République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du
Diplôme de Master en Mathématiques.
Option : Biomathématiques et Modélisation

Exclusion compétitive et coexistence dans un modèle de pathogène à deux souches avec diffusion

---

Présenté Par : ZETTAM Manel Yousra

Mémoire soutenu le 02 juillet devant le jury composé de :

M. **M.T. Touaoula**	Professeur UABB Tlemcen	Président
M. **S.E-H. Miri**	MCA UABB Tlemcen	Examinateur
M. **Y. Boukarabila**	MCB UABB Tlemcen	Examinateur
M. **A. Moussaoui**	Professeur UABB Tlemcen	Encadreur

Année universitaire 2017-2018

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes trés chère parents, pour tout leurs sacrifices, leurs soutiens, et leurs prières tout le long de mes études.

Mes grands parents.

Ma soeur Mériem.

Mes deux fréres Marwane et Amine.

Mes oncles Mhamed et Mohamed.

Monsieur Hasnaoui Okacha.

Et à toute ma famille.

Remerciements

Avant toute chose, je remercie **ALLAH** le tout puissant qui m'a donné santé, volonté et patience pour la réalisation de ce présent travail.

Je tiens à éxprimer mes sinceres remerciements à mon professeur Mr **A.MOUSSAOUI** pour l'assistance, l'aide et l'orientation souhaitées que j'ai trouvé tout au long de ce mémoire. Je ne manquerai pas de saluer aussi la patience et le suivi en lui et dont j'ai bénéficié.

Par la même occasion je remercie les membres du jury Mr **M.T. Touaoula**, Mr **S. Miri** et Mr **Y. Boukarabila** d'avoir accepter d'examiner et d'évaluer mon présent mémoire.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'analyser un modèle mathématique de type réaction-diffusion avec coefficients hétérogènes qui décrit la dynamique d'une épidémie ou l'infection par deux souches pathogènes.
Ce mémoire est principalement une synthèse de l'article de A. S. Ackleh, K. Deng et Y. Wu, intitulé : Competitive exclusion and coexistence in a two-strain pathogen model with diffusion, publié dans le journal : Mathematical Biosciences and Engineering en 2016.
il se divise en deux parties :

La première correspond au cas homogène où les taux de transmission de la maladie et sa guérison ne dépendent pas de la variable d'éspace x, en plus les taux de diffusion sont différents .
Deux cas sont possibles à travers le calcul d'un paramètre qu'on l'appelle dans la litérature par le taux de reproduction de base souvent noté par R_0 :
(a) $R_0 \leq 1$: l'équilibre sans maladie est globalement attractif.
(b) $R_0 > 1$: le principe d'éxclusion compétitif se réalise (la plus forte souche pathogène conduit l'éxtinction de la seconde).

La seconde décrit le cas hétérogène avec des taux de diffusion égaux. Deux cas possibles sont obtenus à travers le calcul de R_0 :
(a) $R_0 \leq 1$: l'équilibre sans maladie est globalement attractif.
(b) $R_0 > 1$: soit le principe d'éxclusion compétitif se réalise, ou bien la coexistence entre les deux souches pathogènes.

Mots clés :
Modèles de réaction-diffusion, principe d'éxclusion compétitif, coexistence, taux de reproduction de base, environnement homogéne, environnement hétérogène.

Abstract

The main objective of this thesis is to analyze a heterogeneous coefficient reaction-diffusion mathematical model that describes the dynamics of an epidemic or the infection by two pathogenic strains.

This thesis is mainly a synthesis of the article by A. S Ackleh, K. Deng and Y. Wu, entitled : Competitive exclusion and coexistence in a two-strain pathogen model with diffusion, published in the journal : Mathematical Biosciences and Engineering in 2016.

It is divided into two parts :

The first part corresponds to the homogeneous case where the rates of transmission of the disease and its cure do not depend on the space variable x, in addition the diffusion rates are different.

Two cases are possible through the calculation of a parameter that is called in the literature by the basic reproduction rate often denoted by R_0 :

(a) $R_0 \leq 1$: disease free equilibrium is globally attractive.

(b) $R_0 > 1$: the principle of competitive exclusion is realized (the strongest pathogenic strain leads to the extinction of the second).

The second one describes the heterogeneous case with equal diffusion rates, and with two cases of calculation of R_0 :

(a) $R_0 \leq 1$: disease free equilibrium is globally attractive.

(b) $R_0 > 1$: the principle of competitive exclusion is realized, or the coexistence between the two pathogenic strains.

Keywords :

Reaction-diffusion models, principle of competitive exclusion, coexistence, basic reproduction rate, homogeneous and heterogeneous environment.

Table de matière

1 Introduction générale **2**

2 Outils mathématiques **5**

2.1 Principe de comparaison 5

2.2 Principe de maximum 6

2.3 Semi-groupe fortement continue et le générateur infinitésimal . . . 7

2.4 Semi-groupes analytiques et opérateurs sectoriels 8

2.5 Espace des puissances fractionnaires 10

2.6 Systèmes dynamiques et fonction de Lyapunov 11

3 Modèle SIS à deux souches avec diffusion **12**

3.1 Présentation du modèle 13

3.1.1 Existence et unicité de la solution 14

3.2 Cas homogène avec coefficients constants 16

3.2.1 Etats stationnaires 17

3.2.2 Attractivité globale 19

3.3 Cas hétérogène avec coefficients de diffusion égaux 31

3.3.1 Nombre de reproduction de base : 31

3.3.2 Equilibre sans maladie 33

3.3.3 Equilibre endémique 38

3.4 Conditions d'éxclusion compétitive et de coexistence 45

4 Simulation numérique **48**

Chapitre 1

Introduction générale

Pour comprendre la dynamique des modèles épidémiques multi souches pathogènes, plusieurs études ont été menées dont : la grippe, le 'VIH SIDA',...etc. L'intérét principal de l'étude de ces modèles réside dans le suivi du comportement de la solution en se basant sur le calcul du taux de reproduction de base R_0 qui nous conduit à la coexistence entre les souches pathogènes ou à l'extinction de quelques souches (principe d'éxclusion compétitive). [1]

Parmi ces modèles, les auteurs dans [4] ont étudie le modèle épidémiologique avec une souche pathogène :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S - \beta(x)\dfrac{SI}{S+I} + \gamma(x)I, \ x \in \Omega, \ t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = d_I \Delta I + \beta(x)\dfrac{SI}{S+I} - \gamma(x)I, \ \ x \in \Omega, \ t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial S}{\partial \eta} = \dfrac{\partial I}{\partial \eta} = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x \in \partial\Omega, \ t > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

1. principe d'éxclusion compétitive ou principe de Gauss [8] se définit de la manière suivante : On considère généralement que plus une espèce est apparentée à une autre, et plus son comportement de nutrition sera différent, sinon les deux seraient en compétition l'une avec l'autre pour une même nourriture, ce qui pourrait conduire à l'éxtinction d'une des deux espèces.

Un modèle avec deux souches pathogènes a été utilisé dans [15], il est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S - (\beta_1(x) I_1 + \beta_2(x) I_2) \dfrac{S}{S + I_1 + I_2} + \gamma_1(x) I_1 + \gamma_2(x) I_2, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial I_1}{\partial t} = d_1 \Delta I_1 + \beta_1(x) \dfrac{S I_1}{S + I_1 + I_2} - \gamma_1(x) I_1, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial I_2}{\partial t} = d_2 \Delta I_2 + \beta_2(x) \dfrac{S I_2}{S + I_1 + I_2} - \gamma_2(x) I_2, & x \in \Omega,\ t > 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

sous condition :

$\int_\Omega (I_1(x,0) + I_2(x,0))\, \mathrm{d}x > 0$ avec : $S(x,0) > 0,\ I_1(x,0) > 0,\ I_2(x,0) > 0$ pour $x \in \Omega$.

Les modèles cités ci-dessus (1.1)-(1.2) sont des modèles de type réaction-diffusion qui se constituent de deux parties. La première décrit la diffusion des individus qu'on a modélisé par le Laplacien avec des taux de diffusion différents, et la seconde décrit les intéractions des individus avec des taux de transmission et de guérison qui sont hétérogènes.

Dans notre présent mémoire, on va analyser un modèle mathématique SIS de type réaction diffusion avec deux souches pathogènes étudie dans l'article [1].

Notations

Ω : Domaine borné de $\mathbb{R}^m$.

$\partial\Omega$: Bord de Ω.

Δ : Laplacien.

A : Opérateur linéaire borné.

$D(A)$: Domaine de A.

$L(x)$: Ensemble des opérateurs linéaires bornés.

$\rho(A)$: Ensemble résolvant où $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in L(x)\}$.

$\sigma(A)$: Spectre de A telle que : $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

$R(\lambda, A)$: Résolvante telle que : $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

$C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$: Espace des fonctions de classe C^1 dont la dérivée première et μ holderienne.

X_α : Espace des puissances fractionnaires d'ordre α.

$W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$: Espace de sobolev où la dérivé d'ordre m est dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$: Espace de sobolev dans un compact où la dérivé d'ordre m est dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

$L^p(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions mesurables dans $\mathbb{R}^n$.

V : Fonction de Lyapunov.

R_0 : Nombre de reproduction de base.

Chapitre 2

Outils mathématiques

Dans ce chapitre on présente quelques théorèmes qui nous servent dans la suite de notre analyse mathématique.

2.1 Principe de comparaison

Théorème 1 *[13] :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(x,u), & t \geq 0,\ x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0 \ \text{ou}\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & t \geq 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Soit $T > 0$ (T peut être l'infinie), considrérons une fonction $f = f(t,x,u)$ telle que : $\left(f, \dfrac{\partial f}{\partial u}\right) \in C([0,T] \times \overline{\Omega} \times R)$.
Soient $\underline{u}$ et $\overline{u}$ dans $C_1^2(]0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C([0,T] \times \overline{\Omega})$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} \geq D\Delta \bar{u} + f(t,x,\bar{u}),\ t \in]0,T],\ x \in \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial \underline{u}}{\partial t} \leq D\Delta \underline{u} + f(t,x,\underline{u}),\ t \in]0,T],\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Et $\underline{u}(0,x) \leq \overline{u}(0,x),\ x \in \Omega$.
On suppose également que : $\dfrac{\partial \underline{u}}{\partial \eta}(t,x) \leq 0 \leq \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}(t,x),\ t \in]0,T],\ x \in \partial\Omega$.
Ou que : $\underline{u}(t,x) \leq 0 \leq \overline{u}(t,x),\ t \in]0,T],\ x \in \partial\Omega$, alors : $\overline{u} \geq \underline{u}$ dans $]0,T] \times \overline{\Omega}$ et soit il existe $(t_0,x_0) \in]0,T] \times \Omega$ telle que : $\overline{u}(t_0,x_0) = \underline{u}(t_0,x_0)$ et alors : $\overline{u} \equiv \underline{u}$ dans $[0,t_0] \times \overline{\Omega}$, soit $\overline{u} > \underline{u}$ dans $]0,T] \times \Omega$.

Les fonctions $\overline{u}$, $\underline{u}$ sont appelées respectivement sur et sous-solution.

2.2 Principe de maximum

Théorème 2 *[7] :*

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$.

On suppose que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *est harmonique dans* Ω, *alors :*

(i) $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$.

(ii) Si Ω *est connexe, et il existe un point* $x_0 \in \Omega$ *telle que :* $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$ *alors* u *est constante dans* Ω.

L'assertion (i) représente le principe de maximum pour l'équation de laplace, (ii) c'est le principe de maximum fort. Si on remplace u par $-u$ *nous récupérons également des assertions similaires avec le* min *à la place de* max.

Remarque 1 *[7] :*

Le principe de maximum fort affirme en particulier que si Ω *est connexe et* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *vérifie :*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & sur\ \Omega, \\ u = g \geq 0, & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $u > 0$ *dans* Ω *si* $g > 0$ *sur* $\partial\Omega$.

Théorème 3 *[3] :*

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = v_1 \Delta u + uB(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ \\ u(x,0) = f(x) \geq 0, & \end{cases} \tag{2.2}$$

sous l'hypothèse (A) *:* $B(x,t) < a$, a *est une constante positive,* $B(x,t)$ *est localement lipschitzienne et* v_1 *est une constante positive.*

On suppose que $u(x,t) \geq 0$, *et* $\sup\limits_{t\geq 0} \int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x < K$, K *est une constante positive finie.*

Alors sous l'hypothèse (A) *on a :*

$\sup\limits_{t\geq 0} \|u(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K^*$, *où* K^* *est une constante qui dépend de* K *et de* $\|u(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Théorème 4 *[11] :*

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u_t + L_x u = -f(x,t), \ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \qquad\qquad\qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad\qquad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

avec : $L_x u = \sum\limits_{j,k=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(a_{jk}(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_k})$.

Soit L *définie par :* $\lim\limits_{t \to +\infty} \displaystyle\int_0^t \int_\Omega f(x,\tau)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$.

Et :

$$\lim_{t \to +\infty} \int_t^{t+1} \int_\Omega |f(x,\tau)|^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau = 0, \ p > \frac{n}{2} + 1 \ (n \ \textit{dimension d'espace}). \tag{2.4}$$

Soit $u(x,t)$ *solution de (2.3). Supposons que* f *est localement dans* $L^p[\Omega \times (0,\infty)]$*, (2.4) est vérifiée, et que* L *existe alors :* $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t) = c$ *uniformément dans* Ω *où* $c = \dfrac{1}{|\Omega|}(L + \displaystyle\int_\Omega u_0(x)\,\mathrm{d}x)$.

2.3 Semi-groupe fortement continue et le générateur infinitésimal

Définition 1 *[14] :*

Soit X *un espace de Banach donné, et soit* $L(X)$ *l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur* X.

On dit que $T(t)$ *est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* X *si :*

$T(t) \in L(X)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, *on a :*

(i) $T(0) = Id$.

(ii) $T(t)T(s) = T(t+s)$, $(s,t) \in [0,\infty)$.

De plus un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X *est un* C_0 *semi-groupe si on a :*

(iii) $T(t)x \longrightarrow x$, *quand* $t \longrightarrow 0^+$, $\forall x \in X$.

L'équation (ii) est appelée propriété du semi-groupe et l'équation (iii) est une déclaration de forte continuité de $T(t)$ *au point* $t = 0$, *i.e* $\forall x \in X$, $\|T(t)x - x\| \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow 0^+$.

Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe sur X, on définit son générateur infinitésimal A comme suit : $Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h}x = 0$, $\forall x \in D(A)$.
Où $D(A)$ est le domaine de A qui est donné par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h}x \text{ exists dans } X \right\}.$$

2.4 Semi-groupes analytiques et opérateurs sectoriels

Une classe spéciale du semi-groupe fortement continue ou (C_0 semi-groupe) est de savoir les semi-groupes analytiques qui jouent un rôle fondamental dans l'étude des systèmes dynamiques de dimension infinie.

Définition 2 *[14] :*
On définit le secteur Δ_δ par l'ensemble suivant :
$\Delta_\delta = \{z \in C : |argz| < \delta, z \neq 0, \delta \in (0,\pi)\}$.
Soit $(T(t), A)$ un C_0 semi-groupe dans X, on dira que $(T(t), A)$ est un semi-groupe analytique s'il existe une extension de $T(t)$ à une application $T(z)$ définie pour z dans un secteur $\Delta_\delta \cup \{0\}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :
(i) $z \longrightarrow T(z)$ *est une application de* $\Delta_\delta \cup \{0\}$ *vers* $L(x)$.
(ii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, $\forall z_1,\ z_2 \in \Delta_\delta \cup \{0\}$.
(iii) $\forall x \in X, T(z)x \longrightarrow x$ *quand* $z \longrightarrow 0$ *est dans le secteur* $\Delta_\delta \cup \{0\}$.
(iv) $\forall x \in X$ *la fonction* $z \longrightarrow T(z)x$ *est analytique de* Δ_δ *vers* X.

Définition 3 *[14] :*
Dans la suite on définit $\sum_\sigma(a)$ par l'ensemble suivant :
$\sum_\sigma(a) = a + \sum_\sigma = \{z \in C : |arg(z-a)| > \sigma, z \neq a\}$.
Un opérateur linéaire A est dit opérateur sectoriel dans X si :
$A : D(A) \longrightarrow X$ *où* $D(A) \subset X$, *et il satisfait les deux conditions suivantes :*
(i) A est densément défini et fermé.
(ii) $\exists a \in R, \sigma \in (0, \frac{\pi}{2}), M \geq 1$ *telle que :*
$\sum_\sigma(a) \subset \rho(A)$ *et* $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{M}{(\lambda - a)}$, $\forall \lambda \in \sum_\sigma(a)$.

Lemme 1 *[14] :*

Soit A un opérateur sectoriel sur un espace de Banach X, alors $-A$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe e^{-At}, et il existe une constante $M_0 \geq 1$ telle que :

$\|e^{-At}\| \leq M_0 e^{-at}, \ \forall t \geq 0.$

De plus : $e^{-At} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda, -A)\, \mathrm{d}\lambda$ *pour* $t > 0$, *et* $e^{-At} = I$ *quand* $t = 0$.

Ici $\Gamma = \Gamma(\eta, \theta)$ est un contour dans l'ensemble résolvant $\rho(-A)$ telle que :

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ *(voir Figure (2.1)).*

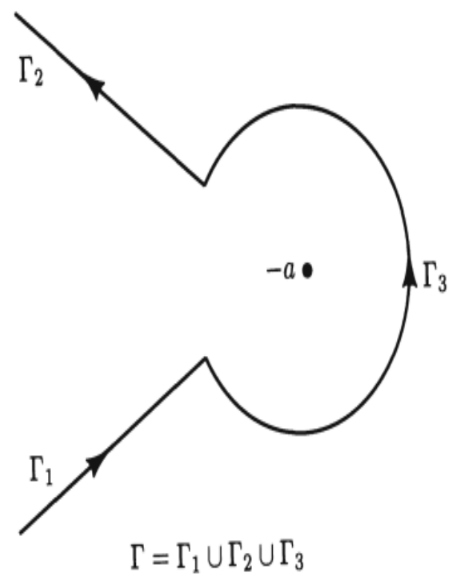

FIGURE 2.1 – source[14].

Théorème 5 *[2] :*

Considérons les opérateurs elliptiques du second ordre dans un ouvert $\Omega \subset R^n$ avec une frontière $\partial\Omega$ de classe C^2. Notons $n(x)$ le vecteur unitaire extérieur.

Soit A un opérateur différentiel définit comme suit :

$(Au)(x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) + \sum_i b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x), \ (i,j) = 1, ...n.$

Soit $p \in (1, \infty)$.

(i) Soit $A_p : W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, définie par : $A_p u = Au$.

L'opérateur A_p est sectoriel dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et $D(A_p)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Soit Ω et A définie comme ci-dessus, et soit A_p définie par : $A_p u = Au$, $D(A_p) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Alors l'opérateur A_p est sectoriel dans $L^p(\Omega)$ et $D(A_p)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

(iii) Soit Ω et A définie comme ci-dessus, et soit A_p définie par :

$A_p u = Au,\ D(A_p) = \{u \in W^{2,p}(\Omega),\ Bu|_{\partial\Omega} = 0\}$, *avec :*

$(Bu)(x) = b_0(x)u(x) + \sum_{i=0}^{n} b_i(x)D_i u(x)$, *les coefficients* $b_i,\ i = 1, ...n \ \in C^1(\overline{\Omega})$.

Et la condition de transversalité :

$\sum_{i=0}^{n} b_i(x)n_i(x) \neq 0,\ x \in \partial\Omega$, *alors l'opérateur A_p est sectoriel dans $L^p(\Omega)$ et $D(A_p)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

2.5 Espace des puissances fractionnaires

Les opérateurs sectoriels offrent de nombreux avantages mathématiques dans l'étude des équations évolutives linéaires et non linéaires, comme indiqué dans la dernière section de tels opérateurs conduisent à la théorie des semi-groupes analytiques.

Une autre caractéristique importante, que nous explorons dans cette section, est le concept de la puissance fractionnaire.

Remarque 2

Dans la définition ci-dessous $\Gamma(\alpha)$ désigne la fonction eulérienne Γ.

Définition 4 *[10] :*

Supposons que A est un opérateur sectoriel et $Re\sigma(A) > 0$ alors :

$\forall \alpha > 0,\ A^{-\alpha} = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At}\, \mathrm{d}t.$

Théorème 6 *[10] :*

On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert avec une extension C^m.

Soit $1 \leq p < \infty$, et A est un opérateur sectoriel dans $X = L^p(\Omega)$ avec :

$D(A) = X^1 \subset W^{m,p}(\Omega),\ m \geq 1$, *alors pour* $0 \leq \alpha \leq 1$,

(i) $X^\alpha \subset W^{k,q}(\Omega)$ *lorsque* $k - \frac{n}{q} < m\alpha - \dfrac{n}{p},\ q \geq p$.

(ii) $X^\alpha \subset C^\nu(\Omega)$ *lorsque* $0 \leq \nu < m\alpha - \dfrac{n}{p}$.

2.6 Systèmes dynamiques et fonction de Lyapunov

Définition 5 *[10] :*

Un système dynamique (semi-groupe non linéaire) dans un espace métrique complet C est une famille $\{S(t) : C \longrightarrow C, t \geq 0\}$ telle que :

(i) $\forall t \geq 0$, $S(t)$ est continue de $C \longrightarrow C$.

(ii) $\forall x \in C$, $t \mapsto S(t)x$ est continue.

(iii) $S(0) = Id$ dans C.

(iv) $S(t)(S(\tau)x) = S(t+\tau)x$, $\forall x \in C$ et $t, \tau \geq 0$.

Définition 6 *[10] :*

Soit $\{S(t), t \geq 0\}$ un système dynamique dans C

Une fonction de Lyapunov est une fonction continue à valeur réelle V sur C telle que :

$$\dot{V}(x) = \overline{\lim}_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\{V(S(t)x) - V(x)\} \leq 0, \ \forall x \in C.$$

Théorème 7 *[13] :*

Soit r une fonction lipschitzienne sur $\overline{\Omega}$, il existe un unique couple :

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (valeur propre principale de L_r), $\phi \in C^3(\Omega)$ (fonction propre principale de L_r) vérifiant :

$$\textbf{\textit{Cas de Dirichlet}} : \begin{cases} -D\Delta\phi - r(x)\phi = \lambda_1\phi, & x \in \Omega, \\ \phi(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \phi > 0, & x \in \Omega, \\ \max_{\overline{\Omega}} \phi = 1. \end{cases}$$

$$\textbf{\textit{Cas de Neumann}} : \begin{cases} -D\Delta\phi - r(x)\phi = \lambda_1\phi, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \phi > 0, & x \in \Omega, \\ \max_{\overline{\Omega}} \phi = 1. \end{cases}$$

Chapitre 3

Modèle SIS à deux souches avec diffusion

Introduction :

Dans ce chapitre on étudie un modèle mathématique de type réaction-diffusion avec deux souches pathogènes proposées et étudiées dans [1]. On commence par étudier l'existence et l'unicité globale de la solution.

Pour examiner le comportement de la solution, on calcul le taux de reproduction de base R_0.

A cet effet notre travail se divise en deux parties :

Cas homogène : dans cette partie tous les coefficients du modèle sont homogènes, le calcul des équilibres du modèle, et l'étude de l'attractivité globale suivant les valeurs de R_0, conduira à un phénomène d'éxclusion compétitive.

Cas hétérogène : dans ce cas tout les coefficients sont hétérogènes avec des taux de diffusion égaux, par la suite on introduira la méthode qui se base sur la valeur propre principale pour exprimer le taux de reproduction de base.

Le calcul de l'équilibre sans maladie et la démonstration de la stabilité et l'attractivité globale de ce dernier, ainsi que le calcul de l'équilbre endémique et l'étude de l'attractivité globale conduiront à deux résultats possibles : soit on aura le principe d'éxclusion compétitive ou bien la coexistence entre les souches pathogènes.

3.1 Présentation du modèle

Soit le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S - (\beta_1(x)I_1 + \beta_2(x)I_2)S + \gamma_1(x)I_1 + \gamma_2(x)I_2, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial I_1}{\partial t} = d_1 \Delta I_1 + \beta_1(x)SI_1 - \gamma_1(x)I_1, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial I_2}{\partial t} = d_2 \Delta I_2 + \beta_2(x)SI_2 - \gamma_2(x)I_2, & x \in \Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Le modèle (3.1) est un modèle SIS à deux souches, il est constitué de trois compartiments :

S : le nombre d'individus succeptible à la maladie.

I_1 : le nombre d'individus infecté par la première souche pathogène.

I_2 : le nombre d'individus infecté par la deuxième souche pathogène.

Avec :

d_S : taux de diffusion des suceptibles.

d_i : taux de diffusion des infectés, pour $i = 1, 2$.

$\beta_i(x)$: taux de transmission de la maladie entre un individu succeptible et un autre infecté.

$\gamma_i(x)$: taux de recouvrement (guérison) des individus.

où : $\beta_i(x)$, $\gamma_i(x)$ sont des fonctions positives, continues et holderienne dans $\overline{\Omega}$.

On ajoute a ce modèle des conditions au bord de type Neuman :

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I_i}{\partial \eta} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{3.2}$$

et des conditions initiales :

(H) : $S(x, 0) \geq 0,\ I_i(x, 0) \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$, pour $i = (1, 2)$, où le nombre d'individus infectés par la maladie i est positif i.e : $\int_\Omega I_i(x, 0)\,\mathrm{d}x > 0$.

On vérifie que la taille totale de la population est constante :

Soit : $\int_\Omega (S(x, 0) + I_1(x, 0) + I_2(x, 0))\,\mathrm{d}x \equiv N$.

En effet, additionnant les trois équations du modèle (3.1), ensuite on intègre sur Ω, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(S+I_1+I_2)\,\mathrm{d}x = d_S \int_{\Omega} \Delta S dx + d_1 \int_{\Omega} \Delta I_1 dx + d_2 \int_{\Omega} \Delta I_2 dx.$$

Par la première formule de green :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(S+I_1+I_2)\,\mathrm{d}x = d_S \int_{\partial\Omega} \frac{\partial S}{\partial \eta} dx + d_1 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial I_1}{\partial \eta} dx + d_2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial I_2}{\partial \eta} dx$$

Et comme $\dfrac{\partial S}{\partial \eta} = \dfrac{\partial I_1}{\partial \eta} = \dfrac{\partial I_2}{\partial \eta} = 0$ (conditions de Neumann sur le bord).

On obtient : $\dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\int_{\Omega} (S+I_1+I_2)\,\mathrm{d}x = 0,\ t>0.$

Ceci implique que la taille totale de la population est constante :

$$\int_{\Omega} (S(x,t)+I_1(x,t)+I_2(x,t)) = N \tag{3.3}$$

3.1.1 Existence et unicité de la solution

Théorème 8

On suppose que l'hypothèse (H) est vérifiée. Alors on a l'existence et l'unicité de la solution :

$(S(x,t), I_1(x,t), I_2(x,t))$ *globalement. De plus il existe une constante* $M>0$ *telle que* M *dépend de la condition initiale et de* $\max_{x\in\Omega}\{\gamma_i(x)/\beta_i(x)\}$ *telle que :*

$$0 < S(x,t), I_1(x,t), I_2(x,t) \leq M, pour\ \ x\in\Omega, t\in(0,\infty). \tag{3.4}$$

Preuve

Soit $(\hat{S}(x,t), \hat{I}_1(x,t), \hat{I}_2(x,t))$ *solution locale du problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{S}}{\partial t} = d_S \Delta \hat{S} + \gamma_1(x)\hat{I}_1 + \gamma_2(x)\hat{I}_2, & x\in\Omega,\ t>0, \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{I}_1}{\partial t} = d_1 \Delta \hat{I}_1 + \beta_1(x)\hat{S}\hat{I}_1 - \gamma_1(x)\hat{I}_1, & x\in\Omega,\ t>0, \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{I}_2}{\partial t} = d_2 \Delta \hat{I}_2 + \beta_2(x)\hat{S}\hat{I}_2 - \gamma_2(x)\hat{I}_2, & x\in\Omega,\ t>0, \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} = \dfrac{\partial \hat{I}_1}{\partial \eta} = \dfrac{\partial \hat{I}_2}{\partial \eta} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\[2ex] \hat{S}(x,0) = S(x,0),\ \hat{I}_1(x,0) = I_1(x,0),\ \hat{I}_2(x,0) = I_2(x,0),\ x\in\overline{\Omega}, \end{cases} \tag{3.5}$$

Alors : $(\hat{S}(x,t), \hat{I}_1(x,t), \hat{I}_2(x,t))$ *est une solution supérieure (sur- solution) et* $(\overset{*}{S}(x,t), \overset{*}{I}_1(x,t), \overset{*}{I}_2(x,t)) = (0,0,0)$ *est une solution inférieur (sous-solution) pour le problème (3.1) car :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{S}}{\partial t} \geq d_S \Delta \hat{S} - (\beta_1(x)\hat{I}_1 + \beta_2(x)\hat{I}_2)\hat{S} + \gamma_1(x)\hat{I}_1 + \gamma_2(x)\hat{I}_2, \\ \\ \dfrac{\partial \overset{*}{S}}{\partial t} \leq d_s \Delta \overset{*}{S} - (\beta_1(x)\overset{*}{I}_1 + \beta_2(x)\overset{*}{I}_2)\overset{*}{S} + \gamma_1(x)\overset{*}{I}_1 + \gamma_2(x)\overset{*}{I}_2, \\ \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{I}_1}{\partial t} \geq d_1 \Delta \hat{I}_1 + \beta_1(x)\hat{S}\hat{I}_1 - \gamma_1(x)\hat{I}_1, \\ \\ \dfrac{\partial \overset{*}{I}_1}{\partial t} \leq d_1 \Delta \overset{*}{I}_1 + \beta_1(x)\overset{*}{S}\overset{*}{I}_1 - \gamma_1(x)\overset{*}{I}_1, \\ \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{I}_2}{\partial t} \geq d_2 \Delta \hat{I}_2 + \beta_2(x)\hat{S}\hat{I}_2 - \gamma_2(x)\hat{I}_2, \\ \\ \dfrac{\partial \overset{*}{I}_2}{\partial t} \leq d_2 \Delta \overset{*}{I}_2 + \beta_2(x)\overset{*}{S}\overset{*}{I}_2 - \gamma_2(x)\overset{*}{I}_2, \\ \end{cases} \tag{3.8}$$

Les conditions initiales :

$$\begin{cases} \overset{*}{S}(0,x) \leq \hat{S}(0,x) = S(x,0), \quad x \in \overline{\Omega}. \\ \overset{*}{I}_i(0,x) \leq \hat{I}_i(0,x) = I_i(x,0), \quad x \in \overline{\Omega}, \ i = 1,2. \end{cases}$$

Les conditions au bord :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overset{*}{S}}{\partial \eta}(t,x) \leq 0 \leq \dfrac{\partial \hat{S}}{\partial \eta}(t,x) = \dfrac{\partial S}{\partial \eta}(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \\ \\ \dfrac{\partial \overset{*}{I}_i}{\partial \eta}(t,x) \leq 0 \leq \dfrac{\partial \hat{I}_i}{\partial \eta}(t,x) = \dfrac{\partial I_i}{\partial \eta}(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

De plus $\beta_i(x)$, $\gamma_i(x)$ *sont des fonctions holderienne, continues et positives.*

Alors par le principe de comparaison il existe une unique solution :

$(S(t,x), I_1(t,x), I_2(t,x)) \in C_1^2((0,T_{max}) \times \overline{\Omega})$ *où* T_{max} *est le temps maximal d'existence, où* $0 \leq S(x,t) \leq \hat{S}(x,t)$, $0 \leq I_1(x,t) \leq \hat{I}_1(x,t)$, $0 \leq I_2(x,t) \leq \hat{I}_2(x,t)$.

Par le principe de maximum : $S(x,t) > 0$, $I_i(x,t) > 0$ *dans* $\overline{\Omega} \times (0, T_{max})$.

On considère $S(x,t)$ dans $\Omega \times (0, T_{max})$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S + (\gamma_1(x) - \beta_1(x)S)I_1 + (\gamma_2(x) - \beta_2(x)S)I_2, & x \in \Omega,\ t \in (0, T_{max}), \\ \\ \dfrac{\partial S}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (0, T_{max}). \end{cases} \tag{3.9}$$

On choisit $M_0 = \max\{\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} S(x,0), \max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\{\gamma_i(x)/\beta_i(x)\}, i = 1,2\}$.
Alors quelque soit $I_1(x,t) \geq 0$, $I_2(x,t) \geq 0$ on a :

M_0 est une sur-solution et 0 est une sous-solution pour le problème (3.9), par le principe de comparaison : $S(x,t) \leq M_0$ dans $\overline{\Omega} \times [0, T_{max})$.

D'autre part : $\dfrac{\partial I_i}{\partial t} = d_i \Delta I_i + (\beta_i S - \gamma_i) I_i$, pour $i = 1, 2$.
D'après le théorème 3 :
$B(x,t) = \beta_i(x)S - \gamma_i(x) \leq \beta_i(x)S \leq a$, de plus $\int_\Omega I_i(x,t)\,\mathrm{d}x \leq N$ alors :
Il existe une constante positive M_i qui dépend de $I_i(x,0)$ telle que :
$I_i(x,t) \leq M_i$, $i = (1,2)$ dans $\overline{\Omega} \times [0, T_{max})$. Par conséquent, il découle de la théorie standard pour les systèmes paraboliques semi-linéaires que $T_{max} = \infty$.

3.2 Cas homogène avec coefficients constants

Dans cette section, on considère que tous les coefficients sont spatialement homogènes i.e :
$\beta_i(x) = \beta_i > 0$
$\gamma_i(x) = \gamma_i > 0$, pour $i = 1, 2$.
On considère d'abord le cas : $\dfrac{\gamma_1}{\beta_1} \neq \dfrac{\gamma_2}{\beta_2}$.
A la fin, on étudie l'existence des états stationnaires et on défini le nombre de reproduction de base R_0 pour le problème (3.1), ensuite on discute le cas où : $\dfrac{\gamma_1}{\beta_1} = \dfrac{\gamma_2}{\beta_2}$.

3.2.1 Etats stationnaires

On considére le système d'équilibre suivant :

$$\begin{cases} 0 = d_s \Delta \bar{S} - (\beta_1 \bar{I}_1 + \beta_2 \bar{I}_2)\bar{S} + \gamma_1 \bar{I}_1 + \gamma_2 \bar{I}_2, \\ 0 = d_1 \Delta \bar{I}_1 + \beta_1 \bar{S} \bar{I}_1 - \gamma_1 \bar{I}_1, \\ 0 = d_2 \Delta \bar{I}_2 + \beta_2 \bar{S} \bar{I}_2 - \gamma_2 \bar{I}_2. \end{cases} \tag{3.10}$$

On cherche les solutions constantes, ce qui amène à chercher les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 0 = -(\beta_1 \bar{S} - \gamma_1)\bar{I}_1 - (\beta_2 \bar{S} - \gamma_2)\bar{I}_2, \\ 0 = (\beta_1 \bar{S} - \gamma_1)\bar{I}_1, \\ 0 = (\beta_2 \bar{S} - \gamma_2)\bar{I}_2, \end{cases} \tag{3.11}$$

avec : $\bar{S} + \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \dfrac{N}{|\Omega|}$.

Le système (3.10) s'écrit sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} (\beta_1 \bar{S} - \gamma_1)\bar{I}_1 = 0, & (a) \\ (\beta_2 \bar{S} - \gamma_2)\bar{I}_2 = 0, & (b) \\ \bar{S} + \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \dfrac{N}{|\Omega|}. & (c) \end{cases} \tag{3.12}$$

Comme envisagé dans d'autres modèles épidémiques, on se concentre sur l'équilibre sans maladie (DFE) et l'équilibre endémique (EE).

DFE : l'équilibre sans maladie c'est la solution du problème (3.12) avec :

$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = 0$ et $\bar{S} > 0$.

D'aprés l'équation (c) on trouve : $\bar{S} = \dfrac{N}{|\Omega|}$ pour $(\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = 0)$.

Alors DFE est donnée par : $(\dfrac{N}{|\Omega|}, 0, 0)$.

D'autre part, l'équilibre endémique est une solution positive ou nulle pour (3.12) avec $\bar{I}_1 > 0$ ou $\bar{I}_2 > 0$ car on travaille dans le cas $(\dfrac{\gamma_1}{\beta_1} \neq \dfrac{\gamma_2}{\beta_2})$.

$(a) \Rightarrow (\beta_1 \bar{S} - \gamma_1)\bar{I}_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 \bar{S} - \gamma_1 = 0$ avec : $(\bar{I}_1 > 0)$

Ce qui implique : $\bar{S} = \dfrac{\gamma_1}{\beta_1} > 0$.

$(b) \Rightarrow (\beta_2 \bar{S} - \gamma_2)\bar{I}_2 = 0 \Rightarrow \beta_2 \bar{S} - \gamma_2 = 0$ avec : $(\bar{I}_2 > 0)$

Ce qui implique : $\bar{S} = \dfrac{\gamma_2}{\beta_2} > 0$.

Pour : $\bar{S} = \dfrac{\gamma_1}{\beta_1}$, $\bar{I}_1 > 0$, $\bar{I}_2 = 0$.

D'aprés l'équation (c), le premier équilibre endémique est donné par :
$(\bar{S},\bar{I}_1,\bar{I}_2)=(\frac{\gamma_1}{\beta_1},\frac{N}{|\Omega|}-\frac{\gamma_1}{\beta_1},0)$.

Pour : $\bar{S}=\frac{\gamma_2}{\beta_2}$, $\bar{I}_1=0$, $\bar{I}_2>0$.
D'aprés l'équation (c), le deuxième équilibre endémique est donné par :
$(\bar{S},\bar{I}_1,\bar{I}_2)=(\frac{\gamma_2}{\beta_2},0,\frac{N}{|\Omega|}-\frac{\gamma_2}{\beta_2})$.

Proposition 1

On a trois cas possibles :
(a) Si $(\frac{\gamma_1}{\beta_1}\geq\frac{N}{|\Omega|})$ *et* $(\frac{\gamma_2}{\beta_2}\geq\frac{N}{|\Omega|})$ *alors le modèle (3.12) n'admet pas d'équilibres endémiques, il admet par contre un unique DFE donné par :* $(\frac{N}{|\Omega|},0,0)$.
(b) Si $(\frac{\gamma_2}{\beta_2}\geq\frac{N}{|\Omega|}>\frac{\gamma_1}{\beta_1})$ *ou* $(\frac{\gamma_1}{\beta_1}\geq\frac{N}{|\Omega|}>\frac{\gamma_2}{\beta_2})$ *alors il existe un unique DFE donné par :* $(\frac{N}{|\Omega|},0,0)$ *et un des deux équilibres endémiques :* $(\frac{\gamma_1}{\beta_1},\frac{N}{|\Omega|}-\frac{\gamma_1}{\beta_1},0)$ *ou* $(\frac{\gamma_2}{\beta_2},0,\frac{N}{|\Omega|}-\frac{\gamma_2}{\beta_2})$.
(c) Si $(\frac{N}{|\Omega|}>\frac{\gamma_1}{\beta_1})$ *et* $(\frac{N}{|\Omega|}>\frac{\gamma_2}{\beta_2})$ *alors il existe un unique (DFE) donné par :* $(\frac{N}{|\Omega|},0,0)$ *et deux équilibres endémiques* $(\frac{\gamma_1}{\beta_1},\frac{N}{|\Omega|}-\frac{\gamma_1}{\beta_1},0)$ *et* $(\frac{\gamma_2}{\beta_2},0,\frac{N}{|\Omega|}-\frac{\gamma_2}{\beta_2})$.

On introduit le nombre de reproduction de base "R_0" dans le but d'analyser la dynamique du modèle (3.1).

D'aprés "la proposition 1", on défini le nombre de reproduction de base comme suit :

$$R_0=\max\left\{\frac{N\beta_1}{|\Omega|\gamma_1},\frac{N\beta_2}{|\Omega|\gamma_2}\right\},$$

et on défini le nombre R_1 par :

$$R_1=\min\left\{\frac{N\beta_1}{|\Omega|\gamma_1},\frac{N\beta_2}{|\Omega|\gamma_2}\right\}.$$

On note que si : $\frac{\gamma_1}{\beta_1}\neq\frac{\gamma_2}{\beta_2}$ ceci implique que $R_0>R_1$.

Notation :

On note DFE par $E_0=(\frac{N}{|\Omega|},0,0)$.

Le premier équilibre endémique par : $E_1=(\frac{\gamma_1}{\beta_1},\frac{N}{|\Omega|}-\frac{\gamma_1}{\beta_1},0)$.

Le deuxième équilibre endémique par $E_2=(\frac{\gamma_2}{\beta_2},0,\frac{N}{|\Omega|}-\frac{\gamma_2}{\beta_2})$.

Proposition 2

On a trois cas possibles :

(a) Si $R_0 \leq 1$ *alors le modèle (3.12) n'admet pas d'équilibre endémique, il admet par contre un unique* E_0.

(b) Si $R_0 > 1 \geq R_1$ *alors il existe un unique* E_0 *et* E_1 *ou* E_2.

(c) Si $R_1 > 1$ *alors il existe un unique* E_0 *et deux équilibres endémiques* E_1 *et* E_2.

3.2.2 Attractivité globale

Pour mener notre discussion sur l'attractivité globale, on fait appelle au principe d'invariance de laSalle pour les systèmes dynamique non linéaires (voir [10]).

Théorème 9

Soit $X = L^p(\Omega)$ *avec* $p > m$ *(*m *c'est la dimension de l'espace).*

On défini un opérateur linéaire fermé A *avec un domaine dense* $D(A)$ *i.e :*

$\overline{D(A)} = X$, *par :*

$AU = -\Delta U, D(A) = \{U \in W^{2,p}(\Omega) \text{ et } \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$

Alors $-A$ *génère un semi-groupe analytique dans* X *donnée par* e^{-tA}.

Preuve

On applique le théoréme 5 pour démontrer que l'opérateur A *est Séctoriel dans* $L^p(\Omega)$, *ensuite on utilise le lemme 1 pour déduire que* $-A$ *est le générateur infinitésimale du semi groupe analytique* $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$.

Théorème 10

Soit $X_\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ *l'espace des puissances fractionnaires dans* X *par rapport à* A.

Si $1 + \mu < 2\alpha - \frac{m}{p}$ *pour* α *proche de 1 et* p *grand alors :*

$X_\alpha \subset C^{1+\mu}(\overline{\Omega})$ *(injection compact).*

Preuve

La preuve se trouve dans [10] (page 39).

Définition 7

Soit $P \subset X_\alpha$ un cône, de tous les fonctions positives ou nulles dans X_α avec un intérieure non vide.

On introduit l'ensemble D par :

$$D = \left\{(u,v,w) \in X_\alpha \times X_\alpha \times X_\alpha : \int_\Omega (u+v+w)\,\mathrm{d}x = N, (u,v,w) \in P\right\}.$$

Alors : D est un sous ensemble fermé de $X_\alpha \times X_\alpha \times X_\alpha$ et la solution (S, I_1, I_2) du problème (3.1)-(3.3) induit un système dynamique non linéaire $\phi(t), t \in \mathbb{R}^+$ dans D donnée par :

$$\phi(t)(S(0), I_1(0), I_2(0)) = (S(t), I_1(t), I_2(t)), \;\; t \geq 0,$$

où $(S(t), I_1(t), I_2(t))$ est la solution avec condition initiale :

$(S(0), I_1(0), I_2(0)) \in D$.

Lemme 2

Soit $u(x,t)$ la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u, \;\; x \in \Omega, t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

avec $u(x,0) \geq 0$. Alors $u(x,t)$ converge vers $\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u(x,0)\,\mathrm{d}x$ quand t tend vers l'infinie uniformément pour $x \in \overline{\Omega}$.

Preuve

On applique le théorème 4 :

$L = 0$ car $f \equiv 0$, et par conséquent $u(x,t)$ tends vers c, où $c = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u(x,0)\,\mathrm{d}x$.

Théorème 11

(a) Si $R_0 \leq 1$, alors l'équilibre sans maladie E_0 est globalement attractif.

(b) Si $R_0 > 1$ et $(\dfrac{\gamma_2}{\beta_2} > \dfrac{\gamma_1}{\beta_1})$ alors le premier équilibre endémique E_1 est globalement attractif.

(c) Si $R_0 > 1$ et $(\dfrac{\gamma_1}{\beta_1} > \dfrac{\gamma_2}{\beta_2})$ alors le deuxieme équilibre endémique E_2 est globalement attractif .

(d) Si $R_1 > 1$ et $(\dfrac{\gamma_2}{\beta_2} > \dfrac{\gamma_1}{\beta_1})$ alors le premier équilibre endémique E_1 est globalement attractif.

(e) Si $R_1 > 1$ et $(\frac{\gamma_1}{\beta_1} > \frac{\gamma_2}{\beta_2})$ alors le deuxième équilibre endémique E_2 est globalement attractif.

Preuve

(a) on considère d'abords le cas $R_0 \leq 1$:

Pour pouvoir étudier l'attractivité globale on commence par introduire la fonction V qui est une fonction différentiable continue définie comme suit :

$V : D \longrightarrow R$ telle que :

$$V(S, I_1, I_2) = \frac{1}{2}\int_\Omega (S - \frac{N}{|\Omega|})^2 \,\mathrm{d}x + B_1 \int_\Omega I_1 dx + B_2 \int_\Omega I_2 dx, \ \ \forall (S, I_1, I_2) \in D.$$

Où B_1 et B_2 sont deux constantes à détèrminer .

Il faut d'abord vérifier que la fonction V est une fonction de Lyapunov dans D, pour cela on utilise la définition 6 qui se base sur un semi-groupe non linéaire. $\forall (S, I_1, I_2) \in D \cap (D(A) \times D(A) \times D(A))$, on définie la dérivée orbitale de V comme suit :

$$\dot{V}(S, I_1, I_2) = \limsup_{t \longrightarrow 0^+} \frac{V(\phi(t)(S, I_1, I_2) - V(S, I_1, I_2)}{t}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial S}\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I_1}\ \frac{\partial I_1}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I_2}\ \frac{\partial I_2}{\partial t}$$

$$= \int_\Omega (S - \frac{N}{|\Omega|})(d_S \Delta S - I_1(\beta_1 S - \gamma_1) - I_2(\beta_2 S - \gamma_2)) \,\mathrm{d}x$$

$$+ B_1 \int_\Omega (d_1 \Delta I_1 + I_1(\beta_1 S - \gamma_1)) dx + B_2 \int_\Omega (d_2 \Delta I_2 + I_2(\beta_2 S - \gamma_2)) dx$$

$$= d_S \int_\Omega \Delta S (S - \frac{N}{|\Omega|}) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega (S - \frac{N}{|\Omega|}) I_1(\beta_1 S - \gamma_1) \,\mathrm{d}x$$

$$- \int_\Omega (S - \frac{N}{|\Omega|}) I_2(\beta_2 S - \gamma_2) \,\mathrm{d}x + B_1 d_1 \int_\Omega \Delta I_1 \,\mathrm{d}x$$

$$+ B_1 \int_\Omega I_1(\beta_1 S - \gamma_1) \,\mathrm{d}x + B_2 d_2 \int_\Omega \Delta I_2 \,\mathrm{d}x + B_2 \int_\Omega I_2(\beta_2 S - \gamma_2) \,\mathrm{d}x$$

$$= -d_S \int_\Omega \mid \nabla S \mid^2 \ \mathrm{d}x - \int_\Omega I_1(\beta_1 S - \gamma_1)((S - \frac{N}{|\Omega|}) - B_1) \,\mathrm{d}x$$

$$- \int_\Omega I_2(\beta_2 S - \gamma_2)((S - \frac{N}{|\Omega|}) - B_2) \,\mathrm{d}x$$

$$= -d_S \int_\Omega \mid \nabla S \mid^2 \ \mathrm{d}x - \int_\Omega I_1(\beta_1 S - \gamma_1)(S - (\frac{N}{|\Omega|} + B_1)) \,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_\Omega I_2(\beta_2 S - \gamma_2)(S - (\frac{N}{|\Omega|} + B_2))\,\mathrm{d}x \\
&= -d_S \int_\Omega \mid \nabla S \mid^2 \ \mathrm{d}x - \beta_1 \int_\Omega [I_1 S^2 - I_1 S(\frac{N}{|\Omega|} + B_1) \\
&- \frac{\gamma_1}{\beta_1} I_1 S + \frac{\gamma_1}{\beta_1} I_1(\frac{N}{|\Omega|} + B_1)]\,\mathrm{d}x - \beta_2 \int_\Omega [I_2 S^2 - I_2 S(\frac{N}{|\Omega|} + B_2) \\
&- \frac{\gamma_2}{\beta_2} I_2 S + \frac{\gamma_2}{\beta_2} I_2(\frac{N}{|\Omega|} + B_2)]\,\mathrm{d}x \\
&= -d_S \int_\Omega \mid \nabla S \mid^2 \ \mathrm{d}x - \beta_1 \int_\Omega [I_1(S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})^2 - I_1(\frac{\gamma_1}{\beta_1})^2 + \frac{\gamma_1}{\beta_1} S I_1 \\
&- I_1(\frac{N}{|\Omega|} + B_1)(S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})]\,\mathrm{d}x - \beta_2 \int_\Omega [I_2(S - \frac{\gamma_2}{\beta_2})^2 - I_2(\frac{\gamma_2}{\beta_2})^2 + \frac{\gamma_2}{\beta_2} S I_2 \\
&- I_2(\frac{N}{|\Omega|} + B_2)(S - \frac{\gamma_2}{\beta_2})]\,\mathrm{d}x \\
&= -d_S \int_\Omega \mid \nabla S \mid^2 \ \mathrm{d}x - \beta_1 \int_\Omega I_1(S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})^2\,\mathrm{d}x - \beta_2 \int_\Omega I_2(S - \frac{\gamma_2}{\beta_2})^2\,\mathrm{d}x \\
&+ (\frac{\gamma_1^2}{\beta_1} - \gamma_1(\frac{N}{|\Omega|} + B_1)) \int_\Omega I_1\,\mathrm{d}x + (\beta_1(\frac{N}{|\Omega|} + B_1) - \gamma_1) \int_\Omega S I_1\,\mathrm{d}x \\
&+ [\frac{\gamma_2^2}{\beta_2} - \gamma_2(\frac{N}{|\Omega|} + B_2)] \int_\Omega I_2\,\mathrm{d}x + [\beta_2(\frac{N}{|\Omega|} + B_2) - \gamma_2] \int_\Omega S I_2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

On choisit : $B_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_1} - \frac{N}{|\Omega|}$ *et* $B_2 = \frac{\gamma_2}{\beta_2} - \frac{N}{|\Omega|}$

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(S, I_1, I_2) = &-d_S \int_\Omega \mid \nabla S \mid^2 \ \mathrm{d}x - \beta_1 \int_\Omega I_1(S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})^2\,\mathrm{d}x - \beta_2 \int_\Omega I_2(S - \frac{\gamma_2}{\beta_2})^2\,\mathrm{d}x \\
&+ (\frac{\gamma_1^2}{\beta_1} - \gamma_1(\frac{N}{|\Omega|} + \frac{\gamma_1}{\beta_1} - \frac{N}{|\Omega|})) \int_\Omega I_1\,\mathrm{d}x + (\beta_1(\frac{N}{|\Omega|} + \frac{\gamma_1}{\beta_1} - \frac{N}{|\Omega|}) \\
&- \gamma_1) \int_\Omega S I_1\,\mathrm{d}x + [\frac{\gamma_2^2}{\beta_2} - \gamma_2(\frac{N}{|\Omega|} + \frac{\gamma_2}{\beta_2} - \frac{N}{|\Omega|})] \int_\Omega I_2\,\mathrm{d}x \\
&+ [\beta_2(\frac{N}{|\Omega|} + \frac{\gamma_2}{\beta_2} - \frac{N}{|\Omega|}) - \gamma_2] \int_\Omega S I_2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Finalement on aura :

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(S, I_1, I_2) = &-d_S \int_\Omega \mid \nabla S \mid^2 \ \mathrm{d}x - \beta_1 \int_\Omega I_1(S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})^2\,\mathrm{d}x - \beta_2 \int_\Omega I_2(S - \frac{\gamma_2}{\beta_2})^2\,\mathrm{d}x \\
&\leq 0, \qquad \forall (S, I_1, I_2) \in D
\end{aligned}
$$

Comme V est une fonction différentiable continue dont la dérivée orbitale est négative ou nulle et $(D \cap (D(A) \times D(A) \times D(A)))$ est dense dans D, de plus V est coercive alors V est une fonction de Lyapunov dans D.

Il reste à démontrer l'attractivité globale, pour cela on utilise le principe d'invariance de laSalle.

(a) Cas $R_0 \leq 1$ avec $\frac{\gamma_i}{\beta_i} \leq \frac{N}{|\Omega|}$, $i = 1, 2$.

Soit $E = \left\{(S, I_1, I_2) \in D : \dot{V}(S, I_1, I_2) = 0\right\}$ et M est le plus grand ensemble positivement invariant inclu dans E.

D'aprés le théorème 8 et quelques arguments dans [10], [9] l'orbite :

$\{(S(t), I_1(t), I_2(t)), t > 0\}$ est précompact dans D.

Il faut démontrer que $(\phi(t)(S(0), I_1(0), I_2(0)))$ tend vers $M = \{E_0\}$,

quand $t \longrightarrow \infty$.

$$\dot{V} = 0 \Longleftrightarrow -d_S \int_\Omega |\nabla S|^2 \,\mathrm{d}x - \beta_1 \int_\Omega I_1(S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})^2 \,\mathrm{d}x - \beta_2 \int_\Omega I_2(S - \frac{\gamma_2}{\beta_1})^2 \,\mathrm{d}x = 0$$

Ceci implique que : $\int_\Omega |\nabla S|^2 \,\mathrm{d}x = 0$ *et* $\int_\Omega I_i(S - \frac{\gamma_i}{\beta_i})^2 \,\mathrm{d}x = 0,\ i = 1, 2$

$\int_\Omega |\nabla S|^2 \,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow |\nabla S|^2 = 0 \Rightarrow |\nabla S| = 0 \Rightarrow S = cst.$

$\int_\Omega I_i(S - \frac{\gamma_i}{\beta_i})^2 \,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow I_i = 0$ *ou* $S = \frac{\gamma_i}{\beta_i}$ $, i = 1, 2.$

On utilisant la formule (3.3) pour $S = \frac{\gamma_i}{\beta_i}$:

$\int_\Omega (\frac{\gamma_i}{\beta_i} + I_i) \,\mathrm{d}x = N \Rightarrow \frac{\gamma_i}{\beta_i}|\Omega| + \int_\Omega I_i dx = N \Rightarrow \int_\Omega I_i dx = N - \frac{\gamma_i}{\beta_i}|\Omega| \leq 0$ *(car on travaille dans le cas $\frac{\gamma_i}{\beta_i} \geq \frac{N}{|\Omega|}, i = 1, 2$), donc on aura $I_i = 0$.*

Comme $I_i = 0$, $i = 1, 2$, on trouve : $S = \frac{N}{|\Omega|}$.

Donc : $E = \left\{(\frac{N}{|\Omega|}, 0, 0)\right\} = \{E_0\}$.

$M = \{E_0\} \Rightarrow E_0$ est globalement attractif.

(b) Cas $R_0 > 1 \geq R_1$ avec : $\frac{\gamma_2}{\beta_2} > \frac{\gamma_1}{\beta_1}$ i.e : $\frac{\gamma_2}{\beta_2} \geq \frac{N}{|\Omega|} > \frac{\gamma_1}{\beta_1}$

D'aprés la proposition 1, on a l'éxistence de E_0 et E_1, on utilise la même fonction de Lyapunov :

Soit $E = \Big\{(S, I_1, I_2) \in D, \dot{V}(S, I_1, I_2) = 0\Big\}$,

$$\dot{V} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \mid \nabla S \mid^2 = 0 \Rightarrow S = cst, \\ \qquad\qquad et \\ I_1 = 0 \ \ ou \ \ S = \dfrac{\gamma_1}{\beta_1}, \\ \qquad\qquad et \\ I_2 = 0 \ \ ou \ \ S = \dfrac{\gamma_2}{\beta_2}. \end{cases}$$

Si $S = cst$, $I_1 = I_2 = 0$, *on applique la formule* (3.3), *on trouve :* $E_0 = (\frac{N}{|\Omega|}, 0, 0)$, *ou bien si* $I_2 = 0$, $S = \dfrac{\gamma_1}{\beta_1}$, *par la formule* (3.3), *on trouve :* $\displaystyle\int_\Omega I_1 dx = N - \frac{\gamma_1}{\beta_1}|\Omega|$
Le cas $S = \dfrac{\gamma_2}{\beta_2}$, $I_1 = 0$ *est éxclu.*

Le cas $S = \dfrac{\gamma_2}{\beta_2}$, $S = \dfrac{\gamma_1}{\beta_1}$ *est éxclu.*

donc on aura : $E = \left\{(\frac{\gamma_1}{\beta_1}, w, 0) : \displaystyle\int_\Omega w \,\mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_1}{\beta_1}|\Omega|\right\} \cup \{E_0\}$.
On affirme que M *se compose de* E_0 *et* E_1 *au plus, et pour vérifier ça on utilise la propriété d'invariance de* M *i.e :* $\phi(t)M = M, \forall t > 0$.
Soit $\epsilon > 0$, B_ϵ *est la boule ouverte de centre* E_1 *et de rayon* ϵ *tq :* $B_\epsilon \subset D$, *on suppose que :* $(\dfrac{\gamma_1}{\beta_1}, w, 0) \in M$ *avec* $\displaystyle\int_\Omega w \,\mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_1}{\beta_1}|\Omega|$, *par le lemme* 2 *on trouve :*

$$\phi(t)(\frac{\gamma_1}{\beta_1}, w, 0) \longrightarrow E_1 \ \ quand\ t \longrightarrow \infty$$

Car $\lim w(x,t) = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega w(x,0)\,\mathrm{d}x$, *quand* $t \longrightarrow \infty$

Comme $\displaystyle\int_\Omega w \,\mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_1}{\beta_1}|\Omega|$, *ceci donne :* $\lim w(x,t) = \dfrac{N}{|\Omega|} - \dfrac{\gamma_1}{\beta_1}$, *quand* $t \longrightarrow \infty$,

donc $\exists T > 0$ *tq :* $\phi(t)(\dfrac{\gamma_1}{\beta_1}, w, 0) \in B_\epsilon, \forall t > T$, *et par la propriété d'invariance :* $M \subseteq B_\epsilon \cup \{E_0\}$, *(*$\epsilon > 0$ *arbitraire).*
D'autre part le principe d'invariance de laSalle implique :
$(\phi(t)(S(0), I_1(0), I_2(0))) \longrightarrow M$, *quand* $t \longrightarrow \infty$ *et c'est équivalent de dire que :* $(S(t), I_1(t), I_2(t)) \longrightarrow M$, *quand* $t \longrightarrow \infty$.
Donc les trajectoires convergent soit vers E_0 *soit vers* E_1, *supposons que les tra-*

jectoires convergent vers E_0 *i.e :* $(\phi(t)(S(0), I_1(0), I_2(0))) \longrightarrow E_0$*, quand* t *tend vers l'infinie.*

Comme $\frac{N}{|\Omega|} > \frac{\gamma_1}{\beta_1}$*, on choisit* $\epsilon > 0$ *(petit) de telle sorte que :* $\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon > \frac{\gamma_1}{\beta_1}$*, pour ce* ϵ*,* $\exists T > 0$ *telle que :* $S(x,t) > \frac{N}{|\Omega|} - \epsilon > \frac{\gamma_1}{\beta_1}$*,* $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T, \infty)$*.*

On utilise (3.1) : $\frac{\partial I_1}{\partial t} = d_1 \Delta I_1 + \beta_1(x) S I_1 - \gamma_1(x) I_1, \quad x \in \Omega, t > 0,$

Ce qui implique : $\frac{\partial I_1}{\partial t} - d_1 \Delta I_1 = \beta_1(x) S I_1 - \gamma_1(x) I_1 \geq \beta_1(\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon) I_1 - \gamma_1 I_1$
$\frac{\partial I_1}{\partial t} - d_1 \Delta I_1 \geq \beta_1(\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon) I_1 - \gamma_1 I_1$*,* $\forall (x,t) \in \Omega \times (T, \infty)$*.*
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial t} = d_1 \Delta J + \beta_1(\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon) J - \gamma_1 J, \ \ \forall (x,t) \in \Omega \times (T, \infty) \\ \\ \frac{\partial J}{\partial t} = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (T, \infty) \\ \\ J(x,t) = \min_{x \in \overline{\Omega}} I_1(x,T) \equiv I_{1m}(T), x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{3.14}$$

On a : I_1 *est une sur-solution et* J *est une sous-solution. Par le principe de comparaison :* $I_1 \geq J$ *dans* $\overline{\Omega} \times [T, \infty)$*.*

Le problème (3.14) a pour solution : $J = I_{1m}(T) e^{(\beta_1 \frac{N}{|\Omega|} - \epsilon\beta_1 - \gamma_1) t}$*.*

Comme $I_1 \geq J$ *et* $J \longrightarrow \infty$ *quand* $t \longrightarrow \infty$ *ceci contredit le faite que* I_1 *et uniformément bornée.*

Donc $M = \{E_1\}$*,* E_1 *est globalement attractif.*

(c) Cas $R_0 > 1 \geq R_1$ *avec :* $\frac{\gamma_1}{\beta_1} > \frac{\gamma_2}{\beta_2}$ *i.e :* $\frac{\gamma_1}{\beta_1} \geq \frac{N}{|\Omega|} > \frac{\gamma_2}{\beta_2}$

D'aprés la proposition 1, on a l'éxistence de E_0 *et* E_2*, on utilise la même fonction de Lyapunov :*

Soit $E = \Big\{(S, I_1, I_2) \in D, \dot{V}(S, I_1, I_2) = 0\Big\}$*,*

$$\dot{V} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \mid \nabla S \mid^2 = 0 \Rightarrow S = cst, \\ \qquad\qquad et \\ I_1 = 0 \ \ ou \ \ S = \frac{\gamma_1}{\beta_1}, \\ \qquad\qquad et \\ I_2 = 0 \ \ ou \ \ S = \frac{\gamma_2}{\beta_2}. \end{cases}$$

Si $S = cst, I_1 = I_2 = 0$, *on applique la formule (3.3), on trouve :* $E_0 = (\frac{N}{|\Omega|}, 0, 0)$.
Ou bien si $I_1 = 0$, $S = \frac{\gamma_2}{\beta_2}$, *on applique la formule (3.3), on trouve :*
$\int_\Omega I_2 \,\mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_2}{\beta_2}|\Omega|$.
Le cas $S = \frac{\gamma_1}{\beta_1}$, $I_2 = 0$ *est éxclue.*

Le cas $S = \frac{\gamma_2}{\beta_2}$, $S = \frac{\gamma_1}{\beta_1}$ *est éxclue.*

Donc on aura : $E = \left\{ (\frac{\gamma_2}{\beta_2}, 0, w) : \int_\Omega w \,\mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_2}{\beta_2}|\Omega| \right\} \cup \{E_0\}$.
On affirme que M *se compose de* E_0 *et* E_2 *au plus, et pour vérifier ça on utilise la propriété d'invariance de* M *i.e :* $\phi(t)M = M, \forall t > 0$.
Soit $\epsilon > 0$, B_ϵ *est la boule ouvert de centre* E_2 *et de rayon* ϵ *tq :* $B_\epsilon \subset D$, *on suppose que :* $(\frac{\gamma_2}{\beta_2}, 0, w) \in M$ *avec* $\int_\Omega w \,\mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_2}{\beta_2}|\Omega|$, *par le lemme 2 on trouve :*

$$\phi(t)(\frac{\gamma_2}{\beta_2}, 0, w) \longrightarrow E_2, \text{ quand } t \longrightarrow \infty,$$

car $\lim w(x,t) \longrightarrow \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w(x,0)\,\mathrm{d}x$, *quand* $t \longrightarrow \infty$.

Comme $\int_\Omega w \,\mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_2}{\beta_2}|\Omega|$, *ceci donne :* $\lim w(x,t) = \frac{N}{|\Omega|} - \frac{\gamma_2}{\beta_2}$, *quand* $t \longrightarrow \infty$.

Alors $\exists T > 0$ *tq :* $\phi(t)(\frac{\gamma_2}{\beta_2}, 0, w) \in B_\epsilon, \forall t > T$, *et par la propriété d'invariance on a :*
$M \subseteq B_\epsilon \cup \{E_0\}$, *($\epsilon > 0$ arbitraire)*
D'autre part, le principe d'invariance de laSalle implique :
$(\phi(t)(S(0), I_1(0), I_2(0))) \longrightarrow M$, *quand* $t \longrightarrow \infty$ *et c'est équivalent de dire que :*
$(S(t), I_1(t), I_2(t)) \longrightarrow M$, *quand* $t \longrightarrow \infty$.
Donc les trajectoires convergent soit vers E_0 *soit vers* E_2, *supposons que les trajectoires convergent vers* E_0 *i.e :* $(\phi(t)(S(0), I_1(0), I_2(0))) \longrightarrow E_0$,
quand $t \longrightarrow \infty$. *Comme* $\frac{N}{|\Omega|} > \frac{\gamma_2}{\beta_2}$, *on choisit* $\epsilon > 0$ *(petit) de telle sorte que :* $\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon > \frac{\gamma_2}{\beta_2}$, *pour ce* ϵ, $\exists T > 0$ *telle que :* $S(x,t) > \frac{N}{|\Omega|} - \epsilon > \frac{\gamma_2}{\beta_2}$,
$\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T, \infty)$.

On utilise (3.1_3) *:* $\frac{\partial I_2}{\partial t} = d_2 \Delta I_2 + \beta_2(x) S I_2 - \gamma_2(x) I_2, \; x \in \Omega, t > 0,$

ce qui implique : $\dfrac{\partial I_2}{\partial t} - d_2\Delta I_2 = \beta_2(x)SI_2 - \gamma_2(x)I_2 \geq \beta_2(\dfrac{N}{|\Omega|} - \epsilon)I_2 - \gamma_2 I_2$,
$\dfrac{\partial I_2}{\partial t} - d_2\Delta I_2 \geq \beta_2(\dfrac{N}{|\Omega|} - \epsilon)I_2 - \gamma_2 I_2$, $\forall (x,t) \in \Omega \times (T,\infty)$.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial t} = d_2\Delta J + \beta_2(\dfrac{N}{|\Omega|} - \epsilon)J - \gamma_2 J, \forall (x,t) \in \Omega \times (T,\infty), \\ \\ \dfrac{\partial J}{\partial t} = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (T,\infty), \\ \\ J(x,t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} I_2(x,T) \equiv I_{2m}(T), x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.15}$$

On a : I_2 *est une sur-solution et* J *est une sous-solution. Par le principe de comparaison :* $I_2 \geq J$ *dans* $\overline{\Omega} \times [T,\infty)$.
Le problème (3.15) a pour solution : $J = I_{2m}(T)e^{(\beta_2 \frac{N}{|\Omega|} - \epsilon\beta_2 - \gamma_2)t}$.
Comme $I_2 \geq J$ *et* $J \longrightarrow \infty$ *quand* $t \longrightarrow \infty$ *ceci contredis le faite que* I_2 *et uniformément bornée.*
Donc $M = \{E_2\}$, E_2 *est globalement attractif.*

(d) Si $R_1 > 1$ *et* $(\dfrac{\gamma_2}{\beta_2} > \dfrac{\gamma_1}{\beta_1})$ *i.e :* $\dfrac{N}{|\Omega|} > \dfrac{\gamma_2}{\beta_2} > \dfrac{\gamma_1}{\beta_1}$.
D'aprés la proposition 1, on a l'éxistence de E_0, E_1 *et* E_2, *on utilise la même fonction de Lyapunov :*
Soit $E = \Big\{(S, I_1, I_2) \in D, \dot{V}(S, I_1, I_2) = 0\Big\}$,

$$\dot{V} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \mid \nabla S \mid^2 = 0 \Rightarrow S = cst, \\ \qquad\quad et \\ I_1 = 0 \;\; ou \;\; S = \dfrac{\gamma_1}{\beta_1}, \\ \qquad\quad et \\ I_2 = 0 \;\; ou \;\; S = \dfrac{\gamma_2}{\beta_2}, \end{cases}$$

Si $S = cst, I_1 = I_2 = 0$ *et on appliquant la formule (3.3), on trouve :*
$E_0 = (\dfrac{N}{|\Omega|}, 0, 0)$.
Ou bien si $I_1 = 0, S = \dfrac{\gamma_2}{\beta_2}$, *par la formule (3.3), on trouve :* $\displaystyle\int_\Omega I_2 \,\mathrm{d}x = N - \dfrac{\gamma_2}{\beta_2}|\Omega|$.

Ou bien si $I_2 = 0, S = \dfrac{\gamma_1}{\beta_1}$, *par la formule (3.3), on trouve :* $\displaystyle\int_\Omega I_1 dx = N - \frac{\gamma_1}{\beta_1}|\Omega|$.
Le cas $S = \dfrac{\gamma_2}{\beta_2}$,$S = \dfrac{\gamma_1}{\beta_1}$ *est éxclue.*

donc on aura :
$E = \left\{(\dfrac{\gamma_1}{\beta_1}, w, 0) : \displaystyle\int_\Omega w \, \mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_1}{\beta_1}|\Omega|\right\} \cup \left\{(\dfrac{\gamma_2}{\beta_2}, 0, w) : \displaystyle\int_\Omega w \, \mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_2}{\beta_2}|\Omega|\right\} \cup \{E_0\}$.

On affirme que M *se compose de* E_0, E_1 *et* E_2 *au plus.*

Par le principe d'invariance de laSalle, les trajectoires convergent soit vers E_0 *ou* E_1 *ou* E_2.

On suppose que :

$$\phi(t)(S(0), I_1(0), I_2(0)) \longrightarrow E_2, \text{ quand } t \longrightarrow \infty$$

On choisit ($\epsilon > 0$ *petit) telle que :* $(\beta_1 \dfrac{\gamma_2}{\beta_2} - \beta_1 \epsilon - \gamma_1) > 0$, *pour ce* ϵ,
$\exists T > 0, S(x,t) > \dfrac{\gamma_2}{\beta_2} - \epsilon$, $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T, \infty)$
On utilise (3.1_2) *:*

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} - d_1 \Delta I_1 \geq \beta_1 (\frac{\gamma_2}{\beta_2} - \epsilon) I_1 - \gamma_1 I_1, \qquad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T, \infty), \tag{3.16}$$

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial t} = d_1 \Delta J + \beta_1 (\dfrac{\gamma_2}{\beta_2} - \epsilon) J - \gamma_1 J, & (x,t) \in \Omega \times [T, \infty), \\ \\ \dfrac{\partial J}{\partial \eta} = 0, & (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T, \infty), \\ \\ J(x,t) = \min_{x \in \overline{\Omega}} I_1(x,T) \equiv I_{1m}(T), \ x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{3.17}$$

On a I_1 *est une sur-solution et* J *est une sous-solution. Par le principe de comparaison :* $I_1 \geq J, \overline{\Omega} \times [T, \infty)$ *Le système (3.17) a pour solution :*
$J = I_{1m}(T) e^{(\beta_1 \frac{\gamma_2}{\beta_2} - \beta_1 \epsilon - \gamma_1) t}$.

Comme $I_1 \geq J$ *et* $J \longrightarrow \infty$ *quand* $t \longrightarrow \infty$ *ce qui contredis le faite que* I_1 *est bornée, donc les trajéctoires ne convergent pas vers* E_2, *de même les trajectoires ne convergent pas vers* E_0.

Donc E_1 *est globalement attractif.*

(e) Si $R_1 > 1$ *et* $(\frac{\gamma_1}{\beta_1} > \frac{\gamma_2}{\beta_2})$ *i.e :* $\frac{N}{|\Omega|} > \frac{\gamma_1}{\beta_1} > \frac{\gamma_2}{\beta_2}$

On utilise le même raisonnement ci-dessu, et on trouve que E_2 *est globalement attractif.*

On discute briévement le cas : $\frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\beta_2}$:
Si $R_0 > 1$ il y a une infinité d'équilibres endémiques contenus dans l'ensemble :
$L = \left\{(\frac{\gamma_1}{\beta_1}, \bar{I}_1, \bar{I}_2) : \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \frac{N}{|\Omega|} - \frac{\gamma_1}{\beta_1}, \bar{I}_1, \bar{I}_2 \in \mathbb{R}^+\right\}$.

Théorème 12
$\frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\beta_2}$. *On a les résultats suivants :*

(a) Si $R_0 \leq 1$ *alors :* E_0 *est globalement attractif.*

(b) Si $R_0 > 1$ *alors :* L *est un attracteur global i.e :*

$$\lim dist((S(x,t), I_1(x,t), I_2(x,t)), L) = 0, \text{ quand } t \longrightarrow \infty$$

uniformément pour $x \in \overline{\Omega}$.

Preuve

On utilise la même fonction de Lyapunov V *introduit dans la Preuve du théorème 11.*

(a) Cas $R_0 \leq 1$ *: on utilise la même idée dans la Preuve du théoréme 11, on trouve que* E_0 *est globalement attractif.*

(b) Cas $R_0 > 1$:

$$\dot{V}(S, I_1, I_2) = -d_S \int_\Omega |\nabla S|^2 \,\mathrm{d}x - \beta_1 \int_\Omega I_1(S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})^2 \,\mathrm{d}x - \beta_2 \int_\Omega I_2(S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= -d_S \int_\Omega |\nabla S|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega [\beta_1 I_1(S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})^2 + \beta_2 I_2(S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})^2] \,\mathrm{d}x$$

$$= -d_S \int_\Omega |\nabla S|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega [(S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})^2(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)] \,\mathrm{d}x$$

Soit $E = \left\{(S, I_1, I_2) \in D, \dot{V}(S, I_1, I_2) = 0\right\}$

$$\dot{V} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \mid \nabla S \mid^2 = 0 \Rightarrow S = cst, \\ \qquad et \\ (S - \frac{\gamma_1}{\beta_1})^2(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = cst, \\ \qquad et \\ S = \frac{\gamma_1}{\beta_1} \ ou \ (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) = 0. \end{cases}$$

Si $S = \frac{\gamma_1}{\beta_1}$*, par la formule (3.3), on obtient* $\Rightarrow \int_\Omega (\frac{\gamma_1}{\beta_1} + I_1 + I_2)\, \mathrm{d}x = N$
Ceci implique que $\frac{\gamma_1}{\beta_1}|\Omega| + \int_\Omega (I_1 + I_2)\, \mathrm{d}x = N \Rightarrow \int_\Omega (I_1 + I_2)\, \mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_1}{\beta_1}|\Omega|$.

Si $S = cst, I_1 = I_2 = 0 \Rightarrow E_0 = (\frac{N}{|\Omega|}, 0, 0)$.

Donc on aura :

$$E = \left\{ (\frac{\gamma_1}{\beta_1}, w_1, w_2) : \int_\Omega (w_1 + w_2)\, \mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_1}{\beta_1}|\Omega| \right\} \cup \{E_0\}.$$

On affirme que M *se compose de* E_0 *et* L *au plus.*

M *vérifie* $\phi(t)M = M, \forall t > 0$.

Soit $\epsilon > 0$*,* B_ϵ *est la boule ouvert de centre* L *est de rayon* ϵ *telle que* $B_\epsilon \subset D$
On suppose que : $(\frac{\gamma_1}{\beta_1}, w_1, w_2) \in M$ *avec :* $\int_\Omega (w_1 + w_2)\, \mathrm{d}x = N - \frac{\gamma_1}{\beta_1}|\Omega|$

$$\phi(t)(\frac{\gamma_1}{\beta_1}, w_1, w_2) \longrightarrow L \ quand \ t \longrightarrow \infty$$

car : $\lim_{t\to\infty} \phi(t)(\frac{\gamma_1}{\beta_1}, w_1, w_2) = \lim_{t\to\infty} (\frac{\gamma_1}{\beta_1}, w_1, w_2) = (\frac{\gamma_1}{\beta_1}, \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w_1\, \mathrm{d}x, \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w_2\, \mathrm{d}x)$.

avec : $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w_1\, \mathrm{d}x + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w_2\, \mathrm{d}x = \frac{1}{|\Omega|}[\int_\Omega (w_1 + w_2)\, \mathrm{d}x] = \frac{N}{|\Omega|} - \frac{\gamma_1}{\beta_1}$,

Ce qui implique que : $\phi(t)(\frac{\gamma_1}{\beta_1}, w_1, w_2) \longrightarrow L \quad quand \ t \longrightarrow \infty$

Donc $\exists T > 0$ *telle que :* $\phi(t)(\frac{\gamma_1}{\beta_1}, w_1, w_2) \in B_\epsilon$*, pour* $t > T$*, et d'aprés la propriété d'invariance* $M \subseteq B_\epsilon \cup E_0$.

Par le principe d'invariance de laSalle, on a : $\lim_{t\to\infty}(S(t), I_1(t), I_2(t)) = M$*, donc les trajectoires convergent soit vers* E_0 *ou* L.

Supposons que les trajéctoires convergent vers E_0 *i.e :*

$\lim_{t\to\infty} \phi(t)(S(0), I_1(0), I_2(0)) = E_0$.
Comme $\frac{N}{|\Omega|} > \frac{\gamma_1}{\beta_1}$*, on choisit* $\epsilon > 0$ *(petit) de telle sorte que :* $\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon > \frac{\gamma_1}{\beta_1}$*, pour ce* ϵ*,* $\exists T > 0$ *telle que :* $S(x,t) > \frac{N}{|\Omega|} - \epsilon > \frac{\gamma_1}{\beta_1}$*,* $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T, \infty)$.

On utilise (3.1$_2$) : $\frac{\partial I_1}{\partial t} = d_1 \Delta I_1 + \beta_1 S I_1 - \gamma_1 I_1, \qquad x \in \Omega, t > 0,$

Ce qui implique : $\frac{\partial I_1}{\partial t} - d_1\Delta I_1 = \beta_1 S I_1 - \gamma_1 I_1 \geq \beta_1(\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon)I_1 - \gamma_1 I_1$
$\frac{\partial I_1}{\partial t} - d_1\Delta I_1 \geq \beta_1(\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon)I_1 - \gamma_1 I_1$, $\forall (x,t) \in \Omega \times (T,\infty)$.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial t} = d_1\Delta J + \beta_1(\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon)J - \gamma_1 J, \ \ \forall (x,t) \in \Omega \times (T,\infty), \\ \\ \frac{\partial J}{\partial t} = 0, \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (T,\infty), \\ \\ J(x,t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} I_1(x,T) \equiv I_{1m}(T), \ \ x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.18}$$

I_1 est une sur-solution et J est une sous-solution. Par le principe de comparaison : $I_1 \geq J$ dans $\overline{\Omega} \times [T,\infty)$.
Le problème (3.18) a pour solution : $J = I_{1m}(T)e^{(\beta_1\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon\beta_1 - \gamma_1)t}$.
Comme $I_1 \geq J$ et $J \longrightarrow \infty$ quand $t \longrightarrow \infty$ ceci contredit le faite que I_1 et uniformément borné.
Donc $M \equiv L$, L est un attracteure globale.

3.3 Cas hétérogène avec coefficients de diffusion égaux

3.3.1 Nombre de reproduction de base :

On pose que : $d = d_S = d_1 = d_2$, le modèle (3.1) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = d\Delta S - (\beta_1(x)I_1 + \beta_2(x)I_2)S + \gamma_1(x)I_1 + \gamma_2(x)I_2, & x \in \Omega, t > 0, \\ \\ \frac{\partial I_1}{\partial t} = d\Delta I_1 + \beta_1(x)SI_1 - \gamma_1(x)I_1, & x \in \Omega, t > 0, \\ \\ \frac{\partial I_2}{\partial t} = d\Delta I_2 + \beta_2(x)SI_2 - \gamma_2(x)I_2, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

avec : $\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I_i}{\partial \eta} = 0, x \in \partial\Omega, t > 0.$

Faisons la somme des trois équations du système (3.19) :

$$\frac{\partial(S+I_1+I_2)}{\partial t} = d\Delta(S+I_1+I_2) \ , x\in\Omega, t\in(0,\infty)$$

avec : $\dfrac{\partial(S+I_1+I_2)}{\partial\eta} = 0, \ \ x\in\partial\Omega, \ \ t\in(0,\infty).$

Alors d'après le lemme 2 :
$\lim\limits_{t\to\infty}(S+I_1+I_2) = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega (S(x,0)+I_1(x,0)+I_2(x,0))\,\mathrm{d}x = \dfrac{N}{|\Omega|}.$
Comme la population est constante donc on peut considérer le modèle de compétition suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I_1}{\partial t} = d\Delta I_1 + (\beta_1(\frac{N}{|\Omega|} - \gamma_1 - \beta_1 I_1 - \beta_1 I_2)I_1 \ \ , x\in\Omega, t>0, \\ \\ \dfrac{\partial I_2}{\partial t} = d\Delta I_2 + (\beta_2(\frac{N}{|\Omega|} - \gamma_2 - \beta_2 I_1 - \beta_2 I_2)I_2 \ \ , x\in\Omega, t>0, \end{cases} \tag{3.20}$$

On définit le nombre de reproduction de base R_0 et le nombre R_1 comme suit :

$$R_0 = \max\{r_1, r_2\} \ \ , R_1 = \min\{r_1, r_2\}$$

Où r_i est donné par :

$$r_i = sup\left\{\frac{(\frac{N}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \beta_i\varphi^2\,\mathrm{d}x)}{\displaystyle\int_\Omega (d|\nabla\varphi|^2+\gamma_i\varphi^2)\,\mathrm{d}x}\right\}, \ \ \varphi\in H^1(\Omega), \varphi\neq 0, \ \ i=1,2$$

D'autre part pour une fonction $\alpha(x)\in\overline{\Omega}$ holderienne, on considère le probléme suivant :

$$\begin{cases} d\Delta\varphi + \alpha(x)\varphi + \lambda\varphi = 0, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{3.21}$$

Soit $\varphi\in H^1(\Omega)$ (fonction test), par la formule variationnelle on obtient :

$$\lambda^*(\alpha) = inf\left\{\int_\Omega (d|\nabla\varphi|^2 - \alpha\varphi^2)dx : \varphi\in H^1(\Omega) et \int_\Omega \varphi^2 dx = 1\right\}, \tag{3.22}$$

Où $\lambda^*(\alpha)$ est la valeur propre principale associée au problème (3.21).

Remarque 3

(i) $r_i < 1 \Longleftrightarrow \lambda^*(N\beta_i/|\Omega| - \gamma_i) > 0,$

(ii) $r_i = 1 \Longleftrightarrow \lambda^*(N\beta_i/|\Omega| - \gamma_i) = 0,$

(iii) $r_i > 1 \Longleftrightarrow \lambda^*(N\beta_i/|\Omega| - \gamma_i) < 0.$

Lemme 3

On suppose que α, β *sont des fonctions holderienne continue dans* $\overline{\Omega}$ *avec :*

$\alpha(x_0) > 0$, *pour* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *et* $\beta(x) > 0$ *pour* $x \in \overline{\Omega}$, $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ *telle que* $u_0 \geq 0$

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + (\alpha(x) - \beta(x)u)u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.23}$$

(a) Si $\lambda^*(\alpha) \geq 0$, *alors toutes solutions de (3.23) converge uniformement vers 0.*

(b) Si $\lambda^*(\alpha) < 0$, *alors pour chaque* u_0 *non triviale, la solution* $u(x,t)$ *de (3.23) converge uniformement vers* $\overline{u}(x)$, *où* $\overline{u}(x)$ *est l'unique état stationnaire positif.*

3.3.2 Equilibre sans maladie

Proposition 3

Le modéle (3.19) admet un unique DFE donné par : $E_0 \equiv (\tilde{S}, 0, 0) = (\dfrac{N}{|\Omega|}, 0, 0)$.

Preuve

Clairement $(\dfrac{N}{|\Omega|}, 0, 0)$ *est l'unique DFE car :*

$\forall (\tilde{S}, 0, 0) = (\tilde{S}, \tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$, *le modèle (3.19) donne :*

$$\begin{cases} 0 = d\Delta\tilde{S} - (\beta_1\tilde{I}_1 + \beta_2\tilde{I}_2)\tilde{S} + \gamma_1\tilde{I}_1 + \gamma_2\tilde{I}_2, \\ 0 = d\Delta\tilde{I}_1 + \beta_1\tilde{S}\tilde{I}_1 - \gamma_1\tilde{I}_1, \\ 0 = d\Delta\tilde{I}_2 + \beta_2\tilde{S}\tilde{I}_2 - \gamma_2\tilde{I}_2. \end{cases}$$

Avec les conditions au bord : $\dfrac{\partial\tilde{S}}{\partial\eta} = \dfrac{\partial\tilde{I}_i}{\partial\eta} = 0, i = 1, 2.$

ce qui donne : $d\Delta\tilde{S} = 0$ *c'est à dire* $\Delta\tilde{S} = 0$, *ce qui implique que* $\tilde{S}$ *est constante dans* $\overline{\Omega}$ *(principe de maximum), par la formule (3.3) :*

$\displaystyle\int_\Omega (\tilde{S} + \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2)\,\mathrm{d}x = N \Rightarrow \tilde{S} = \frac{N}{|\Omega|}.$

Proposition 4

(a) Si $R_0 < 1 \Rightarrow DFE$ est stable localement.

(b) Si $R_0 > 1 \Rightarrow DFE$ est instable.

Preuve

Premièrement on commence par linéarisé le modèle (3.19) autour de l'équilibre sans maladie, Soit :

$$\begin{cases} \eta(x,t) = S(x,t) - \dfrac{N}{|\Omega|}. \\ \xi_1(x,t) = I_1(x,t). \\ \xi_2(x,t) = I_2(x,t). \end{cases}$$

Ce qui implique :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \dfrac{\partial S}{\partial t} = d\Delta S - (\beta_1(x)I_1 + \beta_2(x)I_2)S + \gamma_1(x)I_1 + \gamma_2(x)I_2, \\ \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial t} = \dfrac{\partial I_1}{\partial t} = d\Delta I_1 + \beta_1(x)SI_1 - \gamma_1(x)I_1, \\ \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial t} = \dfrac{\partial I_2}{\partial t} = d\Delta I_2 + \beta_2(x)SI_2 - \gamma_2(x)I_2, \end{cases}$$

Comme $S(x,t) = \eta(x,t) + \dfrac{N}{|\Omega|}$, $\xi_1(x,t) = I_1(x,t)$, $\xi_2(x,t) = I_2(x,t)$, on remplace dans le modèle précédent on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = d\Delta \eta - (\beta_1(x)\xi_1 + \beta_2(x)\xi_2)(\eta + \dfrac{N}{|\Omega|}) + \gamma_1(x)\xi_1 + \gamma_2(x)\xi_2, \\ \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial t} = d\Delta \xi_1 + \beta_1(x)(\eta + \dfrac{N}{|\Omega|})\xi_1 - \gamma_1(x)\xi_1, \\ \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial t} = d\Delta \xi_2 + \beta_2(x)(\eta + \dfrac{N}{|\Omega|})\xi_2 - \gamma_2(x)\xi_2. \end{cases}$$

Alors le modèle linéarisé est donnée par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = d\Delta\eta - (\dfrac{N}{|\Omega|}\beta_1(x) - \gamma_1(x))\xi_1 - (\dfrac{N}{|\Omega|}\beta_2(x) - \gamma_2(x))\xi_2, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial t} = d\Delta\xi_1 + (\dfrac{N}{|\Omega|}\beta_1(x) - \gamma_1(x))\xi_1, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial t} = d\Delta\xi_2 + (\dfrac{N}{|\Omega|}\beta_2(x) - \gamma_2(x))\xi_2, & x \in \Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

On cherche des solutions sous la forme :

$\eta(x,t) = e^{-\lambda t}\phi(x)\ \ ,\xi_1(x,t) = e^{-\lambda t}\psi_1(x)\ \ ,\xi_2(x,t) = e^{-\lambda t}\psi_2(x)$.

Ce qui amène à résoudre le modèle de valeur propre suivant :

$$\begin{cases} d\Delta\phi - (\dfrac{N}{|\Omega|}\beta_1(x) - \gamma_1(x))\psi_1 - (\dfrac{N}{|\Omega|}\beta_2(x) - \gamma_2(x))\psi_2 + \lambda\phi = 0, & x \in \Omega, \\ d\Delta\psi_1 + (\dfrac{N}{|\Omega|}\beta_1(x) - \gamma_1(x))\psi_1 + \lambda\psi_1 = 0, & x \in \Omega, \\ d\Delta\psi_2 + (\dfrac{N}{|\Omega|}\beta_2(x) - \gamma_2(x))\psi_2 - \lambda\psi_2 = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.25}$$

avec les conditions au bord :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = 0,\ \ x \in \partial\Omega. \tag{3.26}$$

On additionnant les trois équations de (3.25) :

$d\Delta(\phi + \psi_1 + \psi_2) = \lambda(\phi + \psi_1 + \psi_2)$.

En suite on intégre : $d\displaystyle\int_\Omega \Delta(\phi + \psi_1 + \psi_2) = \lambda\int_\Omega(\phi + \psi_1 + \psi_2)$.

Alors : $d\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \eta}(\phi + \psi_1 + \psi_2) = \lambda\int_\Omega \Delta(\phi + \psi_1 + \psi_2) \Rightarrow \lambda\int_\Omega(\phi + \psi_1 + \psi_2)dx = 0$.

Donc on aura :

$$\int_\Omega (\phi + \psi_1 + \psi_2)dx = 0. \tag{3.27}$$

Lorsque $R_0 < 1 \Rightarrow r_1 < 1$ *et* $r_2 < 1$.

D'aprés la remarque 3 : $\lambda^*(\frac{N\beta_i}{|\Omega|} - \gamma_i) > 0, i = 1,2$

Si $(\lambda, \phi, \psi_1, \psi_2)$ *résoud le problème de valeur propre (3.25)-(3.27) avec au moins un des* $(\lambda, \phi, \psi_1, \psi_2)$ *non trivial alors* $Re(\lambda) > 0$.

On suppose que : $\psi_1 = \psi_2 = 0$ *alors le modèle (3.25) devient :* $\begin{cases} d\Delta\phi + \lambda\phi = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, & ,x \in \partial\Omega. \end{cases}$

Ce qui implique que : $\lambda > 0$, *tant que* ϕ, *n'est pas constant, car si* ϕ, *est constant, la formule (3.27) implique que* ϕ, *est nulle (contradiction).*

En suite on suppose que l'un des ψ_1, ψ_2, *est non triviale, par exemple on prend* $\psi_1 \neq 0$, *alors le problème (3.25) se réduit au problème de valeur propre suivant :*

$$\begin{cases} d\Delta\psi_1 + (\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1)\psi_1 + \lambda\psi_1 = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial\eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.28}$$

Comme λ *est la valeur propre associé au problème (3.28), donc :*

$Re(\lambda) \geq \lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1)$.

$$\textit{Alors :} \begin{cases} \eta(x,t) \longrightarrow 0 \ \textit{quand} \ t \longrightarrow \infty. \\ \xi_1(x,t) \longrightarrow 0 \ \textit{quand} \ t \longrightarrow \infty. \\ \xi_2(x,t) \longrightarrow 0 \ \textit{quand} \ t \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

Donc : DFE est stable localement.

(b) Si $R_0 > 1 \Rightarrow r_1 > 1$ *ou* $r_2 > 1$, *si* $r_1 > 1 \Rightarrow \lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1) < 0$.

Soit : $\lambda = \lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1)$ *et* ψ_1 *est une fonction propre positive pour le problème (3.28) avec une valeur propre principale* $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1)$, *soit* ϕ *la solution du problème :*

$$\begin{cases} d\Delta\phi - (\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1)\psi_1 + \lambda\phi = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme $(\lambda, \phi, \psi_1, 0)$ *est une solution de problème de valeur propre (3.25-3.27) avec* $\lambda < 0$ *alors : DFE est instable.*

Théorème 13

Si $R_0 \leq 1$, *alors DFE est globalement attractif.*

Preuve

On considère d'abord le cas $R_0 < 1$ *:*

On sait que $(S(x,t), I_1(x,t), I_2(x,t)) \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|}$ *quand* $t \longrightarrow \infty$, *soit* $\epsilon > 0$, $\exists T > 0$ *telle que :*

$S(x,t) \leq \frac{N}{|\Omega|} + \epsilon - I_1(x,t) - I_2(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T,\infty).$

D'aprés la deuxième équation du modèle (3.19) : $\frac{\partial I_1}{\partial t} - d\Delta I_1 = I_1(\beta_1 S - \gamma_1)$ *et comme :*

$S(x,t) \leq \frac{N}{|\Omega|}+\epsilon-I_1(x,t)-I_2(x,t) \leq \frac{N}{|\Omega|}+\epsilon-I_1(x,t)$, *on remplace dans l'équation ci-dessus on obtient :* $\frac{\partial I_1}{\partial t}-d\Delta I_1 \leq I_1[(\frac{N}{|\Omega|}+\epsilon)\beta_1-\gamma_1-\beta_1 I_1],\ x\in\Omega, t\in(T,\infty)$.

De même : $\frac{\partial I_2}{\partial t} - d\Delta I_2 \leq I_2[(\frac{N}{|\Omega|} + \epsilon)\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 I_2],\ x \in \Omega, t \in (T,\infty)$.

Donc on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial t} - d\Delta I_1 \leq I_1[(\frac{N}{|\Omega|} + \epsilon)\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 I_1], & x \in \Omega,\ \ t \in (T,\infty), \\ \frac{\partial I_2}{\partial t} - d\Delta I_2 \leq I_2[(\frac{N}{|\Omega|} + \epsilon)\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 I_2], & x \in \Omega,\ \ t \in (T,\infty), \\ \frac{\partial I_1}{\partial \eta} = \frac{\partial I_2}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega,\ \ t \in (T,\infty). \end{cases} \tag{3.29}$$

Soit $\hat{I}_i, i = 1,2$ *la solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{I}_i}{\partial t} - d\Delta \hat{I}_i = \hat{I}_i[(\frac{N}{|\Omega|} + \epsilon)\beta_i - \gamma_i - \beta_i \hat{I}_i], & x \in \Omega,\ t \in (T,\infty), \\ \frac{\partial \hat{I}_i}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (T,\infty), \\ \hat{I}_i(x,T) = I_i(x,T), & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.30}$$

I_i *est une sous-solution et* $\hat{I}_i$ *est une sur-solution. Par le principe de comparaison :* $I_i(x,t) \leq \hat{I}_i(x,t),\ \ x \in \overline{\Omega} \times [T,\infty)$.

De plus $R_0 < 1 \Rightarrow \lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_i - \gamma_i) > 0$, *on choisit* ϵ *petit telle que :*

$\lambda^*((\frac{N}{|\Omega|}+\epsilon)\beta_i-\gamma_i) > 0$, *par le lemme 3 toutes solutions du système (3.30) converge uniformément vers 0, i.e :*

$\hat{I}_i(x,t) \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow \infty$, *uniformément pour tout* $x \in \overline{\Omega}$, *ce qui implique que :* $\lim_{t\to\infty} I_i(x,t) = 0$.

Donc : $\begin{cases} \lim_{t\to\infty} S(x,t) = \frac{N}{|\Omega|}, & x \in \overline{\Omega}, \\ \lim_{t\to\infty} I_i(x,t) = 0, & x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$

En suite on considère le cas $R_0 = 1$:

On a $R_0 = \max\{r_1, r_2\} \Rightarrow r_1 = 1$ *ou* $r_2 = 1$, *on suppose que :*

$\max\{r_1, r_2\} = r_1 \Rightarrow r_1 = 1$ *et d'aprés la remarque 3 :* $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1) = 0$. *D'autre part comme* $\max\{r_1, r_2\} = r_1$ *donc* $\min\{r_1, r_2\} = r_2$, *ceci implique que* $r_2 < 1$, *et par la remarque 3 :* $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2) > 0$.

Pour $i = 2$, *un* ϵ *petit et par le lemme 3, le modèle (3.30) admet une solution* $\hat{I}_2(x,t) \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow \infty$, *comme* $I_2(x,t) \leq \hat{I}_2(x,t)$ *ce qui implique que :* $\lim_{t\to\infty} I_2(x,t) = 0$.

D'autre part Pour $i = 1$, *un* ϵ *petit qui tend vers 0 et par le lemme 3, le modèle (3.30) admet une solution* $\hat{I}_1(x,t) \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow \infty$,

comme $I_1(x,t) \leq \hat{I}_1(x,t)$ *alors* $\lim_{t\to\infty} I_1(x,t) = 0$, *ce qui implique que :*

$\lim_{t\to\infty} I_i(x,t) = 0$.

Donc : $$\begin{cases} \lim_{t\to\infty} S(x,t) = \dfrac{N}{|\Omega|}, & x \in \overline{\Omega}, \\ \lim_{t\to\infty} I_i(x,t) = 0, & x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

3.3.3 Equilibre endémique

Soit $(\bar{S}, \bar{I}_1, \bar{I}_2)$ l'équilibre du système (3.19) qui vérifie :

$$\begin{cases} 0 = d\Delta\bar{S} - (\beta_1\bar{I}_1 + \beta_2\bar{I}_2)\bar{S} + \gamma_1\bar{I}_1 + \gamma_2\bar{I}_2, & x \in \Omega, \\ 0 = d\Delta\bar{I}_1 + \beta_1\bar{S}\bar{I}_1 - \gamma_1\bar{I}_1, & x \in \Omega, \\ 0 = d\Delta\bar{I}_2 + \beta_2\bar{S}\bar{I}_2 - \gamma_2\bar{I}_2, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.31}$$

Faisons la somme des 3 équations du système (3.31), et on utilisant le principe de maximum on obtient : $\bar{S} = \dfrac{N}{|\Omega|} - \bar{I}_1 - \bar{I}_2$.

On remplace $\bar{S}$ dans le système (3.31) :

La première équation nous donne :

$$0 = d\Delta(\tfrac{N}{|\Omega|} - \bar{I}_1 - \bar{I}_2) - \bar{I}_1(\beta_1\bar{S} - \gamma_1) - \bar{I}_2(\beta_2\bar{S} - \gamma_2).$$

$$0 = -d\Delta\bar{I}_1 - d\Delta\bar{I}_2 - \bar{I}_1(\beta_1\bar{S} - \gamma_1) - \bar{I}_2(\beta_2\bar{S} - \gamma_2).$$

$$0 = -d\Delta\bar{I}_1 - d\Delta\bar{I}_2 - \bar{I}_1(\beta_1\tfrac{N}{|\Omega|} - \gamma_1 - \beta_1\bar{I}_1 - \beta_1\bar{I}_2) - \bar{I}_2(\beta_2\tfrac{N}{|\Omega|} - \gamma_2 - \beta_2\bar{I}_1 - \beta_2\bar{I}_2).$$

La deuxième équation nous donne :

$$0 = d\Delta\bar{I}_1 + \bar{I}_1(\beta_1\tfrac{N}{|\Omega|} - \gamma_1 - \beta_1\bar{I}_1 - \beta_1\bar{I}_2).$$

La troisieme équation nous donne :

$$0 = d\Delta\bar{I}_2 + \bar{I}_2(\beta_2\tfrac{N}{|\Omega|} - \gamma_2 - \beta_2\bar{I}_1 - \beta_2\bar{I}_2).$$

Alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} d\Delta\bar{I}_1 + \bar{I}_1(\beta_1\dfrac{N}{|\Omega|} - \gamma_1 - \beta_1\bar{I}_1 - \beta_1\bar{I}_2) = 0, \;\; x \in \Omega, \\ \\ d\Delta\bar{I}_2 + \bar{I}_2(\beta_2\dfrac{N}{|\Omega|} - \gamma_2 - \beta_2\bar{I}_1 - \beta_2\bar{I}_2) = 0, \;\; x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.32}$$

et les conditions au bord :

$$\frac{\partial\bar{I}_1}{\partial\eta} = \frac{\partial\bar{I}_2}{\partial\eta} = 0, \;\; x \in \overline{\Omega}. \tag{3.33}$$

Le modèle (3.32)-(3.33) admet comme solution $(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$, par la remarque 3 et le lemme 3 :

Si : $r_1 > 1 \Leftrightarrow \lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1) < 0$, ceci implique que le modèle admet une solution positive ou nulle donnée par : $(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = (U, 0)$ telle que $(U > 0)$ dans $\overline{\Omega}$, comme $\bar{S} = \frac{N}{|\Omega|} - \bar{I}_1 - \bar{I}_2$ donc le premier équilibre endémique est : $(\dfrac{N}{|\Omega|} - U, U, 0)$, ou bien si : $r_2 > 1 \Leftrightarrow \lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2) < 0$, ceci implique que le modèle admet une solution positive ou nulle donnée par : $(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = (0, V)$ telle que $(V > 0)$ dans $\overline{\Omega}$, comme $\bar{S} = \dfrac{N}{|\Omega|} - \bar{I}_1 - \bar{I}_2$ donc le deuxième équilibre endémique est : $(\dfrac{N}{|\Omega|} - V, 0, V)$.

Théorème 14

Si $R_0 > 1 \geq R_1$, alors il existe un équilibre endémique noté E_1 donné par : $(\dfrac{N}{|\Omega|} - U, U, 0)$, ou bien un autre équilibre endémique E_2 donné par : $(\dfrac{N}{|\Omega|} - V, 0, V)$, où les deux équilibres sont globalement attractifs.

Preuve

Si $R_0 = r_1 \Rightarrow R_1 = r_2$, on aura : $r_1 > 1 \geq r_2$.

Si $R_0 = r_2 \Rightarrow R_1 = r_1$, on aura : $r_2 > 1 \geq r_1$.

Par exemple on suppose que : $r_1 > 1 \geq r_2$, par la remarque 3 :

$\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1) < 0$ ce qui implique que (3.32)-(3.33) admet une solution positive

ou nulle $(U,0)$ *avec :* $E_1 = (\frac{N}{|\Omega|} - U, U, 0)$.

On étudie l'attractivité globale de E_1 *:*

$r_2 \leq 1 \Rightarrow \lambda^*(\dfrac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2) \geq 0$, *donc* $\lim\limits_{t\to\infty} I_2(x,t) = 0$,

comme $\lim\limits_{t\to\infty}(S + I_1 + I_2) = \dfrac{N}{|\Omega|}$, *soit* $\epsilon > 0$, $\exists T > 0$ *telle que :*

$\dfrac{N}{|\Omega|} - I_1(x,t) - \epsilon \leq S(x,t) \leq \dfrac{N}{|\Omega|} - I_1(x,t) + \epsilon.$

On a :

$\dfrac{\partial I_1}{\partial t} - d\Delta I_1 = \beta_1 S I_1 - \gamma_1 I_1 \leq \beta_1 I_1[\frac{N}{|\Omega|} - I_1 + \epsilon] - \gamma_1 I_1 = I_1[\beta_1(\frac{N}{|\Omega|} + \epsilon) - \beta_1 I_1 - \gamma_1]$,

et : $\dfrac{\partial I_1}{\partial t} - d\Delta I_1 = \beta_1 S I_1 - \gamma_1 I_1 \geq \beta_1 I_1[\frac{N}{|\Omega|} - I_1 - \epsilon] - \gamma_1 I_1 = I_1[\beta_1(\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon) - \beta_1 I_1 - \gamma_1]$

Donc on aura : $I_1[\beta_1(\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon) - \beta_1 I_1 - \gamma_1] \leq \dfrac{\partial I_1}{\partial t} - d\Delta I_1 \leq I_1[\beta_1(\frac{N}{|\Omega|} + \epsilon) - \beta_1 I_1 - \gamma_1]$,

$(x,t) \in (T,\infty)$.

Soit $\tilde{I}$ *la solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial t} = d\Delta \tilde{I} + \tilde{I}[(\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon)\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 \tilde{I}], & x \in \Omega,\ t \in (T,\infty), \\ \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (T,\infty), \\ \tilde{I}(x,T) = I_1(x,T), & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.34}$$

Soit $\hat{I}$ *la solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{I}}{\partial t} = d\Delta \hat{I} + \hat{I}[(\frac{N}{|\Omega|} + \epsilon)\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 \hat{I}], & x \in \Omega,\ t \in (T,\infty), \\ \dfrac{\partial \hat{I}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (T,\infty), \\ \hat{I}(x,T) = I_1(x,T), & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.35}$$

$\hat{I}$ *est une sur-solution et* $\tilde{I}$ *est une sous-solution . Par le principe de comparaison* $\tilde{I}(x,t) \leq I_1(x,t) \leq \hat{I}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [T,\infty)$.

Comme $r_1 > 1$ *et pour* ϵ *petit* $\lambda^*((\frac{N}{|\Omega|} \pm \epsilon)\beta_1 - \gamma_1) < 0$, *par le lemme 3 on obtient :* $\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{I}(x,t) = \tilde{I}^*_\epsilon(x)$, $\lim\limits_{t\to\infty} \hat{I}(x,t) = \hat{I}^*_\epsilon(x)$, *avec :* $\tilde{I}^*_\epsilon(x)$ *et* $\hat{I}^*_\epsilon(x)$ *sont deux équilibres positifs ou nuls, lorsque* $\epsilon \longrightarrow 0$, $\tilde{I}^*_\epsilon(x) \longrightarrow U(x)$ *et* $\hat{I}^*_\epsilon(x) \longrightarrow U(x)$.

Ceci implique : $I_1(x,t) \longrightarrow U(x)$ *quand* $t \longrightarrow \infty$, *et par conséquent :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} S(x,t) = \dfrac{N}{|\Omega|} - U. \\ \lim\limits_{t\to\infty} I_1(x,t) = U. \\ \lim\limits_{t\to\infty} I_2(x,t) = 0. \end{cases}$$

Donc E_1 est globalement attractif.

On utilise le même raisonnement pour démontré que E_2 est globalement attractif.

Question :

Dans le cas des coefficients homogènes et pour un $R_1 > 1$ on a observé un comportement d'éxclusion compétitive. Est-ce-que on aura le même comportement pour le cas des coefficients hétérogènes ?

Pour répondre a telle question on introduit deux fonctions auxiliaires $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ telle que $\tilde{U}$ représente la densité asymptotique la plus faible pour la première maladie et $\tilde{V}$ est la densité asymptotique la plus faible pour la deuxiéme maladie.

Si $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 V) < 0$, $\tilde{U}$ est l'unique solution positive pour le problème :

$$\begin{cases} d\Delta\tilde{U} + \tilde{U}(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 V - \beta_1\tilde{U}) = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Si $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 U) < 0$, $\tilde{V}$ est l'unique solution positive pour le problème :

$$\begin{cases} d\Delta\tilde{V} + \tilde{V}(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 U - \beta_2\tilde{V}) = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Théorème 15

(a) Si $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 V) < 0$ et $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 \tilde{U}) \geq 0$ alors E_1 est globalement attractif.

(b) Si $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 U) < 0$ et $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 \tilde{V}) \geq 0$ alors E_2 est globalement attractif.

Preuve

(a) On suppose que $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 V) < 0$ et $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 \tilde{U}) \geq 0$.

La solution du modèle de compétition (3.20) coverge toujours, il suffit de prouver que :

$((I_1(x,t), I_2(x,t)) \longrightarrow (I_1^*(x), I_2^*(x))$, *quand* $t \longrightarrow \infty$ *uniformément pour* $x \in \overline{\Omega}$

avec $(I_1^*(x), I_2^*(x))$ *est la solution du problème (3.32)-(3.33) telle que :*
$(I_1^*(x), I_2^*(x)) = (U, 0)$.
On a : $I_2(x,t) \longrightarrow I_2^*(x)$ *quand* $t \longrightarrow \infty$ *avec* $I_2^*(x) \leq V$. *Soit* $\epsilon > 0$, $\exists T_1 > 0$ *telle que :*
$I_2 \leq (I_2^* + \epsilon) \Rightarrow -\beta_1 I_2 \geq -\beta_1(I_2^* + \epsilon)$, *donc on aura :*
$$\frac{\partial I_1}{\partial t} - d\Delta I_1 \geq I_1(\tfrac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 I_1 - \beta_1(I_2^* + \epsilon)), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (T_1, \infty).$$

Soit $\tilde{I}$ *la solution du problème suivant :*
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial t} = d\Delta \tilde{I} + \tilde{I}(\tfrac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 \tilde{I} - \beta_1(V + \epsilon)), & x \in \Omega,\ t \in (T_1, \infty), \\ \\ \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (T_1, \infty), \\ \\ \tilde{I}(x, T) = I_1(x, T_1), & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.36}$$
I_1 *est une sur-solution et* $\tilde{I}$ *est une sous-solution. Par le principe de comparaison* $I_1(x,t) \geq \tilde{I}(x,t), (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T_1, \infty)$.
D'autre part : $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 V) < 0$, *pour* $\epsilon > 0$ *petit :*
$\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1(V + \epsilon)) < 0$ *ceci implique que :* $\tilde{I}(x,t) \longrightarrow \tilde{I}_\epsilon^*(x)$ *quand* $t \longrightarrow \infty$.
Où $\tilde{I}_\epsilon^*(x)$ *est un état stationnaire positive, de plus* $\tilde{I}_\epsilon^*(x) \longrightarrow \tilde{U}(x)$ *quand* $\epsilon \longrightarrow 0$.
Pour un t *grand et* $\delta > 0$ *on a :* $I_1(x,t) \geq \tilde{U}(x) - \delta$. $\exists T_2 > T_1$ *telle que :*
$$\frac{\partial I_2}{\partial t} - d\Delta I_2 \leq I_2(\tfrac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2(\tilde{U} - \delta) - \beta_2 I_2), \forall (x,t) \in \Omega \times (T_2, \infty).$$

Soit $\hat{I}$ *la solution du problème suivant :*
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{I}}{\partial t} = d\Delta \hat{I} + \hat{I}(\tfrac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2(\tilde{U} - \delta) - \beta_2 \hat{I}, & x \in \Omega,\ t \in (T_2, \infty), \\ \\ \dfrac{\partial \hat{I}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (T_2, \infty), \\ \\ \hat{I}(x, T) = I_2(x, T_2), & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.37}$$
On a $\hat{I}$ *est une sur-solution et* I_2 *est une sous-solution. Par le principe de comparaison :* $I_2(x,t) \leq \hat{I}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [T_2, \infty)$.
D'autre part : $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 \tilde{U}) \geq 0$ *et pour* $\delta > 0$ *petit :*

$\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2(\tilde{U} - \delta) \geq 0$, *par le lemme 3 :* $\hat{I} \longrightarrow \hat{I}_\delta^*$ *quand* $t \longrightarrow \infty$.

Faisons tendre $\delta \longrightarrow 0$ *on trouve :* $\hat{I}_\delta^* \longrightarrow 0$ *et comme :* $I_2(x,t) \leq \hat{I}(x,t)$ *ceci implique que :* $I_2 \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow \infty$.

Par conséquent : $I_1 \longrightarrow U$ *quand* $t \longrightarrow \infty$, *puisque :* $S + I_1 + I_2 \longrightarrow \dfrac{N}{|\Omega|}$

$S \longrightarrow \dfrac{N}{|\Omega|} - U$ *quand* $t \longrightarrow \infty$, *donc* E_1 *est globalement attractif.*

(b) On suppose que : $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 U) < 0$ *et* $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1\tilde{V}) \geq 0$.

La solution du modèle de compétition (3.20) coverge toujours, il suffit de prouver que :

$((I_1(x,t), I_2(x,t)) \longrightarrow (I_1^*(x), I_2^*(x))$, *quand* $t \longrightarrow \infty$ *uniformément pour* $x \in \overline{\Omega}$

avec $(I_1^*(x), I_2^*(x))$ *est la solution du problème (3.32)-(3.33) telle que :*

$(I_1^*(x), I_2^*(x)) = (0, V)$.

On a $I_1(x,t) \longrightarrow I_1^*(x)$ *quand* $t \longrightarrow \infty$ *avec* $I_1^*(x) \leq U$. *Soit* $\epsilon > 0$, $\exists T_1 > 0$ *telle que :*

$I_1 \leq (I_1^* + \epsilon) \Rightarrow -\beta_2 I_1 \geq -\beta_2(I_1^* + \epsilon)$, *donc on aura :*

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} - d\Delta I_2 \geq I_2(\tfrac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2(I_1^* + \epsilon) - \beta_2 I_2), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (T_1, \infty).$$

Soit $\tilde{I}$ *la solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial t} = d\Delta\tilde{I} + \tilde{I}(\tfrac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2(U+\epsilon) - \beta_2\tilde{I}), & x \in \Omega,\ t \in (T_1, \infty), \\ \\ \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (T_1, \infty), \\ \\ \tilde{I}(x, T) = I_2(x, T_1), & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.38}$$

I_2 *est une sur-solution et* $\tilde{I}$ *est une sous-solution. Par le principe de comparaison* $I_2(x,t) \geq \tilde{I}(x,t), (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T_1, \infty)$.

D'autre part $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 U) < 0$, *pour* $\epsilon > 0$ *petit :*

$\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2(U+\epsilon)) < 0$, *ceci implique que :* $\tilde{I}(x,t) \longrightarrow \tilde{I}_\epsilon^*(x)$ *quand* $t \longrightarrow \infty$

Où $\tilde{I}_\epsilon^*(x)$ *est un état stationnaire positive.*

De plus $\tilde{I}_\epsilon^*(x) \longrightarrow \tilde{V}(x)$ *quand* $\epsilon \longrightarrow 0$.

Pour un t grand et $\delta > 0$ *on a :*

$I_2(x,t) \geq \tilde{V}(x) - \delta$. $\exists T_2 > T_1$ *telle que :*

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} - d\Delta I_1 \leq I_1(\tfrac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 I_1 - \beta_1(\tilde{V} - \delta)), \ \forall (x,t) \in \Omega \times (T_2, \infty).$$

Soit $\hat{I}$ la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{I}}{\partial t} = d\Delta \hat{I} + \hat{I}(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 \hat{I} - \beta_1(\tilde{V} - \delta), & x \in \Omega,\ t \in (T_2, \infty), \\ \\ \dfrac{\partial \hat{I}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (T_2, \infty), \\ \\ \hat{I}(x, T) = I_1(x, T_2), & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.39}$$

On a $\hat{I}$ est une sur-solution et I_1 est une sous-solution. Par le principe de comparaison :$I_1(x,t) \leq \hat{I}(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T_2, \infty)$.

D'autre part : $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 \tilde{V}) \geq 0$ et pour $\delta > 0$ petit :

$\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1(\tilde{V} - \delta) \geq 0$, et par le lemme 3 : $\hat{I} \longrightarrow \hat{I}^*_\delta$ quand $t \longrightarrow \infty$.

Faisons tendre $\delta \longrightarrow 0$ on trouve : $\hat{I}^*_\delta \longrightarrow 0$ et comme : $I_1(x,t) \leq \hat{I}(x,t)$, ceci implique que : $I_1 \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$.

Par conséquent : $I_2 \longrightarrow V$ quand $t \longrightarrow \infty$, puisque :

$S + I_1 + I_2 \longrightarrow \dfrac{N}{|\Omega|} \Rightarrow S \longrightarrow \dfrac{N}{|\Omega|} - V$ quand $t \longrightarrow \infty$, donc E_2 est globallement attractif.

Remarque 4

Si $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ sont non triviale alors : $(\bar{S}, \bar{I}_1, \bar{I}_2)$ est appelé un équilibre de coexistence. Si les deux équilibres endémiques éxistent, donc on a pas un phénomène d'éxclusion compétitive.

Théorème 16

Pour $R_1 > 1$. On suppose que :

$\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 V) < 0$ et $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 U) < 0$ alors il existe au moins un équilibre de coexistence pour le système (3.1)-(3.3), de plus le système (3.1)-(3.3) est permanent dans le sens ou il existe deux constantes positives m_0 et M_0 telle que :

$$m_0 \leq S(x,t), I_1(x,t), I_2(x,t) \leq M_0$$

$\forall x \in \overline{\Omega}, t \geq T_0$ où T_0 dépend des conditions initiales.

Preuve

D'aprés la démonstration du théorème 15 on a :

$(I_1(x,t), I_2(x,t)) \longrightarrow (I_1^*(x), I_2^*(x))$ quand t tend vers ∞, uniformément pour $x \in \overline{\Omega}$ où $(I_1^*(x), I_2^*(x))$ est la solution du problème (3.32)-(3.33).

De plus $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_1 - \gamma_1 - \beta_1 V) < 0$ alors le lemme 3 garantie la convergence vers l'unique état d'équilibre $I_1^*(x)$ qui est strictement positif.

De même $\lambda^*(\frac{N}{|\Omega|}\beta_2 - \gamma_2 - \beta_2 U) < 0$ alors le lemme 3 garantie la convergence vers l'unique état d'équilibre $I_2^*(x)$ qui est strictement positif. Donc on conclue que $(I_1^*(x), I_2^*(x))$ sont strictement positif au niveau des composants.

D'autre part : $S + I_1 + I_2 \longrightarrow \dfrac{N}{|\Omega|}$ quand $t \longrightarrow \infty$,

$$\text{et comme : } \begin{cases} S \longrightarrow S^* \text{ quand } t \longrightarrow \infty \\ I_1 \longrightarrow I_1^* \text{ quand } t \longrightarrow \infty \\ I_2 \longrightarrow I_2^* \text{ quand } t \longrightarrow \infty \end{cases}$$

Donc on aura : $I_1^* + I_2^* < \frac{N}{|\Omega|}$.

Il nous reste a prouver qu'il n'existe pas une séquence d'équilibres $\{(I_{1,n}^*, I_{2,n}^*)\}$ pour le modèle (3.32)-(3.33) qui converge vers $(U,0)$ ou $(0,V)$, ou bien elle vérifie : $I_{1,n}^* + I_{2,n}^* \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|}$.

La non existence de telle séquence qui ne converge pas vers $(U,0)$ ou $(0,V)$ a était prouvé dans [6] (page 290).

On suppose que : $\{(I_{1,n}^*, I_{2,n}^*)\}$ existe et vérifie $I_{1,n}^* + I_{2,n}^* \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|}$, alors par l'argument compact il existe une sous séquence $\{(I_{1,nj}^*, I_{2,nj}^*)\}$ telle que :
$\{(I_{1,nj}^*, I_{2,nj}^*)\} \longrightarrow (\tilde{I}_1^*, \tilde{I}_2^*)$ où $\tilde{I}_i^*$, $i = 1,2$ vérifie : $d\Delta\tilde{I}_i^* - \gamma_i\tilde{I}_i^* = 0$, par le principe de maximum $\tilde{I}_i^* \equiv 0$, ceci contredit le faite que : $\tilde{I}_1^* + \tilde{I}_2^* = \dfrac{N}{|\Omega|}$ donc on peut pas avoir une séquence qui vérifie : $I_{1,n}^* + I_{2,n}^* \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|}$.

3.4 Conditions d'éxclusion compétitive et de co-existence

Dans cette section, on vérifie la validité des conditions des théorèmes 15 et 16 on se basant sur la formule (3.22) et la remarque 3.

On commence par vérifier la validité des conditions du théorème 15 :

(a) on choisit : $\dfrac{N\beta_2}{|\Omega|} > \gamma_2$ dans $\overline{\Omega}$, par la formule (3.22) et le lemme 3 on a (0,V) existe où V vérifie : $V \leq \dfrac{N}{|\Omega|} - \min_{\overline{\Omega}}\{\dfrac{\gamma_2}{\beta_2}\}$ dans $\overline{\Omega}$.

Comme β_1 ne dépend pas de β_2 et γ_2 donc on aura : $\min_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_2}{\beta_2}\} > \max_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_1}{\beta_1}\}$ pour β_1 grand, ceci implique que : $\frac{N\beta_1}{|\Omega|} - \gamma_1 - \beta_1 V > 0$ dans $\overline{\Omega}$ car :

$\min_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_2}{\beta_2}\} > \max_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_1}{\beta_1}\} \Rightarrow -\min_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_2}{\beta_2}\} < -\max_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_1}{\beta_1}\}$.

Ceci implique que : $\frac{N}{|\Omega|} - \min_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_2}{\beta_2}\} < \frac{N}{|\Omega|} - \max_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_1}{\beta_1}\}$.

Puisque : $V \leq \frac{N}{|\Omega|} - \min_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_2}{\beta_2}\}$ donc : $V \leq \frac{N}{|\Omega|} - \max_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_1}{\beta_1}\}$.

Ceci implique que : $\frac{N\beta_1}{|\Omega|} - \gamma_1 - \beta_1 V > 0$ dans $\overline{\Omega}$.

Par la formule (3.22) on a : $\lambda^*(\frac{N\beta_1}{|\Omega|} - \gamma_1 - \beta_1 V) < 0$, d'après le lemme 3 on a l'éxistence de $\tilde{U}$ où $\tilde{U}$ vérifie : $\tilde{U} \geq \frac{N}{|\Omega|} - \max_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_1}{\beta_1}\} - V \geq \min_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_2}{\beta_2}\} - \max_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_1}{\beta_1}\}$ dans $\overline{\Omega}$, pour simplifier on pose : $\gamma_2 = c\beta_2$ avec c une constante positive proche de $\frac{N}{|\Omega|}$ telle que : $(\frac{N}{|\Omega|} + \max_{\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma_1}{\beta_1}\})/2 \leq c < \frac{N}{|\Omega|}$, ceci implique : $\frac{N\beta_2}{|\Omega|} - \gamma_2 - \beta_2\tilde{U} \leq 0$ dans $\overline{\Omega}$, par la formule (3.22) : $\lambda^*(\frac{N\beta_2}{|\Omega|} - \gamma_2 - \beta_2\tilde{U}) \geq 0$.

On vérifie la validité des conditions du théorème 16 :

$\forall \alpha \in C(\overline{\Omega})$, $\lambda^*(\alpha) \longrightarrow \min_{\overline{\Omega}}\{-\alpha(x)\}$ (voir[5]).

Soit $\alpha_+(x) = \max\{\alpha(x), 0\}$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, alors $\exists\, d^* > 0$ telle qu'on a l'existence et l'unicité d'une solution U pour le problème :

$$\begin{cases} d\Delta u + (\alpha(x) - u)u = 0, & x \in \Omega, \\ \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

U existe, $\forall d < d^*$ et $u \longrightarrow \alpha_+$ quand $d \longrightarrow 0$. (voir [12])

Pour simplifier on pose : Ω l'interval ouvert (0,1) et $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

Supposons que : $\frac{N}{|\Omega|} > \gamma_i$, $i = 1, 2$.

Alors : $\begin{cases} U \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|} - \gamma_1, & quand\ \ d \longrightarrow 0 \\ V \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|} - \gamma_2, & quand\ \ d \longrightarrow 0 \end{cases}$

De plus : $\lambda^*(\alpha) \longrightarrow \min_{\overline{\Omega}}\{-\alpha(x)\}$ quand $d \longrightarrow 0$, et $V \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|} - \gamma_2$, quand $d \longrightarrow 0$, alors on obtient :

$$\lambda^*(\frac{N\beta_1}{|\Omega|} - \gamma_1 - \beta_1 V) \longrightarrow \min_{\overline{\Omega}}\{\gamma_1(x) - \gamma_2(x)\}\ \ quand\ \ d \longrightarrow 0 \tag{3.40}$$

De même :

$$\lambda^*(\frac{N\beta_2}{|\Omega|} - \gamma_2 - \beta_2 U) \longrightarrow \min_{\overline{\Omega}}\{\gamma_2(x) - \gamma_1(x)\}\ \ quand\ \ d \longrightarrow 0 \tag{3.41}$$

On choisit : $\begin{cases} \gamma_1(x) = 1 + x. \\ \gamma_2(x) = 2 - x. \end{cases}$

Et les conditions initiales : $\begin{cases} S(x,0) = 3 + cos\pi x. \\ I_1(x,0) = I_2(x,0) = 2 + cos\pi x. \end{cases}$

D'aprés (3.40)-(3.41), $\lambda^*(\frac{N\beta_1}{|\Omega|} - \gamma_1 - \beta_1 V) < 0$ et $\lambda^*(\frac{N\beta_2}{|\Omega|} - \gamma_2 - \beta_2 U) < 0$.
Donc les conditions du théorème 16 sont vérifiés.

Conclusion :

On aura la coexistence entre les deux souches pathogènes pour un taux de diffusion petit.

Chapitre 4

Simulation numérique

Afin de confirmer les résultats précédents concernant l'éxclusion compétitive et la coexistence, on présente les simulations numériques qui ont étaient faites sous Matlab.

Explications :

Les figures (4.1-4.6) : représentent un phénomène d'éxclusion compétitive, i.e on obtient l'extinction (convergence vers un état d'équilibre nul) de la première souche pathogène comme il est indiqué dans la figure (4.2) et en parallèle on a la pérsistence de la deuxième souche pathogène (convergence vers un état d'équilibre qui est strictement positif) comme il est indiqué dans la figure (4.3), et vice versa.

Les figures (4.7-4.9) : représentent un phénomène dû à la coexistence entre les deux souches pathogènes. Ceci est indiqué par la convergence des deux souches pathogènes vers un état d'équilibre qui est strictement positif (figures 4.8-4.9).

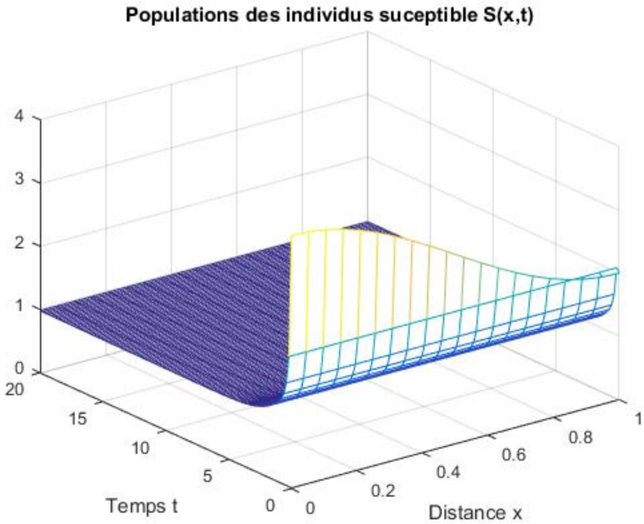

Figure 4.1 – Population des individus succeptibles.

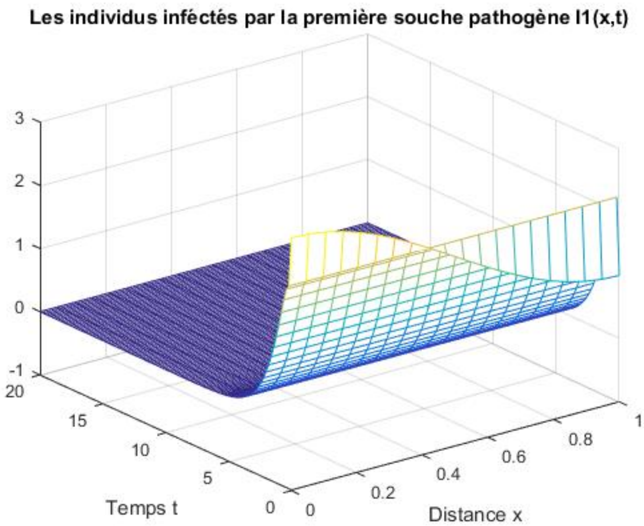

Figure 4.2 – Population des individus inféctés par la première souche pathogène.

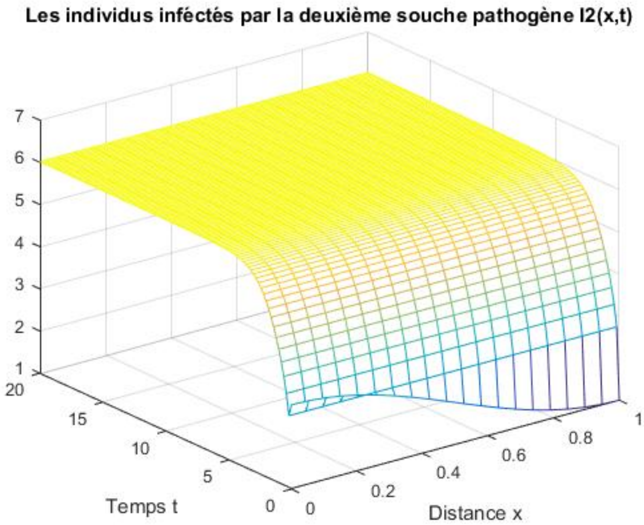

FIGURE 4.3 – Population des individus inféctés par la deuxième souche pathogène.

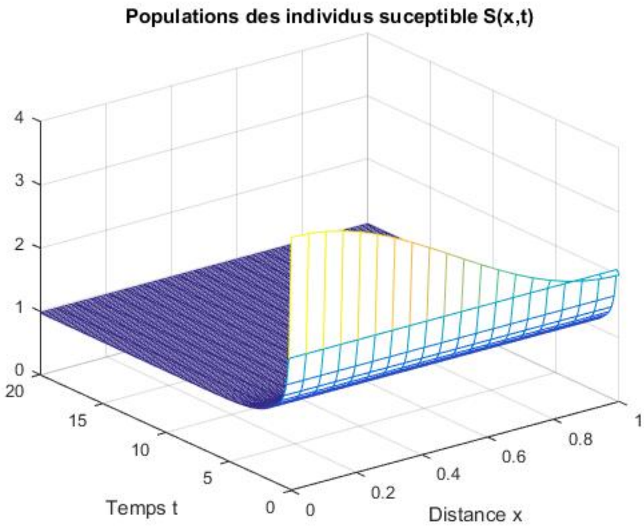

FIGURE 4.4 – Population des individus succeptibles.

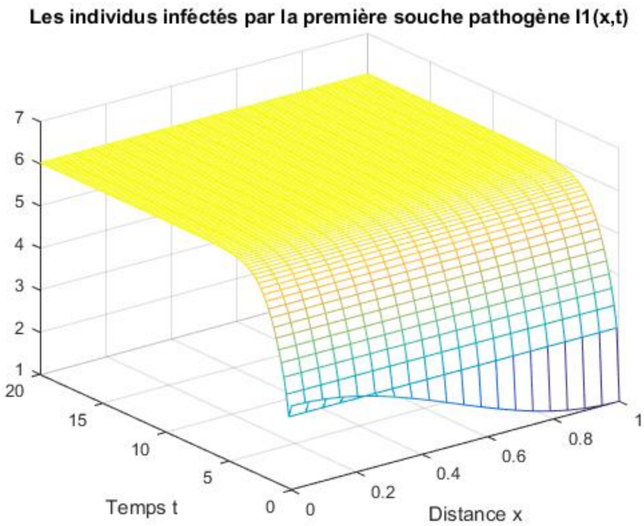

FIGURE 4.5 – Population des individus inféctés par la première souche pathogène.

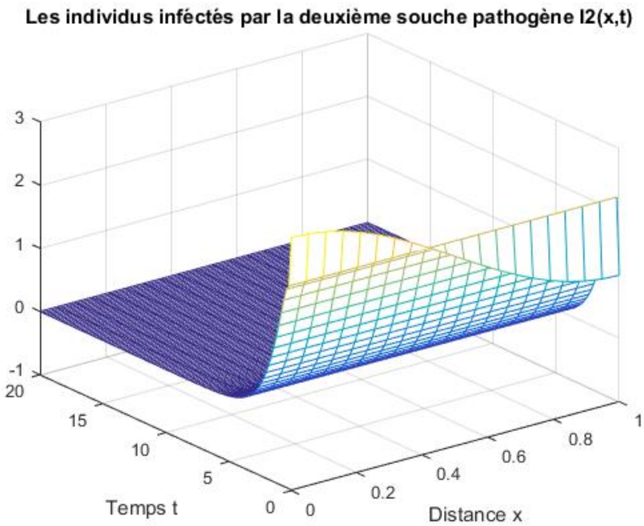

FIGURE 4.6 – Population des individus inféctés par la deuxième souche pathogène.

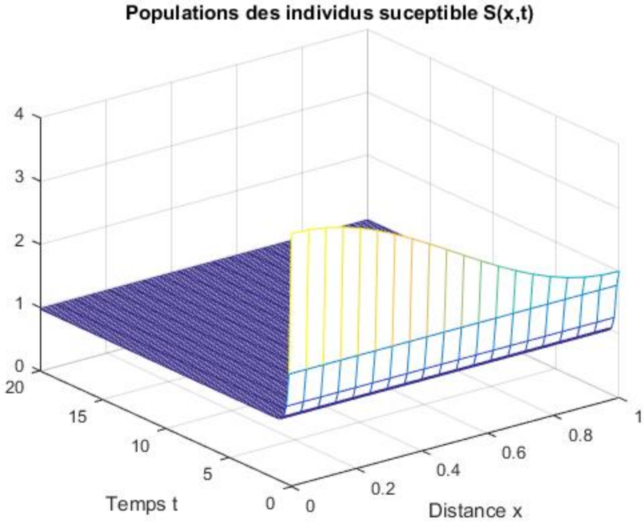

FIGURE 4.7 – Population des individus succeptibles.

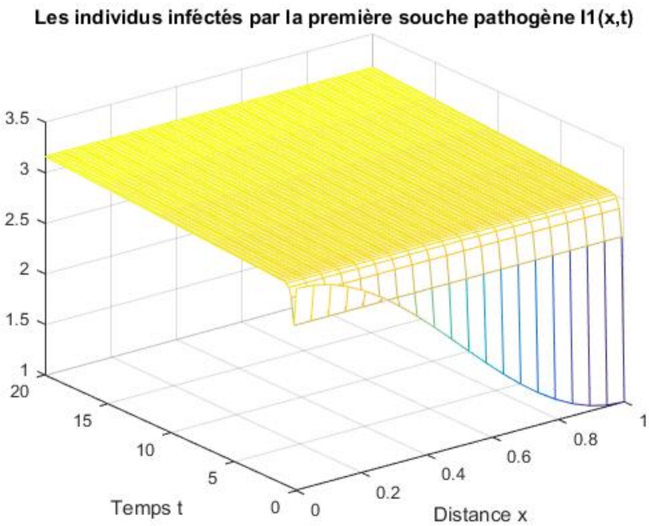

FIGURE 4.8 – Population des individus inféctés par la première souche pathogène.

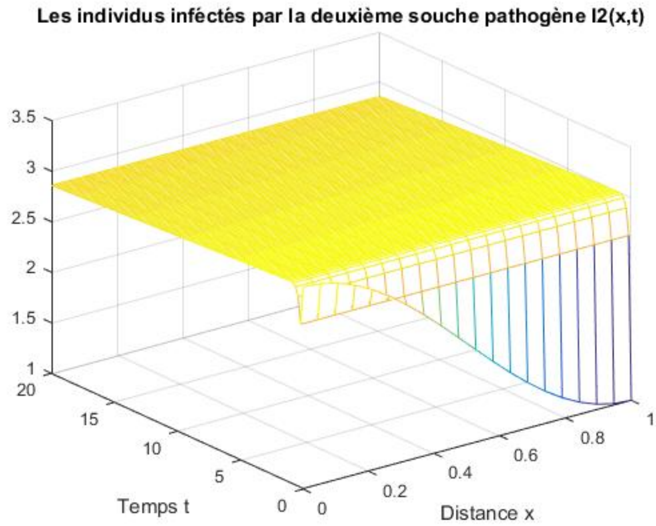

FIGURE 4.9 – Population des individus inféctés par la deuxième souche pathogène.

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons discuté deux phénomènes importants dans le contexe épidémiologique.

Le premier est considéré sous le nom du principe d'éxclusion compétitive ou principe de Volterra-Gauss. Ce principe on l'a utilisé dans le cadre épidémiologique et plus précisement pour étudier les modèles multi-souches pathogènes. Le second correspond au cas ou la coexistence entre les souches pathogènes se réalise.

A cet effet on a partagé notre travail en deux chapitres. On a commencé dans le premier par introduire quelques théorèmes, définitions et propositions qui nous ont aidé pour étudier le second chapitre qui était consacré à l'étude mathématique d'un modèle SIS de type réaction-diffusion à deux souches pathogènes avec coefficients hétérogènes.

Ce chapitre se subdivise en deux parties, la première correspond au cas homogène qui nous a conduit à deux résultats suivant le calcul de R_0, et qui nous a amené à un principe d'éxclusion compétitive.
la deuxième correspond au cas hétérogène avec aussi deux résultats possibles suivant le calcul de R_0, a cet effet on a obtenu soit la coexistence entre les deux souches pathogènes, sinon la persistence d'une souche pathogène, on paralléle l'extinction de l'autre souche pathogène sous le nom d'éxclusion compétitive.
Dans la fin de ce mémoire, on a présenté des simulations numériques pour illustrer les résultats théoriques.

Bibliographie

[1] A. S. Ackleh, K. Deng, and Y. Wu. Competitive exclusion and coexistence in a two-strain pathogen model with diffusion. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 13, 1-18, 2016.

[2] S. Agmon. On the eigenfunctions and the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, comm. *Pure Appl. Math*, 15, 119-147, 1962.

[3] N. D. Alikakos. An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations. *Journal of Differential Equations*, 33, 201-225, 1979.

[4] L. J. S. Allen, B. M. Bolker, Y. Lou, and A. L. Nevai. Asymptotic profiles of the steady states for an sis epidemic reaction-diffusion model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A*, 21, 1-20, 2008.

[5] L. J. S. Allen, B. M. Bolker, Y. Lou, and A.L. Nevai. Asymptotic profiles of the steady states for an sis epidemic patch model. *SIAM J. APPL. MATH*, 67, 1283-1309, 2007.

[6] R. S. Cantrell and C. Cosner. *Spatial Ecology Via Reaction-Diffusion Equations*. Wiley, Chichester, West Sussex, UK, 2003.

[7] L. C. Evans. *Partial Differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 1997.

[8] Jean François Fortier.
http://www.aquaportail.com
https://www.aquaportail.com/definition-3811-principe-de-gause.html.

[9] J. K. Hale. Asymptotic behavior of dissipative systems. *American Mathematical Society, Providence*, 1988.

[10] D. Henry. *Geometric Theory of semilinear Parabolic Equations*. Springer-Verlag, 1981.

[11] C. S. Kahane. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations under homogeneous neumann boundary conditions. *Funkcialaj Ekvacioj*, 32, 191-213, 1989.

[12] R. Penga and S. Liu. Global stability of the steady states of an sis epidemic reaction-diffusion model. *Nonlinear Analysis*, 71, 239-249, 2009.

[13] L. Roques. *Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale*. Quae, 2013.

[14] G. R. Sell and Y. You. *Dynamics of evolutionary equations*. Springer, New York, 2002.

[15] N. Tuncer and M. Martcheva. Analytical and numerical approaches to coexistence of strains in a two strain sis model with diffusion. *Biological Dynamics*, 6, 406-439, 2012.