الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie تلمسان الجزائر

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Option : Probabilités Approfondie et Statistiques

La convergence complète de processus moyenne mobile

Candidate : **SAIDI Houria**

Date : 11 juillet 2019

Membres du Jury :

Président :	M. F. BOUKHARI,	M.C	Universsité de Tlemcen
Encadreur :	M. A. ALLAM,	M.C	Universsité de Tlemcen
Examinateurs :	Mme. W.BENYELLES ,	M.C	Universsité de Tlemcen
	Mme. N. BENSMAIN,	M.C	Universsité de Tlemcen

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

Je remercie **Dieu** tout puissant de m'avoir donné les forces qui m'ont permis de dépasser toutes les difficultés pour réaliser ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mon encadreur **M. A. ALLAM** professeur à la faculté des sciences, université Abou Bekr BelKaid .

Je tiens à le remercier pour sa patience, et surtout pour sa confiance, et pour sa disponibilité et la précision de ses indications. Sans lui ce projet n'aurait pas été mené à terme.

J'adresse mes sinsères remerciements à **M. F. BOUKHARI** maitres de conférences à la faculté des sciences, Universsité Abou Bekr BelKaid pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de ce mémoire.

Avec un grand honneur, j'aimerais présenter mes remerciements et ma gratitude aux mes professeurs **Mme.W.BENYELLES** et **Mme.N.BENSMAIN** , maitres de conférences à la faculté des Sciences, Université Abou Bekr BelKaid pour avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques.

A tous mes enseignants qui m'ont initié aux valeurs authentiques, en signe d'un profond respect et d'un profond amour. Merci à vous tous.

Table des matières

Introduction

Le convergence complète a été introduite par Hsu et Robbins en 1947, elle est plus forte que la convergence presque sûre et la convergence en probabilité. L'étude de cette propriété a connu un développement, surtout après les travaux de Collomb pendant les années 1980.

La convergence complète a été très utilisé dans des travaux concernant la statistique non-paramétrique des données fonctionnelles.
Plusieurs chercheurs ont considéré le problème de la convergence complète des processus moyenne mobile définis par la relation $X_k = \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} c_{j+k} Y_j, k \geq 1$ où $\{Y_j, -\infty < j < +\infty\}$ est une suite de variables aléatoires réelles centrées et $\{c_j, -\infty < j < +\infty\}$ est une suite de nombres réels absolument sommable et sous différentes conditions de dépendance sur la suite (Y_j).
Li([16]) a étudié la convergence complète des moments de la suite $\{X_k, k \geq 1\}$ si les $v.a.$ (Y_j) sont indépendantes et identiquement distribuées. Li et Zhang [16] ont établi la convergence complète des moments de la moyenne $\left\{\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k, n \geq 1\right\}$, pour tout $1 \leq p < 2$, dans le cas où les $v.a.$ (Y_j) sont identiquement distribuées, négativement associées et de variance finie. Chen et al ont étudié la limite complète du processus moyenne mobile (X_k) dans les deux cas : Si la suite (Y_j) est négativement associée (2008) et si elle est ρ-mélangeante (2009). D'autre travaux dans ce sujet existent dans la littérature ; sans être exhaustif, on peut citer les travaux de Zhou ([16]), Baek et al (2006), Yun-Xia (2006), Kim et Ko ([9]) et Budsaba et al ([3])).

Les variables aléatoires sous-gaussiennes ont des propriétés importantes qui permettent d'établir des résultats concernant les inégalités de grande déviation, la convergence des séries des variables aléatoires dépendantes.

Dans ce mémoire, nous présentons essentiellement les travaux réalisés dans [1].

Ce mémoire, est composé de trois chapitres. Dans le premier, nous rappelons quelques notions relative aux processus stochastique, en particulier la stationnarité. Nous introduisons ensuite l'opérateur qui nous permettra de discuter l'inversion d'une moyenne mobile et nous donnons quelques exemples. Nous terminons ce chapitre par le théorème de décomposition de Wold.
Le deuxième chapitre, est consacré aux variables aléatoires sous-gaussiennes et variables aléatoires négativement dépendantes. Nous introduisons ces deux classes et nous rappelons leurs principales propriétés.

Le troisième chapitre est consacré aux résultats obtenus dans [1]. Les auteurs ont étudié la convergence complète d'un processus moyenne mobile d'une suite de variables aléatoires centrées, sous-gaussiennes, négativement dépendantes et de variance finie. En première étape, ils montrent que la suite moyenne mobile ainsi que sa somme partielle sont sous-gaussiennes et ils estiment leurs taux de Gauss. Ensuite, et sous une condition sur les coefficients, les auteurs obtiennent la convergence complète et déterminent la vitesse de convergence.

Chapitre 1

Préliminaires

Une série chronologique provient de la réalisation d'une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in T)$ où l'ensemble T est un intervalle de temps qui peut être discret ou continu.
Dans ce chapitre, on présente quelques notions de bases concernant les séries chronologiques, puis on définit les moyennes mobiles et leurs propriétés fondamentales en illustrant notre travail par des exemples.
Les résultats énoncés dans ce chapitre sont bien connus, nos principales références sont les articles [10], [12], [7].
Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité.

1.1 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Définition 1.1. *La fonction d'autocovariance $(\gamma(t,h))_{h\in\mathbb{Z}}$ mesure la covariance entre une variable et cette même variable à des dates différentes, pour un retard h*

$$\gamma(t,h) = cov(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-h} - \mathbb{E}(X_{t-h}))]$$

Ainsi, $\gamma(0) = V(X_t) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))^2] = \sigma_X^2$
La fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire est une fonction :
paire :

$$\gamma(h) = \gamma(-h)$$

semi-définie positive :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j a_k \gamma(t_j - t_k) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a_j \in \mathbb{R}, \quad \forall t_j \in \mathbb{Z}$$

Définition 1.2. *La fonction d'autocorrélation est définie à partir de la fonction d'autocovariance par :*

$$\rho(t,h) = cor(X_t, X_{t-h}) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

La fonction d'autocorrélation est aussi une fonction paire.

1.2 Processus Stationnaires

Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus stochastique défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Dans toute la suite $\mathcal{L}(X)$ désigne la loi de la variable aléatoire X.

On distingue généralement la stationnarité au sens strict et la stationnarité au sens faible.

Définition 1.3. *(1)* $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ *est dit strictement stationnaire si pour tout* $p \geq 1$,

$$\mathcal{L}(X_1, X_2, ..., X_p) = \mathcal{L}(X_2, X_3, ..., X_{p+1}).$$

(2) $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *est dit strictement stationnaire si pour toute suite* $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{Z}$ *avec* $t_1 < t_2 < ... < t_n$ *et* $h \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{L}(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h}) = \mathcal{L}(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}).$$

Ainsi, un processus aléatoire est strictement stationnaire si ses caractéristiques probabilistes sont invariantes pour tout changement de l'origine du temps.
Dans le cas des processus indexés par $\mathbb{N}$, pour $k \leq p$ et $l > 0$, comme

$$\mathcal{L}(X_1, X_2, ..., X_p) = \mathcal{L}(X_2, X_3, ..., X_{p+1}),$$

on obtient en particulier que $\mathcal{L}(X_k, X_2, ..., X_{p-1}) = \mathcal{L}(X_{k+1}, X_3, ..., X_p)$. Ceci donne, par translation,

$$\mathcal{L}(X_k, X_{k+1}, ..., X_p) = \mathcal{L}(X_{k+l}, X_{k+l+1}, ..., X_{p+l}).$$

Un processus stationnaire $\{X_t, t \in T\}$ a la même loi que $\{X_{t+1}, t \in T\}$.
La stationnarité traduit donc la capacité d'un processus à ne pas dépendre de l'indice temporel : Un décalage temporel n'affecte pas la loi.

Proposition 1.1. *Soit* $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ *un processus stationnaire et* φ *une application mesurable, alors* $\{Y_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ *défini par* $Y_t = \varphi(X_t, X_{t+1}, \dots)$, *est aussi stationnaire. De même si* $\{\, X_t,\ t \in \mathbb{Z}\,\}$ *est stationnaire et* Φ *est une application mesurable, alors* $\{Y_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ *défini par* $Y_t = \Phi(\dots, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \dots)$, *est stationnaire.*

La stationnarité au sens strict est trop restrictive et on assouplit cette condition en définissant la stationnarité du second ordre.

Définition 1.4. *Un processus* $(X_t, t \in T)$ *est dit stationnaire du second ordre ou faiblement stationnaire si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $\forall t \in T,\ \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$.

(ii) $\forall t \in \mathbb{T},\ \mathbb{E}(X_t) = \mu$.

(iii) $\forall (t, h) \in T^2,\ Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$.

En résumé, un processus (X_t) est dit stationnaire du second ordre si sa variance est finie et si sa moyenne, sa variance et sa covariance sont indépendantes du temps. Un tel processus admet donc une loi, qui pour ses deux premiers moments, est invariante par changement de l'origine des temps. En particulier, les variables (X_t) ont une même variance égale à $\gamma(0)$.
Évidemment, tout processus strictement stationnaire et de carré intégrable est faiblement stationnaire. L'exemple le plus connu de processus stationnaire est le processus bruit blanc (noté BB, ou White noise).

Définition 1.5. *Un processus (ε_t) à temps discret est dit bruit blanc faible si $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ et $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = 0$ si $h \neq 0$.*
On appelle bruit blanc fort tout bruit blanc faible tel que les variables (ε_t) sont indépendantes et identiquement distribuées.

Remarque 1.1. *On parle de bruit blanc gaussien lorsque les variables aléatoires (ε_t) suivent une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$*

Dans la suite, nous utiliserons le terme “stationnaire” pour un processus stationnaire de second ordre et nous nous cantonnerons simplement à ce type de stationnarité.

Soit maintenant $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stochastique tel que $\mathbb{E}(X_t) = 0$ et $Var(X_t) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\mathcal{F}_t = \overline{Vect}(X_{t-1}, X_{t-2}, ...)$$

le sous espace vectoriel engendré par $X_{t-1}, X_{t-2}, ...$. En théorie, la meilleure prévision linéaire de X_t à partir des variables $X_{t-1}, X_{t-2}, ...$ est donnée par $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_t}(X_t)$ la projection linéaire de X_t sur $\mathcal{F}_t$.

Définition 1.6. *On appelle processus d'innovation le processus $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ formé des erreurs de prévision, i.e*

$$\varepsilon_t = X_t - \mathcal{P}_{\mathcal{F}_t}(X_t).$$

Notons que si le processus est stationnaire alors la suite des innovations est un bruit blanc. Lorsque le processus d'innovation est nul ($\varepsilon_t = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$), on dit que le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est déterministe. Tout processus déterministe est parfaitement prévisible à l'aide de ses valeurs passées. C'est le cas par exemple, s'il existe une variable aléatoire Y telle que pour tout $t \in \mathbb{Z}$ ou encore si $X_t = (-1)^t Y$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

On introduit maintenant les notions d'inversibilité et de causalité d'un processus stochastique.

Définition 1.7. *1. Un processus stochastique (X_t) est dit inversible si les erreurs s'écrivent en fonctions des innovations passées c'est à dire*

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_{t-i}$$

avec $\sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i| < \infty$.

2. *On dit que le processus stochastique* (X_t) *est causale si les innovations s'écrivent en fonctions des erreurs passées :*

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

avec $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$

1.3 Opérateur de retard

Définition 1.8. *On appelle opérateur de retard l'opérateur* L *qui à tout processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *associe le processus* $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *défini par*

$$X_t = LX_t = X_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 1.2. *L'opérateur* L *est linéaire et inversible, son inverse* $L^{-1} = F$ *est défini par*

$$FX_t = X_{t+1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

L'opérateur F est appelé opérateur d'avance.
Si on compose L avec lui- même on obtient $L^2 = L \circ L$ tel que

$$L^2 X_t = X_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

On peut itérer cette application et définir par récurrence

$$L^k X_t = X_{t-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On définit un polynôme en L noté $P(L) = a_0 I + a_1 L + ... + a_n L^n$ par

$$P(L)X_t = a_0 X_t + a_1 X_{t-1} + ... + a_n X_{t-n}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Par extension, en faisant tendre n vers l'infini, on définit un nouvel opérateur s'écrivant comme une série en L

$$\Psi(L) = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i L^i.$$

Cet opérateur est défini sous réserve que la série de terme général ψ_i soit absolument convergente ($\sum |\psi_i| < +\infty$). Il transforme le processus (X_t) en

$$Y_t = \Psi(L)X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i X_{t-i}.$$

1.4 Processus moyenne mobile

Les processus moyennes mobiles ont été introduits la première fois par Slutzky en (1927).

Définition 1.9. *On appelle processus moyenne mobile d'ordre q, noté $MA(q)$, un processus (X_t) défini par*

$$X_t = \sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \mu, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

où les θ_i sont des paramètres réels non nuls et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus bruit blanc de variance σ^2.

La représentation donnée par 1.1 peut être écrite de la manière

$$X_t = (1 + \theta_1 L + ... + \theta_q L^q)\varepsilon_t = \Theta(L)\varepsilon_t \tag{1.2}$$

où

$$\Theta(L) = \sum_{j=0}^{q} \theta_j L^j,$$

et par convention $\theta_0 = 1$.

1.4.1 Les Caractéristiques du processus MA(q)

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= \mu + (1 + \theta_1 L + ... + \theta_q L^q)\mathbb{E}(\varepsilon_t) \\ &= \mu, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V(X_t) &= V(\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q}) \\ &= V(\varepsilon_t) + \theta_1^2 V(\varepsilon_{t-1}) + ... + \theta_q^2 V(\varepsilon_{t-q}) \\ &= (1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2)\sigma^2. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} cov(X_s, X_t) &= \mathbb{E}[(X_s - \mu)(X_t - \mu)] \\ &= \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{s-i} \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}] \\ &= \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{q} \theta_i \theta_j \mathbb{E}(\varepsilon_{s-i}\varepsilon_{t-j}). \end{aligned}$$

Or

$$\gamma(h) = cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si} \quad h = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $s - i = t - j$ si et seulement si $i = s - t + j$ alors en posant $s - t = h$ on trouve

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j \theta_{h+j}.$$

1.4.2 Inversion de polynômes en L

Soit le polynôme $\Theta(L) = 1 - aL$.

- Si $|a| < 1$ donc si la racine de $1 - az = 0$ est supérieure à 1 en valeur absolue ($|z| = \frac{1}{|a|} > 1$), alors $\Theta(L)$ est inversible et son inverse vaut

$$(\Theta(L))^{-1} = (1 - aL)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} a^i L^i.$$

- Si $|a| > 1$ alors $1 - aL = -aL(1 - \frac{1}{a}F)$. -$aL$ est inversible et son inverse est $-\frac{1}{a}F$. D'autre part la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{a^i}F^i$ existe et est l'inverse de $1 - \frac{1}{a}F$. Ainsi

$$(\Theta(L))^{-1} = (1 - aL)^{-1} = (-\frac{1}{a}F)(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{a^i}F^i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{a^i}F^i.$$

- Dans le cas $|a| = 1, 1 - aL$ n'est pas inversible. Si par exemple $a = 1$, tout processus constant est annulé par l'opérateur $1 - L$.

Plus généralement, soit $\Theta(L)$ est un polynôme en L de degré q, que l'on peut factoriser en calculant ses racines

$$\begin{aligned}\Theta(L) &= 1 - \theta_1 L - ... - \theta_q L^q \\ &= (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)...(1 - \lambda_q L)\end{aligned}$$

Si $\Theta(z)$ n'a pas de racine de module égal à 1, on peut calculer son inverse qui est alors donné par :

$$\begin{aligned}\Theta(L)^{-1} &= (1 - \lambda_1 L)^{-1}(1 - \lambda_2 L)^{-1}...(1 - \lambda_q L)^{-1} \\ &= \frac{k_1}{1 - \lambda_1 L} + ... + \frac{k_q}{1 - \lambda_q L}\end{aligned}$$

si toutes les racines de Θ (c'est à dire $\frac{1}{\lambda_i}$, $i = 1, ..., q$) sont distinctes et où $k_1, ..., k_q$ sont des paramètres qui dépendent de $\lambda_1, ...\lambda_q$,on obtient alors l'expression suivante :

$$\Theta(L)^{-1} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \pi_i L^i.$$

1.4.3 Représentation inversible

Considérons un processus moyenne mobile défini par l'équation (1.2).D'après le paragraphe précédent on obtient alors l'expression suivante :

$$\Theta(L)^{-1} X_t = -\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \pi_i X_{t-i} = \varepsilon_t$$

où les (π_i) sont fonctions des paramètres θ_j, et on peut montrer que $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\pi_i| < \infty$
Si les racines de $\Theta(z) = 0$ sont toutes de module supérieur à 1, on peut montrer que $\pi_i = 0$ pour tout $i < 0$ et on dit que le processus est inversible.
Si les racines de $\Theta(z) = 0$ sont inférieure à 1 en module, mais qu'il n'y a pas de racines de module égal à 1, on peut inverser les racines, quitte à changer de bruit blanc, et supposer que le processus est inversible.

Exemple 1

Soit un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui admet une représentation $MA(1)$

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} = (1-\theta L)\varepsilon_t$$

La racine de $1-\theta z = 0$ est $z = \frac{1}{\theta}$.
Si $|\theta| = 1$ alors la forme $AR(\infty)$ n'existe pas, la représentation est stationnaire mais non inversible.
Si $\theta < 1$ alors $|z| = \frac{1}{|\theta|} > 1$. On a donc

$$\varepsilon_t = (1-\theta L)^{-1}X_t = \sum_{i=0}^{+\infty}\theta^i L^i X_t = X_t + \sum_{i=1}^{+\infty}\theta^i X_{t-i}$$

La forme AR(∞) s'écrit donc :

$$X_t = -\sum_{i=1}^{+\infty}\theta^i X_{t-i} + \varepsilon_t.$$

La représentation est alors inversible, en plus d'être stationnaire et causale.

Exemple 2

Soit (X_t) un processus moyenne mobile d'ordre 2 défini par

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2}$$

où ε_t est un bruit blanc. On commence d'abord par l'étude des caractéristiques de ce processus
1) L'espérance du X_t est

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}(\mu + \varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2})\\ &= \mu + \mathbb{E}(\varepsilon_t) + \beta_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}) + \beta_2\mathbb{E}(\varepsilon_{t-2})\\ &= \mu.\end{aligned}$$

2) La variance du X_t est

$$\begin{aligned}V(X_t) &= \mathbb{E}(X_t-\mu)^2\\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2})^2\\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) + 2\beta_1\mathbb{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + 2\beta_2\mathbb{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + \beta_1^2\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta_2^2\mathbb{E}(\varepsilon_{t-2}^2) + 2\beta_1\beta_2\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})\\ &= \sigma^2 + \beta_1^2\sigma^2 + \beta_2^2\sigma^2\\ &= (1+\beta_1^2+\beta_2^2)\sigma^2\end{aligned}$$

3) La fonction d'autocovariance du X_t est donnée par

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \mathbb{E}(X_t-\mu)(X_{t-h}-\mu)\\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-h} + \beta_1\varepsilon_{t-h-1} + \beta_2\varepsilon_{t-h-2}).\end{aligned}$$

Si $h = 1$, on a

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= \mathbb{E}(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu)\\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} + \beta_1\varepsilon_{t-2} + \beta_2\varepsilon_{t-3})\\ &= \mathbb{E}(\beta_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\beta_2\varepsilon_{t-2}^2)\\ &= \beta_1(1+\beta_2)\sigma^2.\end{aligned}$$

Si $h = 2$, on a

$$\begin{aligned}\gamma(2) &= \mathbb{E}(X_t - \mu)(X_{t-2} - \mu)\\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} + \beta_1\varepsilon_{t-3} + \beta_2\varepsilon_{t-4})\\ &= \mathbb{E}(\beta_2\varepsilon_{t-2}^2)\\ &= \beta_2\sigma^2.\end{aligned}$$

Si $h > 2$, alors $\gamma(h) = 0$.
Finalement, la fonction d'autocovariance de X_t est donnée par

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\beta_1^2+\beta_2^2)\sigma^2 & \text{si} \quad h = 0\\ \beta_1(1+\beta_2)\sigma^2 & \text{si} \quad h = 1\\ \beta_2\sigma^2 & \text{si} \quad h = 2\\ 0 & \text{si} \quad h > 2\end{cases}$$

et la fonction d'autocorrélation est

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad h = 0\\ \dfrac{\beta_1(1+\beta_2)}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & \text{si} \quad h = 1\\ \dfrac{\beta_2}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & \text{si} \quad h = 2\\ 0 & \text{si} \quad h > 2\end{cases}$$

On va étudier maintenant la représentation $AR(\infty)$. Pour cela posons

$$Y_t = X_t - \mu = (1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2)\varepsilon_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

Notons $\Theta^{-1}(L) = \Pi(L)$. $\Pi(L)$ vérifie donc

$$\Theta(L)\Pi(L) = 1$$

Si $\Phi(L) = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} \pi_i L^i$ alors on obtient

$$\pi_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = 0\\ \beta_1^2 - \beta_2 & \text{si} \quad i = 1\\ -\pi_{i-1}\beta_1 - \pi_{i-2}\beta_2 & \text{si} \quad i > 1\end{cases}$$

ceci donne

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_{t-i} - \mu = \varepsilon_t.$$

Proposition 1.2. *[7] Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire centré de fonction d'autocovariance $\gamma(.)$ nulle pour tout $h > q$ et non nulle en q, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $MA(q)$.*

Proposition 1.3. *[7] Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont deux processus non corrélés (ie $\mathbb{E}(X_tY_{t'})$=0 pour tout $(t,t') \in \mathbb{Z}^2$) respectivement $MA(q_X)$ et $MA(q_Y)$ alors le processus $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ définit par $Z_t = X_t + Y_t$ est un processus moyenne mobile d'ordre inférieur ou égal à $max(q_X, q_Y)$.*

Preuve. *Les deux processus étant non corrélés, on a pour tout $h \in \mathbb{N}$*

$$\gamma_Z(h) = \gamma_X(h) + \gamma_Y(h)$$

où $\gamma_X(.)$,$\gamma_Y(.)$ et $\gamma_Z(.)$ sont respectivement les fonctions d'autocovariance des processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$,$(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
Il est évident que $\gamma_Z(h) = 0$ si $h > max(q_X, q_Y)$ donc $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus corrélé d'ordre au max(q_X, q_Y) ce qui conclut la démonstration en utilisant la proposition précédente.

1.5 Représentation de Wold

Considérons un processus stationnaire $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ avec $\mathbb{E}(Z_0) = m$ et $Var(Z_0) = \sigma^2$. Soit $(a_i, i \in \mathbb{Z})$ une suite de nombres réels absolument sommable ($\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i| < +\infty$), alors :

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i Z_{t-i}, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

est un nouveau processus stationnaire. En effet, la série $\sum\limits_{i=\mathbb{Z}} a_i Z_{t-i}$ est une suite convergente dans $\mathbb{L}^2$, car

$$\begin{aligned}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|a_i Z_{t-i}\|_{\mathbb{L}^2} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i| \|Z_{t-i}\|_{\mathbb{L}^2} \\ &= (\gamma(0) + m^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i| < +\infty\end{aligned}$$

L'écriture $\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} a_i Z_{t-i}$ a alors un sens dans $\mathbb{L}^2$ et la variable X_t est de carré intégrable. Les moments de X_t sont indépendants de t :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i Z_{t-i}) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \mathbb{E}(Z_{t-i}) \\ &= m \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= cov(X_t, X_{t+h}) \\
&= cov(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i Z_{t-i}, \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j Z_{t+h-j}) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_i a_j cov(Z_{t-i}, Z_{t+h-j}) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_i a_j \gamma(h+i-j).
\end{aligned}$$

Ainsi, si (ε_t) est un bruit blanc avec $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ alors tout processus de la forme

$$X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varepsilon_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < +\infty$, est stationnaire avec

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_t) = 0 \\
&\gamma(0) = \sigma^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2, \\
&\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k a_{k-h}.
\end{aligned}$$

Définition 1.10. 1. *On appelle moyenne mobile infinie tout processus* $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ *possédant la représentation* (1.3).

2. *Un processus stochastique* $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ *est appelé processus linéaire s'il peut être représenté par une moyenne mobile infinie de bruits.*

Le théorème qui suit justifie l'utilisations des représentations moyennes mobiles infinies dites unilatérales vers le passé, c'est à dire dans lesquelles $a_k = 0$ pour tout $k < 0$.
Théorème de Wold [1948] montre que tout processus stochastique stationnaire au sens faible peut s'écrire comme une somme pondérée de chocs aléatoires, centrés et de même variance, somme éventuellement augmentée d'une composante déterministe.

Théorème 1.1. *Tout processus stochastique stationnaire* (X_t) *peut être représenté sous la forme*

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + m$$

où les (ψ_j) *sont des paramètres réels non aléatoires vérifiant :*

$$\psi_0 = 1$$

$$\psi_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \mathbb{N}^*$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j^2 < +\infty$$

ε_t *est un bruit blanc fort* $(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Le terme m désigne la moyenne du processus. L'existence des moments d'ordre 2 est assurée par la condition $\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j^2 < +\infty$.
Le théorème de Wold est fondamental pour l'analyse des séries temporelles stationnaire. Il montre que les moyennes mobiles d'ordre infini sont intéressantes pour modéliser des processus stationnaires.

Exemple 1

Soit le processus

$$X_t = \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^i \nu_{t-i+1} \quad t \; in \mathbb{Z},$$

où $(\nu_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance 1. Posons

$$\varepsilon_t = \frac{1}{3}\nu_t.$$

On a :

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{i-1} \varepsilon_{t-i+1} \\ &= \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^i \varepsilon_{t-i} \end{aligned}$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance

$$V(\varepsilon_t) = V(\frac{\nu}{3}) = \frac{1}{9}$$

Donc on a bien $\psi_0 = 1$ et $\psi_i = (\frac{1}{3})^i$ et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_i^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{2i} = \sum_{i=0}^{+\infty} (\frac{1}{9})^i = \frac{9}{8} < +\infty$$

Exemple 2

On considère le processus :

$$X_t = \beta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad t \in \mathbb{Z}$$

où $|\beta| < 1$ et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus bruit blanc de variance qui vaut 1.
X_t peut s'écrire comme suit

$$X_t = \beta(\beta X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \beta^2 X_{t-2} + \beta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Par itération, on obtient la représentation

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \beta^j \varepsilon_{t-j} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Ainsi

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} (\beta^j)^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} (\beta^2)^j = \frac{1}{1-\beta^2} < +\infty.$$

Les conditions de théorème de Wold sont satisfaites dans les exemples précédents.

Chapitre 2

Variable aléatoire sous-gaussienne

Dans ce chapitre, nous présentons les variables sous-gaussiennes et strictement sous-gaussiennes qui ont été introduites par Kahane. Nous fournissons quelques exemples simples et illustrons certaines propriétés fondamentales des variables aléatoires sous-gaussiennes. Un certain nombre de distributions, notamment gaussienne et Bernoulli, sont connues pour satisfaire certaines concentrations des inégalités de mesure. Nous analyserons ce phénomène dans une perspective plus générale en considérant la classe des distributions sous-gaussiennes.

2.1 Variable aléatoire sous-gaussienne

2.1.1 Définitions

Définition 2.1. *Une variable aléatoire X est dite sous-gaussienne s'il existe une constante positive α telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}\exp(tX) \leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2}) \tag{2.1}$$

On appelle le standard ou l'écart de Gauss le plus petit réel $\alpha \geq 0$ qui satisfait l'inégalité (2.1) *et on note*

$$\tau(X) = inf\left\{\alpha \geq 0, \mathbb{E}\exp(tX) \leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2}) \quad \forall t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ainsi, X est sous-gaussienne s'il existe un réel positif α tel que la transformée de Laplace de X est dominée par la transformée de Laplace d'une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance α^2.
Lorsque cette condition est satisfaite, on dit que X est α-sous-gaussienne ou sous-gaussienne du paramètre α.

Remarque 2.1. *[4] Si X est une variable aléatoire sous-gaussienne avec $\tau(X) \leq \alpha$, on note $X \sim Sub(\alpha^2)$.*

Définition 2.2. *Soit $X \in Sub(\alpha^2)$, On dit que la variable aléatoire X est strictement sous-gaussienne si*

$$\mathbb{E}(X^2) = \tau^2(X).$$

et on note $X \sim SSub(\alpha^2)$.

Exemples

1) [13] $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ est 1-sous-gaussienne.

En effet
On sait que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors la fonction génératrice des moments $M_X(t)$ est donnée par

$$M_X(t) = \mathbb{E}(\exp(tX)) = \exp(\frac{t^2}{2}).$$

Donc X est strictement 1-sous-gaussienne.
Maintenant, si $Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ alors

$$\mathbb{E}(\exp(tY)) = \exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2})$$

et Y est strictement σ-sous-gaussienne avec $\tau(Y) = \sigma$.

2) [13] Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme $X \sim \mathcal{U}_{[-a,a]}$ avec $a > 0$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp(tX) &= \int_{-a}^{a} \exp(tx)\frac{dx}{2a} \\
&= \frac{1}{2at}[\exp(ta) - exp(-ta)] \\
&= \frac{1}{at} sh(at) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(at)^{2n}}{(2n+1)!} \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(at)^{2n}}{2^n n!} \\
&\leq \exp(\frac{a^2t^2}{2}),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé : $2^n n! \leq (2n+1)!$.
Alors, X est a- strictement sous gaussienne et $\tau(X) = a$.

3) Cet exemple montre que toute variable aléatoire réelle centrée et bornée est une variable sous gaussienne.(cf [13])

Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Soit t fixé, posons :

$$Y = \frac{1+X}{2}\exp(t) + \frac{1-X}{2}\exp(-t) - \exp(tX).$$

Comme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in [-1,1], \quad \exp(tX) \leq \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t),$$

alors la variable aléatoire Y est positive. De plus

$$0 \leq \exp(t.|X|) \leq \exp(t),$$

donc $\exp(t.X)$ admet une espérance et par conséquent Y aussi. Puis par linéarité de l'espérance

$$0 \leq \mathbb{E}(Y) = ch(t) - \mathbb{E}(\exp(tX)).$$

Il en découle que

$$\mathbb{E}(\exp(t.X)) \leq ch(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} \leq \exp(\frac{t^2}{2}).$$

Ainsi X est bien 1-sous-gaussienne.
Si maintenant X est bornée par $\alpha > 0$ et est centrée, alors $\frac{X}{\alpha}$ est bornée par 1 et est centrée (cf [13]). Par suite, pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(\exp(u.\frac{X}{\alpha})) \leq \exp(\frac{u^2}{2}),$$

pour $t = \frac{u}{\alpha}$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\exp(t.X)) \leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2}),$$

on en déduit que X est α-sous-gaussienne.

4) Soit X une variable aléatoire de Rademarcher ie la loi de X est

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$$

où δ_x est la mesure de Dirac au point x.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp(tX) &= \frac{1}{2}\exp(-t) + \frac{1}{2}\exp(t) = ch(t) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} \\ &\leq \exp(\frac{t^2}{2}).\end{aligned}$$

D'où X est 1-sous-gaussienne.

2.1.2 Propriétés des variables sous gaussienne

Lemme 2.1. *[4] soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne alors*

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) \leq \alpha^2.$$

Théorème 2.1. *[13] Soit X une variable aléatoire réelle centrée, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *La transformée de Laplace :pour tout $s \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[\exp(sX)] \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 s^2}{2}\right)$.*
2. *Concentration : Pour tout $t > 0, max(\mathbb{P}(X \geq t), \mathbb{P}(X \leq -t)) \leq \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$.*

3. *Pour tout* $q \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X^{2q}) \leq q!(2\sigma^2)^q$.
4. *Condition d'Orlicz :* $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{X^2}{8\sigma^2}\right)\right] \leq 4$.

Preuve. $1 \Rightarrow 2$ *Par l'inégalité de Markov, on a pour tout* $t, s > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > t) &= \mathbb{P}\left(\exp(sX) > \exp(st)\right)\\ &\leq \frac{\mathbb{E}[\exp(sX)]}{\exp(st)}\\ &\leq \exp\left(\frac{\alpha^2 s^2}{2} - st\right).\end{aligned}$$

En calculant le minimum de la fonction $\phi(s) = \exp(\frac{\alpha^2 s^2}{2} - st)$*, on a*

$$min_{s\geq 0}\exp(\frac{\alpha^2 s^2}{2} - st) = \exp(min_{s\geq 0}(\frac{\alpha^2 s^2}{2} - st)) = \exp(-\frac{t^2}{2\alpha^2})$$

Donc

$$\mathbb{P}(X > t) \leq \exp(-\frac{t^2}{2\alpha^2}).$$

De la même manière, on obtient $\mathbb{P}(X \leq -t) \leq \exp(-\frac{t^2}{2\alpha^2})$
$2 \Rightarrow 3$
On a pour tout $q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^{2q}] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X^{2q} > u)du\\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X| > u^{\frac{1}{2q}})du\\ &\leq 2\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{-u^{\frac{1}{q}}}{2\sigma^2}\right) du.\end{aligned}$$

On pose $v = \frac{u^{1/q}}{2\sigma^2}$*. Puisque* $\forall q \in \mathbb{N}, 2q \leq 2^q$ *alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^{2q}] &\leq (2\sigma^2)^q 2q \int_0^{+\infty} exp(-v)v^{q-1}dv\\ &= (2\sigma^2)^q q(q-1)!\\ &\leq (2\sigma^2)^q q!.\end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 4$
Supposons que pour tout $q \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X^{2q}] \leq (2\sigma^2)^q q!$ *alors, on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{X^2}{8\sigma^2}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k}}{(4\sigma^2)^k k!}\frac{1}{2^k}\right]\\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4\sigma^2)^k k! 2^k}\mathbb{E}(X^{2k})\\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = 4.\end{aligned}$$

$4 \Rightarrow 1$
On suppose que $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{X^2}{8\sigma^2}\right)\right] \leq 2$. *Comme* X *est centrée alors on a pour tout* $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp(tX)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right] \\
&= 1 + \mathbb{E}\left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right] \\
&\leq 1 + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\left[X^2 \exp(|tX|)\right]
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $16\sigma^2|tX| \leq X^2 + 64\sigma^2 t^2$ *alors*

$$|tX| \leq 4\sigma^2 t^2 + \frac{X^2}{16\sigma^2}.$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}\left[\exp(tX)\right] \leq 1 + \frac{t^2}{2}\exp(4\sigma^2 t^2)\mathbb{E}\left[X^2 \exp\left(\frac{X^2}{16\sigma^2}\right)\right]$$

Comme $x \leq \exp(x)$ *alors*

$$\mathbb{E}\left[X^2 \exp\left(\frac{X^2}{16\sigma^2}\right)\right] \leq 16\sigma^2 \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{X^2}{16\sigma^2}\right)\exp\left(\frac{X^2}{16\sigma^2}\right)\right] = 16\sigma^2 \exp\left(\frac{X^2}{8\sigma^2}\right).$$

En utilisant l'hypothèse et l'inégalité $(1+2x) \leq \exp(2x)$ *on tire*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp(tX)\right] &\leq 1 + 8\sigma^2 t^2 \exp(4\sigma^2 t^2)\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{X^2}{8\sigma^2}\right)\right] \\
&\leq 1 + 8\sigma^2 t^2 \exp(4\sigma^2 t^2) \\
&\leq (1 + 8\sigma^2 t^2)\exp(4\sigma^2 t^2) \\
&\leq \exp(8\sigma^2 t^2)\exp(4\sigma^2 t^2) \\
&= \exp\left(12\sigma^2 t^2\right).
\end{aligned}$$

Le théorème suivant montre que la classe des variables aléatoire sous-gaussienne est un espace de Banach pour la norme $\tau(.)$.

Théorème 2.2. *[13] Soient* X *une variable aléatoire b-sous-gaussienne et* α *une constante réelle. Alors la v.a* αX *est* $|\alpha|b$*-sous-gaussienne.*
Si X_1 *et* X_2 *sont deux variables aléatoires telle que* X_i *est* b_i- *sous-gaussienne, alors* $X_1 + X_2$ *est* $(b_1 + b_2)$ *-sous-gaussienne.*

Preuve. *Supposons que* X *est b-sous-gaussienne. Pour tout* $\alpha \neq 0$, *on a*

$$\mathbb{E}\exp(t\alpha X) \leq \exp\left(\frac{b^2\alpha^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{(|\alpha|b)^2 t^2}{2}\right)$$

Donc la v.a αX est $|\alpha|b-$ sous gaussienne.
Supposons maintenant que X_i est b_i sous-gaussienne pour $i = 1, 2$.
En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient pour tout $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp(t(X_1 + X_2)) &\leq (\mathbb{E}\exp(ptX_1))^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}\exp(qtX_2))^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \exp\left(\frac{t^2}{2}(pb_1^2 + qb_2^2)\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2}(pb_1^2 + \frac{p}{p-1}b_2^2)\right)\end{aligned}$$

On minimise la fonction $\phi(p) = \exp\left(\frac{t^2}{2}(pb_1^2 + \frac{p}{p-1}b_2^2)\right)$, en la dérivant par rapport à p puis on résout l'équation $\phi'(p) = 0$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\exp(t(X_1 + X_2)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}(b_1 + b_2)^2\right)$$

Ainsi, la v.a $X_1 + X_2$ est $b_1 + b_2$-sous gaussienne.

Remarque Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telle que X_i est b_i-sous gaussienne. Alors $X_1 + X_2$ est $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$-sous gaussienne, en effet

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp(t(X_1 + X_2)) &= (\mathbb{E}\exp(tX_1)\,(\mathbb{E}\exp(tX_2)) \\ &\leq \exp\left(\frac{t^2}{2}(b_1^2 + b_2^2)\right).\end{aligned}$$

Donc, $X_1 + X_2$ est $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$-sous gaussienne.

Lemme 2.2. *[4] Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_N)$ un vecteur aléatoire réel où les X_i sont des variables indépendantes identiquement distribuées avec $X_i \sim Sub(c^2)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^N$,$\langle X, \alpha\rangle \sim Sub(c^2||\alpha||_2^2)$*
De plus, si $X_i \sim SSub(\sigma^2)$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^N$,$\langle X, \alpha\rangle \sim SSub(\sigma^2||\alpha||_2^2)$

Preuve. *Puisque les X_i sont i.i.d alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp(t\sum_{i=1}^{N}\alpha_i X_i) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{N}\exp(t\alpha_i X_i)\right) \\ &= \prod_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left(\exp(t\alpha_i X_i)\right) \\ &\leq \prod_{i=1}^{N}\exp\left(\frac{c^2(\alpha_i t)^2}{2}\right) = \exp\left((\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2)c^2t^2/2\right)\end{aligned}$$

Donc, $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i X_i$ est une variable aléatoires sous gaussienne avec

$$\tau(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i X_i) \leq c||\alpha||_2$$

D'autre part, si les X_i sont strictement σ- sous gaussienne alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\langle X,\alpha\rangle^2\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i X_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2\mathbb{E}(X_i^2) \\ &= \sigma^2\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2 \\ &= \sigma^2||\alpha||_2^2\end{aligned}$$

Finalement, $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i X_i$ est strictement sous-gaussienne.

2.2 Les variables aléatoires négativement dépendantes

On commence tout d'abord par donner quelques définitions.

2.2.1 Définitions

Définition 2.3. *La fonction de survie $\overline{\mathbb{F}}$ associée à une fonction de répartition F d'un vecteur aléatoire (X,Y) est définie par*

$$\overline{\mathbb{F}}(x,y) = \mathbb{P}(X > x, Y > y)$$

Cette dernière peut également s'écrire en fonction de $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}_{\mathbb{X}}$ et $\mathbb{F}_{\mathbb{Y}}$

$$\overline{\mathbb{F}}(x,y) = 1 - \mathbb{F}_X(x) - \mathbb{F}_Y(y) + \mathbb{F}(x,y)$$

Avec $\mathbb{F}_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ et $\mathbb{F}_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$.

Définition 2.4. *On dit que les variables aléatoires $X_1,...,X_n$ sont négativement dépendantes (ND) si*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}(X_j \leq x_j)\right) \leq \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}(X_j \leq x_j) \tag{2.2}$$

et

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}(X_j > x_j)\right) \leq \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}(X_j > x_j) \tag{2.3}$$

pour tous $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}$.
Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ est dite négativement dépendante (ND) si $\forall i_1,...,i_n \in \mathbb{N}$, $X_{i_1},...,X_{i_n}$ sont ND.

Notons que pour $n = 2$, les conditions (2.2) et (2.3) sont équivalentes (cf[11])

Définition 2.5. *[6] Soit* (X, Y) *un couple de variables aléatoires de fonction de répartition* $\mathbb{F}$*. Le vecteur* (X, Y) *(ou la fonction* $\mathbb{F}$*) est dit négativement dépendant par quadrant* (NDQ) *(respectivement positivement dépendant par quadrant* (PDQ)*) si pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) \leq \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y), \tag{2.4}$$

respectivement

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) \geq \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y) \tag{2.5}$$

Remarque 2.2. *[6] Les inégalités* (2.4) *et* (2.5) *sont respectivement équivalentes à*

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \geq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y), \tag{2.6}$$

respectivement

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \leq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) \tag{2.7}$$

Notation On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des distributions qui satisfont (2.4) et $\mathcal{F}$ l'ensemble des distributions qui satisfont (2.5).

Lemme 2.3. *[11] Soient* X,Y *deux variables aléatoires réelles et* r, s *sont deux fonctions non décroissantes alors*

i) $(X, X) \in \mathcal{F}$.

ii) $(X, Y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (X, -Y) \in \mathcal{G}$.

iii) $(X, Y) \in \mathcal{F} \Rightarrow (r(X), s(Y)) \in \mathcal{F}$.

iv) $(X, Y) \in \mathcal{G} \Rightarrow (r(X), s(Y)) \in \mathcal{G}$.

Preuve. *1) On a*

$$\mathbb{P}(X \leq x, X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x) \geq \mathbb{P}^2(X \leq x)$$

d'où $(X, X) \in \mathcal{F}$.

2) $\Rightarrow$

Soit $(X, Y) \in \mathcal{F}$*. On peut écrire*

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq -y) + \mathbb{P}(X \leq x, Y > -y).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x, Y > -y) &= \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq -y) \\
&\leq \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq -y) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\,(1 - \mathbb{P}(Y \leq -y)) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y > -y)
\end{aligned}$$

on conclut que $(X, -Y) \in \mathcal{G}$.

$\Leftarrow$

Soit $(X, -Y) \in \mathcal{G}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) &= \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x, Y > y) \\
&\geq \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y > y) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\,(1 - \mathbb{P}(Y > y)) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y),
\end{aligned}$$

soit $(X, Y) \in \mathcal{F}$.

3) Soit $(X,Y) \in \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(r(X) \leq x, s(Y) \leq y) &= \mathbb{P}\left(X \leq r^{-1}(x), Y \leq s^{-1}(y)\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(X \leq r^{-1}(x)\right)\mathbb{P}\left(Y \leq s^{-1}(y)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(r(X) \leq x\right)\mathbb{P}\left(s(Y) \leq y\right)\end{aligned}$$

d'où $(r(X), s(Y)) \in \mathcal{F}$
De la même manière,on montre que si $(X,Y) \in \mathcal{G}$ *alors* $(r(X), s(Y)) \in \mathcal{F}$.

2.2.2 Propriétés des variables négativement dépendantes

Lemme 2.4. *[11] Soient X,Y deux v.a.r de carré intégrables, alors*

$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbb{F}(x,y) - \mathbb{F}_{\mathbb{X}}(x)\mathbb{F}_{\mathbb{Y}}(y)\right)dxdy$$

Preuve. *Soient* (X_1, Y_1) *et* (X_2, Y_2) *deux vecteurs indépendants ayant la même distribution* $\mathbb{F}$

$$\begin{aligned}2\left[\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1)\right] &= \mathbb{E}\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)\right] \\ &= \mathbb{E}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[(\mathbf{1}(u,X_1) - \mathbf{1}(u,X_2)) \\ &\quad (\mathbf{1}(v,Y_1) - \mathbf{1}(v,Y_2))]dudv\end{aligned}$$

où

$$\mathbf{1}(u,x) = \begin{cases}1 & si \quad x \geq u \\ 0 & si \quad x < u\end{cases}$$

puisque $\mathbb{E}(XY), \mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)$ *sont finies alors, on applique le théorème de Fubini, on obtient*

$$\begin{aligned}\left[\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1)\right] &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathbb{E}(\mathbf{1}(u,X_1)\mathbf{1}(v,Y_1)) - \mathbb{E}(\mathbf{1}(u,X_1)\mathbf{1}(v,Y_2)) \\ &\quad + \mathbb{E}(\mathbf{1}(u,X_2)\mathbf{1}(v,Y_1)) - \mathbb{E}(\mathbf{1}(u,X_2)\mathbf{1}(v,Y_2)))dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbb{F}(x,y) - \mathbb{F}_{\mathbb{X}}(x)\mathbb{F}_{\mathbb{Y}}(y)\right)dxdy\end{aligned}$$

Corollaire 2.1. *[11] Si* $(X,Y) \in \mathcal{G}$ *alors*

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \leq 0$$

Lemme 2.5. *[2] Soient* $X_1, X_2, ..., X_n$ *des v.a.r ND,* $(f_k)_{k=1,\ldots,n}$ *une suite des fonctions continues strictement croissantes (ou strictement décroissantes) et positives, alors :*

$$\mathbb{E}[\prod_{j=1}^{n} f_j(X_j)] \leq \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}[f_j(X_j)]$$

Lemme 2.6. *[2] Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a.r ND, $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}$ alors :*

$$\mathbb{E}[\prod_{j=1}^{n} \exp(t_j X_j)] \leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(t_j X_j)]$$

Preuve. *Les v.a.r $t_j X_j$ et $\sum_{j=i+1}^{n} t_j X_j$ sont NDQ. Le lemme 2.6 assure que $\exp(t_j X_i)$ et $\exp(\sum_{j=i+1}^{n} t_j X_j)$ sont également NDQ. Il en découle que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\prod_{j=1}^{n} \exp(t_j X_j)] &= \mathbb{E}\left[\exp(t_1 X_1)\exp\left(\sum_{j=2}^{n}(t_j X_j\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\exp(t_1 X_1)\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{j=2}^{n}(t_j X_j\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\exp(t_1 X_1)\mathbb{E}\left[\exp(t_2 X_2)\exp\left(\sum_{j=3}^{n}(t_j X_j\right)\right] \\
&\leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(t_j X_j)]
\end{aligned}$$

Lemme 2.7. *[11] Le vecteur (X, Y) est négativement dépendant par quadrant si $\mathbb{P}(Y \leq y/X = x)$ est non décroissant en x, et il est positivement dépendant par quadrant si $\mathbb{P}(Y \leq y/X = x)$ est non croissant en x.*

Exemple 2.1. *[11] Soient X, Y, U trois variables aléatoires réelles avec X est indépendante de U et $Y = \alpha + \beta X + U$ alors*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y/X = x) &= \mathbb{P}(\alpha + \beta X + U \leq y/X = x) \\
&= \mathbb{P}(U \leq y - \alpha - \beta x/X = x) \\
&= \mathbb{P}(U \leq y - \alpha - \beta x)
\end{aligned}$$

ainsi, (X, Y) est positivement dépendant par quadrant si $\beta > 0$, et négativement dépendant par quadrant si $\beta < 0$

Chapitre 3

La convergence complète des moyennes mobiles

Dans ce dernier chapitre, nous développons les résultats obtenus dans [1] . Les auteurs ont étudié la convergence complète de la moyenne $\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $p > \frac{1}{2}$, dans le cas des v.a.r sous-gaussiennes négativement dépendantes. De plus, ils obtiennent la vitesse de convergence complète sous des conditions appropriées sur la suite $(c_j)_{j\in\mathbb{R}}$.

Définition 3.1. *On dit que la suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque complètement vers la constante a lorsque $n \to \infty$ si :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n - a| > \varepsilon] < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

On note $lim_{n\to\infty} X_n = a$ $\mathbb{P}$.c.o.

On dit que la vitesse de convergence complète de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X est d'ordre (u_n) si

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > u_n\varepsilon_0] < \infty$$

Les deux lemmes suivants sont techniques et nous seront utiles dans la suite.

Lemme 3.1. *[5] Soit $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i$ une série de nombres réels absolument convergente avec $c = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i$ alors pour tout $k > 1$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(|\sum_{j=i+1}^{i+n} c_j| \right)^k = |c|^k$$

Corollaire 3.1. *[5] Soit $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i$ une série des nombres réels absolument convergente avec $c = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i$, si $c_j = 0, j < 0$ alors nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=i+1}^{i+n} c_j \right)^2 = c^2,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n-i} c_j \right)^2 = c^2$$

Lemme 3.2. *[1] Soit $(Y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite des variables aléatoires sous-gaussiennes et négativement dépendantes avec $\tau(Y_j) \leq \alpha$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.*
Soit $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels absolument sommable, alors

i) La v.a.r $X_n = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{n+j} Y_j, n > 1$ est sous-gaussienne avec

$$\tau(X_n) \leq 2\alpha \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{n+j}^2}.$$

ii) La v.a.r $\sum_{k=1}^{n} X_k, n > 1$ est sous-gaussienne avec

$$\tau(\sum_{k=1}^{n} X_k) \leq 2\alpha \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{ni}^2},$$

où $a_{ni} = \sum_{k=i+1}^{n+i} c_k$.

iii) Si $c_j = 0$, $\forall j < 0$, et $X_n = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j Y_{n-j}, n \geq 1$. Alors la v.a.r X_n est sous-gaussienne avec

$$\tau(X_n) \leq \sqrt{2}\alpha \sqrt{\sum_{j=0}^{+\infty} c_j^2},$$

et la v.a.r $\sum_{k=1}^{n} X_k, n > 1$ est sous-gaussienne avec

$$\tau(\sum_{k=1}^{n} X_k) \leq 2\alpha \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} a_{ni}^2 + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2}$$

où $a_{ni} = \sum_{j=i+1}^{n+i} c_j$ et $b_{ni} = \sum_{j=0}^{n-i} c_j$.

Preuve. *i) On définit, pour tout $m > n \geq 1$:*

$$X_{nm} = \sum_{j=0}^{m} c_{n+j} Y_j + \sum_{j=1}^{m} c_{n-j} Y_{-j} = W_{nm} + \overline{W}_{nm}$$

Posons $A^+ = \{j, c_{n+j} \geq 0\}$, $B^+ = \{j, c_{n-j} \geq 0\}, n \geq 1$ et A^-, B^- sont les complémentaires de A^+ et B^+ respectivement.
En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 2.6, on obtient pour tout

nombre réel t.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp(tX_{nm}) &= \mathbb{E}[\exp(tW_{nm} + t\overline{W}_{nm})] \leq \sqrt{\mathbb{E}\exp(2tW_{nm})\mathbb{E}\exp(2t\overline{W}_{nm})} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\exp(2t\sum_{j=0}^{m} c_{n+j}Y_j)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\exp(2t\sum_{j=1}^{m} c_{n-j}Y_{-j})\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\exp(2t\sum_{j\in A^+} c_{n+j}Y_j)\exp(2t\sum_{j\in A^-} c_{n+j}Y_j)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\left(\mathbb{E}\exp(2t\sum_{j\in B^+} c_{n-j}Y_{-j})\exp(2t\sum_{j\in B^-} c_{n-j}Y_{-j})\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\exp(4t\sum_{j\in A^+} c_{n+j}Y_j)\mathbb{E}\exp(4t\sum_{j\in A^-} c_{n+j}Y_j)\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\left(\mathbb{E}\exp(4t\sum_{j\in B^+} c_{n-j}Y_{-j})\mathbb{E}\exp(4t\sum_{j\in B^-} c_{n-j}Y_{-j})\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \left(\prod_{j\in A^+}\mathbb{E}\exp(4tc_{n+j}Y_j)\prod_{j\in A^-}\mathbb{E}\exp(4tc_{n+j}Y_j)\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\left(\prod_{j\in B^+}\mathbb{E}\exp(4tc_{n-j}Y_{-j})\prod_{j\in B^-}\mathbb{E}\exp(4tc_{n-j}Y_{-j})\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Par hypothèse $(Y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *étant sous gaussienne et* $\tau(Y_j) \leq \alpha$ *donc :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(tX_{nm})) &\leq \left[\prod_{j\in A^+}\exp(8t^2\alpha^2c_{n+j}^2)\prod_{j\in A^-}\exp(8t^2\alpha^2c_{n+j}^2)\right]^{\frac{1}{4}} \\
&\left[\prod_{j\in B^+}\exp(8t^2\alpha^2c_{n-j}^2)\prod_{j\in B^-}\exp(8t^2\alpha^2c_{n-j}^2)\right]^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \left(\exp(8t^2\alpha^2\sum_{j\in A^+}c_{n+j}^2 + 8t^2\alpha^2\sum_{j\in A^-}c_{n+j}^2)\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\left(\exp(8t^2\alpha^2\sum_{j\in B^+}c_{n+j}^2 + 8t^2\alpha^2\sum_{j\in B^-}c_{n+j}^2)\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \left(\exp(8t^2\alpha^2\sum_{j=0}^{m}c_{n+j}^2 + 8t^2\alpha^2\sum_{j=1}^{m}c_{n-j}^2)\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \exp(2t^2\alpha^2\sum_{j=-\infty}^{+\infty}c_{n+j}^2).
\end{aligned}$$

Le lemme de Fatou donne

$$\mathbb{E}(\liminf_{m\to+\infty}\exp(tX_{nm})) \leq \liminf_{m\to+\infty}\mathbb{E}(\exp(tX_{nm})).$$

Ceci implique

$$\mathbb{E}(\exp(tX_n)) \leq \exp(2t^2\alpha^2\sum_{j=-\infty}^{+\infty}c_{n+j}^2)$$

Donc X_n est une v.a sous gaussienne avec

$$\tau(X_n) \leq 2\alpha\sqrt{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}c_{n+j}^2}.$$

ii) On a

$$\sum_{k=1}^{n}X_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}c_{k+j}Y_j$$

On définit, pour tout $m > n \geq 1$

$$X_{km} = \sum_{i=0}^{m}c_{k+i}Y_i + \sum_{i=1}^{m}c_{k-i}Y_{-i}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}X_{km} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{m}c_{k+i}Y_i + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{k-i}Y_{-i}\\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}c_{k+i}Y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}c_{k-i}Y_{-i}\\ &= \sum_{i=0}^{m}a_{ni}Y_i + \sum_{i=1}^{m}a_{-ni}Y_{-i}\\ &=: V_{nm} + \overline{V}_{nm}\end{aligned}$$

avec $a_{ni} = \sum_{k=1+i}^{n+i}c_k$ et $a_{-ni} = \sum_{k=1-i}^{n-i}c_k$.
Soient $A^+ = \{i, a_{ni} \geq 0\}$ $B^+ = \{i, a_{-ni} \geq 0\}$, $n > 1$ et A^-,B^- sont les complémentaires de A^+ et B^+ respectivement.
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 2.6, on obtient pour tout

nombre réel t

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp(t\sum_{k=1}^{n}X_{km}) &= \mathbb{E}[\exp(tV_{nm}+t\overline{V}_{nm})] \leq \sqrt{\mathbb{E}\exp(2tV_{nm})\mathbb{E}\exp(2t\overline{V}_{nm})} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\exp(2t\sum_{i=0}^{m}a_{ni}Y_i)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\exp(2t\sum_{i=1}^{m}a_{-ni}Y_{-i})\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\exp(2t\sum_{i\in A^+}a_{ni}Y_i)\exp(2t\sum_{i\in A^-}a_{ni}Y_i)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\mathbb{E}\exp(2t\sum_{i\in B^+}a_{-ni}Y_{-i})\exp(2t\sum_{i\in B^-}a_{-ni}Y_{-i})\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\exp(4t\sum_{i\in A^+}a_{ni}Y_i)\mathbb{E}\exp(4t\sum_{i\in A^-}a_{ni}Y_i)\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\quad \left(\mathbb{E}\exp(4t\sum_{i\in B^+}a_{-ni}Y_{-i})\mathbb{E}\exp(4t\sum_{i\in B^-}a_{-ni}Y_{-i})\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

$(Y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *étant sous gaussienne, donc*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp(t\sum_{k=1}^{n}X_{km}) &\leq \left(\prod_{i\in A^+}\exp(8t^2\alpha^2a_{ni}^2)\prod_{i\in A^-}\exp(8t^2\alpha^2a_{ni}^2)\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\quad \left(\prod_{i\in B^+}\exp(8t^2\alpha^2a_{-ni}^2)\prod_{i\in B^-}\exp(8t^2\alpha^2a_{-ni}^2)\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \left(\exp(8t^2\alpha^2\sum_{i\in A^+}a_{ni}^2+8t^2\alpha^2\sum_{i\in A^-}a_{ni}^2)\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\quad \left(\exp(8t^2\alpha^2\sum_{i\in B^+}a_{ni}^2+8t^2\alpha^2\sum_{i\in B^-}a_{ni}^2)\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \left(\exp(8t^2\alpha^2\sum_{i=0}^{m}a_{ni}^2+8t^2\alpha^2\sum_{i=1}^{m}a_{-ni}^2)\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \exp\left(2t^2\alpha^2\sum_{i=0}^{m}a_{ni}^2+2t^2\alpha^2\sum_{i=1}^{m}a_{-ni}^2\right) \\
&\leq \exp\left(2t^2\alpha^2\sum_{i=0}^{+\infty}a_{ni}^2+2t^2\alpha^2\sum_{i=1}^{+\infty}a_{-ni}^2\right) \\
&\leq \exp\left(2t^2\alpha^2\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_{ni}^2\right).
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Fatou

$$\mathbb{E}(\liminf_{m\to+\infty}\exp(t\sum_{k=1}^{n}X_{km}) \leq \liminf_{m\to+\infty}\mathbb{E}(\exp(t\sum_{k=1}^{m}X_{km})).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(\exp(t\sum_{k=1}^{n} X_k)) \leq \exp(2t^2\alpha^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{ni}^2)$$

Donc, $\sum_{k=1}^{n} X_k$ *est une v.a sous gaussienne avec*

$$\tau(\sum_{k=1}^{n} X_k) \leq 2\alpha\sqrt{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{ni}^2}.$$

A) Soit $X_n = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j Y_{n-j}$ *et* $c_j = 0$ *pour tout* $j < 0$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp(tX_{nm}) &= \mathbb{E}\left[\exp(t\sum_{j\in A^+} c_j Y_{n-j})\exp(t\sum_{j\in A^-} c_j Y_{n-j})\right] \\
&\leq \left(\mathbb{E}\exp(2t\sum_{j\in A^+} c_j Y_{n-j})\mathbb{E}\exp(2t\sum_{j\in A^-} c_j Y_{n-j})\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\prod_{j\in A^+}\mathbb{E}\exp(2tc_jY_{n-j})\prod_{j\in A^-}\mathbb{E}\exp(2tc_jY_{n-j})\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\exp(2t^2\alpha^2\sum_{j\in A^+} c_j^2)\exp(2t^2\alpha^2\sum_{j\in A^-} c_j^2)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\exp(2t^2\alpha^2\sum_{j=0}^{m} c_j^2)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \exp\left(\alpha^2 t^2\sum_{j=0}^{m} c_j^2\right)
\end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient

$$\mathbb{E}\exp(tX_n) \leq \exp(\alpha^2 t^2\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2)$$

Ainsi,X_n *est sous gaussienne.*

iii) $\sum_{k=1}^{n} X_k$ *peut s'écrire comme suit*

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} c_j Y_{k-j} = \sum_{i=1}^{n} b_{ni}Y_i + \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni}Y_{-i}$$

où $a_{ni} = \sum_{j=1+i}^{n+i} c_j$ *et* $b_{ni} = \sum_{j=0}^{n-i} c_j$.
On définit, pour tout $m > n \geq 1$

$$X_{nm} = \sum_{i=1}^{n} b_{ni}Y_i + \sum_{i=0}^{m} a_{ni}Y_{-i}.$$

Maintenant similairement à la preuve de A),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(tX_{nm})) &= \mathbb{E}\left(\exp(t\sum_{i=1}^{n} b_{ni}Y_i + t\sum_{i=0}^{m} a_{ni}Y_{-i})\right)\\
&\leq \sqrt{\mathbb{E}(\exp(2t\sum_{i=1}^{n} b_{ni}Y_i)).\mathbb{E}(\exp(2t\sum_{i=0}^{m} a_{ni}Y_{-i}))}\\
&\leq \left(\mathbb{E}\exp(4t\sum_{i\in A^+} b_{ni}Y_i)\mathbb{E}\exp(4t\sum_{i\in A^-} b_{ni}Y_i)\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\left(\mathbb{E}\exp(4t\sum_{i\in B^+} a_{ni}Y_{-i})\mathbb{E}\exp(4t\sum_{i\in B^-} a_{ni}Y_{-i})\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\leq \left(\prod_{i\in A^+}\mathbb{E}\exp(4tb_{ni}Y_i)\prod_{i\in A^-}\mathbb{E}\exp(4tb_{ni}Y_i)\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\left(\prod_{i\in B^+}\mathbb{E}\exp(4ta_{ni}Y_{-i})\prod_{i\in B^-}\mathbb{E}\exp(4ta_{ni}Y_{-i})\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\leq \left(\prod_{i\in A^+}\exp(8t^2\alpha^2 b_{ni}^2)\prod_{i\in A^-}\exp(8t^2\alpha^2 b_{ni}^2)\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\left(\prod_{i\in B^+}\exp(8t^2\alpha^2 a_{ni}^2)\prod_{i\in B^-}\exp(8t^2\alpha^2 a_{ni}^2)\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\leq \left(\exp(8t^2\alpha^2\sum_{i\in A^+} b_{ni}^2 + 8t^2\alpha^2\sum_{i\in A^-} b_{ni}^2)\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\left(\exp(8t^2\alpha^2\sum_{i\in B^+} a_{ni}^2 + 8t^2\alpha^2\sum_{i\in B^-} a_{ni}^2)\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\leq \left(\exp(8t^2\alpha^2\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 + 8t^2\alpha^2\sum_{i=0}^{m} a_{ni}^2)\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\leq \exp\left(2t^2\alpha^2\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 + 2t^2\alpha^2\sum_{i=0}^{m} a_{ni}^2\right)\\
&\leq \exp\left(2t^2\alpha^2\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 + 2t^2\alpha^2\sum_{i=0}^{+\infty} a_{ni}^2\right)\\
&\leq \exp\left(2t^2\alpha^2(\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 + \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni}^2)\right)
\end{aligned}
$$

En utilisant le lemme de Fatou, on obtient finalement

$$
\mathbb{E}(\exp(\sum_{k=1}^{n} X_k)) \leq \exp\left(2t^2\alpha^2(\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 + \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni}^2)\right)
$$

Donc la v.a $\sum_{k=1}^{n} X_k$ est sous gaussienne avec

$$\tau(\sum_{k=1}^{n} X_k) \leq 2\alpha\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 + \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni}^2}$$

Théorème 3.1. *[1] Soient $(Y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite des v.a.r sous gaussienne négativement dépendantes avec $\tau(Y_j) \leq \alpha$ pour tout entier j et (c_j) une suite de nombres réels absolument sommable telle que $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j = c$. Alors pour tout $p > \frac{1}{2}$,*

$$\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} X_k \to 0, \quad \mathbb{P}.c.o \quad n \to \infty \tag{3.1}$$

où $X_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{j+k}Y_j$,pour tout $k > 1$
De plus, si $c_j = 0, j < 0$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} c_j = c$, alors (3.1) est satisfaite.

Preuve.

$$\sum_{k=1=}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_{i+k}Y_i = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{ni}Y_i$$

où $a_{ni} = \sum_{j=i+1}^{n+i} c_j$
En appliquant les lemmes 2.6 et 3.2 la v.a $\sum_{k=1=}^{n} X_k$ est sous gaussienne et son écart de gauss vérifie

$$\tau(\sum_{k=1}^{n} X_k) \leq 2\alpha\sqrt{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{ni}^2},$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\frac{1}{n^p}|\sum_{k=1}^{n} X_k| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|\sum_{k=1=}^{n} X_k| > \varepsilon n^p)\\ &\leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2p}}{8\alpha^2\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{ni}^2}\right).\end{aligned}$$

D'autre part, et d'après le Corollaire 3.1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{ni}^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{j=i+1}^{n+i} c_j\right)^2 = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j\right)^2 = c^2.$$

Par suite

$$\exists \quad 0 < M < \infty \quad \textit{telque} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{ni}^2 \leq M.$$

Il s'en suit que

$$\mathbb{P}(|\sum_{k=1}^{n} X_k| > \varepsilon n^p) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2p-1}}{8\alpha^2 M}\right),$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|\sum_{k=1}^{n} X_k| > \varepsilon n^p) \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2p-1}}{8\alpha^2 M}\right).$$

La série de terme général $U_n = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2p-1}}{8\alpha^2 M}\right)$ est convergente. Ainsi d'où

$$\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} X_k \to 0, \quad \mathbb{P}.c.o \quad n \to \infty$$

Proposition 3.1. *[1] Soient* $(Y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *une suite des v.a gaussiennes standard i.i.d avec* $c_0 = 1$, $c_j = -\beta^j, j > 1, 0 < \beta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $X_n = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j Y_{n-j}$, *alors pour tout* $p > \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} X_k \to 0, \quad \mathbb{P}.c.o \quad n \to \infty$$

Preuve. *Le processus* $(X_n)_{n\geq 1}$ *est gaussien standard de covariance négative. En effet Comme* $(Y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *une suite des v.a gaussiennes standard i.i.d, alors* $X_n = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j Y_{n-j}$ *suit une loi normale* $\mathcal{N}(0, \sum_{j=0}^{\infty} c_j^2)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n X_{n+k}) &= \mathbb{E}(\sum_{j=0}^{+\infty} c_j Y_{n-j} \sum_{i=0}^{+\infty} c_i Y_{n+k-i}) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} c_j c_i \mathbb{E}(Y_{n-j} Y_{n+k-i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n-j} Y_{n+k-i}) &= \begin{cases} 1 & si \quad n-j = n+k-i \\ 0 & si \quad n-j \neq n+k-i \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & si \quad i = j+k \\ 0 & si \quad i \neq j+k \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n X_{n+k}) &= \sum_{j=0}^{+\infty} c_j c_{j+k} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \beta^j \beta^{j+k} \\
&= -\beta^k + \sum_{j=1}^{+\infty} \beta^{2j+k} \\
&= -\beta^k (1 - \sum_{j=1}^{+\infty} \beta^{2j}) \\
&= -\frac{\beta^k (1 - 2\beta^2)}{1 - \beta^2} \\
&= \gamma(k) < 0
\end{aligned}$$

La loi conditionnelle de X_n *sachant* $X_{n+k} = y$, *notée* $\mathbb{P}\left(X_n / X_{n+k} = y\right)$ *est normale d'espérance*

$$\mathbb{E}\left(X_n / X_{n+k} = y\right) = \beta^{-k} y.$$

Ainsi, cette loi conditionnelle est non décroissante en y. *En utilisant le lemme 2.7,* X_n *et* X_{n+k} *sont donc deux variables négativement dépendante.*
D'autre part, d'après le lemme 3.2, la v.a

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni} Y_{-i} + \sum_{i=1}^{n} b_{ni} Y_i$$

est sous-gaussien et son écart de gauss est définit par

$$\tau^2(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni}^2 + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2$$

où $a_{ni} = \sum_{j=i+1}^{n+i} c_j$ *et* $b_{ni} = \sum_{j=0}^{n-i} c_j$.
La va $\sum_{k=1}^{n} X_k$ *est aussi strictement sous-gaussienne car*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2 &= \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ni}Y_{-i} + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}Y_i)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni}^2\mathbb{E}(Y_{-i}^2) + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2\mathbb{E}(Y_i^2) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{ni}\mathbb{E}(Y_{-i}Y_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni}^2 + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 \\ &= \tau^2(\sum_{k=1}^{n} X_k)\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2 = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2 = \frac{1-2\beta^2}{1-\beta^2}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = \frac{1-2\beta}{1-\beta} = c < \infty$$

Alors, sous ces conditions le Corollaire 3.1 est applicable. Il en résulte que

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{ni}^2 + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 = \Theta(n)$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $p > \frac{1}{2}$ *nous obtenons*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\sum_{k=1}^{n} X_k| > \varepsilon n^p) \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2p-1}}{2M_1}\right) < \infty$$

Théorème 3.2. *[1] Soient* $(Y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *une suite des v.a sous gaussienne négativement dépendante avec* $\tau(Y_j) \leq \alpha$ *pour tout entier* j *et* (c_j) *une suite de nombres réels absolument sommable tel que* $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j = c$. *Si* $p > \frac{1}{2}$, *alors pour tout* $\beta > 0$ *et* $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\mathbb{P}(|\sum_{k=1}^{n} X_k| > \varepsilon n^p) < \infty \tag{3.2}$$

où $X_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{j+k}Y_j$, *pour tout* $k > 1$
De plus, si $c_j = 0, j < 0$ *avec* $\sum_{j=0}^{+\infty} c_j = c$ *et* p, β *satisfont les conditions précédentes, alors* (3.2) *est satisfaite.*

Preuve. *Similairement, nous appliquons les lemmes 2.6, 3.2 et le théorème 3.1*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\mathbb{P}(|\sum_{k=1}^{n} X_k| > \varepsilon n^p) &\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2p}}{4\alpha^2\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{ni}^2}\right)\\ &\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2p-1}}{4\alpha^2 M}\right) < \infty\end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2p-1}}{4\alpha^2 M}\right) < \infty$ *car on a pour tout* $p > \frac{1}{2}$ *et* $\beta > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2p-1}}{4\alpha^2 M}\right) < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} x^{\beta}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 x^{2p-1}}{4\alpha^2 M}\right)dx < \infty$$

Bibliographie

[1] Amini.A.M, Nili Sani A.Bozorgnia :*Complete convergence of moving - average processus under negative dependence Sub-Gaussian assumption, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 38(2012).*

[2] Bozorgnia.A,Patterson.G and Taylor.R.L :*limit theorems for ND random variables,World Congress Nonlinear analysis, 92(1996)1639-1650.*

[3] Budsaba.K,Chen.P and Volodin.A :*Limiting behavior of moving average process based on a sequence of ρ-mixing random variables,Thail.Stat. 5(2007)69-80.*

[4] Buldygin.V and Kozachenk.Y : *Metric Characterization of Random Variables and Random processus. American Mathematical Society, Providence, RI, (2000).*

[5] Burton.R.M and Dehling.H :*large deviations for some weakly dependent random processus,statist.Probab.Lett. 9(1990)397-401.*

[6] Chabot.M :*concept de dependance et coupule,CaMUs, 4,48-71.*

[7] Gardes.L :*Série chronologique (2017)*

[8] Hsu.P.L and Robbins.H :*Complete convergence and the law of large numbers,Proc.Nat.Acad.Sci. 33(1947) 25-31.*

[9] kim.t.S and ko.M.H :*Complete moment convergence of moving average processus under dependence assumption,Statist.Probab.Lett. 78(2008)839-846.*

[10] Lagnoux.A :*Renforcement statistique,série chronologique,université de Toulouse.*

[11] LEHMANN.E.L :*Some concept of dependence,Ann.Math.Statist. 37(1966)1137-1153.*

[12] Perraudin.C :*Série chronologique,quelques éléments de cour,université de Paris. (2004.2005)*

[13] Rivasplta.O :*Sub-Gaussian random variable : An expository note 12 Novembre (2012).*

[14] Sadeghi.H and Bozorgnia.A :*Moving-average and complete convergence,Bull.Iranian Math.Soc. 20(1994), no.1,37-42.*

[15] Salmon.J :*Statistical learning and Application*

[16] Li.Y.X, and Zhang.L.Z :*Complete moment convergence of moving average processus under dependence assumption,Statist.Probab.Lett. 70(2004),no.3,191-197.*

Résumé : L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier la convergence complète des processus moyennes mobiles définis par

$$X_n = \sum_{j=0}^{+\infty} c_{n+j} Y_j$$

où $(Y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite des v.a.r sous-gaussienne négativement dépendantes et $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels absolument sommable.
Dans ce travail nous avons développé les résultats obtenus par Amini Dehak, Mohammad, Nili Sani, H.R. et Bozorgnia, A dans leurs article [1] qui ont montré que ces processus sont des variables aléatoires sous gaussienne avec

$$\tau(X_n) \leq \alpha$$

De plus, sous des conditions appropriés sur la suite $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et si $(Y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une suite des v.a.r négativement dépendantes dominée par Y tel que Y est une variable aléatoire sous gaussienne avec $\tau(Y) \leq \alpha$ alors tous les résultats restent valides.

Abstract : The main purpose of this text is to study the complete convergence for moving average processes defined thus

$$X_n = \sum_{j=0}^{+\infty} c_{n+j} Y_j$$

Where $(Y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ is a two sieled infinite sequence of negative dependent sub-gaussian random variables and $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ is an absolutely summable sequence of real numbers.
In this work, we have developed the results obtained by Amini Dehak, Mohammad, Nili Sani, H.R. et Bozorgnia, A in their articles [1] which have proved that this processes are sub-gaussian random variables with

$$\tau(X_n) \leq \alpha$$

Moreover if $(Y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ is a doubly infinite sequence of negative dependent random variable dominated by Y such that Y is a sub-gaussian random variable with $\tau(Y) \leq \alpha$ under suitable conditions on the sequence $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, then all of the above theorems and lemmas remain true.