République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

جامعة أبو بكر بلقايد

UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : Equations aux dérivées partielles et applications

présenté par

Belmokhtar Mokhtar Abde Razak

Soutenu le : 01/07/2019

Problème elliptique semi-linéaire et non-linéaire avec un terme singulier

Soutenu devant le jury composé de :

M. G. Senouci Bereksi	MCA, Université de Tlemcen	Président
M. A. R. Leggat	MAA, Université de Tlemcen	Examinateur
M. M. Mamchaoui	MCB, Université de Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire : 2018-2019

Dédicaces

A ma chère mère en témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tous les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entoure.

A mon cher père, le plus beau père dans ce monde, pour son encouragement, sa confiance , son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant ma gratitude, mon profond amour et ma passion.

A mes chères soeurs et frères.

"Les bienfaits que nous avons reçus de nos parents sont les plus grands de tous."
Socrate ; Le monde grec -Ve s. av.J.-C

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le bon Dieu le tout puissant de m'avoir donné la force et le courage durant ces années d'études et de mener à bien ce modeste travail .

C'est avec beaucoup de plaisir que j'exprime ici ma profonde gratitude à mon encadreur M. *M. Mamchaoui*, pour son encadrement et son soutien, sa disponibilité, et aussi pour le temps qu'il a consacré à diriger ce mémoire. Je le remercie aussi pour sa gentillesse, sa modestie et ces précieux conseils.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à :

M. *G. Senouci Bereksi* pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury. Toute ma reconnaissance également à la lecture de mon travail.
M. *A. Bensedik* et M. *A. R. Leggat* d'avoir accepté d'être dans le jury et surtout d'en être examinateurs. Je vous remercie pour le temps consacré à la lecture de ce travail .

Mon respect et mes remerciements vont ensuite, aux deux personnes les plus chères pour moi, ma mère et mon père, pour leurs amour, leurs conseils ainsi que leurs soutien inconditionnel, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais faire et par conséquent ce mémoire.

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et toutes celles que j'ai connues au département de mathématiques.

Table des matières

Introduction **1**

1 Préliminaires **4**

1.1 La convergence faible 4

1.1.1 La convergence faible dans un Banach 4

1.2 Les espaces L^p 6

1.2.1 Convergence faible dans espaces L^p 8

1.3 Espaces de Sobolev 8

1.3.1 Théorème des injections 10

1.4 Notion de troncature 10

1.5 Théorèmes d'existence 11

2 Problème elliptique semi-linéaire avec un terme singulier **14**

2.1 Introduction 14

2.2 Le problème approximant 15

2.3 Résultats d'existence pour donnée dans $L^1(\Omega)$ 21

2.3.1 Le cas $\gamma = 1$ 21

2.3.2 Le cas $\gamma > 1$ 22

2.4 Résultats de régularité 24

2.4.1 Le cas $\gamma = 1$ 24

2.4.2 Le cas $\gamma > 1$ 26

2.4.3 Le cas $\gamma < 1$ 27

3 Problème elliptique non-linéaire avec un terme singulier **29**

3.1 Introduction 29

3.2 Le problème approximant 30

3.3 Passage à la limite 35

3.3.1 Le cas $\gamma = 1$ 35

3.3.2 Le cas $\gamma > 1$ 38

3.3.3 Le cas $\gamma < 1$ 39

Bibliographie **43**

Notations

Notation	Définition
$x=(x_1,x_2,...,x_N)$	Elément de $\mathbb{R}^N$
$r=\lvert x\rvert=\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2)}$	Module de x
$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradient de u
Δu	Laplacien de u
q	Exposent conjugué de p, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
m'	Exposent conjugué de m, $\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}=1$
$p^*=\frac{Np}{(N-p)}$	Exposent critique de Sobolev
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
supp (u)	Support de la fonction u
$mes(A)=\lvert A\rvert$	Mesure de Lebesgue de $A\subset\mathbb{R}^N$
$\lVert\cdot\rVert_s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\lVert\cdot\rVert_X$	Norme dans l'espace X
X'	Espace dual de X
$p.p$	Presque partout tous les points
s.c.i.	Semi continue inferierement
s.c.s.	Semi continue superierement
V^+	Partie positive de la fonction V, $V^+=\max(V,0)$

Notation	Définition
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou $(,)$	Crochet de dualité X, X' / Produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$
$\mathcal{C}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω à support compact
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivable Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, c'est à dire espace des distributions
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R}^N \mid u \text{ mesurable}, \ \int_\Omega \|u\|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R}^N \mid u$ mesurable $\exists C$ tel que $\|u(x)\| \leq C$ en p.p. $x \in \Omega$ $\}$
$L^q(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, à dérivée jusqu'à l'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle
$W^{-k,q}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
$\mathcal{M}^q(\Omega)$	Les espaces de Marcinkiewicz

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude des problèmes elliptiques semi-linéaires et non-linéaires avec un terme singulier, où la donnée f appartient à $L^1(\Omega)$.
Pour résoudre ce genre de problèmes, on procède par approximation en se ramenant à un cadre variationnel convenable, où on peut démontrer l'existence et la régularité des solutions pour ces problèmes approximants qui restent conservées par passage à la limite.

Dans le premier chapitre, on fait un rappel des espaces fonctionnels de Sobolev et de Marcinkiewiz qui seront d'une très grande utilité dans ce travail, ainsi que quelques théorèmes d'existence et d'unicité comme Lax-Milgram pour le cas linéaire et théorème de Minty-Browder pour le cas non-linéaire.

Dans le deuxième chapitre, on étudie l'existence et la régularité de la solution d'un problème semi-linéaire avec un terme singulier de la forme

$$\begin{cases} -div(M(x)\nabla u(x)) = \dfrac{f}{u^\gamma} \quad \text{dans } \Omega \\ u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Ici Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 2, \gamma > 0$, f une fonction non négative qui appartient à un espace de Lebesgue donné, et M une matrice elliptique i.e il existe $0 < \alpha \leq \beta$ tels que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \times \xi, \quad |M(x)| \leq \beta,$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, et pour presque tout $x \in \Omega$.

Une solution du problème (1) est une fonction $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ telles que :

$$\forall \omega \subset\subset \Omega, \exists c_\omega : u \geq c_\omega > 0 \in \omega,$$

et

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \times \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u^\gamma} \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Le problème (1) est fortement lié au problème quasi-linéaire avec un terme singulier suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + A\dfrac{|\nabla u|^2}{u} = h(x) & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

avec $0 < A < 1$, et h une fonction non négative. Effectivement, si on effectue le changement de variable $v = u^{1-A}$, on obtient que v est une solution du problème (1) avec $f(x) = (1-A)h(x)$, $\gamma = \dfrac{A}{1-A}$, et M la matrice d'identité. Les problèmes de la forme (2) ont été étudiés par les auteurs (séparément) dans [5] et [4], ainsi que dans [25].
Notre problème est de la forme

$$-\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = g(x,u),$$

avec $g(x,s)$ singulière pour $s = 0$. Ce problème a été largement étudié dans le passé, en commençant par Stuart en 1976 (voir [29]), qui a traité le cas de l'explosion de $g(x,s)$ en $s = 0$ si x tend vers le point y sur la frontière de Ω. Après, le problème a été étudié par Crandall, Rabinowitz et Tartar dans [14], où ils ont prouvé l'existence et des propriétés de continuité de la solution si $g(x,s)$ ne dépend pas de x.
En 1991, un beau travail de Lazer et McKenna (voir [20]) qui a traité le cas $g(x,s) = \dfrac{f(x)}{u^\gamma}$, avec f fonction continue , ils ont prouvé l'existence et la régularité de la solution sur la frontière. Les résultats de Lazer et McKenna ont été ensuite généralisés par Lair et Shaker (voir [18] et [19], où la fonction g à la forme $f(x)g(u)$), et par Zhang et Cheng (voir [30], où la fonction g à la forme $f(x)g(u)$ et f n'est pas dans $L^1(\Omega)$.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence et la régularité des solutions d'un problème non-linéaire avec un terme singulier de la forme

$$\begin{cases} -Au = \dfrac{f}{u^\gamma} \quad \text{dans} \;\; \Omega \\ u > 0 \quad \text{dans} \;\; \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

où

$$Au = div(a(x, \nabla u)) - \nu \, |u|^{p-2} \, u,$$

et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, 1 < p < N, \gamma > 0$ un réel, f une fonction non négative qui appartient à un espace de Lebesgue donné, et $a : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction telle que $a(., \xi)$ est mesurable pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. On suppose qu'il existe $c_1, c_2 > 0$ et deux constantes α et β, avec $0 \leq \alpha \leq \min\{1, p-1\}$ et $\max\{p, 2\} \leq \beta < \infty$ tels que a satisfait les hypothèses de monotonicité et de continuité suivantes :

$$a(y, 0) = 0$$

$$|a(y, \xi_1) - a(y, \xi_2)| \leq c_1(1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{p-1-\alpha} \, |\xi_1 - \xi_2|^\alpha$$

$$(a(y, \xi_1) - a(y, \xi_2), \xi_1 - \xi_2) \geq c_2(1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{p-\beta} \, |\xi_1 - \xi_2|^\beta \, ,$$

pour p.p $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$.

On termine ce travail par une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous allons introduire des notions, des définitions et des théorèmes qui nous seront utiles dans les différents chapitres de cette thèse.

1.1 La convergence faible

1.1.1 La convergence faible dans un Banach

Définition 1.1. *Soit E un espace de Banach, E^* son dual et $\langle .,. \rangle$ le crochet de dualité sur $E^* \times E$.*
On dit que la suite $(x_h)_h$ dans E converge faiblement vers $x \in E$ si et seulement si :

$$\langle x^*, x_h \rangle \underset{h \to +\infty}{\to} \langle x^*, x \rangle \quad \forall x^* \in E^*, \tag{1.1}$$

et on écrit :

$$x_h \underset{h \to +\infty}{\rightharpoonup} x \quad \textit{faib. dans } E. \tag{1.2}$$

On dit que la suite $(x_h^*)_h$ dans E^* converge faiblement $*$ vers $x^* \in E^*$ si et seulement si :

$$\langle x_h^*, x \rangle \underset{h \to +\infty}{\to} \langle x^*, x \rangle \quad \forall x \in E, \tag{1.3}$$

et on écrit :

$$x_h^* \underset{h \to +\infty}{\rightharpoonup} x^* \quad * \ \textit{faib. dans } E^*. \tag{1.4}$$

Théorème 1.1. *Soit E un espace de Banach, E^* son dual. Soient $(x_h)_h$ et $(x_h^*)_h$ deux suites de E et de E^* respectivement.*
Si $x_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ faib. dans E, alors :

$$\begin{cases} \exists k > 0 \ t.q. \ \forall h \in \mathbb{N} : \|x_h\|_E \leq k \\ \|x\|_E \leq \liminf\limits_{h\to+\infty} \|x_h\|_E \end{cases} \tag{1.5}$$

Si $x_h^* \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x^*$ $*$ faib.dans E^*, alors :

$$\begin{cases} \exists k > 0 \ t.q. \ \forall h \in \mathbb{N} : \|x_h^*\|_{E^*} \leq k \\ \|x^*\|_{E^*} \leq \liminf\limits_{h\to+\infty} \|x_h^*\|_{E^*} \end{cases} \tag{1.6}$$

Si $x_h \underset{h\to+\infty}{\rightarrow} x$ (fortement dans E), alors $x_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ faib. dans E.
Si $x_h^* \underset{h\to+\infty}{\rightarrow} x^*$ (fortement dans E^*), alors $x_h^* \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x^*$ $*$ faib. dans E^*.
Si $x_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ dans E et $x_h^* \underset{h\to+\infty}{\rightarrow} x^*$ dans E^*, alors $\langle x_h^*, x_h\rangle \underset{h\to+\infty}{\rightarrow} \langle x^*, x\rangle$.

Définition 1.2 (**Espace réflexif**)**.** *Soit E un espace de Banach, soit E^* son dual (muni de la norme duale $\|f\|_{E^*} = \sup\limits_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E \leq 1}} |\langle f, x\rangle|$).*

Soit E^{**} son bidual (muni de la norme $\|g\|_{E^{**}} = \sup\limits_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|_{E^*} \leq 1}} |\langle g, f\rangle|$).

On a une injection canonique $J : E \to E^{**}$ définie comme suit : soit $x \in E$ fixé,
l'application $f \to \langle f, x\rangle$ de E^* dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur E^* i.e un élément de E^{**} noté Jx. On a donc

$$\langle Jx, f\rangle_{E^{**}E^*} = \langle f, x\rangle_{E^*E} \qquad \forall x \in E, \quad \forall f \in E^*.$$

Il est clair que J est linéaire et J est une isométrie i.e. $\|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$;
en effet

$$\|Jx\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|_{E^*} \leq 1}} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|_{E^*} \leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_E$$

Lorsque J est surjective on dit que E est réflexif.

Définition 1.3 (**Espace séparable**)**.** *On dit qu'un espace de Banach E est séparable s'il existe un ensemble au plus dénombrable qui est dense dans E.*

Théorème 1.2. *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_h)_h$ une suite bornée dans E,*
alors il existe une sous suite $\left(x_{\sigma(h)}\right)$ de $(x_h)_h$ et $x \in E$ tel.que.

$$x_{\sigma(h)} \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x \ \ \textit{faib. dans } E. \tag{1.7}$$

Si chaque sous suite converge faiblement vers la même limite x, alors :

$$x_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x \ \ \textit{faib. dans } E. \tag{1.8}$$

1.2 Les espaces L^p

Définition 1.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*
i) Soit $1 \leq p < +\infty$. On note par $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tel que

$$\|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < +\infty. \tag{1.9}$$

$\|.\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ *est une norme sur $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$.*
ii) Si $p = +\infty$, on note par $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tel que

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \inf\left\{\alpha : |f(x)| \leq \alpha \ p.p \ x \in \Omega\right\} < +\infty.$$

$\|.\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ *est une norme sur $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$.*
iii) $L^p_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^N) = \left\{f \ / \ f \in L^p(\Omega';\mathbb{R}^N), \forall \Omega' \text{ un ouvert borné avec } \overline{\Omega'} \subset \Omega\right\}$.

Remarque 1.1. *a) Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On désigne par q le conjugué de p càd : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*
b) Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors l'espace dual de $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ est $L^q(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Théorème 1.3. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $(f,g) \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et*

$$\int_\Omega |(f(x), g(x))| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} . \|g\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^N)} . \tag{1.10}$$

Théorème 1.4. ***(Inégalité de Hölder inversée)*** *Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathrm{R}$ avec $a < b$. Si $|f|$ et $|g|$ sont intégrable sur $[a,b], 0 < p < 1$(ou $p < 0$) avec $q = p/(p-1)$, alors,*

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \geq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}$$

.

Démonstration. Voir [12] □

Théorème 1.5. ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue).*** *Soit (f_n) une suite de fonction de $L^1(\Omega)$. On suppose que :*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω.*
2. *Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n : $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω.*

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Définition 1.5. ***(Les espaces de Marcinkiewicz)*** *Soit $0 < q < \infty$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, l'espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}^q(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que :*

$$\phi_f(k) = \mathrm{mes}\{x \in \Omega : |f(x)| > k\} \leq Ck^{-q}, \qquad C < \infty, \quad k > 0.$$

Pour un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^N$ nous utilisons la notation $\mathrm{mes}(A) = |A|$ *pour dénoter sa mesure de Lebesgue. L'espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}^q(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|f\|_{\mathcal{M}^q(\Omega)} = \inf\left\{C : \phi_f(k) \leq Ck^{-q}, \quad pour \quad k > 0\right\}$$

est un espace de Banach. Notons que si $f \in L^q(\Omega)$, on a

$$\int_{\{|f|>k\}} dx \leq \int_\Omega \left|\frac{f}{k}\right|^q dx \leq k^{-q} \int_\Omega |f|^q dx,$$

donc

$$\phi_f(k) \leq k^{-q} \|f\|_q^q$$

et comme conclusion directe on a l'inclusion $L^q(\Omega) \subset \mathcal{M}^q(\Omega)$.

1.2.1 Convergence faible dans espaces L^p

Théorème 1.1. *.Soit (f_n) une suite bornée de $L^p(I)$ alors elle admet une sous-suite qui converge faiblement.*

La notion de convergence faible dans $L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ devient donc comme suit :
• Si $1 \leq p < +\infty$, alors $f_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ faib. dans $L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ si :

$$\int_\Omega \left(f_h\left(x\right), g\left(x\right)\right) dx \underset{h\to+\infty}{\rightarrow} \int_\Omega \left(f\left(x\right), g\left(x\right)\right) dx \quad \forall g \in L^q\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right). \tag{1.11}$$

• Si $p = +\infty$, alors $f_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ $*$ faib.dans $L^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ si :

$$\int_\Omega \left(f_h\left(x\right), g\left(x\right)\right) dx \underset{h\to+\infty}{\rightarrow} \int_\Omega \left(f\left(x\right), g\left(x\right)\right) dx \quad \forall g \in L^1\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right), \tag{1.12}$$

Théorème 1.6. *L'espace $L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$. De plus $L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire définit par :*

$$(f, g)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \int_\Omega \left(f\left(x\right), g\left(x\right)\right) dx. \tag{1.13}$$

1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)\right\}, \tag{1.14}$$

où $\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N})$ représente la $1^{ère}$ dérivée au sens des distributions de la fonction réelle u.
On définit dans cet espace la norme suivante :

$$\left\|u\right\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left\|u\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \tag{1.15}$$

ou parfois une norme équivalente :

$$\left\|u\right\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\left\|u\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \left\|\nabla u\right\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}\right)^{1/p} \quad \textit{(si } 1 \leq p < +\infty\textit{)}. \tag{1.16}$$

Définition 1.7. *Soit* $1 \leq p < +\infty$. *L'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est définie comme la fermeture de* $C_0^\infty(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.
L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est noté par* $W^{-1,q}(\Omega)$ *avec* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Remarque 1.2. *Si* $p = 2$, *l'espace* $W^{1,2}(\Omega)$ *est noté par* $H^{1,2}(\Omega)$ *ou bien* $H^1(\Omega)$. *Même chose pour* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *; on le note par* $H_0^{1,2}(\Omega)$ *ou bien* $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 1.1. *i) L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$.
ii) L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace réflexif pour* $1 < p < +\infty$.
iii) L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace séparable pour* $1 \leq p < +\infty$.
iv) L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach séparable ; il est de plus réflexif pour* $1 < p < +\infty$.
v) Les espaces $H^1(\Omega)$ *et* $H_0^1(\Omega)$ *sont des espaces de Hilbert muni du produit scalaire suivant :*

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \tag{1.17}$$

Théorème 1.7 (**Inégalité de Poincaré**). *Soit* Ω *un ouvert borné et soit* $1 \leq p < +\infty$.
Alors il existe une constante $k > 0$ *tel que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq k \, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Remarque 1.3. *A partir du théorème 1.5, on conclut que* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ *est une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *notée par* $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ *qui est équivalente à la norme* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Définition 1.8. ***(Opéerateur compact)*** *Soient* E, F *deux espaces de Banach et* $A : E \to F$ *opérateur continu (pas forcément linéaire). On dit que* A *est un opérateur compact si l'image de tout borné de* E *par* A *est relativement compacte dans* F. *En d'autres termes, si* $(u_n)_n \subset E$ *est une suite bornée, alors la suite* $(v_n = A(u_n))_n \subset F$ *admet une sous-suite convergente dans* F.

1.3.1 Théorème des injections

Théorème 1.8 (l'injection compacte). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est Lipschitzienne.*
- *Si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in \left[1, \frac{Np}{N-p}\right]$ avec injection compacte pour $q \in \left[1, \frac{Np}{N-p}\right[$.*
- *Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$ et l'injection est compacte.*
- *Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$ avec injection compacte.*

Remarque 1.4. *L'injection compacte permet de passer de la convergence faible à la convergence forte comme suit :*
Soit $u_h \rightharpoonup u$ faib. dans $W^{1,p}(\Omega)$.
- *Si $1 \leq p < N$, alors $u_{\sigma(h)} \to u$ fortement dans $L^q(\Omega), 1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$.*
- *Si $p = N$, alors $u_{\sigma(h)} \to u$ fortement dans $L^q(\Omega), 1 \leq q < +\infty$.*
- *Si $p > N$, alors $u_{\sigma(h)} \to u$ fortement dans $L^\infty(\Omega)$.*

Théorème 1.9 (Inégalité de Sobolev). *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et soit $1 \leq p < +\infty$. Alors il existe une constante $k(p,N)$ telle que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq k(p,N) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

1.4 Notion de troncature

La notion de troncature est une notion très importante dans l'étude des EDP avec donnée dans L^1 ou bien mesure. Cette notion est basée sur l'usage des fonctions $T_k(s)$ et $G_k(s)$, $k > 0$, définies par :

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{si} |s| \leq k; \\ k\frac{s}{|s|}, & \text{si } |s| > k; \end{cases}$$

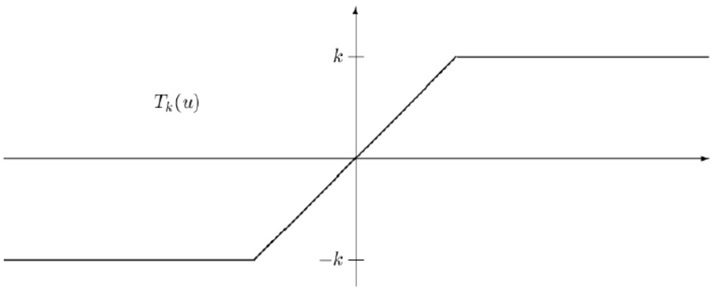

FIGURE 1.1 – La troncature

La fonction définie précédement est la suivante :

$$G_k(s) = s - T_k(s)$$

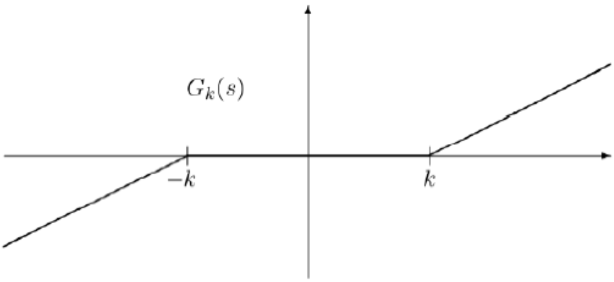

FIGURE 1.2 – La fonction $G_k(s)$

1.5 Théorèmes d'existence

Définition 1.9 (Forme linéaire). *Soit $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que f est une forme linéaire sur E si est seulement si :*

$$\forall u, v \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)\,. \tag{1.18}$$

Définition 1.10 (Forme bilinéaire). *Soit $a : E \times E \to \mathbb{R}$. On dit que a est une forme bilinéaire sur E si pour tout $u \in E$ fixé, les applications suivantes :*

$$\begin{aligned} a\left(u, .\right) : v \in E \to a\left(u, v\right) \in \mathbb{R}, \\ a\left(., u\right) : v \in E \to a\left(v, u\right) \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

sont linéaires.
Rappellons que si a est une forme bilinéaire continue sur E, alors $\exists c > 0$ tel que

$$\left|a\left(u, v\right)\right| \leq c \left\|u\right\|_E \left\|v\right\|_E \quad \forall u, v \in E. \tag{1.20}$$

Définition 1.11 (Forme bilinéaire coercive). *Soit V un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire sur V. a est coercive sur V si $\exists \alpha > 0$ tel que*

$$a\left(u, u\right) \geq \alpha \left\|u\right\|_V^2 \quad \forall u \in V. \tag{1.21}$$

Théorème 1.10 (Lax–Milgram). *Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur l'espace de Hilbert V. Alors pour tout élément f de V^*, il existe un unique élément u dans E qui vérifie :*

$$a\left(u, v\right) = \left(\left(f, v\right)\right) \quad \forall v \in V. \tag{1.22}$$

De plus on a :

$$\left\|u\right\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \left\|f\right\|_{V^*} \tag{1.23}$$

où α est donnée dans (1.21).

Démonstration. Voir [10]. □

Définition 1.12. *Soit E un espace de Banach et E^* son dual.*
Soit $A : D(A) \subset E \to E^*$ un opérateur.
1- On dit que A est monotone si

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0 \quad \forall u_1, u_2 \in D(A)$$

2- On dit que A est strictement monotone si

$$\forall u_1, u_2 \in D(A) : \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

3- On dit que A est maximal monotone si

$$\forall \left[x, y\right] \in E \times E^* \text{ tel que } \langle y - Au, x - u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in D(A) \Rightarrow y = Ax.$$

4- On dit que A est hémicontinu si

$A\left(u + tv\right) \underset{t \to 0}{\to} Au$ *faiblement dans* E^* $\forall u \in D(A)$ *et* $v \in E$ *tel que* $u+tv \in D(A)$

pour $0 \leq t \leq 1$.

Théorème 1.11. ***(Théorème de Minty-Browder)*** *Soit E un espace de Banach séparable et soit $A : E \to E^*$(i.e $D(A) = E$) un opérateur monotone et hémicontinu. Alors A est maximal monotone.*
En plus, si E est réfexif et A est coercif, i.e.

$$\lim_{\|u\|_E \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle_{E^* E}}{\|u\|_E} = +\infty,$$

alors $R(A) = E^*$.

Démonstration. Voir [22]. □

Théorème 1.12 (**Théorème du point fixe de Schauder**)**.** *Supposons que E est un convexe fermé d'un espace de Banach X. Soit T un opérateur continu et compact de E dans E. Alors T admet un point fixe dans E.*

Définition 1.13. ***(Fonction convexe)*** *Soit J une fonction définie sur un espace de Banach X, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est dite convexe si :*

$$\forall (x, y) \in X^2, \quad \forall \lambda \in]0, 1[, \qquad J(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda J(x) + (1 - \lambda)J(y).$$

Définition 1.14. ***(Fonction semi continue inférieurement (s.c.i))*** *Soit J une fonction définie sur un espace de Banach X, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Elle est dite semi continue inférieurement (s.c.i.) en x si, pour toute suite $\{x_n\}$ telle que $x_n$converge vers x, on a :*

$$J(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(x_n).$$

En dit semi continue inférieurement faiblement si la convergence étant pour la topologie faible.

Définition 1.15. ***(Fonction coercive)*** *Une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach séparable X est dite coercive si :*

$$\lim_{\|x\|_X \to +\infty} J(x) = +\infty.$$

Théorème 1.13. *Soit V un espace de Banach réflexif, et $J : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction coercive faiblement semi-continue inférieurement (s.c.i) sur V.*
Alors $\inf\limits_{u\in K} J(u) < \infty$ et $\exists u_0 \in K, \quad J(u_0) = \min\limits_{u\in K} J(u)$.
De plus si J est strictement convexe, u_0 est unique. Si J est différentiable au sense de Gateaux alors $J'(u_0) = 0$.

Démonstration. Voir [2]. □

Chapitre 2

Problème elliptique semi-linéaire avec un terme singulier

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on prouve l'existence et la régularité des solutions d'un problème semi-linéaire elliptique avec un terme singulier de la forme suivante

$$\begin{cases} -div(M(x)\nabla u(x)) = \dfrac{f}{u^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$,$\gamma > 0$ un réel, f une fonction non négative qui appartient à un espace de Lebesgue donné, et M une matrice elliptique i.e il existe $0 < \alpha \leq \beta$ tels que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \times \xi, \quad |M(x)| \leq \beta, \tag{2.2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, et pour presque tout $x \in \Omega$.

Définition 2.1. *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution d'energie du problème (2.1) si et seulement si*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \times \nabla\phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma}, \forall\phi \in C_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

2.2 Le problème approximant

Soit f une fonction mesurable positive non identiquement nulle, et soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $f_n(x) = T_n(f)$ et considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u_n) = \dfrac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

Lemme 2.1. *Le problème (2.4) admet une solution positive $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. Fixons $n \in \mathbb{N}$ assez grand. Soit $v \in L^2(\Omega)$ tel que $w = S(v)$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla w) = \dfrac{f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

Prenons w comme fonction test dans (2.5), et utilisons la coercivité de la matrice M nous obtenons

$$\alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla w \times \nabla w = \int_\Omega \frac{f_n w}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \leq n^{\gamma+1} \int_\Omega |w|.$$

En utilisant l'ingéalité de Poincaré dans le membre gauche et l'inégalité de Hölder dans le membre droit dans l'inégalité précédente on trouve :

$$\int_\Omega |w|^2 \leq \alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 \leq n^{\gamma+1} \int_\Omega |w| \leq Cn^{\gamma+1}\Big(\int_\Omega |w|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui implique que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq Cn^{\gamma+1}.$$

Donc la boule dans $L^2(\Omega)$ de rayon $Cn^{\gamma+1}$ est invariante par S. Montrons maintenant que S est continu et compact.

— (La continuité de S) Notons $w_k := S(v_k)$ et $w := S(v)$. Montrons que si

$$\lim_{k\to+\infty} \|v_k - v\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \|w_k - w\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Soit w_k solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla w_k) = \dfrac{f_n}{\left(|v_k| + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}} & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

et w solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla w) = \dfrac{f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}} & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

En faisant la soustraction entre (2.6) et (2.7), et prenons $z_k = w_k - w$ comme fonction test on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla(w_k - w)\times\nabla(w_k - w) = \int_\Omega (w_k - w)\left[\frac{f_n}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}\right]$$

En utilisant (2.2) on trouve :

$$\alpha\int_\Omega |\nabla(w_k - w)|^2 \leq \int_\Omega (w_k - w)\left[\frac{f_n}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}\right]$$

Utilisons l'inégalité de Hölder on obtient

$$\|w_k - w\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|w_k - w\|_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega \left|\frac{f_n}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui nous donne

$$\|w_k - w\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega \left|\frac{f_n}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarquons que

$$\left|\frac{f_n}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}\right| \leq 2n^{\gamma+1}.$$

Par le théorème de convergence dominée nous concluons que

$$\lim_{k\to+\infty}\|w_k - w\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

et par suite S est continu.

— (La compacité de S) Soit $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ uns suite bornée. Notons $w_k := S(v_k)$. Montrons qu'on peut extraire une sous-suite de $\{S(v_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement vers $S(w)$ dans $L^2(\Omega)$.
Soit $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ tel que $\|v_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C$. On peut en extraire une sous-suite qui converge faiblemnt vers v dans $L^2(\Omega)$.
Prenons w_k comme fonction test dans (2.4), nous obtenons

$$\alpha \int_\Omega |\nabla w_k|^2 \leq \int_\Omega \frac{f_n w_k}{\left(|v_k| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \leq n^{\gamma+1} \int_\Omega |w_k| \leq C n^{\gamma+1} \Big(\int_\Omega |w_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui implique que $\|w_k\|_{H_0^1(\Omega)} = \|S(v_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C$, alors il existe une sous-suite $\{S(v_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $S(v_k) \rightharpoonup w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, et par l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on a $S(v_k) \to w$ fortement dans $L^\alpha(\Omega)$ pour tout $1 \leq \alpha < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.
Maintenant, il suffit de montrer que $w = S(v)$. En effet, pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega M(x)\nabla w_k \times \nabla \phi = \int_\Omega \frac{f_n \phi}{\left(|v_k| + \frac{1}{n}\right)^\gamma}. \tag{2.8}$$

Nous allons montrer que lorsque k tend vers $+\infty$ que (2.8) converge vers

$$\int_\Omega M(x)\nabla w \times \nabla \phi = \int_\Omega \frac{f_n \phi}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\gamma}. \tag{2.9}$$

Par le théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \frac{f_n \phi}{\left(|v_k| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} = \int_\Omega \frac{f_n \phi}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\gamma}.$$

Nous concluons que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega M(x)\nabla w_k \times \nabla \phi = \int_\Omega M(x)\nabla w \times \nabla \phi,$$

et on particulier que $w = S(v)$.

Alors, par le théorème du point fixe de Schauder il existe u_n dans $H_0^1(\Omega)$ tel que $u_n = S(u_n)$ i.e u_n résout

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u_n) = \dfrac{f_n}{\left(|u_n| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Puisque $\dfrac{f_n}{(|u_n|+\frac{1}{n})^\gamma} \geq 0$, le principe du maximum implique que $u_n \geq 0$, et par conséquent u_n résout (2.5). Enfin, le fait que le membre droit de (2.5) appartient à $L^\infty(\Omega)$ implique que u_n appartient à $L^\infty(\Omega)$. $\square$

Remarque 2.1. *Il est possible d'utiliser des techniques variationnelles pour montrer l'existence de la solution, en minimisant la fonctionnelle d'énergie suivante*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla u \times \nabla u - \int_\Omega F(u)$$

avec

$$F(s) = \int_0^s \frac{f_n}{(|t|+\frac{1}{n})^\gamma} dt.$$

En effet :
On va appliquer le Théorème 1.13 à notre fonctionnelle J.

— *J est coercive :*

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla u \times \nabla u - \int_\Omega F(u) \\ &\geq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - Cn^\gamma \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\geq \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C'n^\gamma \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Ce qui entraine que

$$J(u) \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\Big(\frac{\alpha}{2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} - C'n\Big),$$

donc J est coercive.

— *J est faib.s.c.i sur $H_0^1(\Omega)$:*

Soit $\{u_k\} \subset H_0^1(\Omega)$ tel que $u_k \to u_0$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, alors

$$\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} F(u_k) &= \lim_{k\to\infty} \int_0^{u_k} \frac{f_n}{(|s|+\frac{1}{n})^\gamma} ds \\ &= \int_0^{u_0} \frac{f_n}{(|s|+\frac{1}{n})^\gamma} ds \\ &= F(u_0) \end{aligned}$$

Comme conclusion en obtient que

$$\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega F(u_0) \leq \liminf_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega F(u_k)\right)$$

i.e.,

$$J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n).$$

Par conséquence J est faib.s.c.i sur $H_0^1(\Omega)$.
D'après le Théorème 1.13 il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ telle que $K = J(u_0)$.
Il est facile de voir que :

$$\langle J'(u_0), v\rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u_0 \times \nabla v - \int_\Omega \frac{f_n v}{\left(|u_0| + \frac{1}{n}\right)^\gamma}.$$

Comme $J'(u_0) = 0$, on conclut que u_0 est une solution faible du problème (2.4).

— *u_0 est unique :*
Supposons que u_n et $v_n \in H_0^1(\Omega)$ deux solutions de (2.4) donc :

$$-\operatorname{div}(M(x)\nabla u_n) + \operatorname{div}(M(x)\nabla v_n) = \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{f_n}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma}$$

Multiplions par la fonction test $u_n - v_n$ et intégrons nous obetenons

$$\int_\Omega M(x)(\nabla u_n - \nabla v_n) \times (\nabla u_n - \nabla v_n) = \int_\Omega f_n(u_n - v_n) \times \left(\frac{1}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma}\right).$$

D'où

$$0 < \alpha \int_\Omega |\nabla(u_n - v_n)|^2 \leq 0.$$

Alors on obtient que

$$\int_\Omega |\nabla(v_n - u_n)|^2 dx = 0$$

Donc $u_n = v_n$.

Lemme 2.2. *La suite $\{u_n\}_n$ est croissante par rapport à n.*

Démonstration. On remarque que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$.

$$-div(M(x)\nabla u_n) = \frac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \leq \frac{f_{n+1}}{(u_n + \frac{1}{n+1})^\gamma}$$

$$\begin{aligned}
-div(M(x)\nabla(u_n - u_{n+1})) &\leq f_{n+1}\left[\frac{1}{(u_n + \frac{1}{n+1})^\gamma} - \frac{1}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma}\right] \\
&= f_{n+1}\left[\frac{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma - (u_n + \frac{1}{n+1})^\gamma}{(u_n + \frac{1}{n+1})^\gamma (u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma}\right]
\end{aligned}$$

Choisissons $(u_n - u_{n+1})^+$ comme fonction test dans l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\int_\Omega f_{n+1}\left[\frac{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma - (u_n + \frac{1}{n+1})^\gamma}{(u_n + \frac{1}{n+1})^\gamma (u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma}\right](u_n - u_{n+1})^+ \leq 0,$$

alors

$$0 \leq \alpha \int_\Omega |\nabla(u_n - u_{n+1})^+|^2 \leq 0.$$

Donc $(u_n - u_{n+1})^+ = 0$ presque partout dans Ω, ce qui implique que $u_n \leq u_{n+1}$.

$\square$

Remarque 2.2. *Pour le signe de* $\left[(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma - (u_n + \frac{1}{n+1})^\gamma\right](u_n - u_{n+1})^+$ *on utilise le théorème des accroissement finis (TAF).*
Rappel : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *continue sur* $[a,b]$, *et dérivable sur* $]a,b[$, *alors il existe un réel* $c \in\,]a,b[$:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Si on pose $f(s) = s^\gamma, f'(s) = \gamma s^{\gamma-1}, a = u_n + \frac{1}{n+1}, b = u_{n+1} + \frac{1}{n+1}$. *Alors,*

$$(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma - (u_n + \frac{1}{n+1})^\gamma = \gamma c^{\gamma-1}(u_{n+1} - u_n)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left[(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma - (u_n + \frac{1}{n+1})^\gamma\right](u_n - u_{n+1})^+ &= \gamma c^{\gamma-1}(u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n+1})^+ \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Lemme 2.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la solution du problem (2.5) est telle que pour tout $E \subset\subset \Omega, u_n \geq C_E > 0$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, $u_n \in L^\infty(\Omega)$. Alors, pour $n = 1$ nous avons

$$-div(M(x)\nabla u_1)) = \frac{f_1}{(u_1+1)^\gamma} \geq \frac{f_1}{(\|u_1\|_\infty + 1)^\gamma} \geq \frac{f_1}{(C+1)^\gamma}.$$

Puisque le membre droit est non identiquement nul et en appliquant le principe du maximum fort ça implique que $u_1 > 0$ dans Ω. Alors il existe une constante $C_E > 0$ tel que $u_1 \geq C_E > 0$. Puisque $u_n \geq u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la preuve est achevée. □

2.3 Résultats d'existence pour donnée dans $L^1(\Omega)$

2.3.1 Le cas $\gamma = 1$

Lemme 2.4. *Si $f \in L^1(\Omega)$, alors u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. Prenons u_n comme fonction test dans (2.4), et pusique $\frac{u_n}{u_n+\frac{1}{n}} \leq 1$ nous obtenons

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla u_n \leq \int_\Omega \frac{f_n u_n}{(u_n + 1/n)} \leq \int_\Omega f_n \leq \int_\Omega f.$$

□

Théorème 2.1. *Soit f une fonction non négative dans $L^1(\Omega)$. Alors il existe une solution u dans $H_0^1(\Omega)$ de (2.1), dans le sens*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \times \nabla \phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u}, \forall \phi \in C_0^1(\Omega).$$

Démonstration. D'après le lemme précédent, $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, donc converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui peut être réécrit comme suit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla\phi = \int_\Omega M(x)\nabla u \times \nabla \phi,$$

pour tout $\phi \in C_0^1(\Omega)$. D'un autre côté on a

$$0 \leq \left| \frac{f_n \varphi}{u_n + \frac{1}{n}} \right| \leq \frac{\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}}{c_\omega} f,$$

où ω est l'ensemble $\{\phi \neq 0\}$. Donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{f_n \varphi}{u_n + \frac{1}{n}} = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u},$$

ce qui achève la démonstration. □

2.3.2 Le cas $\gamma > 1$

Lemme 2.5. *Soit $f \in L^1(\Omega)$ et soit u_n la solution du problème (2.4). Alors $u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et u_n bornée dans $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et dans $L^s(\Omega)$ avec $s = \frac{N(\gamma+1)}{N-2}$.*

Démonstration. Utilisons u_n^γ comme fonction test dans (2.4), nous obtenons avec $\frac{u_n^\gamma}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma} \leq 1$

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla u_n^\gamma = \int_\Omega \frac{f_n u_n^\gamma}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \leq \int_\Omega f_n \leq \int_\Omega f$$

La quantité à gauche vaut

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla u_n^\gamma = \int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \gamma u_n^{\gamma-1}\nabla u_n$$

En utilisant la coercivité de M on obtient

$$\alpha\gamma \int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{\gamma-1} \leq \gamma \int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla u_n u_n^{\gamma-1} \leq \int_\Omega f_n \leq \int_\Omega f$$

D'où,

$$\alpha\gamma \int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{\gamma-1} \leq \int_\Omega f$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{\gamma-1} = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \left(u_n^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)^2 &= \int_\Omega \left|\nabla u_n \left(u_n^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)\right|^2 \\ &= \int_\Omega \left| \frac{2}{\gamma+1} \nabla u_n^{\frac{\gamma+1}{2}} \right|^2 \\ &= \int_\Omega \frac{4}{(\gamma+1)^2} \left|\nabla u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\right|^2\end{aligned}$$

donc

$$\frac{4\alpha\gamma}{(\gamma+1)^2}\int_\Omega \left|\nabla u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\right|^2 \leq \int_\Omega f,$$

ce qui donne que $u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
En utilisant le théorème d'injection de Sobolev, on trouve

$$\|u_n^{\frac{2^*(\gamma+1)}{2}}\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq c\|u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\|_{H_0^1(\Omega)} < C.$$

Donc u_n est bornée dans $L^s(\Omega)$ avec $s = \frac{2^*(\gamma+1)}{2} = \frac{N(\gamma+1)}{N-2}$.
Pour montrer que u_n est bornée dans $H^1_{loc}(\Omega)$, on prend φ une fonction dans $C_0^1(\Omega)$, et soit $\omega = \{\varphi \neq 0\}$. Choisissons $u_n\varphi^2$ comme fonction test dans (2.4), on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla\left(u_n\varphi^2\right) = \int_\Omega \frac{f_n u_n \varphi^2}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\\
&\Rightarrow \int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \left(\varphi^2\nabla u_n + 2\nabla\varphi u_n\varphi\right) = \int_\Omega \frac{f_n u_n \varphi^2}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\\
&\Rightarrow \int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla u_n\varphi^2 + 2\int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla\varphi u_n\varphi \leq \int_\Omega \frac{f_n u_n\varphi^2}{u_n^\gamma}\\
&\Rightarrow \alpha\int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 + 2\int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla\varphi u_n\varphi \leq \int_\Omega \frac{f_n\varphi^2}{u_n^{\gamma-1}}\\
&\Rightarrow \alpha\int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 + 2\int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla\varphi u_n\varphi \leq \frac{1}{c_\omega^{\gamma-1}}\int_\Omega f_n\varphi^2.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young $\left(ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}\right)$, on a

$$2\beta\int_\Omega \nabla u_n \times \nabla\varphi u_n\varphi \leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 u_n^2,$$

et enfin puisque $u_n \in L^s(\Omega), s \geq 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 &\leq \frac{1}{c_\omega^{\gamma-1}}\int_\Omega f_n\varphi^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 u_n^2\\
&\leq \frac{\|\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{c_\omega^{\gamma-1}}\int_\Omega f_n + \frac{2\beta^2}{\alpha}\|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega u_n^2\\
&\leq \frac{\|\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{c_\omega^{\gamma-1}}\int_\Omega f + \frac{2\beta^2}{\alpha}\|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega u_n^2 \leq C(f,\varphi).
\end{aligned}$$

Donc u_n est bornée dans $H^1_{loc}(\Omega)$. □

2.4 Résultats de régularité

2.4.1 Le cas $\gamma = 1$

Lemme 2.6. *Soit $f \in L^m(\Omega), m \geq 1$, alors u la solution de (2.1) donnée par le Théorème 2.1 est telle que :*

$\boxed{1}$ *Si $m > \frac{N}{2}$ alors $u \in L^\infty(\Omega)$.*

$\boxed{2}$ *Si $1 \leq m < \frac{N}{2}$ alors $u \in L^s(\Omega)$ tq $s = \frac{2Nm}{N-2m}$.*

Démonstration. Pour prouver (1) en utilise la fonction de troncature. Soit $k > 1\,(k \in \mathbb{N})$, on définit $G_k(s) = (s-k)^+$. Choisissons $G_k(u_n)$ comme fonction test dans (2.4), on a

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 &\leq \int_\Omega M(x)\nabla G_k(u_n) \times \nabla G_k(u_n) \\ &= \int_\Omega \frac{f_n G_k(u_n)}{u_n + \frac{1}{n}} \leq \int_\Omega f G_k(u_n)\end{aligned}$$

Dans le dernier passage on à utilisé le faite que $u_n + \frac{1}{n} \geq k \geq 1$ sur l'ensemble $\{u_n \geq k\}$ où $G_k(u_n) \neq 0$.

Maintenant, le Théorème 4.2 dans [27] nous confirme l'existence d'une constante C qui ne dépend pas de n telle que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Par suite, puisque u_n est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ implique que $u \in L^\infty(\Omega)$.

Pour (2), on observe que si $m = 1$ alors $s = \frac{2N}{N-2} = 2^*$, donc $u_n \in L^{2^*}(\Omega)$ est vraie par l'injection de Sobolev car $u_n \in H_0^1(\Omega)$.

Si $1 < m < \frac{N}{2}$, soit $\delta > 1$ et choisissons $u_n^{2\delta-1}$ comme fonction test dans (2.4), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla\left(u_n^{2\delta-1}\right) = \int_\Omega \frac{f_n u_n^{2\delta-1}}{u_n + \frac{1}{n}} \\ &\Rightarrow (2\delta - 1)\int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla u_n (u_n^{2\delta-2}) \leq \int_\Omega f_n u_n^{2\delta-2}\end{aligned}$$

Utilisons la coercivité de M, on obtient

$$\begin{aligned}\alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} &\leq \int_\Omega f u_n^{2\delta-2} \\ &\leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-2)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}\end{aligned}$$

On remarque que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2(\delta-1)} = \int_\Omega \left|\nabla u_n u_n^{\delta-1}\right|^2 = \int_\Omega \frac{\left|\nabla u_n^\delta\right|^2}{\delta^2}.$$

Par l'inégalité de Sobolev, nous obtenons

$$\int_\Omega \frac{\left|\nabla u_n^\delta\right|^2}{\delta^2} \geq \frac{\mathcal{S}}{\delta^2}\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}}$$

$$\begin{aligned}\alpha(2\delta-1)\frac{\mathcal{S}}{\delta^2}\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-2)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \\ &\leq \frac{\delta^2}{\mathcal{S}(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-2)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{\mathcal{S}(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-2)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \quad (2.10)$$

On choisit δ de sorte que on a $2^*\delta = (2\delta-2)m'$, i.e.,

$$\delta = \frac{m(N-2)}{N-2m}.$$

Il est facile de voir que $\delta > 1$ si et seulement si $m > 1$, et avec ce choix de δ nous avons

$$2^*\delta = \frac{2N}{N-2} \times \frac{m(N-2)}{N-2m} = \frac{2Nm}{N-2m} = s,$$

donc (2.10) devient

$$\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C(N,m)\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{1}{m'}}$$

Puisque $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$ car par hypothèse $m < \frac{N}{2}$. Alors d'après la dernière inégalité, nous concluons que u_n est bornée dans $L^s(\Omega)$, et par suite u appartient à $L^s(\Omega)$. $\square$

2.4.2 Le cas $\gamma > 1$

Lemme 2.7. *Soit $f \in L^m(\Omega), m \geq 1$, alors la solution u de (2.1) est telle que :*

$\boxed{1}$ *Si $m > \frac{N}{2}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.*

$\boxed{2}$ *Si $1 \leq m < \frac{N}{2}$, alors $u \in L^s(\Omega), s = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m}$.*

Démonstration. La preuve de (1) est similaire à celle du Lemme (2.6).
Pour (2), si $m = 1$, le résultat est obtenu par le fait que $u^{\frac{\gamma+1}{2}} \in H_0^1(\Omega)$, et par l'injection de Sobolev.
Maintenant, si $1 < m < \frac{N}{2}$, on choisit $\delta > \frac{\gamma+1}{2} > 0$ et prenons $u_n^{2\delta-1}$ comme fonction test dans (2.4), on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \times \nabla(u_n^{2\delta-1}) = \int_\Omega \frac{f_n u_n^{2\delta-1}}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma}$$

$$\Rightarrow \alpha(2\delta - 1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} \leq \int_\Omega \frac{f_n u_n^{2\delta-1}}{u_n^\gamma} \leq \int_\Omega f u_n^{2\delta-1-\gamma}$$

Par l'inégalité de Sobolev, on a

$$\alpha\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{\mathcal{S}(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Choisissons δ telle que $2^*\delta = (2\delta - 1 - \gamma)m'$.

$$\begin{aligned}\frac{2N}{N-2}\delta = (2\delta-1-\gamma)\frac{m}{m-1} &\Leftrightarrow \delta\frac{2N}{N-2} - \delta\frac{2m}{m-1} = -(1+\gamma)\frac{m}{m-1}\\ &\Leftrightarrow \delta\frac{N(m-1)-m(N-2)}{(N-2)(m-1)} = -\frac{(1+\gamma)}{2}\times\frac{m}{m-1}\\ &\Leftrightarrow \delta = -\frac{(1+\gamma)}{2}\times\frac{m}{m-1}\times\frac{(N-2)(m-1)}{-N+2m}\\ &\Leftrightarrow \delta = \frac{m(1+\gamma)}{2}\frac{(N-2)}{N-2m}\end{aligned}$$

On remarque que $\delta > \dfrac{\gamma+1}{2}$ si et seulement si $m > 1$ et que

$$2^*\delta = s = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m}.$$

Enfin, puisque $\dfrac{2}{2^*} > \dfrac{1}{m'}$ car $m < \dfrac{N}{2}$, nous avons la norme de u_n dans $L^s(\Omega)$ est bornée uniformément par rapport à n, et par suite sa limite u appartient ella aussi à $L^s(\Omega)$. $\square$

2.4.3 Le cas $\gamma < 1$

Théorème 2.2. *Soit $f \in L^m(\Omega), m = \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} = \left(\frac{2^*}{1-\gamma}\right)'$ et soit u_n solution (2.4) avec $\gamma < 1$. Alors u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. Choisissons u_n comme fonction test dans (2.4), puis utilisons l'inégalité de Hölder, et la coercivité de M pour obtenir

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 &\leq \int_\Omega \frac{f_n u_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \\ &\leq \int_\Omega f u_n^{1-\gamma} \\ &\leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Sobolev,

$$\alpha \mathcal{S} \left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}},$$

et par hypothèse sur m on a $(1-\gamma)m' = 2^*$, on arrive à

$$\alpha \mathcal{S} \left(\int_\Omega v u_n^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{1}{m'}} \tag{2.11}$$

Pusique $m < \dfrac{N}{2}$, nous avons $\dfrac{2}{2^*} > \dfrac{1}{m'}$, ce qui donne que u_n est bornée dans $L^{2^*}(\Omega)$, et par suite elle est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. □

Lemme 2.8. *Soit $\gamma < 1$, et soit $f \in L^m(\Omega), m \geq \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}$. Alors la solution u de (2.1) est telle que :*

$\boxed{1}$ *Si $m > \dfrac{N}{2}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.*

$\boxed{2}$ *Si $\dfrac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} \leq m < \dfrac{N}{2}$, alors $u \in L^s(\Omega), s = \dfrac{Nm(\gamma+1)}{N-2m}$.*

Démonstration. Pour (1), la preuve est identique à celle du Lemme (2.6). Pour (2) , on observe que si $m = \dfrac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}$, le résultat est vrai par injection de Sobolev puisque pour cette valeur de m on a $s = 2^*$.

Si $\dfrac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} < m < \dfrac{N}{2}$, on choisit $\delta > 1$, et $u_n^{2\delta-1}$ comme fonction test dans (2.4), nous obtenons

$$\alpha \left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{\mathcal{S}(2\delta-1)} \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\gamma)m'} \right)^{\frac{1}{m'}}$$

Choisissons δ de sorte que $2^*\delta = (2\delta-1-\gamma)m' \Rightarrow \delta = \dfrac{m(1+\gamma)}{2}\dfrac{N-2}{N-2m}$.
Il en résulte que $\delta > 1$ si et seulement si $m > \dfrac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}$ et que

$$2^*\delta = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m} = s.$$

Le fait que $\dfrac{2}{2^*} > \dfrac{1}{m'}$ car $m < \dfrac{N}{2}$ nous assure que u_n est bornée uniformément par rapport à n dans $L^s(\Omega)$, et par suite la limite u appartient elle aussi à $L^s(\Omega)$. $\square$

Chapitre 3

Problème elliptique non-linéaire avec un terme singulier

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on prouve l'existence et la régularité des solutions pour un problème elliptique non linéaire avec une singularité de la forme suivante

$$\begin{cases} -Au = \dfrac{f}{u^{\gamma}} & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$Au = div(a(x, \nabla u)) - \nu \left| u \right|^{p-2} u,$$

et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $1 < p < N$,$\gamma > 0$ un réel, f une fonction non négative qui appartient à un espace de Lebesgue donné, et $a : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction telle que $a(., \xi)$ est mesurable pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. On suppose qu'il existe $c_1, c_2 > 0$ et deux constantes α et β, avec $0 \leq \alpha \leq \min\{1, p-1\}$ et $\max\{p, 2\} \leq \beta < \infty$ tels que a satisfait les hypothèses de monotonicité et de continuité suivantes :

$$a(y, 0) = 0 \tag{3.2}$$

$$\left| a(y, \xi_1) - a(y, \xi_2) \right| \leq c_1 (1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{p-1-\alpha} \left| \xi_1 - \xi_2 \right|^{\alpha} \tag{3.3}$$

$$(a(y, \xi_1) - a(y, \xi_2), \xi_1 - \xi_2) \geq c_2 (1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{p-\beta} \left| \xi_1 - \xi_2 \right|^{\beta}, \tag{3.4}$$

pour p.p $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$.

Théorème 3.1. *Considérons l'opérateur suivant*

$$\begin{aligned} A : W_0^{1,p}(\Omega) &\to W^{-1,q}(\Omega) \\ u &\mapsto A(u) = -div(a(x, \nabla u)) + \nu\, |u|^{p-2}\, u \ , \ \ \nu > 0. \end{aligned}$$

Alors, $Au = f \in W^{-1,q}(\Omega)$ *admet une solution unique.*

Démonstration. Voir [23]. □

Définition 3.1. *On dit que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *est une solution d'energie du problème (3.1) si et seulement si*

$$\int_\Omega a(x, \nabla u)\nabla\phi + \nu \int_\Omega |u|^{p-2}u\phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u^\gamma}, \forall \phi \in C_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

3.2 Le problème approximant

Considérons le problème approximant suivant

$$\begin{cases} -Au_n = \dfrac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

où $f_n = T_n(f)$.

Lemme 3.1. *Le problème (3.6) admet une solution positive* $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Démonstration. Fixons $n \in \mathbb{N}$ assez grand. Soit $v \in L^p(\Omega)$, et on définnit $w = S(v)$ l'unique solution de

$$\begin{cases} -Aw = \dfrac{f_n}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

Prenons w comme fonction test dans (3.7), nous obtenons

$$\int_\Omega a(x, \nabla w)\nabla w + \nu \int_\Omega |w|^p = \int_\Omega \frac{f_n w}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma} \leq n^{\gamma+1} \int_\Omega |w|.$$

Par la condition de monotonicité (3.4) de a et l'inégalité Hölder dans la quantité de droite nous obtenons que

$$\nu \int_{\Omega} |w|^p \leq c_2 \int_{\Omega} (1 + |\nabla w|)^{p-\beta} |\nabla w|^{\beta} + \nu \int_{\Omega} |w|^p \leq n^{\gamma+1} (\int_{\Omega} |w|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Ici, on a

$$\|w\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \leq C n^{\gamma+1}.$$

Ce qui signifie que la boule de rayon $R_N = (Cn^{\gamma+1})^{\frac{1}{p-1}}$ est invariante par S dans $L^p(\Omega)$, et par l'injection de Sobolev et le théorème du npoint fixe de Schauder nous conculons que le problème aproximé (3.7) admet une solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout n fixé.
Pusique $\dfrac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma}} \geq 0$, le principe du maximum implique que $u_n \geq 0$.
Finallement, le fait que le membre de droite dans (3.6) appartient à $L^{\infty}(\Omega)$ implique que u_n appartient à $L^{\infty}(\Omega)$. $\square$

Lemme 3.2. *La suite $\{u_n\}_n$ est croissante par rapport à n.*

Démonstration. Observons que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$.

$$-Au_n = \frac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma}} \leq \frac{f_{n+1}}{(u_n + \frac{1}{n+1})^{\gamma}}$$

$$\begin{aligned} -Au_n + Au_{n+1} &\leq f_{n+1} \left[\frac{1}{(u_n + \frac{1}{n+1})^{\gamma}} - \frac{1}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^{\gamma}} \right] \\ &= f_{n+1} \left[\frac{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^{\gamma} - (u_n + \frac{1}{n+1})^{\gamma}}{(u_n + \frac{1}{n+1})^{\gamma} (u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^{\gamma}} \right] \end{aligned}$$

Choisissons $(u_n - u_{n+1})^+$ comme fonction test dans l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\int_{\Omega} f_{n+1} \left[\frac{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^{\gamma} - (u_n + \frac{1}{n+1})^{\gamma}}{(u_n + \frac{1}{n+1})^{\gamma} (u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^{\gamma}} \right] (u_n - u_{n+1})^+ \leq 0,$$

et par suite

$$\int_{\Omega} (-Au_n + Au_{n+1})(u_n - u_{n+1})^+ \leq 0$$

Or,

$$\int_\Omega (-Au_n + Au_{n+1})(u_n - u_{n+1})^+ =$$
$$\int_\Omega \big(a(x,\nabla u_n) - a(x,\nabla u_{n+1}), \nabla(u_n - u_{n+1})^+\big)$$
$$+ \int_\Omega \left(|u_n|^{p-2}u_n - |u_{n+1}|^{p-2}u_{n+1}\right)(u_n - u_{n+1})^+$$

Puisque

$$c_2 \int_\Omega (1 + |\nabla u_n| + |\nabla u_{n+1}|)^{p-\beta} \left|\nabla(u_n - u_{n+1})^+\right|^\beta$$
$$\leq \int_\Omega (a(x,\nabla u_n) - a(x,\nabla u_{n+1}), \nabla(u_n - u_{n+1})^+)$$

et

$$c \int_\Omega (|u_n| + |u_{n+1}|)^{p-2} \left|(u_n - u_{n+1})^+\right|^2$$
$$\leq \int_\Omega \left(|u_n|^{p-2}u_n - |u_{n+1}|^{p-2}u_{n+1}\right)(u_n - u_{n+1})^+$$

pour $1 < p \leq 2$. Nous arrivons à

$$c \int_\Omega (|u_n| + |u_{n+1}|)^{p-2} \left|(u_n - u_{n+1})^+\right|^2$$
$$+ c_2 \int_\Omega (1 + |\nabla u_n| + |\nabla u_{n+1}|)^{p-\beta} \left|\nabla(u_n - u_{n+1})^+\right|^\beta \leq 0.$$

L'inégalité de Hölder inversée pour les exposants $p/2 < 1$ et $p/(p-2)$ (respectivement pour les exposants $p/\beta < 1$ et $p/(p-\beta)$) nous donne

$$\left(\int_\Omega (|u_n| + |u_{n+1}|)^p\right)^{(p-2)/p} \times \left(\int_\Omega |(u_n - u_{n+1})^+|^p\right)^{2/p}$$
$$+ \left(\int_\Omega (1 + |\nabla u_n| + |\nabla u_{n+1}|)^p\right)^{(p-\beta)/p} \times \left(\int_\Omega |\nabla(u_n - u_{n+1})^+|^p\right)^{\beta/p} \leq 0.$$

Donc $(u_n - u_{n+1})^+ = 0$ presque partout dans Ω, ce qui implique que $u_n \leq u_{n+1}$.
Pour $p \geq 2$, il suffit d'utiliser l'inégalité suivante

$$c \int_\Omega |(u_n - u_{n+1})^+|^p \leq \int_\Omega \left(|u_n|^{p-2}u_n - |u_{n+1}|^{p-2}u_{n+1}\right)(u_n - u_{n+1})^+$$

□

Remarque 3.1. *Supposons que le problème (3.6) admet deux solutions* u_n *et* v_n. *Répétons la même technique utilisée dans la preuve du Lemme 3.2 ça implique que la solution du problème (3.6) est unique.*

Lemme 3.3. *Soit* $\{u_n\}_n$ *une suite de fonctions positives telle que* $\{u_n\}_n$ *est bornée uniformément dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_n \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $u_n \leq u$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $-div(a(x, \nabla u_n)) \geq 0$, *alors* $u_n \to u$ *fortement dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\phi \geq 0$ dans Ω.
Puisque $-div(a(x, \nabla u_n)) \geq 0$ et $u_n \leq u$, alors

$$\int_\Omega -div(a(x, \nabla u_n))(u_n - u)\phi \, dx \leq 0.$$

Ainsi,

$$\int_\Omega (-div(a(x, \nabla u_n)) + div(a(x, \nabla u)))(u_n - u)\phi \, dx + \int_\Omega -div(a(x, \nabla u))(u_n - u)\phi \, dx \leq 0.$$

Donc,

$$\int_\Omega (a(x, \nabla u_n) - a(x, \nabla u), \nabla u_n - \nabla u)\phi dx + \int_\Omega (a(x, \nabla u_n) - a(x, \nabla u), \nabla \phi)(u_n - u) dx + \int_\Omega (a(x, \nabla u), \nabla u_n - \nabla u)\phi dx + \int_\Omega (a(x, \nabla u), \nabla \phi)(u_n - u) dx \leq 0.$$

Puisque $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega (a(x, \nabla u), \nabla u_n - \nabla u)\phi dx + \int_\Omega (a(x, \nabla u), \nabla \phi)(u_n - u) dx \to 0,$$

et

$$\int_\Omega (a(x, \nabla u_n) - a(x, \nabla u), \nabla \phi)(u_n - u) dx \to 0,$$

quand $n \to \infty$.

$$\int_\Omega (a(x, \nabla u_n) - a(x, \nabla u), \nabla u_n - \nabla u)\phi dx \leq o(1).$$

Nous savons que

$$\begin{aligned}\int_\Omega (a(x,\nabla u_n) - a(x,\nabla u), \nabla u_n - \nabla u)\phi dx \\ \geq c_1 \int_\Omega (1+|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p-\beta} |\nabla u_n - \nabla u|^\beta \phi dx\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p \phi \, dx \leq \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^\beta \phi}{(1+|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\beta - p}} dx \Big)^{\frac{p}{\beta}} \\ \times \Big(\int_\Omega (1+|\nabla u_n| + |\nabla u|)^p \phi \, dx \Big)^{\frac{\beta - p}{\beta}} \leq o(1).\end{aligned}$$

La preuve est achevée. □

Lemme 3.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la solution du problème (3.6) est telle que $E \subset\subset \Omega, u_n \geq C_E > 0$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, $u_n \in L^\infty(\Omega)$. Alors, pour $n = 1$ nous avons

$$-div(a(x, \nabla u_1)) + \nu |u_1|^{p-2} u_1 = \frac{f_1}{(u_1 + 1)^\gamma} \geq \frac{f_1}{(\|u_1\|_\infty + 1)^\gamma} \geq 0.$$

Puisque la quantité de droite est non identiquement nulle et appliquons le principe du maximum fort implique que $u_1 > 0$ dans Ω. Donc il existe une constante $C_E > 0$ telle que $u_1 \geq C_E > 0$. Pusique $u_n \geq u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la preuve est complète. □

3.3 Passage à la limite

3.3.1 Le cas $\gamma = 1$

Lemme 3.5. *Si $f \in L^1(\Omega)$, alors u_n est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration. Prenons u_n comme fonction test dans (3.6), nous obtenons

$$c_2 \int_\Omega (1 + |\nabla u_n|)^{p-\beta} |\nabla u_n|^\beta \leq \int_\Omega \frac{f_n u_n}{(u_n + \frac{1}{n})} \leq \int_\Omega f$$

L'inégalité de Hölder inversée pour les exposants $\frac{p}{p-\beta}$ et $0 < \frac{p}{\beta} < 1$ nous donne

$$\|1 + |\nabla u_n|\|_{L^p(\Omega)}^{p-\beta} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^\beta \leq \int_\Omega (1 + |\nabla u_n|)^{p-\beta} |\nabla u_n|^\beta$$

Or,

$$(\lambda + \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)})^{p-\beta} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^\beta \leq \|1 + |\nabla u_n|\|_{L^p(\Omega)}^{p-\beta} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^\beta$$

où $\lambda = \|1\|_{L^p(\Omega)}$.
Si $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \lambda$ alors

$$(2\lambda)^{p-\beta} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^\beta \leq (\lambda + \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)})^{p-\beta} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^\beta.$$

Ici, on a

$$\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^\beta \leq (2\lambda)^{\beta-p} \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

Si $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \geq \lambda$ alors

$$(2\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)})^{p-\beta} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^\beta \leq (\lambda + \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)})^{p-\beta} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^\beta.$$

On obtient

$$\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^p \leq (2)^{\beta-p} \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

□

Théorème 3.2. *Soit f une fonction non négative dans $L^1(\Omega)$. Alors il existe une solution u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (3.1), dans le sens*

$$\int_\Omega a(x, \nabla u) \nabla \phi + \nu \int_\Omega |u|^{p-2} u \phi = \int_\Omega \frac{f\phi}{u}, \forall \phi \in C_0^1(\Omega).$$

Démonstration. Par le Lemme 3.5, $\{u_n\}_n$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ici, on obtient l'existence de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ faibelement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u_n \to u$ fortement dans $L^\alpha(\Omega)$ pour tout $\alpha < p^* = \frac{Np}{N-p}$. Alors utilisons la monotonicité de $\{u_n\}_n$ et le lemme de compacité Lemme 3.3 nous obtenons que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Donc, on conclut que u résoud le problème (3.1).

□

Théorème 3.3. *Soit $f \in \mathcal{M}^m(\Omega)$ telle que $m > \frac{N}{p}$, alors le problème (3.1) admet une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $G_k(u_n)$ pour $k > 1$ comme fonction test dans (3.6), nous obtenons

$$c_2 \int_\Omega (1 + |\nabla u_n|)^{p-\beta} |\nabla G_k(u_n)|^\beta \leq \int_\Omega \frac{f_n G_k(u_n)}{(u_n + \frac{1}{n})} \leq \int_\Omega f_n G_k(u_n)$$

dans l'ensemble $\{u_n \geq k\}$ où $G_k(u_n) \neq 0$. Utilisons la même technique de démonstration utilisée dans le Lemme 3.5 nous avons

$$\|\nabla G_k(u_n)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \int_\Omega f_n G_k(u_n).$$

L'inégalité de Sobolev donne

$$S \left(\int_\Omega |G_k(u_n)|^{p*} \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \int_\Omega f_n G_k(u_n).$$

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\int_\Omega f_n G_k(u_n) \leq \left(\int_\Omega |G_k(u_n)|^{p*} \right)^{\frac{1}{p*}} \left(\int_\Omega |f_n|^{q*} \right)^{\frac{1}{q*}},$$

Ici

$$S \left(\int_\Omega |G_k(u_n)|^{p*} \right)^{\frac{p-1}{p*}} \leq \left(\int_\Omega |f_n|^{q*} \right)^{\frac{1}{q*}}.$$

Alors le fait que $f \in \mathcal{M}^m(\Omega), m > q*$,

$$\int_{\{u_n > k\}} |f_n|^{q*} \leq C mes\{u_n > k\}^{1-\frac{q*}{m}},$$

et

$$\int_\Omega |G_k(u_n)| \leq C mes\{u_k > k\}^\alpha,$$

avec
$$\alpha = \frac{1}{q^*} + \Big(1 - \frac{q^*}{m}\Big)\Big(\frac{1}{q^*(p-1)}\Big).$$
Posons
$$g(k) = \int_\Omega |G_k(u_n)|,$$
et utilisons le Lemme 5.2, Appendix A (Voir [8]), nous concluons que $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ et par suite $u \in L^\infty(\Omega)$. □

Théorème 3.4. *Soit $f \in L^m(\Omega)$ telle que $m > \frac{N}{p}$, alors le problème (3.1) admet une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Théorème 3.3. Il suffit de voir que $L^m(\Omega) \subset \mathcal{M}^m(\Omega)$. □

Théorème 3.5. *Soit $f \in L^m(\Omega), m \geq 1$. Si $1 \leq m < \frac{N}{P}$, alors la solution u du problème (3.1) appartient $L^s(\Omega)$ avec $s = \frac{Nmp}{N-mp}$.*

Démonstration. Supposons que $1 < m < \frac{N}{P}$ et $\delta > 1$. Prenons $u_n^{p\delta-p+1}$ comme fonction test dans (3.6)
$$c_2(p\delta - p + 1)\int_\Omega (1 + |\nabla u_n|)^{p-\beta}\,|\nabla u_n|^\beta\, u_n^{p(\delta-1)} \leq \int_\Omega \frac{f_n u_n^{p\delta-p+1}}{(u_n + \frac{1}{n})}$$
$$\leq \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{p(\delta-1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$
Nous raisonnons comme dans le Lemme 3.5 avec $d\mu = u_n^{p(\delta-1)}dx$, nous obtenons
$$\int_\Omega |\nabla(u_n^\delta)|^p = \int_\Omega |\nabla u_n|^p u_n^{p(\delta-1)} = \|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega,d\mu)}$$
$$\leq \frac{1}{c_2(p\delta - p + 1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{p(\delta-1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$
L'inégalité de Sobolev donne
$$\mathcal{S}\left(\int_\Omega u_n^{p^*\delta}\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \frac{1}{c_2(p\delta - p + 1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{p(\delta-1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$
Choisissons δ tel que $p^*\delta = p(\delta-1)m'$, i.e $\delta = \frac{m(N-p)}{(N-mp)}$.
Puisque $m < \frac{N}{p}$, nous avons $\frac{p}{p^*} - \frac{1}{m'} > 0$. Ceci implique u_n est bornée

dans $L^s(\Omega)$ avec $s = p^*\delta = \frac{Nmp}{N-mp}$, et par suite $u \in L^s(\Omega)$.
Si $m = 1$, alors $s = \frac{Np}{N-p} = p^*$. Le résultat est obtenu par le fait que $u^{\frac{s}{p^*}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et par l'injection de Sobolev nous avons $u^{\frac{s}{p^*}} \in L^{p^*}(\Omega)$, i.e $u \in L^s(\Omega)$. □

3.3.2 Le cas $\gamma > 1$

Théorème 3.6. *Soit $f \in L^1(\Omega)$ alors $u_n^{\frac{p+\gamma-1}{p}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ la solution du problème (3.6). Utilisons u_n^γ comme fonction test dans (3.6) on obtient

$$c_2\gamma \int_\Omega (1 + |\nabla u_n|)^{p-\beta} |\nabla u_n|^\beta u_n^{\gamma-1} \leq \int_\Omega \frac{f_n u_n^\gamma}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \leq \int_\Omega f_n \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

Ici, on a

$$\int_\Omega (1 + |\nabla u_n|)^{p-\beta} |\nabla u_n|^\beta u_n^{\gamma-1} \leq C.$$

Soit $d\mu = u_n^{\gamma-1}dx$, et par l'inégalité de Hölder inversée on obtient

$$\begin{aligned}(\lambda_n^\gamma + \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega,d\mu)})^{p-\beta} \|\nabla u_n\|^\beta_{L^p(\Omega,d\mu)} &\leq \|1 + |\nabla u_n|\|^{p-\beta}_{L^p(\Omega,d\mu)} \|\nabla u_n\|^\beta_{L^p(\Omega,d\mu)} \\ &\leq \int_\Omega (1 + |\nabla u_n|)^{p-\beta} |\nabla u_n|^\beta \, d\mu.\end{aligned}$$

où $\lambda_n^\gamma = \|1\|_{L^p(\Omega,d\mu)}$. Comme dans le Lemme 3.5, nous obtenons :

Si $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega,d\mu)} \geq \lambda_n^\gamma$ alors

$$(2\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega,d\mu)})^{p-\beta} \|\nabla u_n\|^\beta_{L^p(\Omega,d\mu)} \leq (\lambda_n^\gamma + \|Du_n\|_{L^p(\Omega,d\mu)})^{p-\beta} \|Du_n\|^\beta_{L^p(\Omega,d\mu)}.$$

Finallement, on aboutit à

$$\int_\Omega |\nabla (u_n^{\frac{p+\gamma-1}{p}})|^p = \int_\Omega |\nabla u_n|^p u_n^{\gamma-1} = \|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega,d\mu)} \leq C(2)^{\beta-p}$$

□

Théorème 3.7. *Soit $f \in L^m(\Omega), m \geq 1$. Si $1 \leq m < \frac{N}{P}$, alors la solution u du problème (3.1) appartient à $L^s(\Omega)$ avec $s = \frac{Nm(p+\gamma-1)}{N-mp}$.*

Démonstration. Supposons que $1 < m < \frac{N}{P}$ et $\delta > 1$. Prenons $u_n^{p\delta-p+1}$ comme fonction test dans (3.6)

$$c_2(p\delta - p + 1)\int_\Omega (1+|\nabla u_n|)^{p-\beta}\,|\nabla u_n|^\beta\, u_n^{p(\delta-1)} \le \int_\Omega \frac{f_n u_n^{p\delta-p+1}}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma}$$
$$\le \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{[p(\delta-1)+1-\gamma]m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Comme dans le Lemme 3.5 avec $d\mu = u_n^{p(\delta-1)}dx$, nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla(u_n^\delta)|^p = \int_\Omega |\nabla u_n|^p u_n^{p(\delta-1)} = \|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega,d\mu)}$$

$$\le \frac{1}{c_2(p\delta-p+1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{[p(\delta-1)+1-\gamma]m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Par l'inégalité de Sobolev

$$S\left(\int_\Omega u_n^{p*\delta}\right)^{\frac{p}{p*}} \le \frac{1}{c_2(p\delta-p+1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{[p(\delta-1)+1-\gamma]m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Choisissons δ tel que $p^*\delta = [p(\delta-1)+1-\gamma]m'$, i.e $\delta = \frac{m(N-p)(p-1+\gamma)}{p(N-mp)}$. Puisque $m < \frac{N}{p}$, nous avons $\frac{p}{p^*} - \frac{1}{m'} > 0$. Ceci implique que u_n est bornée dans $L^s(\Omega)$ avec $s = p^*\delta = \frac{Nm(p-1+\gamma)}{N-mp}$, donc par suite $u \in L^s(\Omega)$.
Si $m = 1$, alors $s = \frac{N(p-1+\gamma)}{N-p}$. Le resultat vient du fait que $u^{\frac{s}{p^*}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et l'injection de Sobolev donne $u^{\frac{s}{p^*}} \in L^{p^*}(\Omega)$, i.e $u \in L^s(\Omega)$. □

3.3.3 Le cas $\gamma < 1$

Théorème 3.8. *Soit $f \in L^m(\Omega)$ avec $m = \left(\frac{p^*}{1-\gamma}\right)'$. Alors u_n est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ la solution du problème (3.6). Prenons u_n comme fonction test dans (3.6) on obtient

$$c_2\int_\Omega (1+|\nabla u_n|)^{p-\beta}\,|\nabla u_n|^\beta \le \int_\Omega \frac{f_n u_n}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma} \le \int_\Omega f u_n^{1-\gamma}$$
$$\le \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}$$

Ici, on a

$$\int_\Omega (1+|\nabla u_n|)^{p-\beta}|\nabla u_n|^\beta \le \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Comme dans le Lemma 3.5, nous montrons que

$$\|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Par l'hypothèse $m=\left(\frac{p^*}{1-\gamma}\right)'$ et l'inégalité de Sobolev, on a

$$S\left(\int_\Omega u_n^{p*}\right)^{\frac{p}{p^*}} \le \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Puisque $m<\frac{N}{p}$, on a $\frac{p}{p^*}-\frac{1}{m'}>0$, donc u_n est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Théorème 3.9. *Soit $f\in L^m(\Omega), m\ge\left(\frac{p^*}{1-\gamma}\right)'$.*
Si $\left(\frac{p^*}{1-\gamma}\right)'\le m<\frac{N}{P}$, alors la solution u du problème (3.1) appartient $L^s(\Omega)$ avec $s=\frac{Nm(p+\gamma-1)}{N-mp}$.

Démonstration. Supposons que $\left(\frac{p^*}{1-\gamma}\right)'<m<\frac{N}{P}$ et $\delta>1$. Utilisons $u_n^{p\delta-p+1}$ comme fonction test dans (3.6)

$$\begin{aligned}c_2(p\delta-p+1)\int_\Omega(1+|\nabla u_n|)^{p-\beta}|\nabla u_n|^\beta u_n^{p(\delta-1)} &\le \int_\Omega \frac{f_n u_n^{p\delta-p+1}}{(u_n+1/n)^\gamma}\\ &\le \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{[p(\delta-1)+1-\gamma]m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.\end{aligned}$$

Nous raisonons comme dans la preuve du Lemme 3.5 avec $d\mu=u_n^{p(\delta-1)}dx$, nous obtenons

$$\int_\Omega|\nabla(u_n^\delta)|^p=\int_\Omega|\nabla u_n|^p u_n^{p(\delta-1)}=\|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega,d\mu)}$$

$$\le\frac{1}{c_2(p\delta-p+1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{[p(\delta-1)+1-\gamma]m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Par l'inégalité de Sobolev on a

$$\mathcal{S}\left(\int_\Omega u_n^{p*\delta}\right)^{\frac{p}{p*}} \leq \frac{1}{c_2(p\delta - p + 1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{[p(\delta-1)+1-\gamma]m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Choisissons δ tel que $p^*\delta = [p(\delta-1)+1-\gamma]m'$, i.e $\delta = \frac{m(N-p)(p-1+\gamma)}{p(N-mp)}$. Puisque $m < \frac{N}{p}$, nous avons $\frac{p}{p^*} - \frac{1}{m'} > 0$. Par suite, u_n est borné dans $L^s(\Omega)$ avec $s = p^*\delta = \frac{Nm(p-1+\gamma)}{N-mp}$, donc par suite $u \in L^s(\Omega)$.

Si $m = \left(\frac{p^*}{1-\gamma}\right)'$, alors $s = \frac{N(p-1+\gamma)}{N-p}$. On obtient par le fait que $u^{\frac{s}{p^*}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et par l'inégalité de Sobolev que $u^{\frac{s}{p^*}} \in L^{p^*}(\Omega)$, i.e $u \in L^s(\Omega)$. $\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté et développé le travail de L. Bocardo et L. Orsina (Voir [9]), concernant un problème semi-linéaire elliptique avec un terme singulier. Des réultats d'existence et de régularité ont été démontré. Ensuite, on a généraliser le travail pour un problème non-linéaire avec le même terme singulier.
En comparant les résultats pour les divers valeurs de γ, on remarque que pour le cas non linéaire si en prend $p = 2$, on trouve les mêmes résultats que pour le cas linéaire.
Pour le cas semi-linéaire, on laisse le soin au lecteur de voir le cas où la donné f est une mesure (Voir [9], [1]).

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, A. Attar, Quasilinear elliptic problem with Hardy potential and singular term. Communications on Pure and Applied Analysis, 12, (2013), 1363-1380

[2] B . Abdellaoui , Y. O.Boukarabila and S. E. Hadi Miri, Introduction aux méthodes variationnelles et application à la résolution des EDP elliptiques.researchgate.net.June 2018

[3] C. O. Alves , J. V. Goncalves, and L.Maia, Singular nonlinear elliptic equations in RN . Abstr. Appl. Anal. 3, 411-423 (1998)

[4] D. Arcoya, J. Carmona, T. Leonori, P. Martínez-Aparicio. L, Orsina and F. Petitta, Existence and nonexistence of solutions for singular quadratic quasilinear equations. J. Differential Equations 246, 4006-4042 (2009)

[5] L. Boccardo, Dirichlet problems with singular and gradient quadratic lower order terms. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 14, 411-426 (2008)

[6] L. Boccardo and J. Casado-Daz, Some properties of solutions of some semilinear elliptic singular problems and applications to the G-convergence . Asymptotic Analysis. 86(1), 1-15 (2014)

[7] L. Boccardo, G. Croce and L. Orsina, Nonlinear degenerate elliptic problems with $W_0^{1,1}(\Omega)$ solutions, Manuscripta Math 137 (2012), 419-439

[8] L. Boccardo and L. Moreno-Mrida, Existence and regularity results for p-Laplacian boundary value problems. Sociedad Espaola de Matematica Aplicada. 66(1), 9-27 (2014)

[9] L. Boccardo and L. Orsina, Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities, Calc. Var., 37 (2010), 363-380

[10] H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson, 1983

[11] A. Canino and M. Degiovanni , A variational approach to a class of singular semilinear elliptic equations. J. Convex Anal. 11, 147-162 (2004)

[12] G. S. Chen and C. D. Wei, A reverse Hölder inequality for α, β - symmetric integral and some related results.Journal of Inequalities and Applications(2015),Springer,138

[13] M.M. Coclite, and G. Palmieri , On a singular nonlinear Dirichlet problem. Comm. Partial Differential Equations 14, 1315-1327 (1989)

[14] M.G. Crandall,P.H. Rabinowitz and L. Tartar, On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity. Comm Partial Differential Equations 2, 193-222 (1977)

[15] S. El-Hadi Miri, On an anisotropic problem with singular nonlinearity having variable exponent. Ricerche di Matematica. 66(2), 415-424 (2017)

[16] M. Ghergu and V. Radulescu , Singular elliptic problems. Oxford (OH) : Oxford University Press ; 2008

[17] N. Hirano, C. Saccon, and N. Shioji , Existence of multiple positive solutions for singular elliptic problems with concave and convex nonlinearities. Adv. Differential Equations 9, 197-220 (2004)

[18] A. V. Lair, and A. W. Shaker, Entire solution of a singular semilinear elliptic problem. J. Math. Anal. Appl. 200, 498-505 (1996)

[19] A. V. Lair, and A. W. Shaker, Classical and weak solutions of a singular semilinear elliptic problem. J. Math. Anal. Appl. 211, 371-385 (1997)

[20] A. C. Lazer and P. J. McKenna, On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem. Proc. Amer.Math. Soc. 111, 721-730 (1991)

[21] A. R. Leggat and S. El-Hadi Miri, Anisotropic problem with singular nonlinearity. Complex Var. Elliptic Equ. 61(4), 496-509 (2016)

[22] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod Gauthier-Villars, Paris (1969)

[23] D. Lukkassen and P. Wall, Two-scale convergence with respect to measures and homogenization of monotone operators.Scientific Horizon ,Volume 3, Number 2 (2005), 125-161

[24] M. Mamchaoui and G. Senouci Bereksi, Convergence of monotone operators with respect to measures. ZAMM Â· Z. Angew. Math. Mech. 97(5), 617-630 (2017)

[25] P. Martínez-Aparicio , Singular Dirichlet problems with quadratic gradient (preprint)

[26] L. M De Cave , Nonlinear elliptic equations with singular nonlinearities. Asymptot. Anal. 84, 181-195 (2013)

[27] G. Stampacchia , Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1965 ;15 :189-258

[28] M. Struwe, Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltnian Systems, Springer, Berlin, 1996

[29] C. A. Stuart, Existence and approximation of solutions of non-linear elliptic equations. Math. Z. 147, 53-63 (1976)

[30] Z. Zhang and J. Cheng, Existence and optimal estimates of solutions for singular nonlinear Dirichlet problems. Nonlinear Anal. 57, 473-484 (2004)