RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN

Faculté des sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Option : Equations aux dérivées partielles et applications

présenté par

YOUNES Abdelbadie

Soutenu le : 01 / 07 / 2019

La théorie de semi-groupes et les équations aux dérivées partielles à retard

Soutenu devant le jury composé de :

M. YEBDRI Mustapha	Pr. Université de Tlemcen	Président
M. BENSEDIK Ahmed	MCB. Université de Tlemcen	Examinateur
Mme. SEHOULI Fadéla	MAA. Université de Tlemcen	Examinatrice
Mme. MERZAGUI-DAOUDI Naima	Pr. Université de Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire :2018-2019

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes parents ;
Ma sœur ;
Mon frère ;
Mes amis.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon travail et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais, dans un premier temps, remercier mon encadreur le Professeur MERZAGUI Naima, de m'avoir orienté, encadré, aidé et conseillé.

Je remercie également le Professeur YEBDRI Mustapha pour avoir bien voulu me faire l'honneur de présider le jury.

Enfin, J'adresse mes sincères remerciements aux membres du Jury : Dr. BENSEDIK Ahmed et Mme. SEHOULI Fadéla. Je vous exprime toute ma reconnaissance de l'honneur que vous me faites en acceptant de lire et évaluer ce travail.

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont d'une importance cruciale dans la modélisation et la description des phénomènes naturels en Physique, Chimie, Biologie, etc., nous citerons à titre d'exemples l'évolution des populations, les tremblements de terre, la dynamique de fluide, la mécanique de continuum, simulation d'avion, graphiques des calculatrices et prédiction de la météo.

Les équations à retard, différentielles ou aux dérivées partielles, décrivent l'évolution d'une variable en fonction d'une ou plusieurs valeurs prises par cette variable dans le passé. Il peut s'agir de valeurs ponctuelles, on parlera alors de retard discret (qu'il y ait un ou plusieurs retards), ou d'un ensemble de valeurs prises dans un intervalle, borné ou non, on parlera alors de retard continu (noyau de distribution). La condition initiale d'une équation à retard est définie sur un intervalle, de longueur égale au retard (ou, dans certains cas, égale au retard maximum). L'utilisation du retard dans la description d'une dynamique nous permet d'obtenir un modèle encore plus proche de la réalité. En conséquence, les équations à retard interviennent dans de nombreux domaines d'applications des mathématiques, et en particulier en biologie (évolution des populations, épidémiologie) où de nombreux phénomènes sont non-locaux, en la variable de temps mais parfois également en la variable d'espace ou ce qui tient lieu de la variable "d'espace" (la maturité, l'âge, la taille, etc.).

Considérons à titre d'exemple l'équation différentielle à retard du type Lasota–Wazewska [26] qui décrit la vie des globules rouges chez un animal. Elle a été proposée par Wazewska-Czyzewska et Lasota et s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} U'(t) = -\sigma U(t) + Pe^{-aU(t-r)} & t > 0 \\ U(t) = \varphi(t) & t \in [-r, 0] \end{cases} \tag{1}$$

Où σ, P et a sont des constantes positives, t réel positif. U(t) représente le nombre de globules rouges à l'instant t, σ est le taux de mortalité des globules rouges, P et a sont reliés à la production des globules rouges par unité de temps et r est le temps nécessité pour la production d'une globule rouge, φ est une condition initiale définie sur $[-r, 0]$

la fonction U peut dépendre aussi d'une variable spatiale [16]. Dans ce cas, l'équation temporelle (1) peut prendre la forme d'une équation de réaction-diffusion et devient :

$$\left\{\begin{array}{lcll}\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) & = & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x)-\sigma U(t,x)+Pe^{-aU(t-r,x)} & t>0, x\in\Omega \\ U(t,x) & = & 0 & t\geqslant 0, x\in\partial\Omega \\ U(t,x) & = & \varphi(t,x) & -r\leqslant t\leqslant 0, x\in\Omega\end{array}\right. \quad (2)$$

Où $\Omega\subset\mathbb{R}$ un domaine borné et $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\Omega$. U(t,x) représente ici le nombre de globules rouges se trouvant au point x à l'instant t. φ est une condition initiale

La théorie des équations à retard a été étudiée, en premier lieu, par V.Volterra, au début du XX ème siècle[23]. Toutefois, le comportement asymptotique des solutions trouvées n'était pas bien compris à ce moment là, à cause de l'utilisation d'approche du point fixe.
J. Hale a montré, en 1970, que ces solutions (obtenues par la méthode du point fixe) donnent naissance à un semi groupe sur un certain espace de fonctions [12] . Il a obtenu, par la suite, avec S.Verduyn Lunel une description asymptotique complète de la solution dans le cas de dimension finie en utilisant la théorie des semi-groupes[13]. Ensuite, G.Webb a inversé cette procédure, en construisant, tout d'abord, un semi-groupe et en l'utilisant, après cela, pour résoudre l'équation différentielle à retard[25].

Dans ce travail, on utilise la théorie des semi-groupes pour étudier les équations aux dérivées partielles à retard qui peuvent s'écrire sous la forme abstraite suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcll}\frac{d}{dt}u(t) & = & f(u_t) & t>0 \\ u(t) & = & \varphi(t) & -r\leqslant t\leqslant 0\end{array}\right. \quad (3)$$

Avec r un réel strictement positif qui représente le retard, f un opérateur d'un espace de fonctions F(-r,0;Y) dans un espace de Banach Y, et φ une application définie sur $[-r,0]$ à valeurs dans Y.
Dans les articles traitant les notions d'existence et d'unicité des problèmes du type (3), la fonction f est, en général, la somme d'un opérateur linéaire B défini sur Y et d'un opérateur L (l'opérateur de retard), défini sur F(-r,0;Y) et dans ce cas le problème (3) devient :

$$\left\{\begin{array}{lcll}\frac{d}{dt}u(t) & = & Bu(t)+Lu_t & t>0 \\ u(t) & = & \varphi(t) & -r\leqslant t\leqslant 0\end{array}\right.$$

ce qui permet d'imposer des hypothèses différentes sur les opérateur B et L. On se réfère aux travaux ([10],[22]), si par exemple L est borné de l'espace des fonctions continus et B est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe. Par contre, pour permettre aux opérateurs non bornés d'agir sur le terme du retard, il est nécessaire de considérer que Y est un espace de Banach densément et continument injecté dans un espace de Banach plus large qu'on note par X. Y est généralement muni d'une norme qui dépend de l'opérateur $B : D(B)\subset X\longrightarrow X$. Par exemple, si B est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu dans X alors on peut poser :

$$Y = (D(B), |.|_g)$$

avec $|.|_g$ est la norme du graphe de l'opérateur B définie par

$$|x|_g = |x|_X + |Bx|_X \quad pour\ tout\ x \in D(B)$$

En plus d'une introduction générale et d'une conclusion, ce mémoire est composé de trois chapitres :
On propose dans le premier chapitre des notions préliminaires et des rappels utiles pour que le lecteur puisse comprendre les résultats des chapitres suivants.
Le 2ème chapitre se base sur l'article de Kunisch et Schappacher [18] et reprend en détails ses principaux résultats. le but de ce chapitre est de trouver les conditions nécessaires que l'opérateur f doit vérifier pour que le problème (3) soit bien posé, à cette effet, on procède comme suit :

1. On suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée
   (H) L'opérateur f est linéaire et le problème (3) est bien posé.
2. On montre que les solutions de (3) définissent un semi groupe $(T(t))_{t \geqslant 0}$ fortement continu dans $F(-r, 0; Y)$.
3. On caractérise le générateur infinitésimal A du semi groupe $(T(t))_{t \geqslant 0}$, en considérant de faibles hypothèses seulement sur l'opérateur f et l'ensemble D des valeurs initiales, pour lesquelles une unique solution forte de (3) existe.
4. On exploite la théorie des semi-groupes, en particulier le théorème de Hille-Yosida, pour trouver les conséquences de l'hypothèse (H) sur l'opérateur f.

Dans le 3ème chapitre, on s'intéresse à deux équations de réaction-diffusion particulières, la première à retard discret et la 2ème à retard continue (distribué). On vérifie si les conditions nécessaires trouvées dans le chapitre précédant, pour que ces équations admettent des solutions fortes, sont satisfaites.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce premier chapitre, on rappelle des notions de base tout en reprenant des théorèmes et des résultats nécessaires pour le développement de notre projet. Pour plus de détails le lecteur est invité à consulter les ouvrages suivants : [1], [2], [4], [6], [7], [8], [9],[11], [19], [24].

1 Le principe de l'application contractante

Soit X un espace vectoriel normé, une application $f : X \longrightarrow X$ est dite contractante s'il existe $k \leqslant 1$ tel que :

$$\left|f(x) - f(y)\right|_X \leqslant k\left|x-y\right|_X \quad pour\ tout\ x, y \in X$$

Définition 1.1. *Soient X un espace de Banach, $M \subset X$ un sous ensemble non vide et $f : M \longrightarrow X$ une application. Une solution de Tx=x est dite point fixe de T.*

Théorème 1.1. *[11] Soient X un espace de Banach, et une application $f : X \longrightarrow X$ contractante, alors f admet un unique point fixe , c'est à dire, il existe une unique solution $x \in X$ de l'équation Tx=x*

2 Espaces fonctionnels

2.1 Espaces C^k

Définition 1.2. *Soient I un ouvert de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et X un espace de Banach .*
• *$C^0(I, X)$ est l'espace des fonctions $f : I \longrightarrow X$ continues.*
• *$C^k(I, X)$ est l'espace de fonctions $f : I \longrightarrow X$ ayant toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k continues, c'est à dire $f^{(n)} \in C^0(I, X)$ pour $0 \leqslant n \leqslant k$.*

2.2 Espaces de Bochner

Définition 1.3. *Soient $p \in \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et X un espace de Banach munit de la norme $|\,.\,|_X$*

(i) pour $1 \leqslant p < \infty$, on définit l'espace de Bochner :

$$\mathscr{L}^p(\Omega; X) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow X \; mesurable : \int_\Omega |f(s)|_X^p \, ds < \infty \right\}$$

et l'application $|\,.\,|_p$ définie sur $\mathscr{L}^p(\Omega; X)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$|f|_p := \left(\int_\Omega |f(s)|_X^p \, ds \right)^{1/p}$$

(ii) On définit l'espace de Bochner :

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega; X) := \{ f : \Omega \longrightarrow X \; mesurable, \exists C > 0 \; tel \; que \; |f(s)|_X \leqslant C \; p.p. \; sur \; \Omega. \}$$

et l'application $|\,.\,|_\infty$ définie sur $\mathscr{L}^\infty(\Omega; X)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$|f|_\infty := \inf\{ C > 0, |f(s)|_X \leqslant C \; pour \; presque \; tout \; s \in \Omega \}$$

Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\Omega; X)$ est l'ensemble des classes d'équivalence F des fonctions f de $\mathscr{L}^p(\Omega; X)$ pour la relation d'équivalence (=p.p). $|\,.\,|_p$ est alors une norme sur $L^p(\Omega; X)$ et $\left(L^p(\Omega; X), |\,.\,|_p\right)$ est un espace de Banach
La classe d'équivalence de f est notée $[f]$, pour tout $f \in \mathscr{L}^p(\Omega; X)$

Notation $1 \leqslant p \leqslant \infty$ on désigne par q l'exposent conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Théorème 1.2. *(**Inégalité de Hölder**)[4] : Soit $f \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$ et $g \in L^q(\Omega; \mathbb{R})$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ alors $f.g \in L^1(\Omega; \mathbb{R})$ et*

$$|f.g|_1 \leqslant |f|_p |g|_q$$

Théorème 1.3. *(**Théorème de Fubini**)[8] : Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts et soit $F : \Omega 1 \times \Omega_2 \longrightarrow X$ une fonction mesurable, avec X un espace de Banach. Si $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2; X)$. Alors pour presque tout $x \in \Omega_1$*

$$F(x, .) \in L^1(\Omega_2; X) \quad et \quad \int_{\Omega_2} F(., y) dy \in L^1(\Omega_1; X)$$

De même pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(., y) \in L^1(\Omega_1; X) \quad et \quad \int_{\Omega_1} F(x, .) dx \in L^1(\Omega_2; X)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} F(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} F(x, y) dx \right) dy$$

2.3 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles

Notations

Un vecteur $\alpha = (\alpha_k)_{k=1}^n \in \mathbb{N}^n$ est dit un multi-indice, on pose :

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k \qquad et \qquad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} \text{ où } x \in \mathbb{R}^n$$

Définitions et propriétés

Définition 1.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions définies sur Ω, à valeurs réelles, de classe C^∞ et dont le support est compact dans Ω.*

Définition 1.5. *(**Distribution**) Une distribution vectorielle sur Ω à valeurs dans un espace de Banach X, est une application $T : D(\Omega) \longrightarrow X$ linéaire et continue.*
On note $D'(\Omega, X)$ l'espace des distributions sur Ω à valeurs dans X

Exemple 1.1. *Une fonction définie sur Ω dans X est dite localement intégrable $(\in L^1_{loc}(\Omega, X))$ si elle est intégrable sur tout compact K dans Ω $(\in L^1(K, X))$. Soit donc une fonction f localement intégrable sur Ω alors l'application T_f définie de $D(\Omega)$ dans X par*

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x).\varphi(x)dx \quad pour\ \varphi \in D(\Omega)$$

est une distribution sur Ω appelée distribution régulière.
Il est clair que : $\forall p \in [1, \infty]$, $L^p(\Omega, X) \subset L^1_{loc}(\Omega, X)$.

Définition 1.6. *(**Dérivée d'une distribution**) Soient $T \in D'(\Omega, X)$ et α un multi-indice, on définit $D^\alpha T \in D'(\Omega, X)$ par :*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad pour\ tout\ \varphi \in D(\Omega)$$

Définition 1.7. *(**Espace de Sobolev**) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, X un espace de Banach et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ on définit l'espace de Sobolev par :*

$$W^{m,p}(\Omega; X) := \{f \in L^p(\Omega; X) : D^\alpha f \in L^p(\Omega, X),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant m\}$$

que l'on munit de la norme

$$|f|_{W^{m,p}} := \sum_{|\alpha|=0}^m |D^\alpha f|_p$$

$(W^{m,p}(\Omega, X), |.|_{W^{m,p}})$ est un espace de Banach.

Si X= H est un espace de Hilbert on écrit :

$$H^m(\Omega; H) := W^{m,2}(\Omega; H)$$

$H^m(\Omega; H)$ est un espace de Hilbert, munit du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g\rangle_{L^2}$$

avec la norme associée $|.|_{H^m}$ équivalente à la norme $|.|_{W^{m,2}}$

Si $X = \mathbb{R}$ on définit l'espace :

$$W_0^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}) = \left\{ f \in W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}) : f = 0 \; sur \; \partial\Omega \right\}$$

et on pose :

$$H_0^m(\Omega; \mathbb{R}) := W_0^{m,2}(\Omega; \mathbb{R})$$

Muni de la norme induite de $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R})$, $W_0^{m,p}(\Omega, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.
Muni du produit scalaire induit de $H^m(\Omega, \mathbb{R})$, $H_0^m(\Omega; \mathbb{R})$ est un espace de Hilbert.

Problème de Dirichlet homogène

Soit à résoudre le problème :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & sur \quad I =]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où f est une fonction donnée sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.8. *Une solution faible de* (1.1) *est une fonction $H_0^1(I; \mathbb{R})$ vérifiant :*

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I; \mathbb{R})$$

Proposition 1.1. *[4] Pour tout $f \in L^2(I; \mathbb{R})$, il existe $u \in H_0^1(I; R)$ unique solution faible de* (1.1). *De plus, $u \in H^2(I, \mathbb{R})$*

3 Opérateurs linéaires

On va effectuer quelques rappels sur les opérateurs linéaires bornés, non bornés et fermés afin que les notations utilisées au cours de ce mémoire soient claires, Les démonstrations ne sont pas données, on renvoie par exemple à [4].

3.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.9. *Soient X,Y deux espaces vectoriels normés, on désigne par $\mathscr{L}(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y munit de la norme*

$$\|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup\{|Tx|_Y : x \in X \; et \; |x|_X \leqslant 1\}$$

$\mathscr{L}(X,Y)$ est dit espace des opérateurs bornés.
On pose $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X,X)$.
***Notation :** On désigne par X' le dual topologique de X i.e. l'espace des formes linéaires continues sur X; X' est munit de la norme duale*

$$\|f\|_{X'} = \sup_{|x|_X \leqslant 1} |f(x)|$$

lorsque $f \in X'$ et $x \in X$ on note généralement $\langle f, x\rangle$ au lieu de f(x), on dit que $\langle , \rangle$ est le crochet de dualité.

Théorème 1.4. *(**Banach-Steinhaus**)[4] : Soient X et Y deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires bornés de X dans Y, on suppose que :*

$$\forall x \in X \qquad \sup_{i\in I} |T_i x|_Y < \infty$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \infty$$

Autrement dit il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que :

$$|T_i x|_Y < c|x|_X \quad \forall x \in X \quad \forall i \in I$$

3.2 Opérateurs linéaires non-bornés

Définition 1.10. *(**Opérateur non-borné**) Soient X et Y deux espaces de Banach, on appelle opérateur linéaire non-borné de X dans Y toute application linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ définie sur un espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeurs dans Y, D(A) est le domaine de A.*
On dit que A est borné s'il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que

$$|Ax|_Y \leqslant c|x|_X \quad \forall x \in D(A)$$

3.3 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.11. *(**Opérateur fermé**) Soient X et Y deux espaces de Banach, On dit qu'un opérateur A est fermé si le graphe de A noté $G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$ est fermé dans $X \times Y$*

Théorème 1.5. *(**Théorème du graphe fermé**)[4] : Soient X et Y deux espaces de Banach, soit T un opérateur linéaire de X dans Y. Si le graphe de T noté $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$, alors T est continue.*

Définition 1.12. *(**Spectre et ensemble résolvant**) Soit X un espace de Banach et soit l'opérateur linéaire, fermé $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$*

On appelle :

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \longrightarrow X \, est \, bijective\right\}$$

l'ensemble résolvant de A et son complémentaire $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ le spectre de A.
Pour $\lambda \in \rho(A)$ l'inverse

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

est un opérateur borné dans X selon le théorème du graphe fermé et on l'appelle la résolvante (de A au point λ).

3.4 Opérateurs linéaires fermables

Définition 1.13. *(**Extension**) Soient S et T deux opérateurs de X dans Y, deux espaces de Banach, avec D(S) et D(T) sont les domaines de S et T respectivement, on dit que S est une extension de T si $D(T) \subset D(S)$ et $Tx = Sx \; \forall x \in D(T)$, on dit aussi que T est la restriction de S*

Définition 1.14. *(**Opérateur fermable**) Soit un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$, avec X et Y deux espaces de Banach. A est dit fermable s'il admet une extension fermée. L'adhérence de son graphe est le graphe d'un opérateur noté $\overline{A}$ qu'on appelle la fermeture de A*

Définition 1.15. *(**Cœur d'un opérateur**) Soient X et Y deux espaces de Banach et soit A un opérateur de X dans Y fermable, un sous espace $V \subset D(A)$ est appelé cœur de A si $\{(x, Ax); x \in V\}$ est dense dans le graphe de $\overline{A}$*

4 Quelques notions de la théorie des semi-groupes

On va rappeler quelques notions et théorèmes de la théorie de semi-groupes, nécessaires pour le développement de notre thème. Pour plus de détails, on renvoie aux ouvrages suivants : [6],[9] [19], [24].

4.1 Semi groupe fortement continu

Définition 1.16. *(**Semi-groupe**) Soit X un espace de Banach, une famille $T(t), 0 \leqslant t < \infty$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est dite un semi-groupe sur X si :*

(i) T(0)=I (I est l'identité dans X)

(ii) T(s+t)=T(s)T(t) pour tout $t, s \geqslant 0$

Définition 1.17. *(C_0 **semi-groupe**) Un semi-groupe T(t), $0 \leqslant t < \infty$ d'opérateurs linéaires bornés est un semi-groupe fortement continu si :*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} T(t)x = x \quad pour\ tout\ x \in X$$

Un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés fortement continu est dit un C_0 semi-groupe

Théorème 1.6. *[9]*

Soit T(t) un C_0 semi-groupe, alors ils existent un réel w et un réel $M \geqslant 1$ tels que :

$$\| T(t) \| \leqslant M e^{wt} \quad pour\ tout\ t \geqslant 0$$

En particulier, si M=1 et w=0 alors $(T(t))_t$ est appelé C_0 semi-groupe de contractions

4.2 Générateur infinitésimal

Définition 1.18. *Soit $(T(t))_t$ un semi-groupe sur X, l'opérateur linéaire A défini par :*

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ x \in X : \lim_{t \longrightarrow 0^+} (T(t)x - x)/t\ existe \right\} \\ Ax &= \lim_{t \longrightarrow 0^+} (T(t)x - x)/t \end{aligned}$$

est le générateur infinitésimal du semi-groupe T(t), D(A) est le domaine de A

Théorème 1.7. *[19] Soit T(t) un C_0 semi groupe et soit A son générateur infinitésimal alors on a les propriétés suivantes :*

(i) pour tout $x \in X$,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x$$

(ii) pour tout $x \in X$ et $t \geqslant 0$ $\int_0^t T(s)x\, ds \in D(A)$ et

$$A\left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x$$

(iii) si $x \in D(A)$ alors $T(t)x \in D(A)$ pour tout $t \geqslant 0$, et

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

(iv) pour $x \in D(A)$ et $t > s \geqslant 0$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x\, d\tau$$

Théorème 1.8. *(**Théorème de Hille-Yosida**)[19] Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe T(t) sur X tel que $\|T(t)\| \leqslant Me^{wt}$ avec $M \geqslant 1$ et $w \in \mathbb{R}$ si et seulement si :*

(i) A est fermé et $\overline{D(A)} \subset X$

(ii) l'ensemble résolvent de A contient $]w,\infty[$ et
$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant M/(\lambda - w)^n$ *pour* $\lambda > w$ *n=1,2,...*

On note que si un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe T(t) sur X tel que $\|T(t)\| \leqslant Me^{wt}$, $M \geqslant 1$ et $w \in \mathbb{R}$, alors

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} T(s)x\,ds \quad pour\ tout\ \lambda > w\ et\ x \in X,$$

où $\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} T(s)x\,ds$ est une intégrale de Bochner et c'est la transformée de Laplace du semi-groupe $(T(t))_t$

Théorème 1.9. *(**Théorème de la perturbation bornée**)[9] Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur non borné $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue $(T(t))_{t\geqslant 0}$ tel que :*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{wt} \quad pour\ tout\ t \geqslant 0$$

et pour $w \in \mathbb{R}$, $M \geqslant 1$
Si $B \in \mathscr{L}(X)$ alors C :=A+B avec D(C) :=D(A) génère un semi-groupe fortement continue $(S(t))_{t\geqslant 0}$ tel que :

$$\|S(t)\| \leqslant Me^{(w+M\|B\|)t} \quad pour\ tout\ t \geqslant 0$$

On dit que B est une perturbation bornée de A

Théorème 1.10. *[24] Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur non borné $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue $(S(t))_{t\geqslant 0}$ tel que :*

$$\|S(t)\| \leqslant Me^{wt} \quad pour\ tout\ t \geqslant 0$$

pour $w \in \mathbb{R}$, $M \geqslant 1$
Soit $\tilde{A}$ la restriction de A à $D(A^2)$ et soit $\tilde{X}$ l'espace de Banach $(D(A), |.|_{D(A)})$ avec

$$|x|_{D(A)} = |x|_X + |Ax|_X \quad pour\ tout\ x \in \tilde{X}.$$

Alors $\tilde{A} : D(A^2) \subset \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe $(\tilde{S}(t))_{t\geqslant 0}$ sur $\tilde{X}$ avec $\left\|\tilde{S}(t)\right\| \leqslant Me^{wt}$, pour tout $t \geqslant 0$

Théorème 1.11. *[6] Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur non borné $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue $(T(t))_{t\geqslant 0}$. Soit D un sous espace de D(A), si D est dense dans X et T(t)D $\subset$ D pour tout $t \geqslant 0$, alors D est un cœur pour l'opérateur A*

4.3 Opérateurs dissipatifs

Soit (X , | . |) un espace de Banach et soit X' son dual topologique, on note la valeur de $x^* \in X'$ au point $x \in X$ par $\langle x^*, x\rangle$ ou $\langle x, x^*\rangle$. Pour tout $x \in X$ on définit l'ensemble de dualité $F(x) \subseteq X'$ par :

$$F(x) = \left\{x^* \in X', \langle x^*, x\rangle = |x|_X^2 = \|x^*\|_{X'}^2\right\}$$

Pour tout $x \in X$, $F(x) \neq \emptyset$

Définition 1.19. *(**Opérateur dissipatif**) Un opérateur linéaire A est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$ il existe $x^* \in F(x)$ tel que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leqslant 0$.*
Si H est un espace de Hilbert alors un opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$

$$Re\,(\langle Ax, x\rangle_H) \leqslant 0$$

avec $\langle\, ,\, \rangle_H$ est le produit scalaire dans H

Théorème 1.12. *(**Lumer Phillips**)[19] Soit A un opérateur linéaire tel que $\overline{D(A)}$=X*

(i) Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - A) = X$ alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe de contractions sur X

(ii) Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe de contractions sur X alors A est dissipatif et $Im(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. De plus, pour tout $x \in D(A)$ et pour tout $x^* \in F(x)$, $Re\langle Ax, x^*\rangle) \leqslant 0$

Théorème 1.13. *[19] Soit A un opérateur linéaire dissipatif tel que $Im(I - A) = X$, si X est réflexif alors $\overline{D(A)}$=X*

5 Équations différentielles à retard et semi-groupes

5.1 Problème abstrait de Cauchy

Définition 1.20. *Soient X un espace de Banach et $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire et $x \in X$*

(i) le problème avec condition initiale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t) \quad t \geqslant 0 \\ u(0) &= x \end{cases} \tag{1.2}$$

est dit problème abstrait de Cauchy associé à l'opérateur A.

(ii) une fonction $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ est une solution classique de(1.2) si u est continument différentiable, $u(t) \in D(A)$ pour tout $t > 0$, et u vérifie (1.2).

Proposition 1.2. *[2] Soit $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu $(T(t))_{t\geqslant 0}$. Alors, pour tout $x \in D(A)$ la fonction :*

$$u : t \mapsto u(t) := T(t)x$$

est l'unique solution classique de (1.2).

Définition 1.21. *(**solution intégrale**) une fonction continue $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ est dite solution intégrale de* (1.2) *si $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ pour tout $t \geqslant 0$ et*

$$u(t) = x + A\int_0^t u(s)ds \quad pour\ tout\ t \geqslant 0$$

Proposition 1.3. *[2] Soit $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu $(T(t))_{t\geqslant 0}$. Alors, pour tout $x \in X$ la fonction :*

$$u : t \mapsto u(t) := T(t)x$$

est l'unique solution intégrale de (1.2).

Définition 1.22. *Soit X un espace de Banach, le problème abstrait de Cauchy* (1.2) *est dit bien-posé si D(A) est dense dans X, pour tout $x \in D(A)$ il existe une unique solution classique u_x de* (1.2), *et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D(A) telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_{x_n} = 0$ uniformément sur tout intervalle compact [0,T]*

Théorème 1.14. *[2] Soit $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire fermé, le problème abstrait associé à A est bien posé si et seulement si A génère un C_0 semi groupe dans X*

5.2 Équations différentielles à retard

Soient X un espace de Banach et $r > 0$, on considère la fonction $u : [-r, \infty) \longrightarrow X$. Pour tout $t \geqslant 0$ on appelle la fonction u_t définie sur $[-r, 0]$ à valeurs dans X par :

$$u_t : s \mapsto u(t+s)$$

le segment d'histoire de u en t.

La fonction histoire de u est la fonction h_u définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans un espace de fonctions (l'espace histoire) par :

$$h_u : t \mapsto u_t$$

Définition 1.23. *On appelle équation différentielle à retard une équation de la forme :*

$$u'(t) = \frac{d}{dt}u(t) = g(u(t), u_t) \tag{1.3}$$

avec g une application à valeurs dans X

On voit bien que dans une équation différentielle à retard la valeur de la dérivée à un instant t de la solution u dépend non seulement de la valeur de u à l'instant t mais aussi de ses valeurs prises avant cet instant (dans le passé) d'où le mot retard .

5.3 Approche de semi-groupes

On traite brièvement, à titre d'exemple introductif, le cas spécial ou g dans (1.3) est la somme de deux opérateurs linéaires B et L tels que :
• $B : D(B) \subseteq X \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire, fermé et à domaine dense .
• $L : W^{1,p}(-r,0;X) \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire borné, qu'on appelle l'opérateur retard
• $Z := X \times L^p(-r,0;X)$
• $P_1 : Z \longrightarrow X$ est la projection canonique de Z sur X
• $P_2 : Z \longrightarrow L^p(-r,0;X)$ est la projection canonique de Z sur $L^p(-r,0;X)$
Alors, pour $(\eta,\varphi) \in Z$, on considère le problème à valeur initiale dans X suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}u(t) & = & Bu(t) + Lu_t \quad t \geqslant 0 \\ u(0) & = & \eta \\ u_0 & = & \varphi \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Définition 1.24. *une fonction $u : [-r,\infty) \longrightarrow X$ est dite solution classique de* (1.4) *si*

(i) $u \in C^0([-r,\infty),X) \cap C^1([0,\infty),X)$

(ii) $u(t) \in D(B)$ *et* $u_t \in W^{1,p}(-r,0;X)$ *pour tout* $t \geqslant 0$

(iii) *u vérifie* (1.4)

Lemme 1.1. *[1] Soit $u : [-r,\infty) \longrightarrow X$ une fonction telle que $u_{|K} \in W^{1,p}(K,X)$ pour tout K compact inclus dans $[-r,\infty)$. Alors la fonction histoire $h_u : t \mapsto u_t$ de u est continument différentiable de $\mathbb{R}_+$ dans $L^p(-r,0;X)$, et pour tout $t \geqslant 0$, on a :*

$$\frac{d}{dt}h_u(t) = \frac{d}{ds}u_t$$

Proposition 1.4. *[1] Soit $u : [-r,\infty) \longrightarrow X$ une solution classique de* (1.4) *alors la fonction :*

$$\begin{array}{rcl} U : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & Z \\ t & \mapsto & (u(t), u_t) \end{array}$$

est solution classique du problème abstrait de Cauchy dans Z :

$$\left\{\begin{array}{rcl} U'(t) & = & AU(t) \quad t > 0 \\ U(0) & = & (\eta,\varphi) \end{array}\right. \tag{1.5}$$

Avec

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{(\eta,\varphi) \in D(B) \times W^{1,p}(-r,0;X) \longrightarrow X : \eta = \varphi(0)\right\} \\ A &= \begin{pmatrix} B & L \\ 0 & \dfrac{d}{ds} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\dfrac{d}{ds}$ *est la dérivée distributionnelle .*

Inversement, si $(\eta,\varphi) \in D(A)$ *alors pour toute solution classique* $U : \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ *de* (1.5) *avec la valeur initiale* (η,φ)

$$u(t) := \begin{cases} P_1(U(t)) & si \quad t \geqslant 0 \\ \varphi(t) & si \quad t \in [-r,0) \end{cases} \tag{1.6}$$

est une solution classique de (1.4) *et* $P_2(U(t)) = u_t$ *pour tout* $t \geqslant 0$.

Lemme 1.2. *[1] L'opérateur* $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$ *est fermé et de domaine dense dans Z*

Corollaire 1.1. *[1] Le problème abstrait de Cauchy* (1.5) *dans Z, associé à l'opérateur est bien posé si et seulement si A génère un* C_0 *semi groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *dans Z.*

Définition 1.25. 1. *le problème* (1.4) *est bien posé si le problème* (1.5) *est bien posé, i.e. si A génère un semi groupe fortement continu dans Z*

2. *On suppose que* (1.4) *est bien posé, et soit* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *le semi groupe généré par A dans Z. Alors pour tout* (η,φ) *dans Z la fonction u définie par* (1.6) *est dite solution intégrale de* (1.4)

Proposition 1.5. *[1] Soit u une solution intégrale de* (1.4). *Alors*

$$u_t = P_2\left(T(t)(\eta,\varphi)\right)$$

De plus, $\int_0^t u(s)ds \in D(B)$, $\int_0^t u_s ds \in W^{1,p}(-r,0;Y)$ *et*

$$u(t) = \begin{cases} x + B\int_0^t u(s)ds + L\int_0^t u_s ds & si \quad t \geqslant 0 \\ \varphi(t) & si \quad t \in [-r,0) \end{cases}$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur les opérateurs B et L pour que le problème (1.4) soit bien posé.

Théorème 1.15. *[1] Soit* $B : D(B) \subseteq X \longrightarrow X$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu* $(S(t))_{t\geqslant 0}$ *dans X, soit* $1 \leqslant p < \infty$ *et soit* $L : W^{1,p}(-r,0;X) \longrightarrow X$ *un opérateur de retard, S'il existe des constantes* $t_0 > 0$ *et* $0 < q < 1$ *telles que*

$$\int_0^{t_0} \left|L\left(S_r x + T_0(r) f\right)\right|_X dr \leqslant q \left|(\eta,\varphi)\right|_Z$$

pour tout $(\eta,\varphi) \in D(A)$*, avec* (T_0) *le semi groupe de translation défini dans* $L^p(-r,0;X)$ *par :*

$$(T_0(t)f)(s) := \begin{cases} f(s+t) & si \quad t+s \leqslant 0 \\ 0 & si \quad t+s > 0 \end{cases}$$

et $S_t : X \longrightarrow L^p(-r,0;X)$ *défini par*

$$(S_t x)(s) := \begin{cases} S(s+t)x & si \quad -t < s \leqslant 0 \\ 0 & si \quad -r \leqslant s \leqslant -t \end{cases}$$

Alors l'opérateur A génère un semi groupe fortement continu dans Z et donc (1.4) *est bien posé.*

Chapitre 2

EDP à retard et C_0 semi-groupes

Ce chapitre est basé sur l'étude faite dans [18], il a pour objet de présenter les conditions nécessaires sur la fonction f du problème (3), et sur la relation entre f, X et Y, qui sont impliquées en supposant que (3) est bien posé.

1 Premières définitions

Cette section est, en quelque sorte, un préliminaire de ce chapitre. Nous y trouverons quelques notations et des définitions indispensables pour la suite. On en profitera aussi pour présenter le problème qu'on étudiera le long de ce travail.

Soit Y un espace de Banach munit de la norme $|\,.\,|_Y$.
L'espace d'état utilisé dans ce travail est :

$$Z = Y \times L^p(-r,0;Y) \quad avec \quad 0<r<\infty \quad et \quad 1\le p<\infty$$

muni de la norme

$$\left|(\eta,\varphi)\right|_Z = \left(|\eta|_Y^p + |\varphi|_p^p\right)^{1/p}$$

Par $P_1 : Z \longrightarrow$Y on note la projection canonique de tout x appartenant à Z dans Y
Par $P_2 : Z \longrightarrow L^p(-r,0;Y)$ on note la projection canonique de tout x appartenant à Z dans $L^p(-r,0;Y)$
Par $\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ on note l'ensemble $\left\{(\eta,\varphi) : \varphi \in W^{1,p}(-r,0;Y), \eta = \varphi(0)\right\}$ muni de la norme $\left(|\varphi(0)|_Y^p + |\dot{\varphi}|_p^p\right)^{1/p}$.
Finalement, pour une fonction z : $[-r,\alpha[\longrightarrow$Y, $\alpha>0$, on définit l'application :
$z_t : [-r,0] \longrightarrow Y$ par $z_t(s) = z(s+t)$ pour $s\in[-r,0]$ et $t\in[0,\alpha[$
soit $f : D(f) \longrightarrow$ Y une application linéaire telle que $D(f) \subset Y \times \mathscr{L}^p(-r,0;Y)$

pour $(\eta,\varphi) \in Y \times \mathscr{L}^p(-r,0;Y)$, on considère le problème (l'équation de retard) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}u(t) & = & f(u(t),u_t) \quad t>0 \\ u(0) & = & \eta \\ u_0 & = & \varphi \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Remarque 2.1. *notons que si*

$$f(\eta,\varphi) = A_0\eta + \sum_{i=1}^{l} A_i\varphi(-r_i)$$

avec A_i un opérateur linéaire (non nécessairement borné) pour tout i et $0 < r_1 < ... < r_l < r$, le 2eme membre de (2.1) n'est pas bien défini sur Z, en effet, les éléments φ d'une même classe d'équivalence pourraient avoir de différentes valeurs en les points $(-r_i)$ puisqu'elles ne sont égales que "presque" partout, donc il est nécessaire que f soit définie sur $Y\times\mathscr{L}^p(-r,0;Y)$

Définition 2.1. *Conformément à la définition 1.24 d'une solution classique, une fonction $u :[-r,\infty[\longrightarrow Y$ est dite une solution forte de (2.1) si elle vérifie les propriétés suivantes :*

- *(i)* $u \in W^{1,p}(0,T;Y)$ *pour tout* $T > 0$
- *(ii)* $u(0) = \eta$ *et* $u_0 = \varphi$
- *(iii)* $(u(t), u_t) \in D(f)$ *pour presque tout* $t \geq 0$*, u est différentiable et vérifie* (2.1) *presque partout*
- *(iv) si $\tilde{\varphi}$ est un élément équivalent à $\varphi \in \mathscr{L}^p(-r,0;Y)$, alors la fonction $\tilde{u} : [-r,\infty[\longrightarrow Y$ qui coïncide avec $\tilde{\varphi}$ sur $[-r,0[$ et avec u sur $[0,\infty)$ vérifie (iii), c'est à dire que la solution u ne doit dépendre que de $[\varphi]$, dans ce cas on pourra prendre les conditions initiales dans Z au lieu de $Y\times\mathscr{L}^p(-r,0;Y)$ et on notera la solution de (2.1) par $u(.;\eta,\varphi)$*

Pour ce qui suit on notera D ⊂ Z l'ensemble des valeurs initiales(η,φ) pour lesquelles une unique solution forte $u(.;\eta,\varphi)$ de (2.1) existe et on supposera que (2.1) est bien posé au sens de la supposition suivante :

(H_1) l'ensemble D est un sous espace vectoriel dense dans Z, de plus , la solution dépend continument des valeurs initiales, ie : si (η_n,φ_n) est une suite dans D qui converge vers $(\eta,\varphi) \in D$, alors $u(t,\eta_n,\varphi_n)$ converge vers $u(t,\eta,\varphi)$ uniformément par rapport à t sur tout intervalle compact.

Si (H_1) est vérifiée on associe à (2.1) la famille d'opérateur $\{\tilde{T}(t); t\geq 0\}$ définis sur D dans Z par :

$$\tilde{T}(t)(\eta,\varphi) = (u(t;\eta,\varphi), u_t(.;\eta,\varphi)) \tag{2.2}$$

Lemme 2.1. *Si (H_1) est vérifiée, alors*

- *a)* $\tilde{T}(0) = I_d$ *sur D*
- *b)* $\tilde{T}(D) \subset D$ *pour tout* $t \geq 0$
- *c)* $\tilde{T}(s+t) = \tilde{T}(t)\tilde{T}(s)$ *sur D pour tout s,t≥0*
- *d)* $\tilde{T}(t)$ *est une application linéaire sur D pour tout* $t \geq 0$
- *e) l'application* $t \longrightarrow \tilde{T}(t)(\eta,\varphi)$ *est continue pour tout* $(\eta,\varphi) \in D$
- *f)* $\tilde{T}(t)$ *est borné sur D uniformément par rapport à t variant sur des intervalles bornés*

Preuve. a) soit $(\eta,\varphi) \in D$, $\tilde{T}(0)(\eta,\varphi) = (u(0;\eta,\varphi), u_0(.;\eta,\varphi)) = (\eta,\varphi)$

b) soient $(\eta,\varphi)\in D$ et $t>0$

$$\tilde{T}(t)(\eta,\varphi)=(u(t;\eta,\varphi),u_t(.;\eta,\varphi)):=(\eta_t,\varphi_t)$$

avec u :$[-r,\infty[\longrightarrow\infty$ la solution forte de (2.1)
alors on voit bien que la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} U: & [-r,\infty[& \longrightarrow & Y \\ & s & \longrightarrow & U(s)=u(s+t) \end{array}$$

est une solution forte du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}u(t) & = & f(u(t),u_t) \quad t>0 \\ u(0) & = & \eta_t \\ u_0 & = & \varphi_t \end{array}\right.$$

donc $\tilde{T}(t)(\eta,\varphi)\in D$

c) évident d'après b) et (2.2)

d) évident d'après de l'unicité de la solution forte, de la linéraité de f et de (2.2)

e) soit $(\eta,\varphi)\in D$ l'application t $\longrightarrow\tilde{T}(t)(\eta,\varphi)$ est continue car les applications :
t $\longrightarrow u(t)$ et t $\longrightarrow u_t$ le sont

f) supposons par l'absurde que f est fausse donc :
Il existe $T>0$ tel que pour tout $c>0$, ils existent x dans D de norme $|x|_Z=1$ et t dans $[0,T]$ tels que $\left|\tilde{T}(t)x\right|_Z>c$.
Pour c=n $\in\mathbb{N}$ ils existent une suite $(t_n)_n\subset[0,T]$ et une suite $(x_n)_n\subset D$ telles que $|x_n|_Z=1$ et $\left|\tilde{T}(t_n)x_n\right|_Z>n$ pour tout n. On considère maintenant la suite $(y_n)_n$ définie par $y_n=\dfrac{x_n}{n}$, on remarque que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left|y_n\right|_Z=0$ et que $\left|\tilde{T}(t_n)y_n\right|_Z>1$ ce qui contredit l'hypothèse (H_1)

□

Ce lemme montre que $\tilde{T}(t)$ est un opérateur linéaire borné sur D qui est dense dans Z, et donc il possède un unique prolongement linéaire et borné sur Z qu'on notera T(t) défini par T(t)x = $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\tilde{T}(t)(x_n)$ pour x $\in Z$ avec $(x_n)_n\subset D$ et x= $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}x_n$

Remarque 2.2. *pour $(\eta,\varphi)\in Z/D$ la fonction u définie par u(t)=$\varphi(t)$ presque partout sur $[-r,0[$ et $u(t)=P_1T(t)(\eta,\varphi)$ sur $[0,\infty[$ est une solution généralisée de* (2.1)*, et on va considérer T(t) comme le semi-groupe solution de* (2.1)

Lemme 2.2. *Si (H_1) est vérifiée, alors la famille d'opérateurs $\{T(t);t\geqslant0\}$ est un C_0 - semi groupe sur Z*

Preuve. a) et c) du lemme 2.1 et la densité de D dans Z prouvent que T(0)=I sur Z et que T(s+t)= T(s)T(t) sur Z pour $t, s \geqslant 0$, et sachant que $\forall t \geqslant 0$ $T(t) \in \mathscr{L}(Z)$, il ne nous reste à montrer que

$$\lim_{t \longrightarrow 0} |T(t)x - x|_Z = 0 \quad \forall x \in Z.$$

Soient $\epsilon > 0$, x ∈ Z et $T > 0$

On note, d'après le lemme 2.1 f), que la famille $(T(t))_t$ est uniformément bornée sur Z par rapport à t dans des intervalles bornés, alors

$$M := \sup_{t \in (0,T)} \|T(t)\|_{\mathscr{L}(Z)} < \infty$$

L'ensemble D est dense dans Z donc il existe y∈ D tel que $\left|x - y\right|_Z \leqslant \dfrac{\epsilon}{2(M+1)}$, et pour y ∈ D il existe, d'après (e), $t_0 \in (0, T)$ tel que $\left|T(t)y - y\right|_Z \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}$ pour $t \leqslant t_0$

Soit $t \leqslant t_0$

$$\begin{aligned}
|T(t)x - x|_Z &\leqslant \left|T(t)x - T(t)y\right|_Z + \left|T(t)y - y\right|_Z + \left|x - y\right|_Z \\
&\leqslant \|T(t)\|_{\mathscr{L}(Z)} \left|x - y\right|_Z + \left|T(t)y - y\right|_Z + \left|x - y\right|_Z \\
&\leqslant (M+1)\left|x - y\right|_Z + \left|T(t)y - y\right|_Z \\
&\leqslant \epsilon
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat □

2 Générateur infinitésimal

Dans cette section, on caractérise le générateur infinitésimal du semi-groupe solution T(t) introduit dans la section précédente, en supposant que l'hypothèse (H_1) soit vérifiée.

Commençons par introduire quelques outils nécessaires pour la suite

• Notons par A le générateur infinitésimal de T(t) défini par :

$$\begin{aligned}
D(A) &= \left\{ z \in Z : \lim_{t \longrightarrow 0^+} (T(t)z - z)/t \; existe \right\} \\
Az &= \lim_{t \longrightarrow 0^+} (T(t)z - z)/t
\end{aligned}$$

• Pour $(\eta,\varphi) \in$ Z et t≥0, on pose

$$S(t)(\eta, \varphi) = (\eta, \Psi_t)$$

avec

$$\Psi(s) = \begin{cases} \varphi(s) & s \in [-r, 0[\\ \eta & s \in [0, \infty[\end{cases}$$

S(t) est le C_0 semi-groupe sur Z qui correspond au problème trivial suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) &= 0 \quad t>0 \\ u(0) &= \eta \\ u_0 &= \varphi \end{cases}$$

On a pour tout t∈[0,∞[

$$\|S(t)\| \leqslant min\left(e^{t/p},(1+r)^{1/p}\right),$$

en effet : soit $(\eta,\varphi) \in$ Z alors :

$$\begin{aligned} \left|S(t)(\eta,\varphi)\right|_Z &= \left|(\eta,\Psi_t)\right|_Z = \left(\left|\eta\right|_Y^p + |\Psi_t|_p^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\left|\eta\right|_Y^p + \int_{-r}^{0} |\Psi_t(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\left|\eta\right|_Y^p + \int_{-r}^{0} |\Psi(t+x)|^p\,dx\right)^{1/p} \end{aligned}$$

(i) 1er cas : $t \geq r$

$$\begin{aligned} \left|S(t)\left(\eta,\varphi\right)\right|_Z &= (1+r)^{1/p}\left|\eta\right|_Y \leq (1+r)^{1/p}\left(\left|\eta\right|_Y^p + \left|\varphi\right|_p^p\right)^{1/p} \\ &\leq (1+r)^{1/p}\left|(\eta,\varphi)\right|_Z \end{aligned}$$

(ii) 2ème cas : $t \leq r$

$$\begin{aligned} \left|S(t)(\eta,\varphi)\right|_Z &= \left(\left|\eta\right|_Y^p + \int_{-r}^{-t} \left|\varphi(t+x)\right|^p dx + \int_{-t}^{0} \left|\eta\right|_Y^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left((1+t)\left|\eta\right|_Y^p + \left|\varphi\right|_p^p\right)^{1/p} \leq (1+t)^{1/p}\left|(\eta,\varphi)\right|_Z \end{aligned}$$

de (i) et (ii) on a pour tout $t \in [0,\infty[$

$$\|S(t)\| \leqslant (1+r)^{1/p} \quad et \quad \|S(t)\| \leqslant (1+t)^{1/p} \leqslant e^{t/p}$$

Ce qui entraine que $\|S(t)\| \leqslant min\left(e^{t/p},(1+r)^{1/p}\right)$ pour tout $t \in [0,\infty[$

• Notons par A_0 le générateur infinitésimal de S(t) défini par :

$$\begin{aligned} D(A_0) &= \left\{(\eta,\varphi) : \varphi \in W^{1,p}(-r,0;Y), \varphi(0)=\eta\right\} \\ A_0(\varphi(0),\varphi) &= (0,\dot{\varphi}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

• On considère aussi la fonction F définie sur D(f) dans Z par : F(η,φ)=(f(η,φ),0).

D'après le principe de la variation de la constante [14], pour tout $(\eta,\varphi) \in$ Z on a :

$$T(t)(\eta,\varphi) = S(t)(\eta,\varphi)) + \int_0^t S(t-s)FT(s)(\eta,\varphi)ds \tag{2.4}$$

Remarque 2.3. *nous nous permettons d'utilser la remarque 2.1 de [14] même si D(f) est inclus dans $Y \times \mathscr{L}^p(-r,0;Y)$ et non pas dans Z, et cela n'affectera pas les résultats ultérieurs*

Proposition 2.1. *Si (φ(0),φ)* $\in D \cap \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$*, si* (H_1) *est vérifiée et si*

$$\frac{du(0^+)}{dt} = f(\varphi(0),\varphi)$$

avec u solution forte de (2.1)

Alors (φ(0),φ) $\in$ *D(A) et*

$$A(\varphi(0),\varphi) = (f(\varphi(0),\varphi),\dot{\varphi}) = F(\varphi(0),\varphi) + A_0(\varphi(0),\varphi)$$

Preuve. Soit (φ(0),φ) satisfaisant les conditions de la proposition 2.1, on doit vérifier que

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\left|\frac{1}{h}\big(T(h)(\varphi(0),\varphi) - (\varphi(0),\varphi)\big) - (f(\varphi(0),\varphi),\dot{\varphi}\right| = 0$$

ce qui revient à montrer que :

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\left|\frac{1}{h}\big((u(h;\varphi(0),\varphi),u_h(.;\varphi(0),\varphi)) - (\varphi(0),\varphi)\big) - (f(\varphi(0),\varphi),\dot{\varphi})\right| = 0$$

ce qui est équivalent à monter que :

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\left|\frac{1}{h}\big(u(h;\varphi(0),\varphi) - \varphi(0)\big) - f(\varphi(0),\varphi)\right| = 0 \tag{2.5}$$

et

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\left(\int_{-r}^{0}\left|\frac{1}{h}\big(u(s+h;\varphi(0),\varphi) - \varphi(s)\big) - \dot{\varphi}(s)\right|^p ds\right)^{1/p} = 0 \tag{2.6}$$

(2.5) est vérifiée par hypothèse tandis que (2.6) est équivalente à

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\left(\int_{-r}^{-h}\left|\frac{1}{h}\big(\varphi(s+h) - \varphi(s)\big) - \dot{\varphi}(s)\right|^p ds\right)^{1/p} = 0 \tag{2.7}$$

(car u(s)=φ(s) sur $[-r,0[$)

et

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\left(\int_{-h}^{0}\left|\frac{1}{h}\big(u(s+h;\varphi(0),\varphi) - \varphi(s)\big) - \dot{\varphi}(s)\right|^p ds\right)^{1/p} = 0 \tag{2.8}$$

(2.7) est vérifiée car $\varphi \in W^{1,p}(-r,0;Y)$, en effet d'après [4, ,p.154]

$$\frac{1}{h}\left[\varphi(s+h) - \varphi(s)\right] = \frac{1}{h}\int_{s}^{s+h}\dot{\varphi}(t)dt$$

Posons g :=$\frac{d\varphi}{dt}$, si on prolonge g par

$$\tilde{g} = \begin{cases} g \quad sur \quad]-r,0[\\ 0 \quad\quad ailleurs \end{cases}$$

Alors la fonction $\frac{1}{h}\int_{.}^{.+h}\tilde{g}(t)dt$ tend vers $\tilde{g}$ dans $L^p(-r,0;Y)$ quand h tend vers 0, ce qui donne le résultat

(2.8) est aussi vérifiée, en effet on a

$$\left(\int_{-h}^{0}\left|\frac{1}{h}\left(u(s+h;\varphi(0),\varphi)-\varphi(s)\right)-\dot{\varphi}(s)\right|^{p}ds\right)^{1/p}$$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_{-h}^{0}\left|u(s+h;\varphi(0),\varphi)-\varphi(s)-h\dot{\varphi}(s)\right|^{p}ds\right)^{1/p}$$

or u est une solution forte de (2.1) alors u est différentiable et pour $t>0$ on a

$$\frac{du(t)}{dt}=f(u(t),u_t)$$

donc

$$\left(\int_{-h}^{0}\left|\frac{1}{h}\left(u(s+h;\varphi(0),\varphi)-\varphi(s)\right)-\dot{\varphi}(s)\right|^{p}ds\right)^{1/p}.$$
$$=\frac{1}{h}\left(\int_{-h}^{0}\left|\varphi(0)+\int_{0}^{s+h}\frac{du}{d\sigma}(\sigma)d\sigma-\varphi(s)-h\dot{\varphi}(s)\right|^{p}ds\right)^{1/p}$$
$$=\frac{1}{h}\left(\int_{-h}^{0}\left|\varphi(0)+\int_{0}^{s+h}f(u(\sigma),u_\sigma)d\sigma-\varphi(s)-h\dot{\varphi}(s)\right|^{p}ds\right)^{1/p}$$
$$\leqslant\frac{1}{h}\left(\int_{-h}^{0}\left(\int_{0}^{s+h}\left|f(u(\sigma),u_\sigma)\right|d\sigma\right)^{p}ds\right)^{1/p}+\frac{1}{h}\left(\int_{-h}^{0}\left|\varphi(0)-\varphi(s)\right|^{p}ds\right)^{1/p}$$
$$+\left(\int_{-h}^{0}\left|\dot{\varphi}(s)\right|^{p}ds\right)$$
$$\leqslant\frac{1}{h}\left(\int_{-h}^{0}\left(\int_{0}^{s+h}\left|f(u(\sigma),u_\sigma)\right|d\sigma\right)^{p}ds\right)^{1/p}+\frac{1}{h}\left(\int_{-h}^{0}\left(\int_{s}^{0}\left|\dot{\varphi}(\sigma)\right|d\sigma\right)^{p}ds\right)^{1/p}$$
$$+\left(\int_{-h}^{0}\left|\dot{\varphi}(s)\right|^{p}ds\right)^{1/p}$$
$$\leqslant h^{-1/q}\left(\int_{0}^{h}\left|f(u(\sigma),u_\sigma)\right|d\sigma+\int_{-h}^{0}\left|\dot{\varphi}(\sigma)\right|d\sigma\right)+\left(\int_{-h}^{0}\left|\dot{\varphi}(s)\right|^{p}ds\right)^{1/p}$$

avec $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}=1$

En utilisant l'inégalité de Hölder on trouve

$$\left(\int_{-h}^{0}\left|\frac{1}{h}\left(u(s+h;\varphi(0),\varphi)-\varphi(s)\right)-\dot{\varphi}(s)\right|^{p}ds\right)^{1/p}$$
$$\leqslant\left(\int_{0}^{h}\left|f(u(\sigma),u_\sigma)\right|^{p}d\sigma\right)^{1/p}+2\left(\int_{-h}^{0}\left|\dot{\varphi}(s)\right|^{p}ds\right)^{1/p}$$

On voit bien que le dernier terme converge vers 0 quand h tend vers 0+, ce qui achève la démonstration. □

$(S(t))_t$ est un C_0 semi groupe tel que $\|S(t)\|\leqslant(1+r)^{1/p}$ pour tout $t\in[0,\infty[$. $(T(t))_t$ est un C_0 semi groupe alors d'après Le théorème 1.6 ils existent un réel w et un réel $M\geqslant1$ tels que : $\|T(t)\|\leqslant Me^{wt}\quad pour\ tout\ t\geqslant0$. le théorème 1.8 (de Hill-Yosida) implique que pour tout $\lambda>max(0,w)$ et z ∈ Z on a :

$$R(\lambda,A)z=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda s}T(s)z\,ds\quad et\quad R(\lambda,A_0)z=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda s}S(s)z\,ds$$

Proposition 2.2. *Si (H_1) est vérifiée, et si la restriction de f à $\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)\cap D(f)$ est un opérateur linéaire fermé de $\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ dans Y, alors on a pour tout $z \in D \cap \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ et $\lambda > max(w,0)$ l'équation résolvante :*

$$(\lambda I - A)^{-1}z = (\lambda I - A_0)^{-1}z + (\lambda I - A_0)^{-1}F(\lambda I - A)^{-1}z$$

Preuve. En appliquant la transformée de Laplace sur (2.4) par rapport à la variable t on trouve, pour tout $\lambda > max(w,0)$

$$(\lambda I - A)^{-1}z = (\lambda I - A_0)^{-1}z + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t S(t-s)FT(s)z\,ds\,dt \tag{2.9}$$

puisque $z \in D\cap\mathscr{W}^{1,p}$ il existe un $s^* \geqslant 0$ tel que T(s^*)$z\in$ D(A) selon la proposition 2.1 et on a :

$$\frac{d^+}{ds}T(s^*)z = AT(s^*)z = (fT(s^*)z, T(s*)z)$$

ainsi pour s $\geqslant s^*$

$$\begin{aligned} |FT(s)z|_Z &= \left|fT(s)z\right|_Y = \left|\frac{du}{ds}(s)\right|_Y \leqslant \left|\frac{d^+}{ds}T(s)z\right|_Z = |AT(s)z|_Z \\ &= \left|AT(s-s^*)T(s^*)z\right|_Z = \left|T(s-s^*)AT(s^*)z\right|_Z \end{aligned}$$

- Commençons par montrer que la fonction t $\longrightarrow e^{-\lambda t}$ FT(t) est dans $L^1(0,\infty;Y)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda s}|FT(s)z|\,ds &\leqslant \int_0^{s^*} e^{-\lambda s}|FT(s)z|\,ds + \int_{s^*}^\infty e^{-\lambda s}|FT(s)z|\,ds \\ &\leqslant \int_0^{s^*} e^{-\lambda s}|FT(s)z|\,ds + \int_{s^*}^\infty e^{-\lambda s}\left|FT(s-s^*)T(s^*)z\right|ds \\ &\leqslant \int_0^{s^*} e^{-\lambda s}|FT(s)z|\,ds + \int_{s^*}^\infty e^{-\lambda s}\left|T(s-s^*)AT(s^*)z\right|ds \\ &\leqslant \int_0^{s^*} e^{-\lambda s}|FT(s)z|\,ds + \int_{s^*}^\infty e^{-\lambda s}Me^{w(s-s^*)}\left|AT(s^*)z\right|ds \\ &\leqslant \int_0^{s^*} e^{-\lambda s}|FT(s)z|\,ds + \left|AT(s^*)z\right|Me^{-ws^*}\int_{s^*}^\infty e^{-s(\lambda-w)}ds \end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}|FT(s)z|\,ds < C_\lambda < \infty \quad pour \quad \lambda \geqslant max(0,w)$$

Ainsi

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\left|S(\tau)F(e^{-\lambda s}T(s)z)\right|\,ds\,d\tau \leqslant (C_\lambda(1+r)^{1/p})/\lambda < \infty$$

pour $\lambda \geqslant max(0,w)$

-Revenons à (2.9), le changement de variables $\tau = t - s$ implique que :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t S(t-s)FT(s)z\,ds\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t S(\tau)FT(t-\tau)z\,d\tau\,dt$$

D'après le théorème de Fubini on a :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t S(\tau)FT(t-\tau)z\,d\tau\,dt = \int_0^\infty\int_\tau^\infty e^{-\lambda t}S(\tau)FT(t-\tau)z\,dt\,d\tau$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)\int_0^\infty F(e^{-\lambda s}T(s)z)\,ds\,d\tau \tag{2.10}$$

- Finalement

$$\int_0^\infty F(e^{-\lambda s}T(s)z)\,ds = F\int_0^\infty (e^{-\lambda s}T(s)z)\,ds \tag{2.11}$$

car F est fermé de $\mathscr{W}^{1.p}(-r,0;Y)$ dans Z, de plus, l'intégrale du terme gauche de (2.11) et celle du terme droit convergent dans Z et dans $\mathscr{W}^{1.p}(-r,0;Y)$ respectivement.

- On déduit de (2.9),(2.10) et (2.11) que :

$$(\lambda I-A)^{-1}z = (\lambda I-A_0)^{-1}z + (\lambda I-A_0)^{-1}F(\lambda I-A)^{-1}z$$

□

Proposition 2.3. *Si $D\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ est dense dans Z, la restriction de la fonction f à $D(f)\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ est un opérateur linéaire fermé de $\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ dans Y et si (H_1) est vérifiée, alors pour $\lambda > max(0,w)$ on a le résultats suivants :*

(i) l'ensemble $(\lambda I-A)^{-1}(D\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0))$ est un cœur pour A, $D(A)\subset D(f)\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0)$ et $Az=A_0z+Fz$ pour $z\in(\lambda I-A)^{-1}(D\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y))$, où A_0 défini par (2.3)

(ii) pour tout $z\in Z$, on a :

$$(\lambda I-A)^{-1}z = (\lambda I-A_0)^{-1}z + (\lambda I-A_0)^{-1}F(\lambda I-A)^{-1}z \tag{2.12}$$

(iii) si de plus il existe $\lambda_0 > max(0,w)$ tel que l'application $(\varphi(0),\varphi)\longrightarrow f(\varphi(0),\varphi)-\lambda_0\varphi(0)$ est injective sur l'ensemble $\{(a,ae^{\lambda_0\cdot}) : (a,ae^{\lambda_0\cdot})\in D(f), a\in Y\}$ alors $D(A)=D(f)\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$

Preuve. Notons par C l'ensemble $(\lambda I-A)^{-1}(D\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y))$

(i) • Soit z ∈ C, alors il existe y ∈ $D\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ tel que $z=(\lambda I-A)^{-1}y$
or d'après la proposition 2.2 on a pour $\lambda > max(0,w)$

$$(\lambda I-A)^{-1}y = (\lambda I-A_0)^{-1}y + (\lambda I-A_0)^{-1}F(\lambda I-A)^{-1}y$$

alors

$$z = (\lambda I-A_0)^{-1}\left[(F(\lambda I-A)^{-1}y+y\right]$$

ce qui implique

$$(\lambda I-A_0)z = Fz + (\lambda I-A)z$$

Ainsi

$$Az = A_0z + Fz \quad pour\ z\in C$$

On en déduit aussi que C $\subset \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)\cap D(f)$

• Pour prouver que C est un coeur pour A il suffit, d'après le théorème 1.11, de prouver que C est dense dans Z et que T(t) C $\subset$ C pour tout t$\geqslant$0.

Soient $x\in Z$ et $\epsilon \geqslant 0$

on sait que D(A) est dense dans Z puisque A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe, alors il existe un y $\in$ D(A) tel que $\left|x-y\right| < \epsilon/2$.

Or $D\cap\mathscr{W}^{1,p}$(-r,0;Y) est dense dans Z aussi et puisque $(\lambda - A)y\in Z$ alors il existe y* $\in D\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ tel que $\left|\lambda y - Ay - y*\right| < \epsilon(\lambda - w)/2M$

En posant $\tilde{y} = (\lambda - A)^{-1}y* \in$ C, on a :

$$\begin{aligned}
\left|x-\tilde{y}\right| &\leqslant \left|x-y\right| + \left|y-\tilde{y}\right| \leqslant \epsilon/2 + \left|(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)(y-\tilde{y})\right| \\
&\leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

ce qui prouve la densité de C dans Z.

D'autre part, pour $t\geqslant 0$ on a :

$$\begin{aligned}
T(t)C &= T(t)(\lambda I - A)^{-1}(D\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)) \\
&= (\lambda I - A)^{-1}T(t)(D\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)) \\
&\subset (\lambda I - A)^{-1}(D\cap\mathscr{W}^{1,p}) = C
\end{aligned}$$

On déduit que C est un cœur pour l'opérateur A

• Il reste à montrer que $D(A)\subset D(f)\cap\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$, pour cela considérons les opérateurs $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ définis par :

$$\begin{aligned}
D(\mathscr{A}) &= C \\
\mathscr{A}z &= A_0 z + Fz
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D(\mathscr{B}) &= D(f)\cap D(A_0) \\
\mathscr{B}z &= A_0 z + Fz
\end{aligned}$$

rappelons que C est un coeur pour A donc $\overline{\mathscr{A}} = A$ (A est la plus petite extension fermée de $\mathscr{A}$), donc il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est aussi une extension fermée de $\mathscr{A}$ pour avoir le résultat.

$\star$ C $\subset D(f)\cap D(A_0)$ et $\mathscr{B}z = \mathscr{A}z$ pour $z\in C$ donc $\mathscr{B}$ est une extension de $\mathscr{A}$.

⋆ soit une suite $\{(\varphi_n(0),\varphi_n)\}_n \subset D(\mathscr{B})$ telle que :

$$\begin{aligned} (\varphi_n(0),\varphi_n) &\longrightarrow (x_1,x_2) \quad dans\, Z \\ et \qquad \mathscr{B}(\varphi_n(0),\varphi_n) &\longrightarrow (y_1,y_2) \quad dans\, Z \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (\varphi_n(0),\varphi_n) &\longrightarrow (x_1,x_2) \quad dans\, Z \\ (f(\varphi_n(0),\varphi_n),\dot\varphi_n) &\longrightarrow (y_1,y_2) \quad dans\, Z \end{aligned}$$

Ainsi

$$A_0(\varphi_n(0),\varphi_n) \longrightarrow (0,y_2) \quad dans\, Z \qquad et \qquad f(\varphi_n(0),\varphi_n) \longrightarrow y_1 \quad dans\, Y$$

D'une part, on sait que l'opérateur A_0 est fermé donc $(x_1,x_2) \in \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$, $y_2 = \dot x_2$ et par conséquence $(\varphi_n(0),\varphi_n) \longrightarrow (x_1,x_2) \quad dans\, \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$.
D'autre part, f est fermé de $\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ dans Y, donc $(x_1,x_2) \in$ D(f) et $y_1 = f(x_1,x_2)$
Ainsi $(x_1,x_2) \in D(\mathscr{B})$ et $(y_1,y_2) = \mathscr{B}(x_1,x_2)$, ce qui prouve que $\mathscr{B}$ est fermé.

(ii) soit x $\in Z$ puisque $D \cap \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ est dense dans Z alors il existe une suite $(x_n)_n \subset D \cap \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$, d'après la proposition 2.2 on a :

$$(\lambda I - A)^{-1}x_n = (\lambda I - A_0)^{-1}x_n + (\lambda I - A_0)^{-1}F(\lambda I - A)^{-1}x_n \quad pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$$

Or pour $\lambda \geq max(0,w)$ les opérateurs $(\lambda I - A)^{-1}$et$(\lambda I - A_0)^{-1}$ sont linéaires bornés, ce qui donne le résultat en faisant tendre n vers ∞

(iii) On doit montrer que $\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y) \cap D(f) \subset D(A)$:
soit y $\in \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y) \cap D(f)$, montrons que $(\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 I - F - A_0)y = y$, pour cela supposons que$(\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 I - F - A_0)y = x \in D(A)$ et montrons que x=y.
$(\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 I - F - A_0)y = x$ implique que $(\lambda_0 I - F - A_0)(y - x) = 0$
y-x $\in \mathscr{W}^{1,p} \cap D(f)$ donc pour avoir le résultat il suffit de monter que :
pour tout $(w(0),w) \in \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y) \cap D(f)$, $(\lambda_0 I - F - A_0)(w(0),w) = 0$ implique $w = 0$.
$(\lambda_0 I - F - A_0)(w(0),w) = 0$ est équivalent à :

$$f(w(0),w) = \lambda_0 w(0) \qquad et \qquad \dot w(s) = \lambda_0 w(s) \quad pour \quad s \in [-r,0]$$

ce qui implique

$$f(w(0),w) = \lambda_0 w(0) \qquad et \qquad w(s) = w(0)e^{\lambda_0 s} \quad pour \quad s \in [-r,0]$$

alors

$$f(w(0), w(0)e^{\lambda_0 \cdot}) = \lambda_0 w(0)$$

Par hypothèse w=0. On a montré, ainsi, que $y = x \in$ D(A), ce qui achève la démonstration.

□

3 Conditions nécessaires

On utilisera dans cette section l'opérateur A calculé dans la proposition 2.3, en supposant qu'il génère un C_0 semi-groupe, ce qui nous permettra d'utiliser le théorème de Hille-Yosida pour avoir des conditions nécessaires sur l'application f et l'ensemble Y.
On suppose, alors, que l'hypothèse suivante (H_2) est vérifiée dans la suite

(H_2) l'opérateur A défini par :

$$\begin{aligned} D(A) &= D(f) \cap D(A_0) \\ A(\varphi(0), \varphi) &= F(\varphi(0), \varphi) + A_0(\varphi(0), \varphi) \end{aligned}$$

où A_0 défini par (2.3), génère un C_0 semi-groupe T(t) tel que $\| T(t) \| \leqslant Me^{wt}$ quelque soit $t \geqslant 0$, avec $M \geqslant 1$ et w $\in \mathbb{R}$

Sachant que la résolvante de A existe pour $\lambda > w$, il serait convenable de la calculer : soit $(\theta, \psi) \in Z$, on cherche l'unique $(\varphi(0), \varphi) \in D(A)$ tel que $(\lambda I - A)(\varphi(0), \varphi) = (\theta, \psi)$, ce qui est équivalent à :

$$(\lambda I - F - A_0)(\varphi(0), \varphi) = (\theta, \psi)$$

donc

$$\lambda \varphi(0) - f(\varphi(0), \varphi) = \theta \quad et \quad \lambda \varphi - \dot{\varphi} = \psi$$

Ce qui donne après calcul

$$\varphi(s) = e^{\lambda s}\varphi(0) + \int_s^0 e^{\lambda(s-\tau)}\psi(\tau)d\tau \quad pour\ s \in [-r, 0] \tag{2.13}$$

$$et \qquad \lambda \varphi(0) = \theta + f(E_\lambda \varphi(0) + M_\lambda \psi) \tag{2.14}$$

avec

$$(E_\lambda a)(s) = (a, ae^{\lambda s}) \quad pour\ a \in Y$$

et

$$(M_\lambda \psi)(s) = (0, \int_s^0 e^{\lambda(s-\tau)}\psi(\tau)d\tau) \quad pour\ \psi \in L^p$$

Pour la suite on utilise les notations suivantes :

— $\tilde{f}$ la restriction de f sur $D(f) \cap D(A_0)$

—
$$\varphi(0)(\theta,\psi) = P_1(\lambda I - A)^{-1}(\theta,\psi)$$

—
$$\varphi(\theta,\psi) = P_2(\lambda I - A)^{-1}(\theta,\psi)$$

—
$$\mathcal{W}_0^{1,p} = \left\{(0,\varphi) : \varphi \in W^{1,p}(-r,0;Y), \varphi(0) = 0\right\}$$

Lemme 2.3. *Si (H_2) est vérifiée alors $\overline{D(\tilde{f})} = Z$ et $\tilde{f}$ est un opérateur fermé de $\mathcal{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ dans Y*

Preuve. $\overline{D(\tilde{f})} = \overline{D(A)} = Z$, montrons maintenant que l'opérateur $\tilde{f}$ est fermé.
Soit une suite $(\varphi_n(0),\varphi_n)_n \in$ D(A) telle que :

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_n(0),\varphi_n) & \longrightarrow & (\varphi(0),\varphi) \quad dans\, \mathcal{W}^{1,p}(-r,0;Y) \\ et \quad \tilde{f}(\varphi_n(0),\varphi_n) & \longrightarrow & z \quad dans\, Y \end{array}$$

donc
$$\dot{\varphi}_n \longrightarrow \dot{\varphi}\; dans\, L^p(-r,0;Y) \quad et \quad \varphi_n(0) \longrightarrow \varphi(0)\; dans\, Y,$$

alors
$$(\varphi_n(0),\varphi_n) \longrightarrow (\varphi(0),\varphi)\; dans\, Z$$

En effet :

$$\varphi(s) = -\int_s^0 \dot{\varphi}(t)dt + \varphi(0) \quad pour \quad s \in [-r,0]$$

par suite
$$\left|\varphi(s)\right|_Y \leqslant \int_s^0 \left|\dot{\varphi}(t)\right|_Y dt + \left|\varphi(0)\right|_Y \quad pour\; s \in [-r,0]$$

ce qui entraine

$$\left|\varphi(s)\right|_Y^p \leqslant 2^{p-1}\left(\left(\int_s^0 \left|\dot{\varphi}(t)\right|_Y dt\right)^p + \left|\varphi(0)\right|_Y^p\right) \quad pour\; s \in [-r,0]$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \left|\varphi\right|_p^p & \leqslant & 2^{p-1}\left(\int_{-r}^0 \left(\int_s^0 \left|\dot{\varphi}(t)\right|_Y dt\right)^p ds + r\left|\varphi(0)\right|_Y^p\right) \\ & \leqslant & r2^{p-1}\left(\left(\int_{-r}^0 \left|\dot{\varphi}(t)\right|_Y dt\right)^p + \left|\varphi(0)\right|_Y^p\right) \end{array}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on trouve :

$$\left|\varphi\right|_p^p \leqslant r2^{p-1}\left(r^{p/q}\left|\dot{\varphi}\right|_p^p + \left|\varphi(0)\right|_Y^p\right) \text{avec} \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \tag{2.15}$$

De plus

$$A(\varphi_n(0),\varphi_n) \longrightarrow (z,\dot{\varphi})$$

Or A est fermé donc $(\varphi(0),\varphi) \in D(A)$ et $\tilde{f}(\varphi(0),\varphi) = z$, donc $\tilde{f}$ est fermé □

Lemme 2.4. *Si* (H_2) *est vérifiée, alors :*

(i) $\{E_\lambda\varphi(0)(\theta,0) : \theta \in Y\} \subset D(f)$ *pour tout* $\lambda > w$

(ii) $(\lambda I - fE_\lambda)^{-1} \in \mathscr{L}(Y)$ *et* $\|(\lambda I - fE_\lambda)^{-1}\| \leqslant M/(\lambda - w)$ *pour* $\lambda > w$

(iii) $\varphi(0)(\theta,\psi) = \varphi(0)(\theta,0) + \varphi(0)(0,\psi)$ *pour* $\lambda > w$

(iv) M_λ *est un isomorphisme de* L^p *dans* $\mathscr{W}_0^{1,p}$ *avec*

$$\|M_\lambda^{-1}\| \leqslant (1 + |\lambda|\, r/p^{1/p}) \quad pour\ \lambda > 0$$

Preuve. (i) évident en remplaçant ψ par 0 dans (2.14)

(ii) D'après(H_2) et (2.14) pour $\psi = 0$ on voit bien que $(\lambda I - fE_\lambda)^{-1}$ existe.
On a clairement $E_\lambda \in \mathscr{L}(Y, \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y))$ et f linéaire donc $\lambda I - fE_\lambda$ est linaire, par conséquent $(\lambda I - fE_\lambda)^{-1}$ est linéaire
D'autre part, pour $(\theta,\psi) \in Z$ et $\lambda > w$ on a d'après (H_2)

$$\left|(\lambda I - A)^{-1}(\theta,\psi)\right| \leqslant M\left|(\theta,\psi)\right|/(\lambda - w)$$

En remplaçant encore une fois ψ par 0 on trouve :

$$\left|(\lambda I - fE_\lambda)^{-1}\theta\right| \leqslant \left|(\lambda I - A)^{-1}(\theta,0)\right| \leqslant M|\theta|/(\lambda - w)$$

ce qui donne le résultat

(iii) évident car P1 et $(\lambda I - A)^{-1}$sont linéaires

(iv) On a $M_\lambda \in \mathscr{L}\left(L^p(-r,0;Y), \mathscr{W}_0^{1,p}\right)$ et $(M_\lambda)^{-1}\Phi = \lambda\varphi - \dot{\varphi}$ avec $\Phi = (0,\varphi)$
En effet : $(M_\lambda\psi)(s) = \left(0, \int_s^0 e^{\lambda(s-\tau)}\psi(\tau)d\tau\right)$ donc $(\lambda - A_0)M_\lambda\psi = (0,\psi)$,
ce qui implique que $\psi = P_2(\lambda I - A_0)M_\lambda\psi$

$$\begin{aligned}
\left|(M_\lambda)^{-1}\Phi\right|_p &= \left|\lambda\varphi - \dot{\varphi}\right|_p \leqslant |\lambda|\left|\varphi\right|_p + \left|\dot{\varphi}\right|_p \\
&= |\lambda|\left(\int_{-r}^0 \left|\int_s^0 \dot{\varphi}(\tau)d\tau\right|^p ds\right)^{1/p} + \left|\dot{\varphi}\right|_p
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on trouve :

$$\begin{aligned}
\left|(M_\lambda)^{-1}\Phi\right|_p &\leqslant |\lambda|\left(\int_{-r}^0 |\dot{\varphi}|_p^p(-s)^{p/q}ds\right)^{1/p} + \left|\dot{\varphi}\right|_p \quad avec\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
&\leqslant \left|\dot{\varphi}\right|_p\left(1 + |\lambda|\, r/p^{1/p}\right) \\
&\leqslant |\Phi|_{\mathscr{W}^{1,p}}(1 + |\lambda|\, r/p^{1/p})
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve

□

Pour la suite considérons l'hypothèse supplémentaire suivante :

(H_3) $\quad \{E_\lambda \varphi(0)(0,\psi) : \psi \in L^p\} \subset D(f)$ pour tout $\lambda > w$

Remarque 2.4. *On remarque que (H_3) est vérifiée si :*

$\{E_\lambda \varphi(0)(\theta,\psi) : (\theta,\psi) \in Z\} = \{E_\lambda \varphi(0) : (\varphi(0),\varphi) \in D(A)\} \subset D(f)$

et c'est une condition qu'on pourra avoir si on a les hypothèses (H_3), (i) et(iii) du lemme 2.4 toutes vérifiées

Théorème 2.1. *Si (H_2) et (H_3) sont vérifiées alors la restriction de $\tilde{f}$ à $\mathcal{W}_0^{1,p}$ est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{W}_0^{1,p}$ (avec la topologie de $\mathcal{W}^{1,p}$) dans Y*

Preuve. On montre d'abord que $\mathcal{W}_0^{1,p} \subset D(f) \cap \mathcal{W}^{1,p}(-r,0;Y)$

Soit $\psi \in L^p(-r,0;Y)$, si on pose $\theta = 0$ dans (2.14), on a :

$$\lambda\varphi(0)(0,\psi) = f(E_\lambda \varphi(0)(0,\psi) + M_\lambda \psi)$$

(H_3) implique que

$$\lambda\varphi(0)(0,\psi) = f(E_\lambda \varphi(0)(0,\psi) + f(M_\lambda \psi)$$

Donc pour tout $\lambda > max(w,0)$ et ψ dans L^p, $M_\lambda \psi \in D(f)$. Or d'après (iv) du lemme 2.4 M_λ est un isomorphisme de L^p dans $\mathcal{W}_0^{1,p}$ ce qui montre que $\mathcal{W}_0^{1,p} \subset D(f) \cap \mathcal{W}^{1,p}(-r,0;Y)$.

Ensuite il est clair que $\mathcal{W}_0^{1,p}$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ donc $\mathcal{W}_0^{1,p}$ munit de la norme de $\mathcal{W}^{1,p}$ est un espace de Banach, et d'après le lemme 2.4, la restriction de $\tilde{f}$ à $\mathcal{W}_0^{1,p}$ est un opérateur fermé de $\mathcal{W}^{1,p}$ dans Y.

Il ne reste qu'appliquer le théorème du graphe fermé pour avoir le résultat. □

Le théorème 2.1 montre qu'il est, en général, impossible de considérer les opérateurs non-bornés agissant sur le terme du retard. Pour que cela soit plus apparent, on donne les exemples suivants

Exemple 2.1. *Si*

$$f(\eta,\varphi) = B_0\eta + \int_{-r}^{0} B_1\varphi(s)ds,$$

avec $D(B_0) \subset D(B_1)$, où $D(B_0)$ est un espace vectoriel, si l'opérateur A correspondant génère un C_0-semi groupe, alors $B_1 \in \mathcal{L}(Y)$. En effet, puisque $D(B_0) \subset D(B_1)$ implique (H_3), le théorème 2.1 est applicable et implique que la restriction de l'application f sur $\mathcal{W}_0^{1,p}$ est bornée. Supposons par l'absurde que B_1 n'est pas borné, alors, il existe une suite $(y_n)_n$ dans Y telle que $|y_n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |B_1 y_n| = \infty$. On définit la suite $(\tilde{y}_n)_n$ dans $\mathcal{W}_0^{1,p}$ par $(0, y_n s)$, $s \in (-r,0)$. On a clairement $|\tilde{y}_n|_{\mathcal{W}^{1,p}(-r,0;Y)} = r^{1/p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |f\tilde{y}_n| = \dfrac{r^2}{2} \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |B_1 y_n| = \infty$, ce qui contredit le fait que f soit bornée sur $\mathcal{W}_0^{1,p}$.

Exemple 2.2. *Si*

$$f(\eta,\varphi) = B_0\eta + B_1\varphi(-r),$$

si l'opérateur A correspondant génère un C_0-semi groupe et si $D(B_0) \subset D(B_1)$, où $D(B_0)$ est un espace vectoriel, alors $B_1 \in \mathscr{L}(Y)$. La preuve est similaire à celle de l'exemple précédant (voir [18]).

Pour la suite, on considère que la partie de f qui opère sur l'espace Y joue un rôle spécifique et on suppose que :

$$f(\eta,\varphi) = B\eta + L(\eta,\varphi) \quad pour(\eta,\varphi) \in D(f) \tag{2.16}$$

Proposition 2.4. *Si (H_2) est vérifiée, f est de la forme* (2.16) *avec $L \in \mathscr{L}(\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y),Y)$ alors :*

(i) $(\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1}$ *existe pour tout $\lambda > w$ et* $\left\|(\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1}\right\| \leqslant M/(\lambda - w)$

(ii) D(B) est dense dans Y et B est fermé

(iii) il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(\lambda I - B)^{-1}$ existe pour tout $\lambda > \lambda_0$ et $\left\|(\lambda I - B)^{-1}\right\| \leqslant M/(\lambda - \lambda_0)$.
On peut prendre

$$\lambda_0 = M\|L\| \sup_{\lambda > max(w,0)} (1 + \lambda^p(1 - e^{-p\lambda r})/(p\lambda))^{1/p} + w$$

Preuve. (i) est le même résultat (ii) du lemme 2.4, pour f sous la forme (2.16)

(ii) • D(A) est dense dans Z donc D(B) est nécessairement dense dans Y

• Soit $(x_n)_n \subset$ D(B) telle que $x_n \longrightarrow x$ dans Y et $Bx_n \longrightarrow y$ dans Y. Soit la suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ définies par $\varphi_n = x_n$ sur $s \in [-r,0]$ alors on a $(x_n,\varphi_n)_n \subset D(A)$, $(x_n,\varphi_n) \longrightarrow (x,\varphi)$ et $A(x_n,\varphi_n) \longrightarrow (y + L(x,\varphi),\dot{\varphi}) = (y + L(x,\varphi),0)$ avec $\varphi(s) = x$ sur $s \in [-r,0]$, or A est fermé donc $(x,\varphi) \in D(A)$ et $A(x,\varphi) = (y + L(x,\varphi),0)$ ce qui prouve que $x \in D(B)$ et que $Bx = y$

(iii) Notons d'abord que pour $\lambda > 0$ et $y \in Y$ on a

$$\begin{aligned}
\left|LE_\lambda y\right| &\leqslant \|L\| \left|E_\lambda y\right|_{W^{1,p}} = \|L\| \left(|y|^p + \int_{-r}^{0} \lambda^p e^{p\lambda s} |y|^p \, ds\right)^{1/p} \\
&= \|L\| |y| \left(1 + \lambda^p \int_{-r}^{0} e^{p\lambda s} ds\right)^{1/p} \\
&= \|L\| |y| \left(1 + \lambda^p (1 - e^{-p\lambda r})/p\lambda\right)^{1/p} \\
&\leqslant \sup_{\lambda > max(w,0)} \|L\| |y| \left(1 + \lambda^p \left(1 - e^{-p\lambda r}\right)/p\lambda\right)^{1/p} := k|y|
\end{aligned}$$

Pour $\lambda > w + Mk := \lambda_0$, $(\lambda I - B)^{-1}$ existe, en effet soit y∈ Y, chercher x tel que $(\lambda I - B)x = y$ revient à chercher x tel que :

$$x = -(\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1} LE_\lambda x + (\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1} y$$

Considérons alors l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} V : Y & \longrightarrow & Y \\ x & \mapsto & V(x) = -(\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1} LE_\lambda x + (\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1} y \end{array}$$

Soient x_1 et x_2 dans Y, alors

$$V(x1) - V(x2) = -(\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1} LE_\lambda (x1 - x2)$$

Ce qui implique :

$$\begin{array}{rcl} |V(x1) - V(x2)| & \leqslant & \left|(\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1}\right| \left| LE_\lambda (x1 - x2)\right| \\ & \leqslant & Mk|x1 - x2| / (\lambda - w) \end{array}$$

On voit que l'application V est contractante pour $\lambda > w + Mk$, ce qui prouve, d'après le théorème 1.1 du point fixe, l'existence et l'unicité du x dans D(B) tel que $(\lambda I - B)x = y$ et on a aussi :

$$\begin{array}{rcl} \left|(\lambda I - B)^{-1} y\right| & = & |x| \leqslant \left|(\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1}\right| |LE_\lambda x| + \left|(\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1} y\right| \\ & \leqslant & Mk|x| / (\lambda - w) + M\left|y\right| / (\lambda - w) \\ & \leqslant & M\left|y\right| / (\lambda - \lambda_0) \end{array}$$

avec λ_0 = w+Mk

□

Remarque 2.5. *Cela aurait été pratique si on avait trouvé une estimation de la forme*

$$\left\|(\lambda I - B)^{-n}\right\| \leqslant M_1 / (\lambda - w_1)^n \quad \text{pour } n=1,2,\ldots,$$

qui, avec (ii) de la proposition 2.4, auraient impliqué que B est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe dans Y

On verra dans la prochaine proposition qu'il est possible d'avoir un tel résultat si L est d'une certaine forme, en utilisant la majoration de $\|(\lambda I - A)^{-n}\|$ donnée par le théorème Hille-Yosida

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.5. *Soit C le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe V(t) dans Y et g $\in W^{1,1}(0, T; Y)$ pour $T > 0$ arbitraire, alors pour tout $x_0 \in D(C)$ la fonction u donnée par :*

$$u(t) = V(t)x_0 + \int_0^t V(t-s)g(s)ds$$

est continument différentiable, u(t) $\in D(C)$ et $\dot{u}(t) = Cu(t) + g(t)$ pour tout $t \in [0, T]$

Preuve. Puisque $x_0 \in D(C)$ et C est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe V(t), alors, pour tout $t \geqslant 0$ on a :

$$V(t)x_0 \in D(C) \qquad et \qquad \frac{dV(t)x_0}{dt} = V(t)Cx_0 = CV(t)x_0$$

Posons

$$h(t) = \int_0^t V(t-s)g(s)ds,$$

$g \in W^{1,1}(0,T;Y)$ alors après changement de variables on trouve d'après [5, page 154] que h est continument différentiable et :

$$\frac{dh}{dt}(t) = V(t)g(0) + \int_0^t V(s)\dot{g}(t-s)ds$$

l'étape suivante consiste à montrer que $h(t) \in D(C)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Soient $t \in [0,T]$ et $\xi > 0$ (assez petit)

$$\begin{aligned}
\frac{V(\xi)-I_d}{\xi}h(t) &= \frac{V(\xi)-I_d}{\xi}\int_0^t V(t-s)g(s)ds \\
&= \frac{1}{\xi}\int_0^t V(s+\xi)g(t-s)ds - \frac{1}{\xi}\int_0^t V(s)g(t-s)ds \\
&= \frac{1}{\xi}\int_\xi^{\xi+t} V(s)g(t-s+\xi)ds - \frac{1}{\xi}\int_0^t V(s)g(t-s)ds \\
&= \frac{1}{\xi}\int_0^{\xi+t} V(s)g(t-s+\xi)ds - \frac{1}{\xi}\int_0^t V(s)g(t-s)ds \\
&- \frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} V(s)g(t-s+\xi)ds
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{V(\xi)-I_d}{\xi}h(t) = \frac{1}{\xi}(h(t+\xi)-h(t)) - \frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} V(s)g(t-s+\xi)ds$$

ce qui implique

$$\lim_{\xi \longrightarrow 0^+} \frac{V(\xi)-I_d}{\xi}h(t) = \dot{h}(t) - g(t)$$

Ainsi, pour tout $t \in [0,T]$

$$h(t) \in D(C) \quad et \quad Ch(t) = \dot{h}(t) - g(t)$$

Ce qui donne, pour tout $t \in [0,T]$

$$u(t) \in D(C) \quad et \quad \frac{du}{dt}(t) = C[V(t)x_0 + h(t)] + g(t) = Cu(t) + g(t)$$

$\square$

Proposition 2.5. *Si* (H_2) *est vérifiée, f dans* (2.16) *est de la forme*

$$f(\eta,\varphi) = B_0\eta + \sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(-r_i) + L(\eta,\varphi)$$

avec $0 < r_1 < \ldots < r_l = r$, $B_i \in \mathscr{L}(Y)$ *pour* $i = 1,\ldots,l$ *et* $L \in \mathscr{L}(Z,Y)$ *alors* B_0 *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe sur* Y

Preuve. On définit l'opérateur $\tilde{A}$ sur Z par :

$$\begin{aligned} D(\tilde{A}) = D(A) &= \left\{(\eta,\varphi) : \varphi \in \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y), \varphi(0) = \eta \in D(B_0)\right\} \\ \tilde{A}(\varphi(0),\varphi) &= (B_0\varphi(0) + \sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(-r_i), \dot{\varphi}) \end{aligned}$$

On a $\tilde{A} = A + \tilde{L}$ avec $\tilde{L}(\eta,\varphi) = -(L(\eta,\varphi),0)$ pour $(\eta,\varphi) \in D(A)$.
On note que $\tilde{L} \in \mathscr{L}(Z)$, cela implique que $\tilde{L}$ est une perturbation bornée de A et puisque A génère un C_0 semi groupe linéaire alors $\tilde{A}$ est aussi le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe dans Z qu'on notera $\tilde{T}(t)$.
On veut montrer que l'opérateur $\hat{A}$ défini par $D(\hat{A}) = D(A)$ et $\hat{A}(\eta,\varphi) = (B_0\eta,\dot{\varphi})$ génère un C_0 semi groupe dans Z.

D'abord, si on définit pour un z quelconque dans Z la fonction $y : [-r,\infty[\longrightarrow$ Y par $y(t) = P_1\tilde{T}(t)z$ pour $t \geqslant 0$ et $y(t) = (P_2 z)(t)$ pour presque tout $t \in [-r,0]$, où P_1 et P_2 désignent les projections sur la première et la deuxième composante de Z respectivement , alors d'après la proposition 1.5, $P_2\tilde{T}(t)z = y_t$ pour $t \geqslant 0$ dans $L^p(-r,0;Y)$.
Pour $z = (\eta,\varphi)$ et $t \in [0,r_1]$, on considère la fonction $u \in C(0,r_1;Z)$ donnée par :

$$u(t) = (u_1(t),u_2(t)) = \tilde{T}(t)z + \int_0^t \tilde{T}(t-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(s-r_i),0\right)ds$$

Si on prolonge u_1 sur $[-r,0[$ par $u_1(\theta) = \varphi(\theta)$ presque par tout alors $(u_1)_t = u_2(t)$ dans $L^p(-r,0;Y)$ pour $t \in [0,r_1]$, en effet :

$$u_1(t) = P_1\tilde{T}(t)z + \int_0^t P_1\tilde{T}(t-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(s-r_i),0\right)ds$$

et

$$\begin{aligned} u_2(t) &= P_2\tilde{T}(t)z + \left[\int_0^t P_2\tilde{T}(t-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(s-r_i),0\right)ds\right](.) \\ &= P_2\tilde{T}(t)z + \int_0^t \left[P_2\tilde{T}(t-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(s-r_i),0\right)\right](.)ds \end{aligned}$$

Ainsi, pour presque tout $\theta \in [-r, 0]$, on a :

$$\begin{aligned} u_2(t)(\theta) &= (P_2\tilde{T}(t)z)(\theta) + \int_0^t \left[P_2\tilde{T}(t-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(s-r_i), 0\right)\right](\theta)ds \\ &= \begin{cases} P_1\tilde{T}(t+\theta)z + \displaystyle\int_0^{t+\theta} P_1\tilde{T}(t-s+\theta)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(s-r_i), 0\right)ds & si\ t+\theta \geqslant 0 \\ \varphi(t+\theta) & si\ t+\theta < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On déduit que $(u_1)_t = u_2(t)$ dans $L^p(-r, 0; Y)$ pour $t \in [0, r_1]$, on procédera ensuite pas-à-pas avec la constante r_1 pour établir l'existence et l'unicité d'une fonction continue $U(t)z = (u_1(t; z), (u_1(.; z)_t)$ satisfaisant :

$$U(t)z = \tilde{T}(t)z + \int_0^t \tilde{T}(t-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i u_1(s-r_i), 0\right)ds$$

pour tout $t \geqslant 0$. Il reste à montrer que $(U(t))_t$ est un C_0 semi groupe et que $\hat{A}$ est son générateur infinitésimal.

$U(0)z = \tilde{A}(0)z = z$ pour $z \in Z$ alors $U(0) = Id$ dans Z

Soient t_1, $t_2 \geqslant 0$ et $z \in Z$

$$\begin{aligned} [U(t_1).U(t_2)](z) &= U(t_1)[U(t_2)(z)] \\ &= U(t_1)\left[\tilde{T}(t_2)z + \int_0^{t_2} \tilde{T}(t_2-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i u_1(s-r_i), 0\right)ds\right] \\ &= \tilde{T}(t_2+t_1)z + \int_0^{t_2} \tilde{T}(t_1+t_2-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i u_1(s-r_i), 0\right)ds \\ &+ \int_0^{t_1} \tilde{T}(t_1-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i u_1(s-r_i), 0\right)ds \\ &= \tilde{T}(t_2+t_1)z + \int_0^{t_2} \tilde{T}(t_1+t_2-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i u_1(s-r_i), 0\right)ds \\ &+ \int_{t_2}^{t_1+t2} \tilde{T}(t_1+t_2-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i u_1(s-r_i), 0\right)ds \\ &= \tilde{T}(t_2+t_1)z + \int_0^{t_2+t_1} \tilde{T}(t_1+t_2-s)\left(-\sum_{i=1}^{l} B_i u_1(s-r_i), 0\right)ds \\ &= U(t_1+t_2)z \end{aligned}$$

et finalement pour tout $z \in Z$ l'application $t \longrightarrow U(t)z$ est continue alors $U(t)$ est un C_0 semi-groupe dans Z.

Soit $(\eta, \varphi) \in D(A) = D(\tilde{A})$ et $t \in [0, r_1]$ alors

$$u(t) = \tilde{T}(t)(\eta, \varphi) + \int_0^t \tilde{T}(t-s)g(s)ds$$

avec

$$g(s) = -\left(\sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(s-r_i), 0\right),$$

$g \in \mathscr{W}^{1,p}(0, r_1, Z)$, alors, d'après le lemme 2.5, U est continument différentiable et

$$\frac{dU}{dt}(t)(\eta,\varphi) = \tilde{A}U(t)(\eta,\varphi) + g(t) \quad sur\ [0, r_1],$$

en particulier,

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt}(0^+)(\eta,\varphi) &= \tilde{A}U(0)(\eta,\varphi) + g(0) \\ &= \tilde{A}(\eta,\varphi) - \left(\sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(s-r_i), 0\right) \\ &= (B_0\eta, \dot{\varphi}) = \hat{A}(\eta,\varphi) \end{aligned}$$

Si on note par G le générateur infinitésimal de U(t) alors on a $\hat{A} \subset$ G ie : $D(\hat{A}) = D(A) \subset D(G)$ et $Gz = \hat{A}z$ pour $z \in D(\hat{A})$, montrons que $\hat{A} = G$.
Pour $t \in [0, r_1]$ on a $U(t)D(A) \subset D(A)$. En procédant encore une fois par pas-à-pas l'inclusion reste vrai pour $t \geqslant 0$.
Pour tout $t \geqslant 0$ $U(t)D(A) \subset D(A)$ et D(A) est dense dans Z alors D(A) est un coeur pour G ie : $\overline{\Gamma(\hat{A})} \subset \Gamma(G)$, or $\hat{A}$ est fermé :
En effet soit $\{(\varphi_n(0), \varphi_n)\}_n \subset D(A)$ telle que

$$\begin{aligned} (\varphi_n(0), \varphi_n) &\longrightarrow (x_1, x_2) \quad dans\ Z \\ et\quad (B_0\varphi_n(0), \dot{\varphi}_n) &\longrightarrow (y_1, y_2) \quad dans\ Z \end{aligned}$$

A_0 est fermé d'après le théorème de Hille -Yosida et B_0 l'est aussi d'après la proposition 2.4 alors $(x_1, x_2) \in D(A)$ et $(y_1, y_2) = \hat{A}(x_1, x_2)$, ainsi $\hat{A}$ est fermé.
On déduit finalement que $G = \hat{A}$ et donc l'opérateur $\hat{A}$ défini par :

$$D(\hat{A}) = D(A)$$

$$\text{et} \qquad \hat{A}(\eta,\varphi) = (B_0\eta, \dot{\varphi})$$

est le générateur infinitésimal de U(t).

On fixe $M_1 \geqslant 1$ et $w_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\|U(t)\| \leqslant M_1 e^{w_1 t}$ pour tout $t \geqslant 0$ et soient $\lambda \geqslant w_1$ et $\eta \in Y$, il existe $(\psi(0), \psi) \in D(\hat{A}^n)$ unique tel que $(\lambda I - \hat{A})^n(\psi(0), \psi) = (\eta, 0)$ pour n=1,2,... , donc il existe $\psi(0) \in D(B_0^n)$ unique tel que $(\lambda I - B_0)^n\psi(0) = \eta$, cela implique que

$$\left|(\lambda I - B_0)^{-n}\eta\right|_Y = \left|\psi(0)\right|_Y \leqslant \left|(\psi(0), \psi)\right|_Z \leqslant M_1 \left|\eta\right|_Y / (\lambda - w_1)^n \quad \text{pour tout n=1,2,...,}$$

or d'après la proposition 2.4 $D(B_0)$ est dense dans Y et B_0 est fermé, alors le théorème de Hille-

Yosida donne le résultat □

Pour pouvoir traiter le cas général, où l'opérateur agissant sur le retard est non-borné(dans le sens d'espace) on aura besoin de deux espaces de Banach X et Y tels que :

(H_4) $\quad Y \subset X$ avec injection dense et continue

En effet, on doit considérer X comme l'espace original et Y un sous espace de X munit d'une topologie moins fine que celle du X, du coup, pour la suite on doit regarder les opérateurs B et L comme des opérateurs de Y à valeurs dans X et de $Y \times \mathscr{L}^p(-r,0;Y)$ à valeurs dans X, respectivement, plus précisément on suppose que $D(B) \subset Y$ et $\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y) \subset D(L)$. On aura besoin des opérateurs B^Y et L^Y donnés par :

$$\begin{aligned} D(B^Y) &= \{y \in Y : y \in D(B), By \in Y\} \\ B^Y y &= By \quad pour \quad y \in D(B^Y) \end{aligned} \tag{2.17}$$

et

$$\begin{aligned} D(L^Y) &= \{z \in \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y) : Lz \in Y\} \\ L^Y y &= Ly \quad pour \quad y \in D(L^Y) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Pour éviter toute confusion, on rappelle que

$$\begin{aligned} D(A) &= \{(\eta,\varphi) : \varphi \in W^{1,p}(-r,0;Y), \eta = \varphi(0) \in D(B), \\ &\quad (\varphi(0),\varphi) \in D(L)\; et\; B\varphi(0) + L(\varphi(0),\varphi) \in Y\} \\ A(\varphi(0),\varphi) &= (B\varphi(0) + L(\varphi(0),\varphi), \dot{\varphi}). \end{aligned}$$

Notons qu'il faut plus que $\varphi(0) \in D(B)$ et $(\varphi(0),\varphi) \in \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ pour avoir $f(\varphi(0),\varphi) = B\varphi(0) + L(\varphi(0),\varphi) \in Y$ puisque les opérateurs B et L sont à valeurs dans X

Proposition 2.6. *Si les hypothèses (H_2) et (H_4) sont vérifiées alors :*

(i) D (B) est dense dans Y donc dans X aussi

(ii) s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $L(\varphi(0),\varphi) = 0$ pour tout $(\varphi(0),\varphi) \in D(A)$ avec $\varphi(s) = 0$ pour $s \in [-r,-\epsilon]$ alors B^Y est un opérateur fermé dans Y

(iii) la restriction de L^Y à $\mathscr{W}_0^{1,p}(-r,0;Y)$ est un opérateur fermé de $\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ à valeurs dans Y

Preuve. (i) il est évident que si D(A) est dense dans Z alors D (B) est dense dans Y, montrons que D (B) est dense dans X aussi : Soit $x \in X$ et $\epsilon > 0$, il existe d'après (H_4) $y \in Y$ tel que $|x-y|_X < \epsilon/2$

On note que d'après (H_4), il existe $c > 0$ tel que $\forall y \in Y$ $|y|_X \leqslant c|y|_Y$ et puisque D (B) est dense dans Y alors il existe $z \in Z$ tel que $|y-z|_Y \leqslant \epsilon/2c$.

Ainsi, $|x-z|_X \leqslant |x-y|_X + |y-z|_X \leqslant \epsilon$

(ii) Soit $(x_n)_n \subset D(B^Y)$ telle que $(x_n) \longrightarrow x$ dans Y et $B^Y x_n \longrightarrow y$ dans Y, soit la suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ définie sur $[-r,0]$ par : $\varphi_n(s) = 0$ si $s \in [-r,-\epsilon]$ et $\varphi_n(s) = x_n + x_n s/\epsilon$ si $s \in [-\epsilon,0]$. On voit bien que $\{(x_n,\varphi_n)\}_n \subset D(A)$, $(x_n,\varphi_n) \longrightarrow (x,\varphi)$ et $A(x_n,\varphi_n) \longrightarrow (y,\dot{\varphi})$ avec φ est définie sur $[-r,0]$ par : $\varphi_n(s) = 0$ si $s \in [-r,-\epsilon]$ et $\varphi_n(s) = x + xs/\epsilon$ si $s \in [-\epsilon,0]$, or A est fermé alors $(x,\varphi) \in D(A)$ et $(y,\dot{\varphi}) = A(x,\varphi)$ Ainsi $x \in D(B^Y)$ et $y = B^Y x$, ce qui donne le résultat

(iii) Soit $\{z_n\}_n = \{(0,\varphi_n)\}_n \subset D(L^Y)$ telle que $z_n \longrightarrow z = (0,\varphi)$ dans $\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y)$ et $L^Y z_n \longrightarrow y$ dans Y, alors $(z_n)_n \in D(A)$ et $Az_n \longrightarrow (y,\dot{\varphi})$, en utilisant encore une fois le fait que A soit fermé on trouve que $z \in D(L^Y)$ et $y = L^Y z$, ce qui conclut la preuve .

□

Pour la suite on aura besoin de l'hypothèse suivante :

(H_5) il existe $\tilde{w} \in \mathbb{R}$ tel que :

$\{LE_\lambda\varphi(0)(\theta,\psi) : (\theta,\psi) \in Z\} \subset D\left((\lambda I - B)^{-1}\right)$ pour tout $\lambda \geqslant \tilde{w}$

Théorème 2.2. *Si (H_2), (H_4) et (H_5) sont vérifiées et que (la restriction de) $L \in \mathscr{L}(\mathscr{W}_0^{1,p}(-r,0;Y),X)$ alors :*

(i) $Y \subset D\left((\lambda I - B)^{-1}\right)$ et $\{LM_\lambda\varphi : \varphi \in L^p(-r,0;Y)\} \subset D\left((\lambda I - B)^{-1}\right)$ pour $\lambda > max(w,\tilde{w})$

(ii) si de plus $B : D(B) \longrightarrow X$ est fermé et $(\lambda I - B)$ est injectif pour $\lambda > \tilde{w}$, alors $(\lambda I - B)^{-1}L \in \mathscr{L}(\mathscr{W}_0^{1,p},Y)$ pour $\lambda > max(w,\tilde{w})$

(iii) Si de plus $\left|(\lambda I - B)^{-1}LE_\lambda\varphi(0)(\theta,\psi)\right|_Y \leqslant k_1\left|\varphi(0)(\theta,\psi)\right|$ pour tout $(\theta,\psi) \in Z$ et un certain k_1 indépendant de $\lambda > \tilde{w}$, alors $\left\|(\lambda I - B)^{-1}LM_\lambda\right\|_{\mathscr{L}(L^p(-r,0;Y),Y)} \leqslant k_2/(\lambda - w)$ avec k_2 indépendant de $\lambda > max(w,\tilde{w})$

Preuve. (i) pour $\lambda > w$ et (θ,ψ) dans Z on trouve d'après (2.14) que :

$\lambda\varphi(0)(\theta,\psi) = \theta + B\varphi(0)(\theta,\psi) + L(E_\lambda\varphi(0)(\theta,\psi) + M_\lambda\psi)$ dans X

donc

$\varphi(0)(\theta,\psi) = (\lambda I - B)^{-1}(\theta + LE_\lambda\varphi(0)(\theta,\psi) + LM_\lambda\psi)$ dans Y

On rappelle que (H_5) est vérifiée alors en considérant la dernière équation avec $\psi = 0$ et $\theta = 0$ respectivement, on trouve (i)

(ii) Commençons par montrer que l'opérateur $(\lambda I - B)^{-1}$ est fermé de X dans Y pour $\lambda > \tilde{w}$: Soit $(x_n)_n \subset D\left((\lambda I - B)^{-1}\right)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans X et $(\lambda I - B)^{-1}x_n \longrightarrow y$ dans Y, il existe une suite $(y_n)_n \subset D(B)$ unique telle que $(\lambda I - B)y_n = x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on aura alors $y_n \longrightarrow y$ dans Y et $By_n \longrightarrow x - \lambda y$ dans X, or B est fermé alors $y \in D(B)$ et $x = (\lambda I - B)y$ et $(\lambda I - B)$ est injectif pour $\lambda > \tilde{w}$ alors $x \in D(\lambda I - B)^{-1}$ et $y = (\lambda I - B)^{-1}x$. Ensuite, par hypothèse et d'après le lemme 2.4 (iv) on a $LM_\lambda \in \mathscr{L}(L^p(-r,0;Y),X)$ alors $(\lambda I - B)^{-1}LM_\lambda$ est fermé et $L^p(-r,0;Y) \subset D(\lambda I - B)^{-1}LM_\lambda$ pour $\lambda > max(w,\tilde{w})$, en utilisant le théorème du graphe fermé on trouve $(\lambda I - B)^{-1}LM_\lambda \in \mathscr{L}(L^p(-r,0;Y),Y)$ pour $\lambda > max(w,\tilde{w})$. Finalement, on utilise encore une fois le lemme 2.4 (iv) pour trouver (ii)

(iii) On rappelle que pour $\lambda > w$ et $(\theta, \psi) \in Z$ on a :
$\varphi(0)(\theta,\psi) = (\lambda I - B)^{-1}(\theta + LE_\lambda\varphi(0)(\theta,\psi) + LM_\lambda\psi)$ dans Y
Pour $\theta = 0$ on trouve :
$(\lambda I - B)^{-1}LM_\lambda\psi = (I - (\lambda I - B)^{-1}LE_\lambda)\varphi(0)(0,\psi)$ dans Y
Alors

$$\begin{aligned}
\left|(\lambda I - B)^{-1}LM_\lambda\psi\right| &\leqslant \left|\varphi(0)(0,\psi)\right| + \left|(\lambda I - B)^{-1}LE_\lambda\varphi(0)(0,\psi)\right| \\
&\leqslant (1+k_1)\left|(\lambda I - A)^{-1}(0,\psi)\right| \\
&\leqslant (1+k_1)M\left|\psi\right|_p/(\lambda - w) \\
&\leqslant k_2\left|\psi\right|_p/(\lambda - w)
\end{aligned}$$

avec $k_2 = (1+k_1)M$ indépendant de $\lambda \geqslant max(w,\tilde{w})$

□

2.1. Contrairement au premier exemple, le deuxième présente l'une des difficultés rencontrées lorsqu'on veut appliquer la théorie de semi groupes au problème (2.1), celle d'inclure les opérateurs non bornés dans le terme du retard. Cette difficulté sera surmontée en choisissant le "bon" espace d'état.

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre nous présentons des exemples de problèmes aux limites associés à des équations aux dérivées partielles à retard. Nous vérifions, ensuite, les conditions nécessaires pour que ces problèmes soient bien posés .

Problème 1 :

En se référant à [2], on considère l'équation de réaction-diffusion suivante, qui modélise la conduction thermique dans une barre homogène chauffée de longueur 1, en supposant que ses deux extrémités 0 et 1 sont maintenues à une température constante $T_0 = 0$

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) & = & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) - u(t,x) - u(t-1,x) & 0 \leqslant x \leqslant 1, t \geqslant 0 \\ u(t,0) & = & u(t,1) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(t,x) & = & \varphi(t,x) & 0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant t \leqslant 0 \end{array}\right. \tag{3.1}$$

u(t,x) représente la température de la barre au point x, à l'instant t.
Le retard ici est $r = 1$, il représente la durée moyenne, en unité de temps, nécessaire pour que le système réagisse au changement de la température.
$\varphi \in L^2([-1,0] \times]0,1[)$.

Pour écrire le problème (3.1) sous forme d'une équation à retard abstraite on définit les espaces et les opérateurs suivants :
- $Y := L^2(0,1;\mathbb{R})$
- $Z := Y \times L^2(-1,0;Y)$
- L'opérateur $B_0 : D(B_0) \subset Y \longrightarrow Y$ défini par :

$$D(B_0) := H^2(0,1;\mathbb{R}) \cap H_0^1(0,1;\mathbb{R})$$

et

$$B_0 u = \frac{d^2}{dx^2}u$$

• L'opérateur $B := B_0 - I$ avec $D(B) = D(B_0)$

• L'opérateur L :$\mathscr{W}^{1,2}(-1,0;Y) \longrightarrow Y$ défini par $L(\varphi(0,\varphi)) = -\varphi(-1)$

Ainsi le problème (3.1) est une équation différentielle à retard dans Y de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) &= Bu(t) + L(u(t), u_t) \qquad t > 0 \\ u(t) &= \psi(t) \qquad\qquad -1 \leqslant t \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $\psi \in L^2(-1,0;Y)$ une condition initiale définie par $\psi(t)(x) = \varphi(t,x)$ pour tout (t,x)$\in [-1,0] \times [0,1]$

On commence par montrer que l'opérateur $B_0 : D(B_0) \subset Y \longrightarrow$ Y engendre un C_0 semi-groupe dans Y, pour cela on montre tout d'abord qu'il est dissipatif :

Soit $g \in D(B_0)$

$$\begin{aligned} \langle B_0 g, g\rangle_Y &= \int_0^1 \frac{d^2 g}{dx^2}(x).g(x)dx = -\int_0^1 \left|\frac{dg}{dx}(x)\right|^2 dx + \left[\frac{dg}{dx}(x).g(x)\right]_0^1 \\ &= -\int_0^1 \left|\frac{dg}{dx}(x)\right|^2 dx \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc B_0 est un opérateur dissipatif

De plus d'après la proposition 1.1, pour tout $f \in Y$ il existe $u \in D(B_0)$ unique tel que $(I - B_0)u = f$, alors en utilisant le théorème 1.13 et ensuite le théorème de Lumer philips on conclut que B_0 est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(S(t))_{t\geqslant 0}$ tel que $\|S(t)\| \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$.

Vérification des conditions nécessaires

Soit A l'opérateur linéaire associé au problème à retard 3.2 défini par :

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{(\varphi(0),\varphi) \in Z : \varphi \in W^{1,2}(-1,0;Y), \varphi(0) \in D(B)\right\} \\ A(\varphi(0),\varphi) &= (f(\varphi(0),\varphi), \dot{\varphi}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D(f) &= \left\{(\eta,\varphi) \in Z : \eta \in D(B)\; et\; \varphi(-1) \in Y\right\} \\ f(\varphi(0),\varphi) &= B\varphi(0) + L(\varphi(0),\varphi) = B\varphi(0) - \varphi(-1) \end{aligned}$$

- L'hypothèse (H_3) est vérifiée, en effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\varphi(0),\varphi) \in D(A)$, alors $\varphi(0) \in D(B)$, ce qui implique que $E_\lambda \varphi(0) \in D(f)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on conclut que :

$$\left\{E_\lambda \varphi(0) : (\varphi(0),\varphi) \in D(A)\right\} \subset D(f) \quad pour\; \lambda \in \mathbb{R}$$

- L'opérateur L :$\mathscr{W}^{1,2}(-1,0;Y) \longrightarrow Y$ est continue, en effet, soit $(\varphi(0),\varphi) \in \mathscr{W}^{1,2}(-1,0;Y)$

$$\begin{aligned} \left|L(\varphi(0),\varphi)\right|_Y^2 &= \left|\varphi(-1)\right|_Y^2 \leqslant \left(\int_{-1}^0 \left|\dot\varphi(s)\right|_Y ds + \left|\varphi(0)\right|_Y\right)^2 \\ &\leqslant 2\left(\left(\int_{-1}^0 \left|\dot\varphi(s)\right|_Y ds\right)^2 + \left|\varphi(0)\right|_Y^2\right) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$\left|L(\varphi(0),\varphi)\right|_Y \leqslant \sqrt{2}\left|(\varphi(0),\varphi)\right|_{\mathscr{W}^{1,2}(-1,0;Y)}$$

- La fonction f est de la forme suivante :

$$f(\eta,\varphi) = B\eta + \sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(-r_i) + \Psi(\eta,\varphi)$$

avec $0 < r_1 < ... < r_l = r$, $B_l = -I_d$ dans Y, $B_i \equiv 0$ pour $i = 1,..., l-1$ et $\Psi \equiv 0$.
Ainsi, les propositions 2.4, la proposition 2.5 et le théorème 2.1 sont tous applicables.

1. **Conditions nécessaires du théorème 2.1**
   Soit $(0,\varphi) \in \mathscr{W}_0^{1,2}(-1,0;Y)$ alors $(0,\varphi) \in D(f)$ et on a :

$$\left|f(0,\varphi)\right|_Y = \left|L(0,\varphi)\right|_Y \leqslant \sqrt{2}\left|(0,\varphi)\right|_{\mathscr{W}^{1,2}(-1,0;Y)}$$

   Ainsi la restriction de f à $\mathscr{W}_0^{1,2}(-1,0;Y)$ est un opérateur linéaire borné

2. **Conditions nécessaires de la proposition 2.5**
   L'opérateur B_0 génère un C_0 semi-groupe $(S(t))_{t\geqslant 0}$ tel que $\|S(t)\| \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$, alors, d'après le théorème de la perturbation bornée, l'opérateur $B := B_0 - I$ génère aussi un C_0 semi-groupe $(\tilde S(t))_{t\geqslant 0}$ tel que $\left\|\tilde S(t)\right\| \leqslant e^t$ pour tout $t \geqslant 0$.

3. **Conditions nécessaires de la proposition 2.4**
   L'opérateur B génère un C_0 semi-groupe $(\tilde S(t))_{t\geqslant 0}$ tel que $\left\|\tilde S(t)\right\| \leqslant e^t$ pour tout $t \geqslant 0$, alors, le théorème de Hille-Yosida implique que :
   (i) D(B) est dense dans Y et $B : D(B) \subset Y \longrightarrow Y$ est un opérateur fermé
   (ii) $(\lambda I - B)^{-1}$ existe et $\left\|(\lambda I - B)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{\lambda - 1}$ pour tout $\lambda > 1$
   Ainsi il ne reste que la condition nécessaire dans (i) de la proposition 2.4 à vérifier
   Soient $v \in D(B)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda I - B - LE_\lambda)v = (\lambda I - B)v - L(v, ve^{\lambda\cdot}) = (\lambda I - B)v + ve^{-\lambda} = \left((\lambda + e^{-\lambda})I - B\right)v$$

   Or $\left((\lambda + e^{-\lambda})I - B\right)^{-1}$ existe et $\left\|\left((\lambda + e^{-\lambda})I - B\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{\lambda + e^{-\lambda} - 1}$ si $\lambda + e^{-\lambda} > 1$ Donc si on prend w=1 on trouve :
   $(\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1}$ existe et $\left\|(\lambda I - B - LE_\lambda)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{\lambda + e^{-\lambda} - 1} \leqslant \frac{1}{\lambda - w}$ si $\lambda > w$

Ainsi toutes les conditions nécessaires pour que l'opérateur A génère un C_0 semi-groupe dans Z et, par conséquent, pour que le problème (3.1) soit bien posé, sont vérifiées.

Problème 2 :

On considère l'équation de réaction de diffusion à retard continue (distribué), étudiée dans [18] et qui s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) & = & \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)+\int_{-1}^{0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t+s,x)\,ds & 0\leqslant x\leqslant 1, t\geqslant 0 \\ u(t,0) & = & u(t,1)=0 & t\geqslant 0 \\ u(t,x) & = & \varphi(t,x) & 0\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant t\leqslant 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

avec $\varphi\in L^2([-1,0]\times]0,1[)$

Pour écrire le problème (3.3) sous forme d'une équation à retard abstraite on définit l'espace et les opérateurs suivants :

• $X := L^2(0,1;\mathbb{R})$

• L'opérateur $B : D(B)\subset X \longrightarrow X$ défini par :

$$D(B) := H^2(0,1;\mathbb{R})\cap H_0^1(0,1;\mathbb{R})$$

et

$$Bu = \frac{d^2}{dx^2}u$$

• L'opérateur $L : D(L)\subset X\times L^2(-1,0;X)\longrightarrow X$ par :

$$D(L) := \left\{(\eta,\varphi)\in X\times L^2(-1,0;X) : \varphi(s)\in D(B)\ pour\ tout\, s\in]-1.0[\right\}$$

et

$$L(\eta,\varphi)) = \int_{-1}^{0} B\varphi(s)ds.$$

Ainsi le problème (3.3) est une équation différentielle à retard dans X de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) & = & Bu(t)+L(u(t),u_t) & t>0 \\ u(t) & = & \psi(t) & -1\leqslant t\leqslant 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

avec $\psi\in L^2((-1,0);X)$ une condition initiale définie par $\psi(t)(x)=\varphi(t,x)$ pour tout (t,x)$\in[-1,0]\times[0,1]$

Soit l'opérateur A associé à (3.4) défini par :

$$\begin{aligned} D(A) &= D(f)\cap\mathscr{W}^{1,2}(-1,0;X) \\ A(\varphi(0),\varphi) &= (f(\varphi(0),\varphi),\dot{\varphi}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(\eta,\varphi) \in X \times L^2(-1,0;X) : \eta \in D(B)\ et\ (\eta,\varphi) \in D(L)\} \\ f(\eta,\varphi) &= B(\eta) + L(\eta,\varphi) \end{aligned}$$

L'opérateur B n'est pas borné, alors, d'après l'exemple 2.1, on ne peut pas espérer que l'opérateur A associé au problème (3.4) génère un C_0 semi groupe dans $X \times L^2(-1,0;X)$, dans ce cas on doit choisir un espace $Y \subset X$ tel que l'opérateur L :$\mathscr{W}^{1,2}(-1,0;Y) \longrightarrow X$ défini par $L(\varphi(0),\varphi) = \int_{-1}^{0} B\varphi(s)\,ds$ soit continu, le choix le plus évident serait le suivant :

$$Y = (D(B), |\,.\,|_g)$$

avec $|\,.\,|_g$ est la norme du graphe de l'opérateur B définie par

$$|x|_g = |x|_X + |Bx|_X \quad pour\ tout\, x \in D(B)$$

Vérification des conditions nécessaires

- Il est trivial que L'hypothèse (H_4) soit vérifiée. En outre, on a déjà montré dans le problème 1 que B est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe S(t) tel que $\|S(t)\| \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$, alors d'après le théorème de Hile-Yosida l'hypothèse (H_5) est vérifiée pour $\lambda > 0$.
- L'opérateur L est continue, en effet, soit $(\varphi(0),\varphi) \in \mathscr{W}^{1,2}(-1,0;Y)$

$$\left|L(\varphi(0),\varphi)\right|_X = \left|\int_{-1}^{0} B\varphi(s)\,ds\right|_X \leqslant \int_{-1}^{0} \left|\varphi(s)\right|_Y\,ds$$

En utilisant l'inégalité (2.15), on trouve qu'il existe $C = \sqrt{2}$ telle que :

$$\left|L(\varphi(0),\varphi)\right|_X \leqslant C\left|(\varphi(0),\varphi)\right|_{\mathscr{W}^{1,p}(-1,0;Y)}$$

Ainsi, la proposition 2.6 et le théorème 2.2 sont applicables.

1. **Conditions nécessaires de la proposition 2.6**
   (i) il est évident que D(B) est dense dans Y puisque D(B)=Y par construction

   (ii) D'après le théorème 1.10 l'opérateur B^Y, défini par (2.17), est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe dans Y, alors il est fermé dans Y d'après le théorème de Hille Yosida

   (iii) Soit $\{z_n\}_n = \{(0,\varphi_n)\}_n \subset D(L^Y)$ telle que $z_n \longrightarrow z = (0,\varphi)$ dans $\mathscr{W}^{1,2}(-1,0;Y)$ et $L^Y z_n \longrightarrow y$ dans Y, où L^Y est défini par (2.18). L :$\mathscr{W}^{1,2}(-1,0;Y) \longrightarrow X$ est continue Alors $Lz \in Y$ et $y = Lz$, Ainsi $z \in L^Y$ et $y = L^Y z$

2. **Conditions nécessaires du théorème 2.2**

   (i) B est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe S(t) tel que $\|S(t)\| \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$, alors d'après le théorème de Hile-Yosida $\{LM_\lambda \varphi : \varphi \in L^p\} \subset D((\lambda I - B)^{-1})$ et $Y \subset D((\lambda I - B)^{-1})$ pour $\lambda > 0$.

   (ii) En utilsant encore une fois le théorème de Hile-Yosida, on a $B : D(B) \longrightarrow X$ est fermé ,$(\lambda I - B)$ est bijective et $\left\|(\lambda I - B)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant \frac{1}{\lambda}$ pour $\lambda > 0$. On montre, ensuite, que $(\lambda I - B)^{-1} \in \mathscr{L}(X, Y)$ pour $\lambda > 0$

   Soient $x \in X$ et $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
\left|(\lambda I - B)^{-1} x\right|_g &= \left|(\lambda I - B)^{-1} x\right|_X + \left|B(\lambda I - B)^{-1} x\right|_X \\
&\leqslant \left|(\lambda I - B)^{-1} x\right|_X + \left|\left(\lambda(\lambda I - B)^{-1} - I\right) x\right|_X \\
&\leqslant K_\lambda |x|_X \quad avec\, K_\lambda = 2 + \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

   Ainsi $(\lambda I - B)^{-1} L \in \mathscr{L}(\mathscr{W}_0^{1,2}, Y)$

   (iii) Soient $v \in Y$ et $\lambda > 1$

$$\begin{aligned}
\left|(\lambda I - B)^{-1} L E_\lambda v\right|_g &= \left|(\lambda I - B)^{-1} L(v, v e^{\lambda \cdot})\right|_g \leqslant (2 + \frac{1}{\lambda}) \left|L(v, v e^{\lambda \cdot})\right|_X \\
&\leqslant K \left|\int_{-1}^0 B v e^{\lambda s}\, ds\right|_X \leqslant K \int_{-1}^0 e^{\lambda s}\, ds |Bv|_X \\
&\leqslant K |v|_g
\end{aligned}$$

   avec K une constante positive indépendante de $\lambda > 1$ Il nous reste à voir si la condition nécessaire (iii) du théorème 2.2 est vérifiée, alors soient $\varphi \in L^2(-1, 0; Y)$ et $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
\left|(\lambda I - B)^{-1} L M_\lambda \varphi\right|_g &= \left|(\lambda I - B)^{-1} \int_{-1}^0 B \int_s^0 e^{\lambda(s-\tau)} \varphi(\tau)\, d\tau\, ds\right|_g \\
&= \left|B(\lambda I - B)^{-1} \int_{-1}^0 \int_s^0 e^{\lambda(s-\tau)} \varphi(\tau)\, d\tau\, ds\right|_X \\
&+ \left|B(\lambda I - B)^{-1} \int_{-1}^0 \int_s^0 e^{\lambda(s-\tau)} B\varphi(\tau)\, d\tau\, ds\right|_X \\
&\leqslant 2 \int_{-1}^0 \int_s^0 e^{\lambda(s-\tau)} \left|\varphi(\tau)\right|_g d\tau\, ds \\
&\leqslant 2 \int_{-1}^0 \left|\varphi(\tau)\right|_g \int_{-1}^\tau e^{\lambda(s-\tau)}\, ds\, d\tau \\
&= \frac{2}{\lambda} \int_{-1}^0 \left|\varphi(\tau)\right|_g (1 - e^{-\lambda(1+\tau)})\, d\tau
\end{aligned}$$

   En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$\left|(\lambda I - B)^{-1} L M_\lambda \varphi\right|_g \leqslant \frac{4}{\lambda} |\varphi|_{L^2(-1,0;Y)}$$

Ainsi, toutes les conditions nécessaires pour que l'opérateur A associé à (3.4) défini par :

$$\begin{aligned} D(A) &= \{(\eta,\varphi) : \varphi \in W^{1,p}(-r,0;Y), \eta = \varphi(0) \in D(B), \\ &\quad (\varphi(0),\varphi) \in D(L)\; et\; B\varphi(0) + L(\varphi(0),\varphi) \in Y\} \\ A(\varphi(0),\varphi) &= (B\varphi(0) + L(\varphi(0),\varphi), \dot{\varphi}). \end{aligned}$$

génère un C_0 semi groupe dans $Z := Y \times L^2(-1,0;Y)$ sont vérifiées, par conséquent, toutes les conditions nécessaires pour que le problème aux limites (3.3) soit bien posé sont satisfaites.

Conclusion

S'intéressant à l'analyse de problèmes aux limites régis par des équations différentielles à retard à coefficients opérateurs et provenant de diverses situations concrètes gouvernées par des EDP de type elliptique et parabolique, nous avons étudié en particulier le comportement précis des solutions de ces problèmes : existence et unicité de solution. L'intérêt des techniques opérationnelles est de permettre une étude unifiée de problèmes elliptiques paraboliques et de fournir pour ceux-ci des conditions nécessaires (et suffisantes)d'existence, d'unicité (et de régularité des solutions). Les méthodes utilisées reposent sur la construction d'une formule explicite de représentation des solutions et de son analyse en fonction des données. Pour la construction de cette formule explicite et son analyse, on utilise le calcul fonctionnel (la théorie des semi-groupes).

À travers les chapitres 2 et 3 nous avons exposé l'utilisation de la théorie des semi-groupes pour étudier les équations aux dérivées partielles à retard qui peuvent s'écrire sous la forme abstraite suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \frac{d}{dt}u(t) & = & f(u(t),u_t) & t>0 \\ u(0) & = & \eta & \\ u(x) & = & \varphi(x) & x\in[-r,0) \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Avec r un réel strictement positif qui représente le retard, $1\leqslant p<\infty$, Y un espace de Banach, f un opérateur de $Z := Y\times L^p(-r,0;Y)$ à valeurs dans Y, et (η,φ) une condition initiale appartenant à Z.

Plus précisément, nous avons donné des conditions nécessaires sur l'opérateur f pour que le problème(3.5) soit bien posé, en utilisant, la théorie des semi-groupes.

Se basant sur l'hypothèse suivante :

(H_1) L'ensemble des valeurs initiales, pour lesquelles une unique solution forte de (3.5) existe, est un sous espace vectoriel dense de Z, de plus, la solution dépend continument de la valeur initiale,

on a montré que les solutions de (3.5) définissent un semi groupe fortement continue $(T(t))_{t\geqslant 0}$, et le générateur infinitésimal A de ce semi-groupe a été caractérisé par :

$$\begin{array}{rcl} D(A) & = & D(f)\cap \mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y) \\ A(\varphi(0),\varphi) & = & (f(\varphi(0),\varphi),\dot{\varphi}) \end{array} \tag{3.6}$$

avec

$$\mathscr{W}^{1,p}(-r,0;Y) = \left\{(\eta,\varphi) : \varphi \in W^{1,p}(-r,0;Y), \eta = \varphi(0)\right\}$$

Ensuite, en supposant que le problème (3.5) est bien posé au sens de l'hypothèse suivante :

(H_2) L'opérateur A défini par(3.6) génère un C_0- semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ dans Z, tel que

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{wt} \; pour \; tout \; t \geqslant 0$$

avec $M \geqslant 1$ et w $\in \mathbb{R}$,
le théorème de Hille-Yosida nous a permis de trouver les conséquences de l'hypothèse (H_2) sur l'opérateur f. Ces conséquences ont été données par les propositions et théorèmes suivants :

1. Le théorème 2.1
2. les proposions 2.4 et 2.5, dans le cas où f est de la forme suivante :

$$f(\eta,\varphi) = B\eta + L(\eta,\varphi) \quad pour(\eta,\varphi) \in D(f) \tag{3.7}$$

3. la proposition 2.6 et le théorème 2.2 traitent le cas où f est de la forme (3.7) et Y est inclus dans un autre espace de Banach X, avec injection dense et continue.

Bibliographie

[1] A. Bàtkai, S .Piazzera , *Semigroups for Delay Equations*, Budapest and Tübingen, January 2004

[2] A. Bàtkai, S. Piazzera, *Semigroups for Delay Equations*, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 2005

[3] H. Brezis, *Operateurs Maximaux Monotones*, North-Holland. Amsterdam, 1973.

[4] H. Brezis, *Analsye fonctionnelle*, Théorie et applications, Masson, Paris, 1983

[5] J. A. Burns, T. L. Herdman, and H. Stech, *The Cauchy problem for linear functional differential equations*, in "Integral and Functional Differential Equations" (T. L. Herdman, S. H. Rankin, III, and H. W. Stech, Eds.) Marcel Dekker, 1980.

[6] E. B. Davies, *One-Parameter Semigroups*, Academic Press, London, 1980)

[7] J. Droniou, Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles, 2001 hal-01382368

[8] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators I*, Interscience, New York, 1967

[9] K-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Alfred A. Knopf, 1995.

[10] W. E Fitzgibbon, *Abstract hyperbolic integrodifferential equations*, preprint.

[11] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Reprint of the 1998 edition, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[12] J. K. Hale, *Functional Differential Equations*, vol. 3, Appl. Math. Sci., New York, NY : Springer-Verlag, 1971.

[13] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional- Differential Equations*, vol. 99, Applied Mathematical Sciences, New York, NY : Springer-Verlag, 1993.

[14] F. Kappel et W. Schappacher , *Nonlinear functional differential equations and abstract integral equations*, Proc. Roy. Soc Edinburgh Sect. A **84** (1979), 7l-91.

[15] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, vol. **132**,Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, New York, NY :Springer-Verlag, 1980.

[16] A. A. Keller, *Partial Differential Equations to Diffusion-Based Population and Innovation Models*, Université de Lille Nord de France, `https://pdfs.semanticscholar.org/de02/2aaefeeac1540c6a5d39e80014bbe22bdca7.pdf`

[17] S. G Krein, *Linear differential equations equations in Banach space, in "Translation of Mathematical Monographs"*, Vol. 29, Amer. Math. Soc, Providence, R.I, 1971

[18] K. Kunisch, W.Schappacher , *Necessary conditions for partial differential equations with delay to generate C_0-semigroups*, J.Diff.Eq **50**, 49-79 (1983)

[19] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, New York, NY : Springer-Verlag, 1983.

[20] A. T. Plant, *Nonlinear semigroups of translations in banach space generated by functional differential equations*, J.Math.Anal.Appl. **60** (1977), 67-74

[21] M.Rupflin, *Fixed Point Methods for Nonlinear PDE*, 2017, `https://courses.maths.ox.ac.uk/node/view_material/4738`.

[22] C. C. Travis, G. F. Webb, *Existence and Stability for Partial Functional Differential Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **200** (1974), 395-418

[23] V. Volterra, *Sur la Théorie Mathématique des Phénomènes Héréditaires*, J. Math. Pures Appl. **7** (1928), 249–298.

[24] J. A. Walker, *Dynamical Systems and Evolution Equations, Theory and Applications*, Plenum, New York, 1980

[25] Webb, *Autonomous Nonlinear Functional Differential Equations and Nonlinear Semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **46** (1974), 1–12.

[26] S. Xiao, *Delay effect in the Lasota–Wazewska model with multiple time-varying delays* International Journal of Biomathematics Vol. 11, No. 1 (2018) 1850013 (11 pages)