributions discrètes exactes et continue approchée des variables  $t_p, t_h, t_v$  et du constant  $t_R$  avec leurs fonctions de densité

Les distributions discrètes exactes des variables $t_p, t_h, t_v$ et du constant $t_R$	Les distributions continue approchée des variables $t_p, t_h, t_v$ et du constant $t_R$	les fonctions de densité de probabilité des temps $t_p, t_h, t_v$ et du constant $t_R$
		$f_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{T_p} & 0 < x < T_p \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
		$f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{T_h} & 0 < x < T_h \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
		$f_v(x) = \begin{cases} \frac{1}{T_v} & 0 < x < T_v \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
		$f_R(x) = \begin{cases} 1 & x = T_R \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$F_{t_p}, F_{t_h}, F_{t_v}$  et  $F_{t_R}$  sont les fonctions de répartition des variables  $t_p, t_h, t_v$  et du constant  $t_R$ , qui sont l'intégrale des fonctions de densité de probabilité de la distribution uniforme continue  $f_p(x), f_h(x), f_v(x)$  et  $f_R(x)$ , la tableau () illustre ces fonctions de répartition .

**Tableau 4.3 :** Distributions des variables  $t_p, t_h, t_v$  et du constant  $t_R$  avec leurs fonctions de répartition

Les fonctions de répartition des variables $t_p, t_h, t_v$ et du constant $t_R$	Les distributions des variables $t_p, t_h, t_v$ et du constant $t_R$
$F_p(x) = \int_0^x f_p(t) dt = \begin{cases} \frac{x}{T_p} & \text{si } 0 < x < T_p \\ 1 & \text{si } x > T_p \end{cases}$	
$F_h(x) = \int_0^x f_h(t) dt = \begin{cases} \frac{x}{T_h} & \text{si } 0 < x < T_h \\ 1 & \text{si } x > T_h \end{cases}$	
$F_v(x) = \int_0^x f_v(t) dt = \begin{cases} \frac{x}{T_v} & 0 < x < T_v \\ 1 & x > T_v \end{cases}$	
$F_R(x) = \int_0^x f_{t_R}(t) dt = \begin{cases} 1 & x \geq T_R \\ 0 & x < T_R \end{cases}$	

La distribution du temps de déplacement global pour aller de la station dépôt/livraison vers le casier de stockage/déstockage  $E(SC)$  est égale au maximum entre la distribution du temps de déplacement horizontal et la distribution du temps de déplacement vertical

$$E(SC) = \max(SC_h, SC_v) \tag{59}$$

#### 4.6 Temps de déplacement horizontal $SC_h$

Commençant par le temps de déplacement horizontal pour calculer le temps de déplacement global  $E(SC)$ , la distribution  $f_{SC_h}(x)$  du temps de déplacement horizontal  $SC_h$  est égale au somme du temps de déplacement horizontal  $\max(t_R, t_p)$  et du temps de déplacement horizontal  $t_h$

On note :

$$f_{max}(x) = \max(t_p, t_R) \quad (60)$$

Et

$$f_{t_h}(x) = t_h \quad (61)$$

Donc, la distribution de déplacement horizontal devient :

$$f_{SC_h}(x) = f_{max}(x) + f_{t_h}(x) \quad (62)$$

Pour calculer le maximum entre  $f_p(x)$  et  $f_R(x)$  il suffit de calculer le produit de leurs fonctions de répartition  $F_p(x)$  et  $F_R(x)$

$$\begin{aligned} F_{max}(x) &= \max(f_p(x); f_R(x)) \\ &= F_p(x) \cdot F_R(x) \end{aligned} \quad (63)$$

Dans cette étude, nous pouvons distinguer deux cas différents pour calculer la fonction de répartition  $F_{max}(x)$  :

- **Premier cas :**  $(t_p < t_R)$
- **Deuxième cas :**  $(t_p > t_R)$

#### **4.6.1 Formulation mathématique du premier cas $(t_p < t_R)$**

La distribution du temps de déplacement global  $f_{ESC}(x)$  est égale au maximum entre la distribution du temps de déplacement horizontal  $f_{SC_h}(x)$  et la distribution du temps de déplacement vertical  $f(t_h)$ , dans cette partie nous allons calculer cette distribution pour le premier cas  $(t_p < t_R)$

**Tableau 4.4 :** Distribution du maximum entre le déplacement horizontal et le temps de glissement des racks

Le premier cas ( $t_p < t_R$ )	
	$F_p(x) = \begin{cases} \frac{x}{T_p} & 0 < x < T_p \\ 1 & x > T_p \end{cases}$
	$F_R(x) = \begin{cases} 1 & x \geq T_R \\ 0 & x < T_R \end{cases}$
	$F_{max}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq T_R \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Lorsque le temps de déplacement horizontal  $SC_h$  est la somme de deux déplacements horizontaux  $\max(t_p, t_R)$  et  $t_h$ , alors la distribution de cette somme (noté  $f_{SC_h}(x)$ ) est le produit de convolution des deux fonctions de densité  $f_{max}(x)$  et  $f_h(x)$ , on remarque que la fonction de répartition  $F_{max}(x)$  c'est une fonction de Heaviside, donc la dérivée de cette fonction est une impulsion de Dirac, de cette façon la fonction de densité  $f_{max}(x)$  égale :

$$f_{max}(x) = \begin{cases} T_R & x = T_R \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

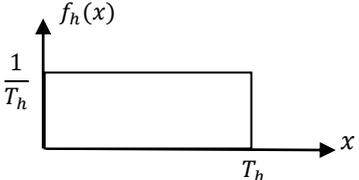
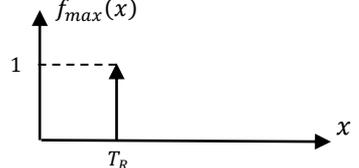
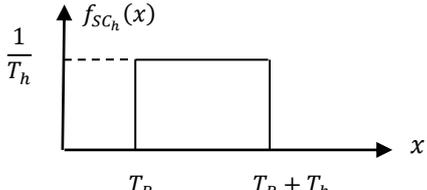
**Figure 4.3 :** Distribution du maximum entre le déplacement horizontal  $t_p$  et le temps glissement des racks  $t_R$

Le calcul de produit de convolution de deux fonctions est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} f_{SC_h}(x) &= f_h(x) * f_{max}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_h(x) * f_{max}(x - k) dk \\ &= \int_0^k f_h(x) * f_{max}(x - k) dt \end{aligned} \quad (64)$$

Le calcul de la convolution est de calculer la surface du produit  $f_h(x) f_{max}(x - k)$ . Le signal  $f_{max}(x - k)$  est le signal initial  $f_{max}(x)$ , retourné dans le temps pour donner  $f_{max}(-x)$ , puis translaté de  $x$ . En calculant alors l'ensemble des surfaces obtenues en faisant le glissement de  $f_{max}(x)$  pour tous les décalages de  $x$ , on obtient donc le produit de convolution pour tout  $x$

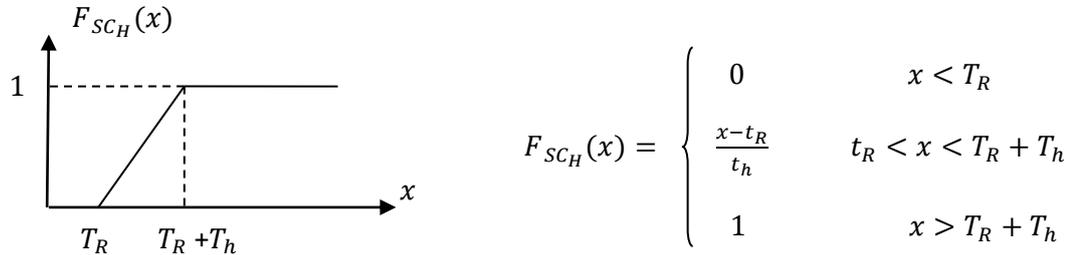
**Tableau 4.5 :** Distribution du temps de déplacement horizontal pour le premier cas ( $t_p < t_R$ )

	$f_h(x) = \begin{cases} \frac{x}{T_h} & 0 < x < T_p \\ 1 & x > T_p \end{cases}$
	$f_{max}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq T_R \\ 0 & x < T_R \end{cases}$
	$f_{SC_h}(x) = \begin{cases} \frac{1}{T_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

La fonction de densité  $f_{SC_h}(x)$  obtenue dans le premier cas ( $t_p < t_R$ ) ou le temps de glissement des racks ( $t_R$ ) est supérieur au temps nécessaire pour parcourir l'allée principale du système ( $t_p$ ) signifie que, quand les racks glissent ils prennent plus de temps que le temps nécessaire à la machine S / R pour atteindre un casier de stockage c'est-à-dire le temps consommer c'est toujours le temps de glissement des racks ( $t_R$ ) plus le temps de déplacement horizontal ( $t_h$ ), la somme au minimum la machine S/R se déplace jusqu'à le premier casier, donc elle est égale à ( $T_R$ ), et au maximum la machine S/R se déplace jusqu'à le dernier casier, donc elle est égale à  $T_R + T_h$ . Pour cela il faut toujours vérifier que l'espace de la distribution de la fonction de densité est égale à 1. L'espace de la distribution  $f_{SC_h}(x)$  égale :

$$\begin{aligned}
 S_{f_{SC_h}} &= \frac{1}{T_h} (T_R + T_h - T_R) \\
 &= \frac{1}{T_h} (T_h) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Donc, la fonction  $f_{SC_h}(x)$  est juste, on doit l'intégrer pour obtenir sa fonction de répartition  $F_{SC_H}(x)$  afin de calculer le temps de déplacement total de la machine S/R. La distribution  $F_{SC_H}(x)$  est donnée par l'expression suivante :



**Figure 4.4 :** Distribution du maximum entre le déplacement horizontal  $t_p$  et le temps glissement des racks  $t_R$

Nous vérifions la continuité de  $F_{SC_H}(x)$  :

Quand

$$x = T_R \Rightarrow \frac{T_R - T_R}{T_h} = 0$$

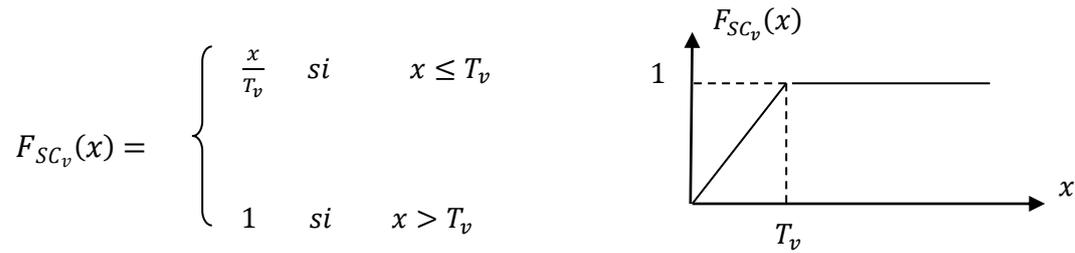
Et quand

$$x = T_R + T_h \Rightarrow \frac{T_R + T_h - T_R}{T_h} = 1$$

$F_{SC_H}(x)$  est continue donc, elle est juste.

#### 4.6.1.1 Temps de déplacement vertical $SC_v$

Précédemment nous avons mentionné que le temps de déplacement global  $E(SC)$  est égal au maximum entre la distribution de déplacement horizontal et la distribution de déplacement vertical, nous avons calculé la distribution de ce dernier quand nous avons calculé les distributions des variables  $t_p, t_h, t_v$  et du constant  $t_R$ , la figure (4.5) présente cette expression avec sa distribution  $F_{SC_V}(x)$



**Figure 4.6 :** Distribution du temps de déplacement vertical  $T_v$

Le temps de déplacement total de la machine S/R est le maximum entre le déplacement horizontal et le déplacement vertical  $\max(SC_h, SC_v)$ , donc égale au produit de leur fonctions de répartitions  $F_{SC_H}(x)$  et  $F_{SC_V}(x)$ .

$$\begin{aligned} F_{ESC}(x) &= P(\max(SC_H, SC_V) \leq k) \\ &= P(SC_H \leq X \text{ et } SC_V \leq x) \\ &= P(SC_H \leq x).P(SC_V \leq x) \\ &= F_{SC_H}(x). F_v(x) \end{aligned}$$

Selon le temps de déplacement vertical  $T_v$  trois cas différents se présentent dans le calcul de  $F_{ESC}(x)$  pour le premier cas ( $t_p < t_R$ ), nous pouvons indiquer les différents cas dans le tableau suivant :

- Premier cas : ( $T_v < T_R$ )
- Deuxième cas : ( $T_R < T_v < T_R + T_h$ )
- Troisième cas : ( $T_v > T_R + T_h$ )

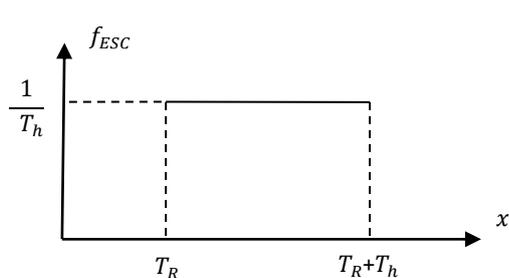
• Formulation mathématique du premier cas ( $T_v < T_R$ )

Tableau 4.6 : Calcule du temps de déplacement total de la machine S/R pour le premier cas

Le premier cas ( $T_v < T_R$ )	
	$F_v(x) = \begin{cases} \frac{x}{T_v} & 0 < x < T_v \\ 1 & x > T_v \end{cases}$
	$F_{SCh}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{x-T_R}{D_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ 1 & x \geq T_R + T_h \end{cases}$
	$F_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{x-T_R}{T_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ 1 & x \geq T_R + T_h \end{cases}$

$F_{ESC}(x)$  est continue donc, la fonction de densité de probabilité  $f_{ESC}(x)$  du temps de déplacement total de la machine S/R est la dérivé de  $F_{ESC}(x)$ .

$$F_{ESC_1}(x) = F'_{ESC}(x)$$



$$f_{ESC}(x) = \begin{cases} \frac{1}{T_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (65)$$

• Formulation mathématique du deuxième cas ( $T_R < T_v < T_R + T_h$ )

Tableau 4.7 : Calcul de temps de déplacement total de la machine S/R pour le deuxième cas

Le deuxième cas ( $T_R < T_v < T_R + T_h$ )	
	$F_v(x) = \begin{cases} \frac{x}{T_v} & 0 < x < T_v \\ 1 & x > T_v \end{cases}$
	$F_{SCh}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{x-T_R}{T_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ 1 & x \geq T_R + T_h \end{cases}$
	$F_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{x(x-T_R)}{T_v T_h} & T_R < x < T_v \\ \frac{x-T_R}{T_h} & T_v < x < T_R + T_h \\ 1 & x \geq T_R + T_h \end{cases}$

Nous vérifions la continuité de  $F_{ESC}(x)$  :

Quand

$$x = T_R \Rightarrow \frac{T_R(T_R - T_R)}{T_v T_h} = 0$$

Et quand

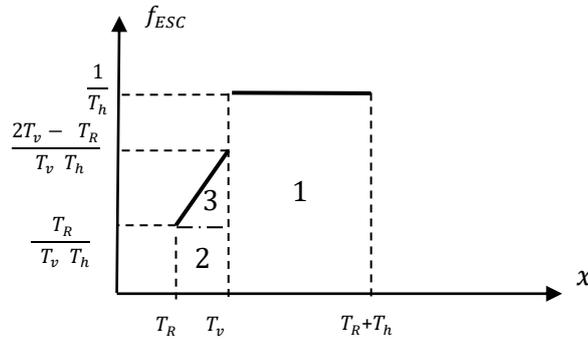
$$x = T_v \Rightarrow \frac{T_v(T_v - T_R)}{T_v T_h} = \frac{(T_v - T_R)}{T_h}$$

Et quad

$$x = T_R + T_h \Rightarrow \frac{T_R + T_h - T_R}{T_h} = 1$$

$F_{ESC}$  est continue donc, elle est juste. Donc, la fonction de densité de probabilité  $f_{ESC}$  du temps de déplacement totale de la machine S/R est la dérivé de  $F_{ESC}(x)$ .

$$f_{ESC}(x) = \begin{cases} \frac{2x-T_R}{T_h T_v} & \text{si } T_R < x < T_v \\ \frac{1}{T_h} & \text{si } T_v < x < T_R + T_h \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (66)$$



**Figure 4.7 :** Distribution du temps de déplacement totale de la machine S/R

On remarque que  $f_{ESC}$  n'est pas continue, donc nous vérifions que l'intégrale de  $f_{ESC}$  doit égal à 1 par le calcul de la surface de sa distribution :

$$S_{ESC} = S_1 + S_1 + S_3$$

Donc :

$$\begin{aligned} S_{f_{ESC}} &= \left[ (T_R + T_h - T_v) * \frac{1}{T_h} \right] + \left[ \frac{(T_v - T_R) * T_R}{T_v T_h} \right] + \left[ \left( \frac{(2T_v - 2T_R) * (T_v - T_R)}{2 T_v T_h} \right) \right] \\ &= \left[ \frac{T_R}{T_h} - \frac{T_v}{T_h} + 1 \right] + \left[ \frac{T_R}{T_h} - \frac{T_R^2}{T_v T_h} \right] + \left[ \frac{(T_v - T_R)^2}{T_v T_h} \right] \\ &= \frac{T_R}{T_h} - \frac{T_v}{T_h} + 1 + \frac{T_R}{T_h} - \frac{T_R^2}{T_v T_h} + \frac{T_v^2}{T_v T_h} - \frac{2T_v T_R}{T_v T_h} + \frac{T_R^2}{T_v T_h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$S_{ESC}$  égale à 1, alors l'expression est juste  $f_{ESC}$

• Formulation mathématique du troisième cas ( $T_v > T_R + T_h$ )

Tableau 4.8 : Calcul de temps de déplacement total de la machine S/R pour le troisième cas

Le troisième cas ( $T_v > T_R + T_h$ )	
	$F_v(x) = \begin{cases} \frac{x}{T_v} & 0 < x < T_v \\ 1 & x > T_v \end{cases}$
	$F_{SCh}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{x-T_R}{T_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ 1 & x \geq T_R + T_h \end{cases}$
	$F_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{x(x-T_R)}{T_v T_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ \frac{x}{T_v} & T_R + T_h < x < T_v \\ 1 & x \geq T_v \end{cases}$

La dériver de  $F_{ESC}(x)$ , nous donne :

$$f_{ESC}(x) = \begin{cases} \frac{2x-T_R}{T_h T_v} & T_R < x < T_R + T_h \\ \frac{1}{T_v} & T_R + T_h < x < T_v \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (67)$$

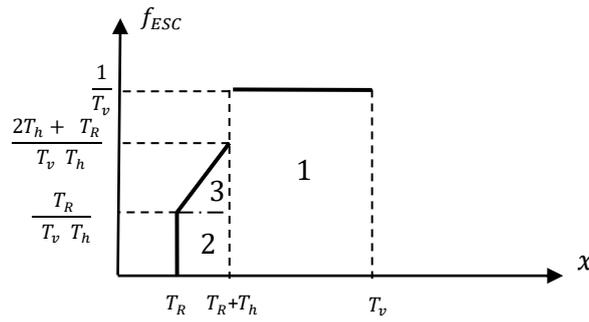


Figure 4.8 : Distribution du temps de déplacement totale de la machine S/R

On remarque que  $f_{ESC}(x)$  n'est pas continue, donc nous vérifions que l'intégrale de  $f_{ESC}(x)$  doit être égale à 1 :

$$S_{f_{ESC}} = S_1 + S_2 + S_3 \quad (68)$$

Donc :

$$\begin{aligned} S_{f_{ESC_3}} &= \left[ (T_v - T_R - T_h) * \frac{1}{T_v} \right] + \left[ (T_R + T_h - T_R) * \frac{T_R}{T_v T_h} \right] + \\ &\left[ \frac{(2T_h + T_R - T_R) * (T_R + T_h - T_R)}{2 T_v T_h} \right] \\ &= \left[ 1 - \frac{T_R}{T_v} - \frac{T_h}{T_v} \right] + \left[ \frac{T_R}{T_v} \right] + \left[ \frac{T_h}{T_v} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$S_{f_{ESC}}$  égale à 1, alors l'expression est juste  $f_{ESC}(x)$

#### 4.6.2 Formulation mathématique du deuxième cas ( $t_p > t_R$ )

Nous avons le temps de déplacement de la machine S/R pour atteindre un casier de stockage ou de déstockage est égal au maximum entre  $SC_h$  et  $SC_v$  :

$$E(SC) = \max(SC_h, SC_v) \quad (69)$$

**4.6.2.1 Temps de déplacement horizontal  $SC_h$**

Le temps de déplacement horizontal  $SC_h$  est égal au somme du temps de déplacement horizontal  $max(t_R, t_p)$  et du temps de déplacement horizontal  $t_h$

On a :

$$f_{SC_h}(x) = f_{max}(x) + f_{t_h}(x) \tag{70}$$

Et

$$f_{max}(x) = max(t_p, t_R) \tag{71}$$

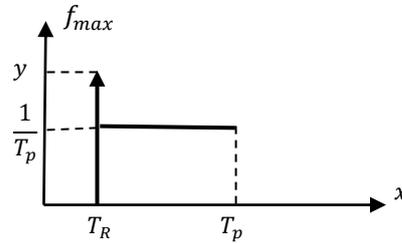
Donc, pour calculer le maximum entre  $T_p$  et  $T_R$  il suffit de calculer le produit de leurs fonctions de répartitions  $F_p(x)$  et  $F_R(x)$

**Tableau 4.9 :** Distribution du maximum enter le déplacement horizontal et le temps de glissement des racks

Le deuxième cas ( $t_p > t_R$ )	
	$F_p(x) = \begin{cases} \frac{x}{T_p} & \text{si } 0 < x < T_p \\ 1 & \text{si } x > T_p \end{cases}$
	$F_R(x) = \begin{cases} \frac{x}{T_p} & \text{si } 0 < x < T_p \\ 1 & \text{si } x \geq T_R + T_h \end{cases}$
	$F_{max}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < T_R \\ \frac{x}{T_p} & \text{si } T_R < x < T_p \\ 1 & \text{si } x > T_p \end{cases}$

La dérivée de la distribution précédente  $F_{SC_H}(x)$  est un peut compliquer a cause de la discontinuité dans la distribution, c'est un saut qu'il est l'échelon de Heaviside, donc la dérivé de ce dernier est une impulsion du Dirac, ce Dirac a une amplitude n'est pas égale à 1, à cause de ca que cette étude est compliquée. La dérivée de la droite qui est entre  $T_R$  et  $T_p$  c'est

une constante (voir la figure). On appelle cette distribution une distribution hybride qui a une composante discrète et une composante continue, ainsi cette distribution signifie qu'il existe des situations où les racks n'ont pas encore s'ouvert et des situations où ces racks s'ouvrent puis la machine déplace pour parcourir l'allée principale du système.



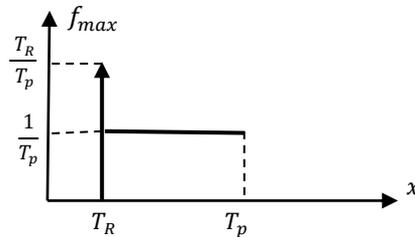
**Figure 4.9 :** Distribution du maximum entre  $T_p$  et  $T_R$

Donc, on doit trouver le  $y$  pour compenser le 1

$$y = 1 - \frac{T_p - T_R}{T_p}$$

$$y = \frac{T_p - T_p + T_R}{T_p}$$

$$y = \frac{T_R}{T_p}$$



**Figure 4.10 :** Distribution du maximum entre  $T_p$  et  $T_R$

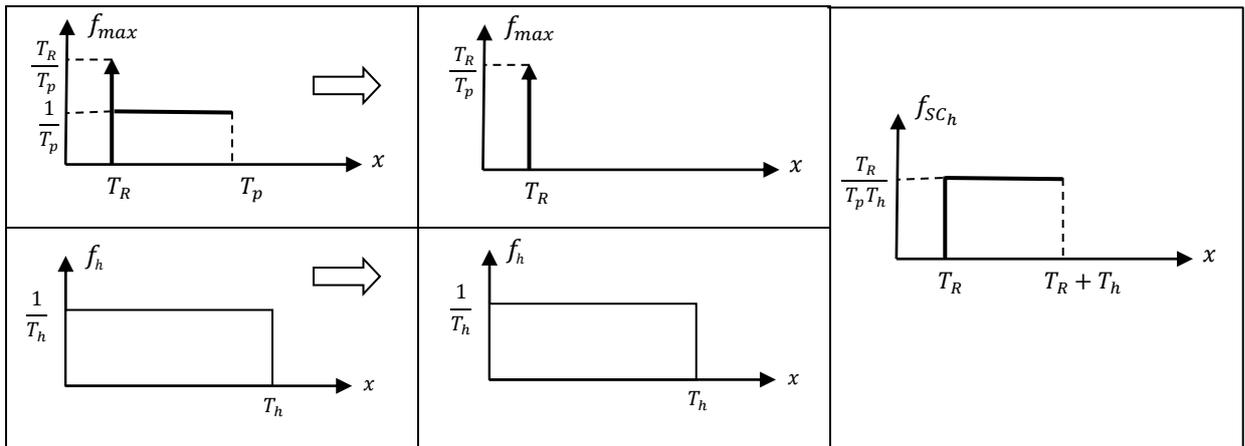
Donc, la dériver de la fonction de distribution obtenue, nous donne le résultat du maximum entre  $T_p$  et  $T_R$

$$f_{max}(x) = \begin{cases} \frac{T_R}{T_p} & x = T_R \\ \frac{1}{T_p} & T_R < x < T_p \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (72)$$

La distribution du somme de deux temps de déplacements horizontaux  $\max(t_p, t_R)$  et  $t_h$  est le produit de convolution de ces fonctions de densité  $f_{max}(x)$  et  $f_h(x)$  qui implique la somme de deux produits de convolution (A + B) des fonctions de densités  $f_{max}(x)$  et  $f_h(x)$

• **Produit de convolution A**

**Tableau 4.10** : Calcule du somme des temps de déplacements horizontaux  $\max(t_p, t_R)$  et  $t_h$



Après le produit de convolution A nous avons obtenu la fonction de distribution suivante :

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{T_R}{T_p T_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (73)$$

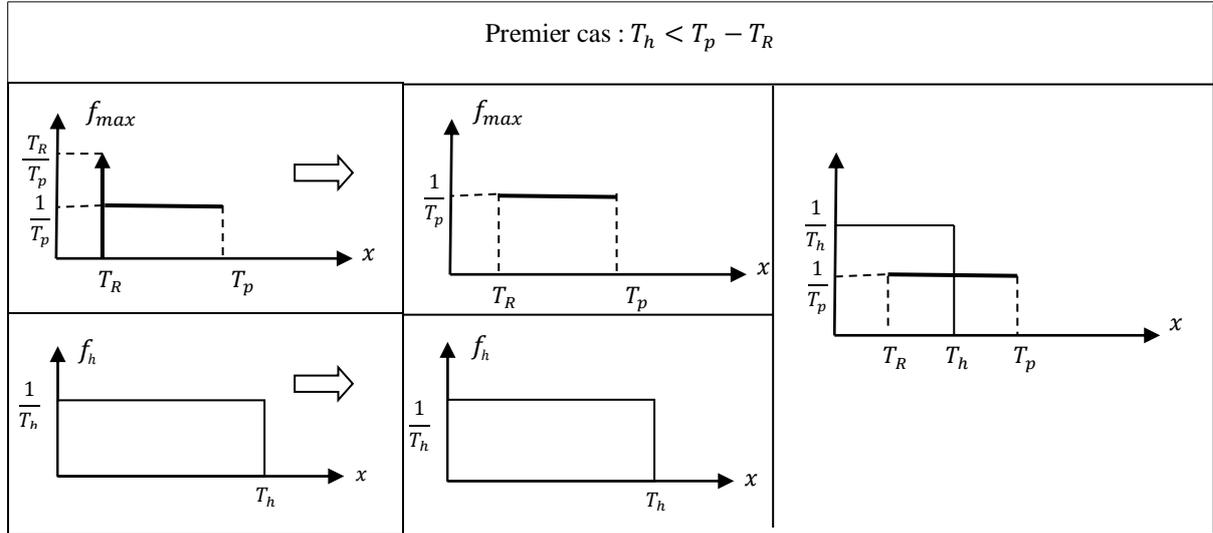
• **Produit de convolution B**

Pour ce produit de convolution nous avons deux cas :

- Premier cas :  $T_h < T_p - T_R$
- Deuxième cas :  $T_h > T_p - T_R$

4.7 Produit de convolution pour le premier cas  $T_h < T_p - T_R$

Tableau 4.11 : Distribution du somme de deux temps de déplacements horizontaux  $\max(t_p, t_R)$  et  $t_h$



Le produit de convolution de deux fonctions égale :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \mathcal{T}) \cdot g(\mathcal{T}) d\mathcal{T}$$

On a :

$$\begin{aligned} (x - \mathcal{T}) \Rightarrow & 0 \leq x - \mathcal{T} \leq T_h \\ \Rightarrow & -x \leq \mathcal{T} \leq T_h - x \\ \Rightarrow & x - T_h \leq \mathcal{T} \leq x \end{aligned}$$

Les fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  devient :

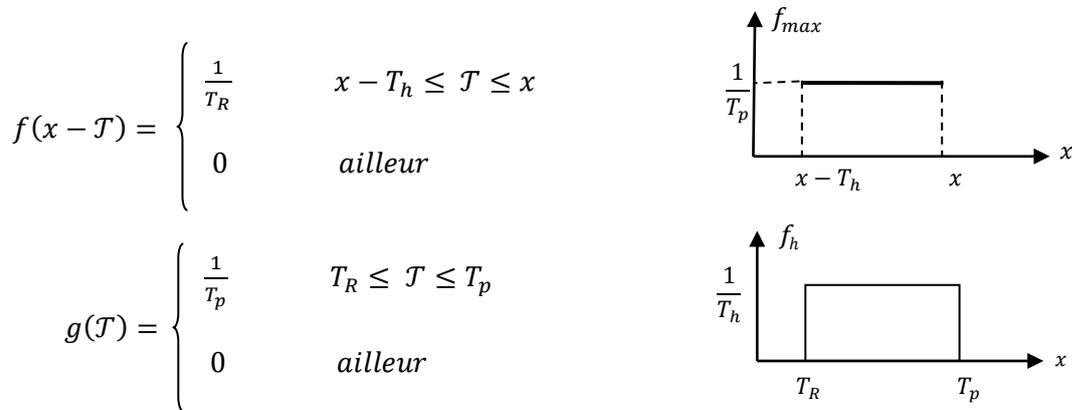


Figure 4.11 : Distribution des fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$

Pour ce cas nous ne savons pas la valeur de  $x$  donc, on doit glisser  $f(x - T)$  et à chaque fois nous allons calculer les domaines et leurs fonctions. Ainsi nous avons cinq cas, nous pouvons illustrer les différents cas dans le tableau suivant :

**Tableau 4.12 : Différents cas possible**

Domaines	$T_h < T_p - T_R$	
$x < T_R$		$f_B(x) = 0$ si $x < T_R$
$x > T_R$ et $x - T_h < T_R$		$f_B(x) = \frac{x - T_R}{T_p T_h}$ si $T_R < x < T_R + T_h$
$x > T_p$ et $x - T_h < T_R$		$f_B(x) = \frac{1}{T_p}$ si $T_R + T_h < x < T_p$
$x > T_p$ et $x - T_h < T_p$ et $x - T_h > T_R$		$f_B(x) = \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h}$ si $T_p < x < T_p + T_h$
$x > T_p$ et $x - T_h > T_p$		$f_B(x) = 0$ si $x > T_p + T_h$

Après le calcul de produit de convolution des fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  pour le cas où  $T_h < T_p - T_R$ , nous avons obtenu l'expression suivante :

$$f_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < T_R \\ \frac{x-T_R}{T_p T_h} & \text{si } T_R < x < T_R + T_h \\ \frac{1}{T_p} & \text{si } T_R + T_h < x < T_p \\ \frac{T_p+T_h-x}{T_p T_h} & \text{si } T_p < x < T_p + T_h \\ 0 & \text{si } x > T_p + T_h \end{cases} \quad (74)$$

Nous vérifions la continuité de  $f_B(x)$  :

Quand

$$x = T_R \Rightarrow \frac{T_R - T_R}{T_p T_h} = \mathbf{0}$$

Et quand

$$x = T_R + T_h \Rightarrow \frac{T_R + T_h - T_R}{T_p T_h} = \frac{\mathbf{1}}{T_p}$$

Et quand

$$x = T_p \Rightarrow \frac{T_p + T_h - T_p}{T_p T_h} = \frac{\mathbf{1}}{T_p}$$

Et quand

$$x = T_p + T_h \Rightarrow \frac{T_p + T_h - (T_p + T_h)}{T_p T_h} = \mathbf{0}$$

$f_B(x)$  est continue donc, elle est juste. Donc, la distribution du somme de deux temps de déplacements horizontaux  $\max(t_p, t_R)$  et  $t_h$  est la somme du produit de convolution  $A$  et du produit de convolution  $B$  pour ce cas  $T_h < T_p - T_R$ , nous avons obtenu l'expression suivante :

$$f_{SC_h}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < T_R \\ \frac{x}{T_p T_h} & \text{si } T_R < x < T_R + T_h \\ \frac{1}{T_p} & \text{si } T_R + T_h < x < T_p \\ \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h} & \text{si } T_p < x < T_p + T_h \\ 0 & \text{si } x > T_p + T_h \end{cases} \quad (75)$$

Nous avons vérifié sous Maple que l'intégrale de  $f_{SC_h}(x)$  égal à 1, alors la fonction  $f_{SC_h}(x)$  est juste, on doit l'intégrer pour obtenir sa fonction de répartition  $F_{SC_H}(x)$  afin de calculer le temps de déplacement globale de la machine S/R. En utilisant le logiciel Maple pour calculer l'intégral de cette fonction donc, la distribution  $F_{SC_h}(x)$  est donnée par l'expression suivante :

$$F_{SC_h}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < T_R \\ \frac{1}{2} \frac{x^2 - T_R^2}{T_p T_h} & \text{si } T_R < x < T_R + T_h \\ \frac{1}{2} \frac{2x - T_h}{T_p T_h} & \text{si } T_R + T_h < x < T_p \\ \frac{1}{2} \frac{(T_p - x)^2 + (T_h - x)^2 - x^2}{T_p T_h} & \text{si } T_p < x < T_p + T_h \\ 1 & \text{si } x > T_p + T_h \end{cases} \quad (76)$$

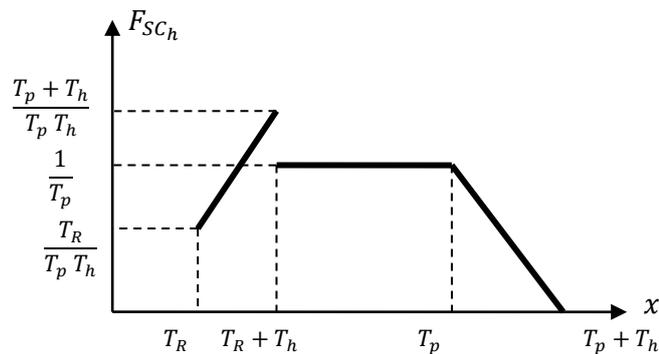


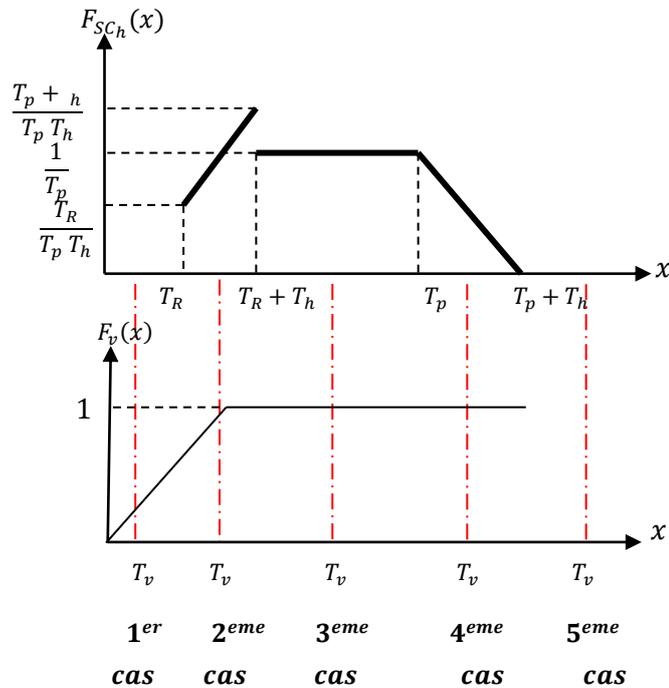
Figure 4.12 : Distribution du somme de deux temps de déplacements horizontaux  $\max(T_p, T_R)$  et  $T_h$

Après le calcul de produit de convolution des fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  pour le cas où  $T_h > T_p - T_R$ , nous avons obtenu l'expression suivante :

$$f_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < T_R \\ \frac{x-T_R}{T_p T_h} & \text{si } T_R < x < T_p \\ \frac{1}{T_p} & \text{si } T_R + T_h < x < T_p \\ \frac{T_p+T_h-x}{T_p T_h} & \text{si } T_p < x < T_p + T_h \\ 0 & \text{si } x > T_p + T_h \end{cases} \quad (77)$$

#### 4.7.1 Expressions mathématiques du temps de déplacement total $E(SC)$

Comme nous avons vu précédemment que le temps de déplacement global de la machine S/R égale au produit de convolution des fonctions de répartition  $F_{SC_H}(x)$  et  $F_{SC_V}(x)$ . Selon le temps de déplacement vertical  $T_v$  cinq cas différents représentent les domaines de calculs de  $E(SC)$  pour le deuxième cas ( $T_p > T_R$ ), nous pouvons indiquer les différents cas dans la figure suivante :



**Figure 4.13 :** Présentation des différents cas possibles

- 1<sup>er</sup> cas :  $0 < T_v < T_R$   
 2<sup>eme</sup> cas :  $T_R < T_v < T_R + T_h$   
 3<sup>eme</sup> cas :  $T_R + T_h < T_v < T_p$   
 4<sup>eme</sup> cas :  $T_p < T_v < T_p + T_h$   
 5<sup>eme</sup> cas :  $T_v > T_p + T_h$

**4.7.1.1 Expression mathématique pour le premier cas  $0 < T_v < T_R$**

Nous présentons la méthode du calcul du temps de déplacement total que fait la machine S/R pour atteindre un casier de stockage/déstockage seulement à ce cas puisque nous allons utiliser cette méthode afin de calculer ce temps à les autres cas, donc le temps de déplacement total de la machine S/R égale au produit de convolution des fonctions de répartitions  $F_{SC_h}(x)$  et  $F_{SC_v}(x)$

$$F_{SC_v}(x) = \begin{cases} \frac{x}{T_v} & \text{si } x \leq T_v \\ 1 & \text{si } x > T_v \end{cases} \quad F_{SC_h}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < T_R \\ \frac{1}{2} \frac{x^2 - T_R^2}{T_p T_h} & \text{si } T_R < x < T_R + T_h \\ -\frac{1}{2} \frac{T_h - 2x}{T_p T_h} & \text{si } T_R + T_h < x < T_p \\ -\frac{1}{2} \frac{(T_p - x)^2 + (T_h - x)^2 - x^2}{T_p T_h} & \text{si } T_p < x < T_p + T_h \\ 1 & \text{si } x > T_p + T_h \end{cases} \quad (77)$$

Après le calcul de produit de convolution nous avons obtenu l'expression suivant :

$$F_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } T_v < x < T_R \\ \frac{1}{2} \frac{x^2 - T_R^2}{T_p T_h} & \text{si } T_R < x < T_R + T_h \\ -\frac{1}{2} \frac{T_h - 2x}{T_p T_h} & \text{si } T_R + T_h < x < T_p \\ -\frac{1}{2} \frac{(T_p - x)^2 + (T_h - x)^2 - x^2}{T_p T_h} & \text{si } T_p < x < T_p + T_h \\ 1 & \text{si } x > T_p + T_h \end{cases} \quad (78)$$

La dérivée de la fonction de répartition  $F_{ESC}(x)$  obtenue, nous donne le résultat final du maximum entre le temps de déplacement horizontal et le temps de déplacement vertical qui représente le temps de déplacement total  $E(SC)$

$$f_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & T_v < x < T_R \\ \frac{x}{T_p T_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ \frac{1}{T_p} & T_R + T_h < x < T_p \\ \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h} & T_p < x < T_p + T_h \\ 0 & x > T_p + T_h \end{cases} \quad (79)$$

Nous avons expliqué et présenté les étapes du calcul du produit de convolution des fonctions de répartition  $F_{SC_h}(x)$  et  $F_{SC_v}(x)$  afin de calculer le temps de déplacement total de la machine S/R  $E(SC)$  seulement à le premier cas, suivant les étapes de calcul nous obtient la dérivé de la fonction de réparation  $F_{ESC}(x)$  obtenue à partir du produit de convolution des fonctions de répartition  $F_{SC_h}(x)$  et  $F_{SC_v}(x)$  qui est le résultat final du temps de déplacement total  $E(SC)$ , nous pouvons illustrer les expressions de différents cas dans le tableau suivant :

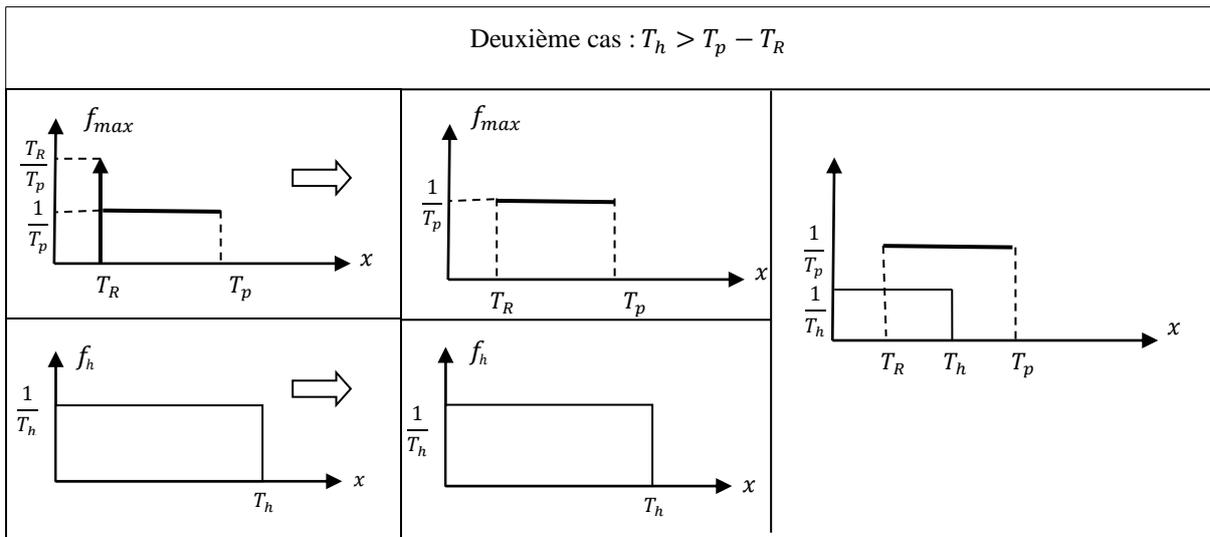
Tableau 4.13 : les expressions de différents cas du temps de déplacement total

<b>2<sup>eme</sup> cas <math>T_R &lt; T_v &lt; T_R + T_h</math></b>	<b>3<sup>eme</sup> cas <math>T_R + T_h &lt; T_v &lt; T_p</math></b>
$f_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{3}{2} \frac{x^2}{T_p T_h T_v} & T_R < x < T_v \\ \frac{1}{T_p} & T_v < x < T_R + T_h \\ \frac{1}{T_p} & T_R + T_h < x < T_p \\ \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h} & T_p < x < T_p + T_h \\ 0 & x > T_p + T_h \end{cases}$	$f_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{x}{T_p T_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ \frac{1}{2} \frac{4x - T_h}{T_p T_v} & T_R + T_h < x < T_v \\ \frac{1}{T_p} & T_v < x < T_p \\ \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h} & T_p < x < T_p + T_h \\ 0 & x > T_p + T_h \end{cases}$

$4^{eme}$ cas $T_p < T_v < T_p + T_h$	$5^{eme}$ cas $T_v > T_p + T_h$
$f_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{x}{T_p T_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ \frac{1}{T_p} & T_R + T_h < x < T_p \\ \frac{1}{2} \frac{4T_p x + 4T_h x - T_h^2 - 3x^2 - T_p^2}{T_p T_h T_v} & T_p < x < T_v \\ \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h} & T_v < x < T_p + T_h \\ 0 & x > T_p + T_h \end{cases}$	$f_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{x}{T_p T_h} & T_R < x < T_R + T_h \\ \frac{1}{T_p} & T_R + T_h < x < T_p \\ \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h} & T_p < x < T_p + T_h \\ 0 & x > T_p + T_h \end{cases}$

#### 4.8 Produit de convolution pour le deuxième cas $T_h > T_p - T_R$

Tableau 4.14 : Distribution du somme de deux temps de déplacements horizontaux  $\max(t_p, t_R)$  et  $t_h$



Pour ce cas nous ne savons pas la valeur de  $x$  donc, on doit glisser  $f(x - \mathcal{T})$  et à chaque fois nous allons calculer les domaines et leurs fonctions. Ainsi nous avons cinq cas, nous pouvons illustrer les différents cas dans le tableau suivant :

Tableau 4.15 : Différents cas possible

Domaines	$T_h > T_p - T_R$	
$x < T_R$		$f_{SC_h}(x) = 0$ si $x < T_R$
$x < T_p$		$f_{SC_h}(x) = \frac{x - T_R}{T_p T_h}$ si $T_R < x < T_p$
$x > T_p$ et $x - T_h < T_R$		$f_{SC_h}(x) = \frac{1}{T_h}$ si $T_p < x < T_R + T_h$
$x > T_p$ et $x - T_h < T_p$ et $x - T_h > T_R$		$f_{SC_h}(x) = \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h}$ si $T_R + T_h < x < T_p + T_h$
$x > T_p$ et $x - T_h > T_p$		$f_{SC_h}(x) = 0$ si $x > T_p + T_h$

Après le calcul de produit de convolution des fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  pour le cas où  $T_h > T_p - T_R$ , nous avons obtenu l'expression suivante :

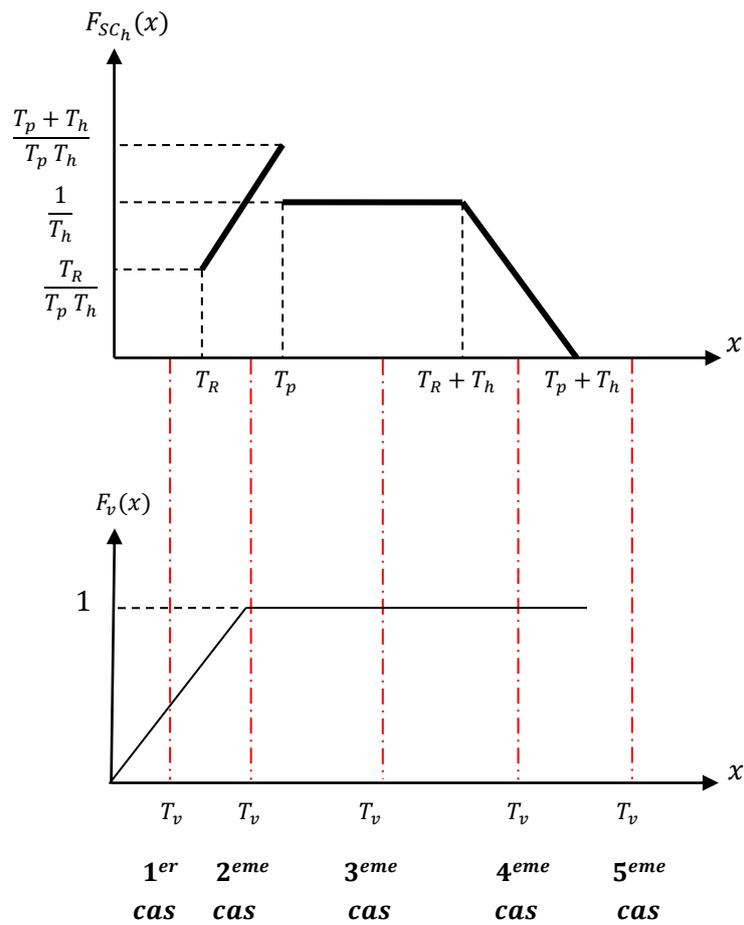
$$f_{SC_h}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < T_R \\ \frac{x-T_R}{T_p T_h} & \text{si } T_R < x < T_p \\ \frac{1}{T_h} & \text{si } T_p < x < T_R + T_h \\ \frac{T_p+T_h-x}{T_p T_h} & \text{si } T_R + T_h < x < T_p + T_h \\ 0 & \text{si } x > T_p + T_h \end{cases} \quad (80)$$

Nous avons vérifié sous Maple que l'intégrale de  $f_{SC_h}(x)$  égal à 1, alors la fonction  $f_{SC_h}(x)$  est juste, en utilisant le logiciel Maple pour calculer l'intégral de cette fonction donc, la distribution  $F_{SC_h}(x)$  est donnée par l'expression suivante :

$$F_{SC_h}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < T_R \\ \frac{1}{2} \frac{x^2 - T_R^2}{T_p T_h} & \text{si } T_R < x < T_p \\ \frac{1}{2} \frac{T_p^2 - T_R^2}{T_p T_h} + \frac{x - T_p}{T_h} & \text{si } T_p < x < T_R + T_h \\ -\frac{1}{2} \frac{(T_p - x)^2 + (T_h - x)^2 - x^2}{T_p T_h} & \text{si } T_R + T_h < x < T_p + T_h \\ 0 & \text{si } x > T_p + T_h \end{cases} \quad (81)$$

#### 4.8.1 Expressions mathématiques du temps de déplacement total $E(SC)$

Selon le temps de déplacement vertical  $T_v$  cinq cas différents représentent les domaines de calculs du temps de déplacement total de la machine S/R  $E(SC)$  pour le deuxième cas ( $T_p > T_R$ ), nous pouvons indiquer les différents cas dans la figure suivante :



**Figure 4.14 :** Présentation des différents cas possibles

- 1<sup>er</sup> cas :  $0 < T_v < T_R$
- 2<sup>eme</sup> cas :  $T_R < T_v < T_p$
- 3<sup>eme</sup> cas :  $T_p < T_v < T_R + T_h$
- 4<sup>eme</sup> cas :  $T_R + T_h < T_v < T_p + T_h$
- 5<sup>eme</sup> cas :  $T_v > T_p + T_h$

Suivant la méthode du calcul du temps de déplacement total de la machine S/R qui nous avons présenté dans le calcul du premier cas  $T_h < T_p - T_R$  et après le produit des fonctions de répartitions  $F_{SC_h}(x)$  et  $F_{SC_v}(x)$ , nous obtenons les expressions dans le tableau (tableau 2.1) qui représentent le résultat final du temps de déplacement total  $E(SC)$  pour les différents cas ci-dessus:

**Tableau 4.16 :** Les expressions de différents cas du temps de déplacement total

<p><b>1<sup>er</sup> cas <math>0 &lt; T_v &lt; T_R</math></b></p> $f_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & T_v < x < T_R \\ \frac{x}{T_p T_h} & T_R < x < T_p \\ \frac{1}{T_h} & T_p < x < T_R + T_h \\ \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h} & T_R + T_h < x < T_p + T_h \\ 0 & x > T_p + T_h \end{cases}$	<p><b>2<sup>eme</sup> cas <math>T_R &lt; T_v &lt; T_p</math></b></p> $f_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{3-x^2}{2 T_p T_h T_v} & T_R < x < T_v \\ \frac{1}{T_h} & T_v < x < T_p \\ \frac{1}{T_h} & T_p < x < T_R + T_h \\ \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h} & T_R + T_h < x < T_p + T_h \\ 0 & x > T_p + T_h \end{cases}$
<p><b>3<sup>eme</sup> cas <math>T_p &lt; T_v &lt; T_R + T_h</math></b></p> $f_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{x}{T_p T_h} & T_R < x < T_p \\ \frac{1}{2} \frac{4x - T_h}{T_p T_v} & T_p < x < T_{\text{fin}} \\ \frac{1}{T_h} & T_v < x < T_p \\ \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h} & T_p < x < T_p + T_h \\ 0 & x > T_p + T_h \end{cases}$	<p><b>4<sup>eme</sup> cas <math>T_R + T_h &lt; T_v &lt; T_p + T_h</math></b></p> $f_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & x < T_R \\ \frac{x}{T_p T_h} & T_R < x < T_p \\ \frac{1}{T_p} & T_p < x < T_R + T_h \\ \frac{1}{2} \frac{4T_p x + 4T_h x - T_h^2 - 3x^2 - T_p^2}{T_p T_h T_v} & T_R + T_h < x < T_v \\ \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h} & T_v < x < T_p + T_h \\ 0 & x > T_p + T_h \end{cases}$
<p><b>5<sup>eme</sup> cas <math>T_v &gt; T_p + T_h</math></b></p> $f_{ESC}(x) = \begin{cases} 0 & T_v < x < T_R \\ \frac{x}{T_p T_h} & T_R < x < T_p \\ \frac{1}{T_h} & T_p < x < T_R + T_h \\ \frac{T_p + T_h - x}{T_p T_h} & T_R + T_h < x < T_p + T_h \\ 0 & x > T_p + T_h \end{cases}$	

### 4.9 Temps de simple cycle moyen pour l'AS/RS à racks glissants

Nous présentons la méthode du calcul du temps moyen de simple cycle pour l'AS/RS à racks glissants seulement pour l'un des cas, nous choisissons par exemple le 1<sup>er</sup> cas  $T_v > T_p$  puisque nous allons utiliser cette méthode afin de calculer le temps moyen pour les autres cas. Pour calculer le temps moyen de simple cycle, on calcule l'espérance mathématique de  $E(SC)$ , nous avons :

**1-Premier cas : ( $t_p < t_R$ )**

$$E(SC) = \int_{-\infty}^{+\infty} x. f_{ESC}(x) dx \quad (82)$$

Lorsque  $f_{ESC}(x)$  est nulle en dehors du segment  $[0, T_R + T_h]$ , l'équation () devient :

$$E(SC) = \int_0^{T_R+T_h} x. f_{ESC}(x) dx \quad (83)$$

Ensuite, par l'intégration par partie, nous pouvons calculer cette fonction () et nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} E(SC_1) &= [x. f_{ESC_1}(x)]_{x=0}^{x=T_R+T_h} - \int_0^{T_R+T_h} x. f_{ESC_1}(x) dx \\ &= T_R + T_h - \int_0^{T_R+T_h} x. f_{ESC_1}(x) dx \\ &= T_R + T_h - \int_{T_R}^{T_R+T_h} \frac{1}{T_h} dx \\ &= T_R + T_h - \int_{T_R}^{T_R+T_h} \frac{x-T_R}{T_h} dx \end{aligned} \quad (84)$$

De la même façon nous allons calculer les autres cas pour obtenir l'expression du temps moyen de simple cycle pour l'AS/RS à racks glissants

**2<sup>eme</sup> cas :  $T_R < T_v < T_R + T_h$**

$$\frac{(T_v - T_R) * (T_v - T_R)^2 + (3T_v T_h) * (2T_R + T_h)}{6 T_v T_h} \quad (84)$$

**3<sup>eme</sup> cas :  $T_v > T_R + T_h$**

$$\frac{3T_R^2 + 3T_p T_h + T_h^2 + 3T_v^2}{6 T_v} \quad (85)$$

**2-Deuxième cas : ( $t_p > t_R$ )**

- **Premier cas  $T_h < T_p - T_R$**

**1<sup>er</sup> cas :  $0 < T_v < T_R$**

$$\frac{1}{2} \frac{T_R^2 + T_p^2 + T_h T_p}{T_p} \quad (86)$$

**2<sup>eme</sup> cas :  $T_R < T_v < T_R + T_h$**

$$\frac{1}{24} \frac{(T_p^4 - 3T_R^4 - 6T_R^2 T_v^2 + 8 T_v T_R^3 + 12 T_v T_R^2 T_h + 12 T_v T_h T_p^2 + 12 T_v T_h^2 T_p)}{T_v T_h T_p} \quad (87)$$

**3<sup>eme</sup> cas :  $T_R + T_h > T_v < T_p$**

$$\frac{1}{24} \frac{8T_R^3 + 6 T_R^2 T_h - T_h^3 + 4T_v^3 - 6T_h T_v^2 + 12 T_v T_p^2 + 12 T_v T_h T_p + 4 T_v T_h^2}{T_v T_p} \quad (88)$$

**4<sup>eme</sup> cas :  $T_p < T_v < T_p + T_h$**

$$\frac{1}{24} \frac{(12 T_v T_p^2 T_h + 12 T_v T_p T_h^2 - T_v^4 - T_p^4 + 6 T_R^2 T_h^2 + 8 T_R^3 T_h - T_h^4 + 4 T_p T_v^3 + 4 T_h T_v^3 - 6 T_p^2 T_v^2 - 6 T_v^2 T_h^2 + 4 T_v T_p^3 + 4 T_v T_h^3)}{T_v T_h T_p}$$

**5<sup>eme</sup> cas :  $T_v > T_p + T_h$**

$$\frac{1}{12} \frac{(6 T_p T_v^2 + 2 T_p T_h^2 + 3 T_p^2 T_h + 3 T_R^2 T_h + 2 T_p^3 + 4 T_R^3)}{T_v T_p}$$

• **Deuxième cas  $T_h > T_p - T_R$  :**

**1<sup>er</sup> cas :  $0 < T_v < T_R$**

$$\frac{1}{2} \frac{T_R^2 + T_p^2 + T_h T_p}{T_p}$$

**2<sup>eme</sup> cas :  $T_R < T_v < T_p$**

$$\frac{1}{2} \frac{T_R^2 + T_p^2 + T_h T_p}{T_p}$$

**3<sup>eme</sup> cas :  $T_p < T_v < T_R + T_h$**

$$\frac{1}{24} \frac{(12 T_v T_h^2 T_p + 12 T_v T_h T_p^2 + 7 T_p^4 - 3 T_R^4 - 12 T_p^3 + 12 T_v T_R^2 T_h - 4 T_p T_v^3 - 6 T_p^2 T_v^2 - 6 T_R^2 T_v^2 + 12 T_v^2 T_p + 4 T_v T_p^3 + 8 T_v T_R^3)}{T_v T_h T_p}$$

**4<sup>eme</sup> cas :  $T_R + T_h < T_v < T_p + T_h$**

$$-\frac{1}{24} \frac{(12 T_v T_p T_h^2 + 24 T_p T_R^2 T_h + 24 T_p T_R T_h^2 + 12 T_p^3 - 24 T_p T_R T_h - 12 T_v T_h T_p^2 + T_v^4 - 7 T_p^4 - 8 T_R^3 T_h + T_h^4 - 6 T_R^2 T_h^2)}{T_v T_h T_p}$$

$$-\frac{1}{24} \frac{-12 T_p T_h^2 - 4 T_v T_h^3 - 4 T_v T_p^3}{T_v T_h T_p}$$

5<sup>eme</sup> cas :  $T_v > T_p + T_h$

$$-\frac{1}{12} \frac{(-6 T_p T_h T_v^2 + 12 T_p T_R^2 T_h - 12 T_p T_R T_h + 12 T_p T_R T_h^2 - 6 T_p T_R^2 - 4 T_p^4 + 6 T_p^3 + 4 T_p T_R^3 - 6 T_p T_h^2 - 2 T_p^3 T_h)}{T_v T_h T_p} \quad (89)$$

$$-\frac{1}{12} \frac{(-3 T_p^2 T_h^2 + 2 T_p T_h^3 - 4 T_R^3 T_h - 3 T_R^2 T_h^2)}{T_v T_h T_p}$$

Ces 13 équations représentent le temps moyen  $E(SC)$  que met la machine S/R pour aller du point de dépôt/livraison à n'importe quel casier de stockage/déstockage dans le système. Donc les expressions finales du temps du temps moyen de simple cycle de l'AS/RS à racks glissants s'écrivent comme suit :

• **Premier cas :  $T_p < T_R$**

$$E(SC) = \left\{ \begin{array}{ll} T_R + \frac{1}{2} T_h & T_v > T_p \\ \frac{(T_v - T_R)(T_v - T_R)^2 + (3T_v T_h)(2T_R + T_h)}{6 T_v T_h} & T_R < T_v < T_R + T_h \\ \frac{3T_R^2 + 3T_R T_h + T_h^2 + 3T_v^2}{6 T_v} & T_v > T_R + T_h \end{array} \right. \quad (90)$$

• **Deuxième cas :  $T_p > T_R$  et  $T_h < T_p - T_R$**

$$E(SC) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \frac{T_R^2 + T_p^2 + T_h T_p}{T_p} & 0 < T_v < T_R \\ \frac{1}{24} \frac{(T_v^4 - 3T_R^4 - 6T_R^2 T_v^2 + 8T_v T_R^3 + 12 T_v T_R^2 T_h + 12 T_v T_h T_p^2 + 12 T_v T_h^2 T_p)}{T_v T_h T_p} & T_R < T_v < T_R + T_h \\ \frac{1}{24} \frac{8T_R^3 + 6 T_R^2 T_h - T_h^3 + 4T_v^3 - 6T_h T_v^2 + 12 T_v T_p^2 + 12 T_v T_h T_p + 4 T_v T_h^2}{T_v T_p} & T_R + T_h < T_v < T_p \\ \frac{1}{24} \frac{1}{T_v T_h T_p} \left( 12 T_v T_p^2 T_h + 12 T_v T_p T_h^2 - T_v^4 - T_p^4 + 6T_R^2 T_h^2 + 8T_R^3 T_h - T_h^4 \right. \\ \left. + 4T_p T_v^3 + 4T_h T_v^3 - 6T_p^2 T_v^2 - 6T_v^2 T_h^2 + 4T_v T_p^3 + 4T_v T_h^3 \right) & T_p < T_v < T_p + T_h \\ \frac{1}{12} \frac{(6 T_p T_v^2 + 2 T_p T_h^2 + 3T_p^2 T_h + 3T_R^2 T_h + 2T_p^3 + 4T_R^3)}{T_v T_p} & T_v > T_p + T_h \end{array} \right. \quad (91)$$

- **Troisième cas :  $T_p > T_R$  et  $T_h > T_p - T_R$**

$$E(SC) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{T_R^2 + T_p^2 + T_h T_p}{T_p} & 0 < T_v < T_R \\ \frac{1}{2} \frac{T_R^2 + T_p^2 + T_h T_p}{T_p} & T_R < T_v < T_p \\ \frac{1}{24} \frac{1}{T_v T_h T_p} (12 T_v T_h^2 T_p + 12 T_v T_h T_p^2 + 7 T_p^4 - 3 T_R^4 - 12 T_p^3 + 12 T_v T_R^2 T_h - 4 T_p T_v^3 - 6 T_p^2 T_v^2 - 6 T_R^2 T_v^2 + 12 T_v^2 T_p + 4 T_v T_p^3 + 8 T_v T_R^3) & T_p < T_v < T_R + T_h \\ -\frac{1}{24} \frac{1}{T_v T_h T_p} \begin{pmatrix} 12 T_v T_p T_h^2 + 24 T_p T_R^2 T_h + 24 T_p T_R T_h^2 + 12 T_p^3 - 24 T_p T_R T_h \\ -12 T_v T_h T_p^2 + T_v^4 - 7 T_p^4 - 8 T_R^3 T_h + T_h^4 - 6 T_R^2 T_h^2 - 12 T_p T_h^2 \\ -4 T_v T_h^3 - 4 T_v T_p^3 \end{pmatrix} & T_R + T_h < T_v < T_p + T_h \\ -\frac{1}{12 T_v T_h T_p} \begin{pmatrix} -6 T_p T_h T_v^2 + 12 T_p T_R^2 T_h - 12 T_p T_R T_h + 12 T_p T_R T_h^2 - 6 T_p T_R^2 \\ -4 T_p^4 + 6 T_p^3 + 4 T_p T_R^3 - 6 T_p T_h^2 - 2 T_p^3 T_h \\ -3 T_p^2 T_h^2 + 2 T_p T_h^3 - 4 T_R^3 T_h - 3 T_R^2 T_h^2 \end{pmatrix} & T_v > T_p + T_h \end{cases} \quad (92)$$

- **Remarque**

Le temps que met la machine S/R pour retourner à la station dépôt/livraison ne dépend pas de paramètre  $T_R$ . Donc c'est la moitié du temps de simple cycle d'un AS/RS multi allées.

#### 4.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté de façon plus précise les AS/RS à rack glissant leur définition, leur fonctionnement, ensuite nous avons passé à le développement et à la modélisation mathématique de temps de simple cycle.

Nous avons présenté un modèle discret exacte qui est développé par Sari [11] et un modèle continue approché que nous avons développé et présenté tous les étapes de modélisation mathématique en se basant sur les travaux de Ghomri et al [4].

Nous avons présenté une description des déplacements élémentaires, en suite on a calculé le temps moyen de simple cycle que met la machine S/R pour aller de la station de dépôt/livraison à n'importe quel casier de stockage/déstockage dans le système, en présentant la procédure adoptée dans le calcul de ce dernier.

## Conclusion générale

Les AS/RS sont largement utilisés, non seulement comme solutions de rechange aux entrepôts traditionnels, mais également dans le cadre des systèmes de production avancés et des firmes modernes [50]. Les AS/RS ont une grande importance ils permettent de réduire les coûts de stockage, d'améliorer la traçabilité des produits et la gestion des stocks, donc ces avantages permettent aux entreprises d'avoir une grande part dans le marché et de faire face à la concurrence mondiale.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à étudier ces systèmes, en particulier nous avons étudié les AS/RS multi allées et à racks glissants. Le travail présenté dans ce mémoire s'est porté sur l'optimisation des dimensions d'AS/RS multi allées en minimisant le temps de simple cycle et sur le développement du modèle mathématique du temps moyen de simple cycle d'AS/RS à racks glissants.

Nous avons donc commencé, en chapitre 1 de ce mémoire par des généralités sur les systèmes automatisés de stockage/déstockage, les différentes méthodologies de stockage, les mesures et les techniques d'évaluation de performances de ces systèmes. En fin, nous avons présenté une revue de la littérature de ces systèmes.

Dans le chapitre 2, nous avons utilisé la technique de l'approximation au sens des moindres carrés pour trouver une fonction approximative d'un AS/RS multi allées. Nous avons simplifié l'expression analytique continue du simple cycle d'un AS/RS multi allées établie par Ghomri et al [4] qui devient une équation à deux variables en considérant que la taille du système égale à 1. Ce changement des variables nous a donné une équation à deux variables, qui nous a permis de l'approximer par une fonction plus simple en utilisant les moindres carrées. Nous avons utilisé le logiciel MATLAB qui nous a permis d'obtenir directement les meilleurs coefficients d'un polynôme de degré 4.

Après, nous avons étudié les AS/RS multi-allées. Nous avons présenté une approche discrète et continue pour l'optimisation des dimensions de ce système. Nous avons optimisé d'abord l'expression analytique continue du temps de cycle de l'AS/RS multi allées afin de trouver les dimensions optimales de ce système pour que le temps de simple cycle de la machine S/R soit minimal. Cette expression est basée sur l'optimisation d'une fonction non

linéaire en nombre réel à trois variables avec contraintes liées à la constance de la taille du système ( $t_p * t_h * t_v = cst$ ) et des contraintes de causalité des durées de transports horizontaux et verticaux ( $t_p > 0, t_h > 0, t_v > 0$ ). Nous avons déterminé les trois dimensions optimales pour ce système à partir de la recherche des points critiques qui revient à résoudre un système d'équations non linéaire en faisant appel au logiciel Maple. Ensuite, Nous avons optimisé la fonction approximative qui est basée aussi sur l'optimisation d'une fonction non linéaire en nombre réel à deux variables avec les mêmes contraintes de l'expression analytique continue du temps de simple cycle de l'AS/RS multi allées en faisant appel au logiciel Maple. Et en fin, en utilisant une métaheuristique pour optimiser les dimensions de l'AS/RS multi allées. Les résultats obtenus de cette optimisation ont permis de déterminer un minimum local qui approxime le minimum de l'expression analytique.

Enfin, nous avons étudié les AS/RS à racks glissants. Nous avons développé l'expression mathématique modélisant le temps du simple cycle se basant sur les travaux de Ghomri et al [4]. Selon les temps de déplacement horizontaux et verticaux  $t_p, t_v, t_h$  et le temps de glissement des racks  $t_r$ . De nombreux cas apparaissent dans cette étude, et alors nous avons présenté et calculé tous les cas possibles avec détails.

Notre travail de la modélisation du temps du simple cycle de l'AS/RS à racks glissants simplifier la tâche au futur chercheur pour faire l'optimisation des dimensions de ce type des systèmes par rapport au temps de simple cycle, utilisant les métaheuristique.

## Références Bibliographiques

- [1] FACON, P. (s.d.). *Lecoindesentrepreneurs*. Récupéré sur <https://www.lecoindesentrepreneurs.fr/logistique-entreprise/>
- [2] Metahri, D., & Hachemi, K. (2017, mai). Automated Storage and Retrieval Systems: A Performances Comparison between Free-Fall-Flow-Rack and Classic Flow-Rack. *Conference: 6th International Conference on Systems and Control* . Batna, Algeria.
- [3] GUEZZEN, A. H. (2014, décembre 22). Modélisation du temps de cycle d'un système. *Thèse de Doctorat en Productique* . Université de Tlemcen Algérie.
- [4] Ghomri, L., Sari, Z., Guezzan, A. H., & Sari, T. (2008). Expression analytique du temps de cycle pour les AS/RS multi allées. *7ème Conférence Internationale de modélisation et simulation* . Paris France.
- [5] Ouhoud, A., Guezzan, A., & Sari, Z. (2015). Modélisation continue du temps moyen de simple cycle. *Xème Conférence Internationale : Conception et*, (p. 2). Tanger, Maroc.
- [6] Riccardo, M., Mauro, G., & Alberto, R. ( 2006, January). Design and control of an AS/RS. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* , p. 1.
- [7] BEKKARA, N. E. (2018). Optimisation du temps de cycle d'un AS/RS multi allées. Université de Tlemcen.
- [8] Kouloughli, I., Castagna, P., & Sari, Z. (2017). *Reducing retrieval time in Automated Storage and Retrieval System with a gravitational conveyor based on Multi-Agent Systems*. Récupéré sur ResearchGate.
- [9] BESSENOUCI, H. N. (s.d.). Pilotage d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel. *Mémoire de Magister "API" (Automatique Productique Informatique)* . Laboratoire d'Automatique - Équipe de Productique, Tlemcen.
- [10] Cramer,&Weiss. (1988). Récupéré sur <https://www2.isye.gatech.edu/~mgoetsch/cali/ORDER/CAROUSEL.HTM>
- [11] SARI, Z. (2003, décembre 14). MODELISATION, ANALYSE ET EVALUATION. *Thèse de Doctorat d'Etat en Productique* . Université Abou Bekr Belkaïd, Tlemcen.
- [12] ZIEGLER, M. (2018, JANUARY). *Conveyco*. Récupéré sur <https://www.conveyco.com/pros-cons-asrs-warehouse-automation/>

- [13] Maleki, R. (1991). Flexible Manufacturing Systems:.. *Prentice Hall* . he Technology and Management.
- [12] Kun, J. (2016, juillet 28). Dedicated Storage. *warehouse with dedicated storage*Description complète , p. 1.
- [13] Askin, R., & Standridge, C. (1993). *Modeling and Analysis of Manufacturing* .
- [15] Kouloughli, S. Optimisation de systèmes automatisés de. *Thèse de Doctorat en Productique* . Université de Tlemcen-Algérie.
- [16] Material Handling Institute, M. (1977). Consideration for planning and installing an automated. *Inc AS/RS document* .
- [17] Bozer, Y. A., & White, J. A. (1984). Travel time for automated storage/ retrieval systems. *IIE transactions* , pp. 329-338.
- [18] Atrouche, S., & Oulhaci, M. (2015). Evaluation des Performances d'un Web Service. *Mémoire de Master en Recherche Opérationnelle* . Université A/Mira de Béjaia.
- [19] Georges, H. (2001, December). Conceptualisation & Modélisation pour la Simulation des Systèmes de. *Document de Synthèse,ResearchGate* . UNIVERSITE DE SAVOIE.
- [20] Richard, B. (s.d.). Récupéré sur Techno-Science.net: <https://www.techno-science.net/definition/5373.html>
- [21] Yann, M. (2002). *Cours de réseau de Petri*. Récupéré sur [http://www.morere.eu/IMG/pdf/cours\\_petri2.pdf](http://www.morere.eu/IMG/pdf/cours_petri2.pdf)
- [22] Hausman, W., Schwarz, L. B., & Graves, S. C. (1976). Optimal storage assignment in automatic warehousing systems. *Management Science*.
- [23] Hwang, H., & CS, K. (1988). Astudy on multi-aisle system served by a single storage/retrieval machine.
- [24] Egbelu, P. J. (1991). Framework for dynamic positioning of storage/retrieval machines in an automated storage/retrieval system. *International Journal of Production Research* , pp. 17-37.
- [25] Chang, D., Wen, U., & Lin, J. (1995). The impact of acceleration/ deceleration on travel time models for automated storage/retrieval systems. *IIE Transactions* .
- [26] Dallari, F., Marchet, G., & Ruggeri, R. (2000). Opt imisat ion of man-on-board automated storage/retrieval systems, *Integrated Manufacturing Systems*.
- [27] Azzouz, A. (2001). Optimisation des dimensions d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel pour un temps de cycle minimum. *Thèse de Magister* . Université de Tlemcen, Algerie.

- [28] Peters, B. A., Smith, J. S., & Hale, T. S. (1996). Closed form models for determining the optimal dwell point location in automated storage and retrieval systems. *International Journal of Production Research* , pp. 757-1771.
- [29] Park, B. C. (2001). An optimal dwell point for automated storage/retrieval systems with uniformly distributed, rectangular racks. *Int Jnl Production Research* .
- [30] Sari, Z., Saygin, C., & Ghouali, N. (2005). Travel-time models for flow-rack automated storage and retrieval systems. pp. 979–987.
- [31] Potrc, I., Lerher, T., Kramberger, J., & Sraml. (2004). Simulation model of multishuttle multishuttle. *Journal of Materials Processing Technology* , 157-158, 236-244.
- [32] Kouloughli, S., Sari, Z., & Sari, T. (2008). Optimisation des dimensions d'un AS/RS multi allées pour un temps de simple cycle optimal. *7ème Conférence Internationale de modélisation et simulation MOSIM'08*. Paris France.
- [33] Sari, Z. (1998). Expressions analytiques discrètes de simple et double cycle d'un AS/RS multi-allées. *Rapport interne, LAT* . Université Abou-Bekr Belkaïd, Tlemcen, Algérie.
- [34] Ghomri, L., Guezzan, A. H., & Sari, Z. (2011). Continuous Model for Single Cycle Times of a Mobile Racks Automated Storage and Retrieval System. *conference MISC' 11*.
- [35] Kouloughli, S., & Sari, Z. (2011). Optimisation de deux dimensions d'un AS/RS multi allées en fixant la troisième pour minimiser le temps de cycle. *Acte des 7ème conférence internationale de conception et production intégrée CPI'11*. Hammamet.
- [36] Sari, Z., & Kouloughli, S. (2010). Modélisation des temps de cycle d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel à une seule machine S/R. *conférence internationale de modélisation et simulation*. Hammamet Tunisie.
- [37] TRUONG, M., & Xuân, M. (s.d.). *TECHNIQUES DE L'INGENIEUR*. Récupéré sur <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/procedes-chimie-bio-agro-th2/modelisation-en-genie-des-procedes-42328210/modelisation-en-genie-des-procedes-j1021/>
- [38] Kouloughli, S. (s.d.). Optimisation de systèmes automatisés de stockage/déstockage multi-allées. *MEMOIRE DE MAGISTER* .
- [39] *linternaute*. (s.d.). Récupéré sur <https://www.linternaute.fr/dictionnaire/fr/definition/methode-des-moindres-carres/>
- [40] *ACADEMIC*. (s.d.). Theorie de l'approximation .Récupéré sur <https://fracademic.com/dic.nsf/frwiki/1626317>
- [41] *BusinessDictionary*. (s.d.). Récupéré sur <http://www.businessdictionary.com/definition/optimization.html>

- [42] SAADI, L. (2007). Optimisation MultiObjectifs par Programmation. *Magister en informatique* . Batna, Département d'informatique.
- [43] LAYEB, A. (2010). Utilisation des Approches d'Optimisation Combinatoire pour la Vérification des Applications Temps Réel. *Thèse de Docteur en science en Informatique* . Département d'Informatique , Constantine.
- [44] AMARA, K., & MEHENNI, M. (2017). Résolution de jeux par les métaheuristiques. *Memoire de Master en Recherche Opérationnelle* . Département de Recherche Opérationnelle, Béjaia.
- [45] Olivier, D. (2003). TD/TP Recherche stochastique : Méthode du recuit simulé. *Maîtrise d'informatique* .
- [46] BENDAHMANE, A. (2011). Le recuit simulé. *Module : Optimisation avancée* . Département d'Informatique, Oran.
- [47] MÉTHODES APPROCHÉES. (s.d.). 08. Récupéré sur [http://www-igm.univ-mlv.fr/~desar/Cours/M1-1\\_Optimisation\\_Combinatoire/chap5.pdf](http://www-igm.univ-mlv.fr/~desar/Cours/M1-1_Optimisation_Combinatoire/chap5.pdf)
- [48] Bouajaja, S., & Dridi, N. (2017). Méthode de Recuit Simulé pour l'optimisation de l'affectation d'opérateurs sur une ligne de production. *International Journal of Business & Economic Strategy (IJBES)* , 2. University of Tunis Elmanar.
- [49] HAMZAOU, M.A., & BABA AHMED, L.N. (2016). Conception, réalisation et pilotage d'un AS/RS à chariots gravitationnels. *Projet de Fin d'Etudes de Master*. Département de Génie Electrique et Electronique , Tlemcen.
- [50] Lee, H. (1997). Performance analysis for automated storage and retrieval systems. *IIE Trans* , 15-18.

## Résumé

Dans ce travail nous nous intéressons aux systèmes automatisés de stockage/déstockage (AS/RS), en particulier l'AS/RS multi-allées et l'AS/RS à racks glissants. Nous présentons des généralités sur les AS/RS qui contiennent une définition, les composants et leurs fonctions et une description des différents types des AS/RS, leurs avantages et leurs inconvénients. À l'aide de la technique de l'approximation au sens moindres carrés nous trouvons une fonction approximative du temps moyen de simple cycle d'un AS/RS multi allées. Nous focalisons notre travail plus précisément sur l'optimisation des dimensions de l'AS/RS multi allées pour minimiser le temps de simple cycle de la machine S/R. Nous optimisons les dimensions de l'AS/RS multi allées de trois manières. D'abord en utilisant le modèle analytique, ensuite en utilisant une fonction approximative, et en utilisant une métaheuristique. Le dernier objectif de ce travail consiste à la modélisation de temps de simple cycle de l'AS/RS à racks glissants dans lequel nous développons et présentons les expressions analytiques continues qui évaluent le temps moyen de simple cycle de ce système.

### *Mots-Clés:*

*AS/RS, Stockage/Déstockage, Multi-allées, Racks glissants, Approximation, Modélisation, Métaheuristique*

## **Abstract**

In this work we are interested in automated storage and retrieval systems (AS / RS), in particular Multi-Aisles AS / RS and Mobile Racks AS / RS. We present generalities about AS / RS that contain a definition, the components and their functions and a description of the different types of AS / RS, their advantages and disadvantages. Using the least squares approximation technique we find an approximate function of the average single cycle travel time of a multi-aisle AS / RS. We focus our work more precisely on optimizing the dimensions of the multi-aisle AS / RS to minimize the single cycle time of the S / R machine. We optimize the dimensions of the AS / RS multi aisles in three ways. First using the analytical model, then using an approximate function, and finally using a metaheuristic. The final objective of this work is the single cycle time modeling of Mobile Racks AS / RS in which we develop and present continuous analytical expressions that evaluate the average single cycle travel time of this system.

### ***Key words:***

*AS/RS, Storage/Retrieval, Multi-aisles, Mobile racks, Approximation, Modeling, Metaheuristic*

## ملخص

في هذا العمل نحن مهتمون بأنظمة التخزين / الاسترجاع الآلي (AS / RS), وخاصة AS / RS متعدد الممرات و AS / RS مع رفوف منزلقة. نقدم عموميات حول أنظمة AS / RS التي تحتوي على تعريف ومكونات ووظائفها ووصف لأنواع مختلفة من AS / RS ومزاياها وعيوبها. باستخدام تقنية تقريب المربعات الصغرى نجد دالة تقريبية لمتوسط وقت دورة واحدة من AS / RS متعدد الممرات. نركز عملنا بشكل أكثر دقة على تحسين أبعاد AS / RS متعددة الممرات لتقليل وقت دورة واحدة لآلة S/R. نحسن أبعاد AS / RS متعدد الممرات بثلاث طرق. أولاً باستخدام النموذج التحليلي، ثم باستخدام دالة تقريبية، وأخيراً باستخدام metaheuristic. الهدف النهائي أيضاً من هذا العمل هو نمذجة وقت دورة واحدة لـ AS / RS مع رفوف منزلقة، حيث نطور ونقدم فيها تعبيرات تحليلية مستمرة تقيّم متوسط وقت الدورة الواحدة لهذا النظام.

**الكلمات الدالة :**

*AS/RS, Stockage/Déstockage, Multi-allées, Racks glissants, Approximation, Modélisation, Métaheuristique*