



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID – TLEMCCEN

THÈSE LMD

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT

Spécialité: Mathématiques appliquées et systèmes non linéaires

Présenté par :

M^{me} Khayra BELKHODJA épouse SELKA

Sur le thème

Contrôle optimal appliqué à la gestion d'une ressource renouvelable

Soutenue publiquement le 21/06/2018 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr TOUAOULA M. T	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr ABDELLAOUI B	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur
Mr AMIR Abdessamed	Professeur	Université de Mostaganem	Examinateur
Mr BELHAMITI Omar	M.C.A	Université de Mostaganem	Examinateur
Mr MIRI S.A.H	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur
Mr Moussaoui. A	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse

*Laboratoire Analyse Non Linéaire et Mathématiques appliquées
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie*

Dédicaces

Au plus belles créatures que Dieu a créée sur terre ,, A ma source de tendresse, d'espoir et de bonheur,, À mes filles : Nawel et Nesrine!

A ma mère, l'ouvreuse de ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

A mon père. Grâce à son encouragement, sa confiance, son amour infini en exprimant mes gratitudes, mon profond amour et ma passion.

A mon mari. Tes sacrifices, ton soutien moral et matériel, ta gentillesse sans égal et ton profond attachement m'ont permis de réussir mes études. Sans ton aide, tes conseils et tes encouragements ce travail n'aurait vu le jour.

A ma chère sœur Amina et mon adorable frère Majid. Vous avez toujours été présents pour les bons conseils. Votre affection et votre soutien m'ont été d'un grand secours au long de ma vie universitaire et personnelle.

A ma belle famille. Vous m'avez accueilli à bras ouverts dans votre famille. Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

Kheira

Remerciements

Je remercie en priorité *ALLAH LE TOUT PUISSANT* de m'avoir donné le courage, et la force de volonté de réaliser ce modeste travail.

Je témoigne mes sincères remerciements avec ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse M. *ALI MOUSSAOUI*, professeur à l'Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen, qui m'a fait l'honneur d'accepter la direction de ma thèse, pour moi, c'est un honneur et une immense joie de pouvoir progresser sous son encadrement. Pour cela je tiens à souligner son engagement total durant toute ma formation, je lui réitère mes remerciements pour ses conseils avisés et ses indications toujours fructueuses. Sans oublier sa confiance sa capacité et son énorme maîtrise qui m'ont facilité d'aborder les problèmes de cette thèse. Il n'a eu de cesse de m'encourager, de me soutenir et aussi de me transmettre la passion et la découverte de la recherche mathématique avec beaucoup de précision et de rigueur. Cette rigueur mathématique je vous la dois Monsieur. Sa disponibilité permanente, son aide et ses compétences m'ont été d'un grand secours et soutien. Je remercie en lui le frère au soutien et une compréhension sans limites.

- Je tiens aussi à remercier M. le Professeur "*TOUAOULA M. T*" , pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.
- Je tiens aussi à remercier M. le Professeur "*ABDELLAOUI.B*" , pour l'honneur qu'il me fait d'avoir accepté d'examiner cette thèse.
- Je remercie M. le Professeur "*AMIR Abdessamed*", d'avoir accepté

d'examiner ce manuscrit.

- A M. le Professeur "*BELHAMITI Omar*", j'adresse mes remerciements pour avoir accepté de faire partie du jury.
- Je vous adresse à M. "*MIRI S. H.*", l'expression de mes sincères remerciements et de mon entière gratitude, pour faire partie du jury.
- Mes remerciements s'adressent également à M. "*Aziz Alaoui*" professeur à l'Université du Havre et directeur Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre (LMAH) qui m'a permis d'effectuer mon stage dans son laboratoire. Merci aussi pour ses discussions et ses idées enrichissantes.
- Je remercie également le groupe d'enseignants du master : M. "*Moussaoui. A*" , M. "*Abdellaoui. B*" , M. "*Touaoula. M. T*" ,et M. "*Miri. S. H*" , qui nous ont donné une formation complète qui fut un excellent départ pour entamer mes recherches scientifiques et aussi pour leurs soutien et encouragements tout au long de ces années.
- Je suis également très reconnaissante envers ma famille qui s'est constamment préoccupée de m'a scolarité et m'ont soutenu pendant toutes mes études.
- Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail surtout "*Meryem*" et "*Souad*".

Kheira

Table des matières

1	Modèles de base en dynamique de populations	5
1.1	Modèles avec une seule population	6
1.1.1	Modèle de Malthus	6
1.1.2	Modèle de Verhulst (modèle logistique)	8
1.1.3	Croissance bistable ou modèle avec "Effet Allee"	10
1.1.4	Modèle bioéconomique	11
1.2	Modèles avec deux populations	13
1.2.1	Quelques modèles proie-prédateur	14
2	Préliminaires	19
2.1	Équation différentielle	20
2.2	Notions de stabilité dans \mathbb{R}^2	23
2.3	Existence des orbites périodiques.	26
2.4	Contrôle optimal	28
2.5	Principe du maximum de Pontryagin	29
3	Récolte optimale et stabilité d'un modèle proie-prédateur	31
3.1	Introduction.	33

3.2	Analyse mathématique et résultats principaux.	36
3.2.1	Positivité et bornitude des solutions	37
3.2.2	Persistance et permanence	39
3.3	Existence et stabilité des états d'équilibre.	44
3.3.1	Analyse de la stabilité des points d'équilibre	45
3.3.2	Stabilité globale du point d'équilibre intérieur	47
3.4	Équilibre bionomique	50
3.5	Stratégie de récolte optimale.	53
3.6	Conclusion.	57
4	Dynamique globale d'un système proie-prédateur et ses ap- plications au contrôle biologique	61
4.1	Quelques résultats préliminaires	62
4.1.1	Bornitude du système	63
4.2	Analyse des équilibres	63
4.3	Stabilité globale du point d'équilibre intérieur	65
4.4	Équilibre bionomique	67
4.5	Stratégie de récolte optimale	70
4.6	Conclusion	74
	Conclusions et perspectives	75
	Bibliographie	77

Abreviations

EDO : Equation différentielle ordinaire

EDP : Equation aux dérivées partielles.

PMP : Principe du maximum de Pontryagin.

Notations

\mathbb{R} :	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}^n :	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ n fois.
\mathbb{R}^+ :	Ensemble des nombres réels positifs.
\in :	Appartient.
\subset :	Inclus.
Ω :	Ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$:	La dérivée de la variable x par rapport au temps t .
Tr :	La trace d'une matrice.
Det :	Le déterminant d'une matrice.
$C^1(I, \mathbb{R})$	espace des fonction continues, dérivable de I dans \mathbb{R}
\max :	Maximum.
∂ :	la dérivée partielle.
\limsup :	limite supérieure
\liminf :	limite inférieure
\lim :	limite.

Liste des figures

1.1	Les évolutions possibles d'un modèle de Malthus pour différentes valeurs de r	8
1.2	Représentation des solutions de l'équation de Verhulst.	9
1.3	Représentation des solutions de l'équation avec Effet Allee pour les paramètres : $r=0.5$; $M=5$; $K=10$	10
1.4	Chronique d'une population exploitée avec quota constant : $r=0.5$; $K=10$; $H=1$	11
1.5	Population exploitée avec effort de pêche constant, avec : $r=1.5$; $K=25$	13
1.6	Trajectoires des solutions pour les paramètres : $r=1.5$; $a=0.5$; $e=1$; $m=2$	15
1.7	Cycle limite autour du point d'équilibre intérieur pour le système classique de Lotka-Volterra.	16
1.8	Les trois types des fonctions réponses selon Holling.	17
3.1	La population des proies et des prédateurs convergent vers leurs valeurs d'équilibre.	47
3.2	Portrait de phase correspondant à différentes conditions initiales.	49

3.3	Diagramme de phase montrant l'équilibre bionomique.	52
4.1	La population des proies et des prédateurs convergent vers leurs valeurs d'équilibre. $a = 7 ; b = 10 ; c = 7.5 ; d = 12 ; K = 50 ; D = 70 ; q_1 = 1.3 ; q_2 = 0.37 ; E_1 = 0.15 ; E_2 = 1.25$.	65
4.2	Portrait de phase correspondant à différentes conditions initiales.	67

Introduction Générale

La modélisation mathématique est nécessaire dans de nombreuses disciplines telles que l'écologie, la dynamique des populations, l'épidémiologie etc., et cela en traduisant les phénomènes biologiques par un système dynamique. Ce dernier, constitue un ensemble de modèles mathématiques formels définis sous forme de systèmes d'équations, permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interaction, en se basant sur le caractère interprétatif et le pouvoir prédictif. Certains modèles ignorent quelques hypothèses importantes, comme la variation des individus, l'environnement et même parfois négligent les interactions entre les espèces pour ne capturer que les généralités des systèmes. Ces modèles en questions offrent beaucoup de souplesse mais ne sont souvent pas réalistes. Dès lors, le défi majeur dans la modélisation est le choix des paramètres clés, au sens où ces paramètres sont des variables pouvant conduire le système d'un niveau d'organisation à un autre. Il existe deux types des systèmes dynamiques : le premier est les systèmes dynamiques continus dont l'évolution est défini par des équations différentielles ordinaires (EDO) ou des équations aux dérivées partielles (EDP) et l'autre est appelé systèmes dynamiques discrets qui sont définis par des équations aux différences. Dans cette thèse,

nous nous intéressons à l'étude et l'analyse mathématique et numérique d'un modèle en écologie (proie-prédateur) basé sur des équations différentielles ordinaires non linéaires et sur la théorie du contrôle.

On utilise le langage mathématique pour définir précisément le concept d'un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande qui est un système de contrôle. La théorie de contrôle permet de ramener un système d'un état initial à un certain état final en respectant certaines critiques. Il existe plusieurs méthodes de résolution parmi lesquels *le Principe du Maximum de Pontryagin*, qui est un point clef de la théorie du contrôle optimal, formulé par L.S.Pontryagin en 1956, permettant de donner une condition nécessaire d'optimalité [45].

Notre manuscrit est constitué d'une introduction générale, de quatre chapitres et d'une conclusion.

Le premier chapitre de cette thèse, "*Modèles de base en dynamique de populations*" présente les modèles classiques tout en donnant un historique, où nous rappelons quelques modèles en dynamiques de population. Parmi lesquels, on cite les modèles de dynamique d'une seule population tel que le modèle de Malthus et Verhulst, et les modèles avec deux populations (modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra), sur lesquels on s'est basé pour la construction de notre modèle. Le deuxième chapitre est une présentation de quelques outils mathématiques fondamentaux qui seront utilisés dans la suite de ce travail, intitulé : "*Préliminaires*". Après un petit aperçu sur les systèmes dynamiques, nous énonçons le Principe du Maximum de Pontryagin. Le troisième chapitre intitulé : "*Récolte optimale et stabilité pour un*

modèle proie-prédateur”, nous étudions le comportement asymptotique d’un modèle proie-prédateur avec une nouvelle fonction réponse, en supposant que seules les proies sont soumises à la pêche. Le modèle étudié est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\min\left(\frac{bx(t)}{y(t)+D}, \gamma\right)y(t) + ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - qEx, \\ \frac{dy}{dt} = -dy(t) + e\min\left(\frac{bx(t)}{y(t)+D}, \gamma\right)y(t), \end{cases}$$

où E est l’effort de pêche et q le coefficient de capturabilité.

En posant des conditions sur les paramètres, on aboutit au modèle simplifié. Pour ce modèle, on étudie la permanence et la stabilité (locale et globale) des points d’équilibre. Puis l’existence de l’équilibre bio-économique et aussi la stratégie de récolte optimale en utilisant le PMP. Ce Chapitre fait l’objet de l’article [9] :

K. Belkhdja, A. Moussaoui, M.A. Aziz Alaoui

” *Optimal harvesting and stability for a prey-predator model*”

Nonlinear Analysis : Real World Applications 39 (2018) 321-336.

Dans le dernier chapitre on reprend le modèle du chapitre 2, en introduisant la pêche sur les deux espèces avec deux efforts de pêche différents. On étudie les points d’équilibre et leurs stabilités locales et globales et puis l’équilibre bionomique et la stratégie de récolte optimale. Ce travail fait l’objet du proceeding [8].

K. Belkhdja, A. Moussaoui

” *Global dynamics of a predator-prey system and its applications to biological control.* ”

Proceedings of ICCSA 2014. Normandie University, Le Havre, France-June

(2014) 23-26.

Pour illustrer tous les résultats obtenus dans chaque chapitre, nous proposons des simulations numériques avec des valeurs attribuées aux paramètres biologiques. Une conclusion générale est donnée à la fin de cette thèse.

Chapitre 1

Modèles de base en dynamique de populations

Sommaire

1.1	Modèles avec une seule population	6
1.1.1	Modèle de Malthus	6
1.1.2	Modèle de Verhulst (modèle logistique)	8
1.1.3	Croissance bistable ou modèle avec "Effet Allee" .	10
1.1.4	Modèle bioéconomique	11
1.2	Modèles avec deux populations	13
1.2.1	Quelques modèles proie-prédateur	14

La dynamique des populations est le domaine de la science qui tente d'expliquer de façon simple les variations temporelles de la taille et de la composition des populations biologiques, telles que celles des humains, des animaux, des plantes ou des microorganismes.

D'un point de vue historique, les premiers modèles appliqués à la dynamique de populations étaient basés sur les systèmes dynamiques, pour cela on va commencer par une étude des modèles classiques puisqu'ils constituent le premier pas vers des systèmes plus élaborés.

1.1 Modèles avec une seule population

Pour le cas d'une population $N(t)$ supposée isolée (pas de migration), la façon la plus simple de décrire l'évolution au cours du temps de cette population est par les naissances et les décès, qui la font augmenter ou diminuer, tel que

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \text{naissances} - \text{décès}, \\ &= \text{croissance},\end{aligned}$$

où la croissance est soit linéaire ou non linéaire. Ainsi, nous nous intéressons aux principaux modèles classiques de croissance.

1.1.1 Modèle de Malthus

L'idée du modèle de Thomas Malthus [34], est que : si elle n'est pas freinée, une population croît « géométriquement ». Plus généralement, l'étude du modèle de Malthus, sert à décrire l'évolution d'une certaine quantité au cours

du temps en s'appuyant sur l'hypothèse suivante : la variation (ou l'accroissement) de cette quantité est proportionnelle à elle-même et ce coefficient de proportionnalité est constant au cours du temps. Ainsi, Malthus avait pour but de déterminer l'accroissement naturel de la population lorsque les ressources sont illimitées. Ceci se traduit par le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN(t), \\ N(0) = N_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

r est appelé *le taux de croissance*, et N_0 est la densité initiale de la population qui doit être positive pour conserver la positivité du système au cours du temps. Cette équation admet comme solution

$$N(t) = N_0 e^{rt}.$$

Par conséquent, on a les comportements asymptotiques suivants :

- Si $r > 0$, la population croît exponentiellement vers une densité infinie, c'est-à-dire $N(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$.
- Si $r < 0$, la population décroît exponentiellement vers une densité nulle, c'est-à-dire $N(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.
- Si $r = 0$, la population reste à densité constante, avec $N(t) = N_0$, $\forall t \geq 0$.

La figure suivante résume les résultats ci-dessus.

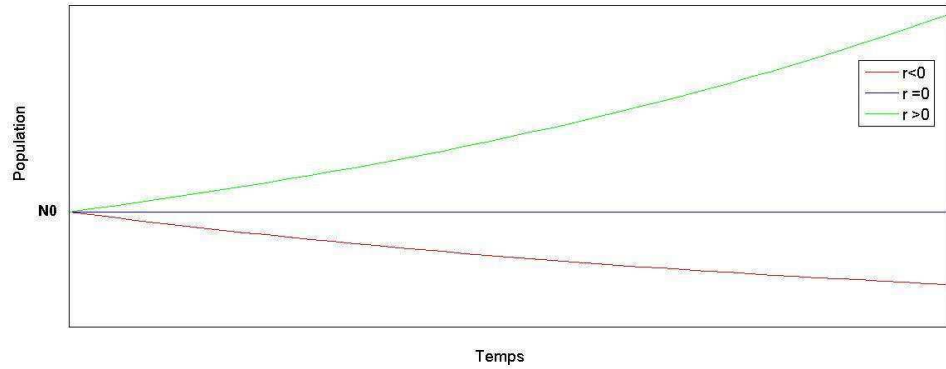


FIGURE 1.1 – Les évolutions possibles d'un modèle de Malthus pour différentes valeurs de r .

Cette approche, affirmée par Malthus, est irréaliste globalement parlant, au moins à long terme. Nous devons donc introduire un terme correctif qui permet aux membres d'une population isolée de converger vers un nombre constant. C'est ce que propose le modèle logistique qui sera étudié après.

1.1.2 Modèle de Verhulst (modèle logistique)

Le modèle de Verhulst, dit aussi modèle logistique, est un modèle alternatif à celui de Malthus proposé par le mathématicien Belge François Verhulst [51], où il a pris en considération la capacité limite du milieu qui n'a pas été étudiée avant. Dans ce modèle, la croissance n'est plus constante et dépend linéairement de la population N . Il s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \\ N(0) = N_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

où a le taux de croissance intrinsèque et K la capacité limite du milieu. Ce modèle prévoit que la population augmente et converge vers sa capacité limite K . Plus précisément, la solution du système (1.2) est donnée par

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0 (e^{rt} - 1)}.$$

Si les ressources sont infinies, c'est-à-dire, lorsque $K \rightarrow +\infty$, on retrouve le modèle de Malthus.

Le système (1.2) admet deux points d'équilibre : l'origine qui est instable et K qui est stable, ce qui est bien expliqué dans la figure 1.2.

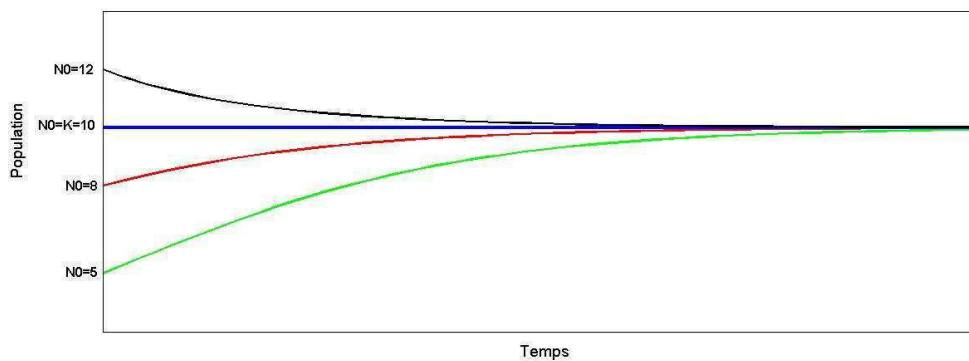


FIGURE 1.2 – Représentation des solutions de l'équation de Verhulst.

Remarque 1 Dans ce modèle, il n'y a aucun risque d'extinction même à très bas niveau de population.

1.1.3 Croissance bistable ou modèle avec "Effet Allee"

La modélisation d'un modèle avec Effet Allee [5] est donnée par le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN(K - N)(N - M), \\ N(t_0) = N_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

où $0 < M < K$.

L'écologiste Allee a inclus dans son modèle le risque de l'extinction de la population lorsque les individus ont des difficultés à trouver un partenaire pour la reproduction, et cela quand les individus d'une espèce sont en trop petit nombre.

Les points d'équilibre associés à l'équation ci-dessus sont l'origine qui est stable, M instable et K qui est stable, d'où l'appellation "Modèle de croissance bistable". Le paramètre M est appelé « seuil de l'effet Allee », en dessous duquel la population va à l'extinction et au dessus de ce seuil la population converge vers la capacité limite K (voir figure 1.3).

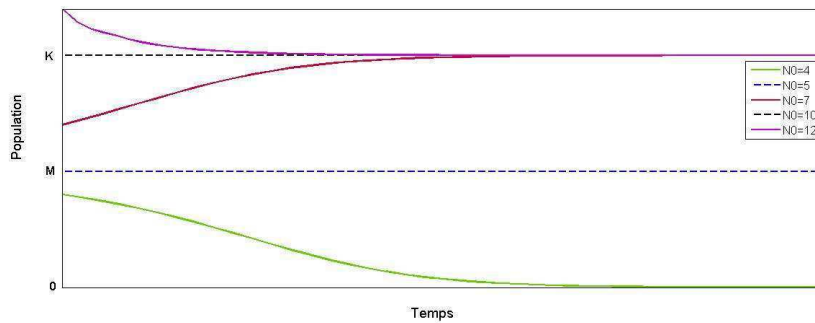


FIGURE 1.3 – Représentation des solutions de l'équation avec Effet Allee pour les paramètres : $r=0.5$; $M=5$; $K=10$.

1.1.4 Modèle bioéconomique

En reprenant l'équation logistique et en lui ajoutant un terme négatif qui représente biologiquement la mortalité par l'exploitation (la pêche dans notre cas), on obtient la forme générale d'un modèle de base pour la gestion de ressources halieutiques donnée par

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - h(t). \quad (1.4)$$

La récolte peut prendre deux formes soit constante ou dépendante de la taille de la population.

1^{er} cas : $h(t)=H=\text{constante}$. Dans ce cas le nombre autorisé de captures est fixé, et donc la mortalité par exploitation sera constante et le modèle (1.4) devient

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - H, \quad (1.5)$$

où $H > 0$ est le *quota* par unité de temps.

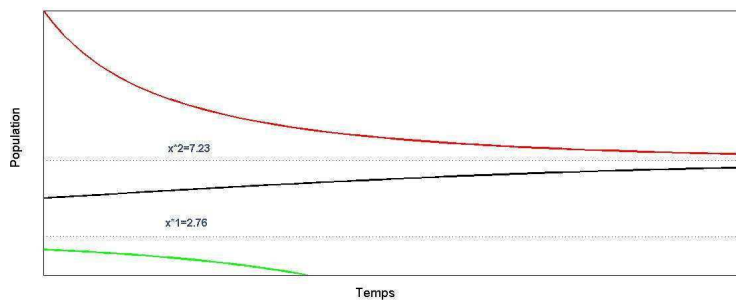


FIGURE 1.4 – Chronique d'une population exploitée avec quota constant : $r=0.5$; $K=10$; $H=1$.

En résolvant l'équation $\frac{dN}{dt} = 0$, ce qui revient à résoudre

$$\frac{r}{K}N^2 - rN - H = 0.$$

On peut observer deux situations :

- ★ si $H > \frac{rK}{4}$, alors $\frac{dN}{dt} < 0$, ce qui entraîne l'extinction de la population.
- ★ Sinon, si $H < \frac{rK}{4}$, alors on a l'existence de deux points d'équilibre $x_1^* < x_2^*$ dont le premier est instable et l'autre est stable, ce qui est illustré dans la figure 1.4.

2^{ème} cas : $h(t) = EN$, dans ce cas la mortalité par exploitation est proportionnelle à la population, ce qui conduit à l'équation

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN, \quad (1.6)$$

où EN représente le rendement de l'exploitation par unité de temps et E l'effort de pêche utilisé par unité de temps.

En résolvant l'équation (1.6) avec $\frac{dN}{dt} = 0$, on obtient les deux cas suivants :

- Si $E < r$: on a l'existence de deux points d'équilibre $N_0 = 0$ qui est instable et l'équilibre intérieur $N^* = K\left(1 - \frac{E}{r}\right)$ qui est stable.
- si $E > r$: on a un seul point d'équilibre $N_0 = 0$ qui est stable dans ce cas.

En faisant varier l'effort de pêche E , on obtient la figure 1.5.

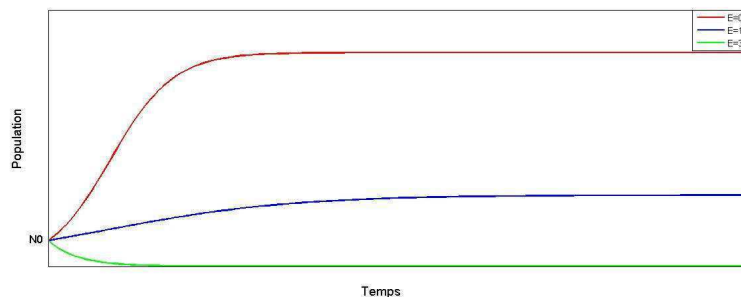


FIGURE 1.5 – Population exploitée avec effort de pêche constant, avec : $r=1.5$; $K=25$.

1.2 Modèles avec deux populations

Dans un écosystème, on peut avoir l'existence de deux (ou plusieurs) populations qui interagissent entre eux de différentes manières. Parmi ces interactions :

- ◇ **La prédation** : une population peut être la proie d'une autre population qui est le prédateur. Dans ce cas, on est devant un modèle dit : *Proie-prédateur*.
- ◇ **La compétition** : certaines populations peuvent être en compétition avec d'autres, car elles ont des ressources communes et cela agit de façon négative sur les deux populations ;
- ◇ **Le mutualisme** : il se peut que certaines populations coopèrent ; c'est une interaction à bénéfices réciproques.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques modèles de prédation qui nous serviront pour comprendre le modèle que nous proposons dans le chapitre 3.

1.2.1 Quelques modèles proie-prédateur

La relation dynamique entre les prédateurs et leurs proies est devenu l'un des thèmes dominants de l'écologie mathématique en raison de son importance. C'est un couple d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre, qui sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques où le prédateur et la proie sont en interaction.

Considérons deux populations mesurées par $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \geq 0$, où la première représente la densité de la population des proies et la seconde celle des prédateurs. Un modèle proie-prédateur s'écrit en général sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) - h(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = -g(y) + eh(x, y). \end{cases} \quad (1.7)$$

Où $f(x)$ est la fonction de croissance des proies, $g(y)$ est la mortalité des prédateurs et e est le taux de conversion de la biomasse des proies en biomasse des prédateurs.

La fonction $h(x, y)$ représente la *fonction réponse* qui est la quantité des proies consommées par un prédateur par unité de temps.

- **Modèle classique de Lotka-Volterra**

Le premier modèle classique de prédation a été proposé indépendamment par le biologiste américain *Alfred J. Lotka* en 1925 et par le mathématicien italien *Vito Volterra* en 1926. Volterra proposa ces équations afin de modéliser l'évolution des sardines et des requins dans la mer Adria-

tique [53] . Ce modèle s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - axy, \\ \frac{dy}{dt} = -my + eaxy. \end{cases} \quad (1.8)$$

Dans ce cas, les proies en l'absence des prédateurs croient exponentiellement, avec $f(x) = rx$ et en l'absence des proies, la population des prédateurs disparaît à une vitesse proportionnelle à leur densité avec $g(y) = my$ où m est le taux de mortalité des prédateurs. De plus, la fonction réponse est $h(x, y) = axy$.

En résolvant le système (1.8), avec $\frac{dx}{dt} = 0$ et $\frac{dy}{dt} = 0$, on obtient deux points d'équilibre l'origine $x_1 = (0, 0)$ et le point d'équilibre intérieur $x^* = \left(\frac{m}{ea}, \frac{r}{a}\right)$. La linéarisation donne l'instabilité de l'origine, et pour l'équilibre intérieur, on trouve l'existence des solutions périodiques stables autour de ce point. Pour plus de détails, voir par exemple [2, 5, 41].

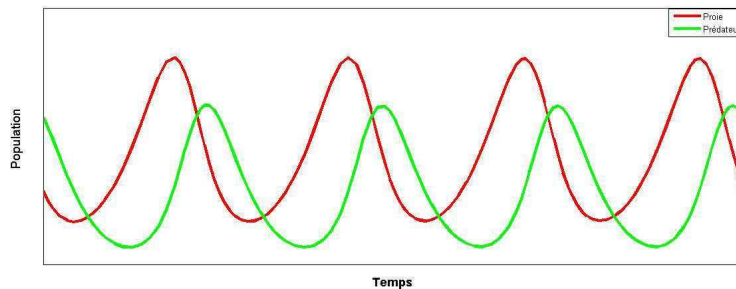


FIGURE 1.6 – Trajectoires des solutions pour les paramètres : $r=1.5$; $a=0.5$; $e=1$; $m=2$.

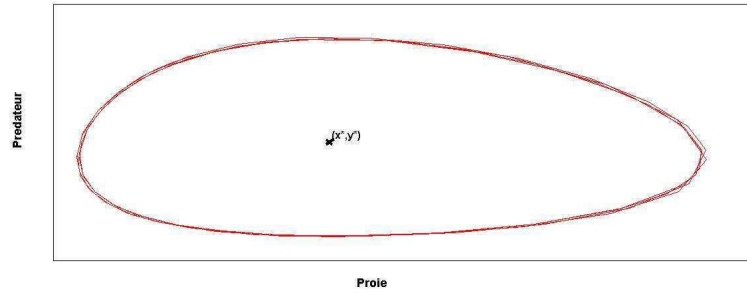


FIGURE 1.7 – Cycle limite autour du point d'équilibre intérieur pour le système classique de Lotka-Volterra.

- **Modèle proie-prédateur avec fonction réponse de Holling**

Dans la littérature, il existe trois différents types de fonction réponse de Holling. Le premier est celui de Lotka-Volterra, lorsque le nombre de proies consommées est proportionnel à leurs densité, connue aussi sous le nom de fonction de Holling type I (Figure 1.8 A), telle que

$$h(x, y) = axy.$$

Ensuite, Holling a présenté la fonction réponse la plus observée dans la nature dite fonction réponse de Holling type II. Cette dernière est caractérisée par un taux de consommation des proies décroissant de façon régulière en fonction de la densité des proies (Figure 1.8 B). Elle prend la forme

$$h(x, y) = \frac{axy}{x + D}.$$

Le troisième type est basée sur le fait que le prédateur augmente son activité de recherche lorsque la densité des proies augmente, et la chance pour un prédateur de trouver une proie est faible (Figure 1.8

C) et peut être représentée par

$$h(x, y) = \frac{ax^2y}{x^2 + D}.$$

Cette dernière est appelée fonction réponse de Holling type *III*.

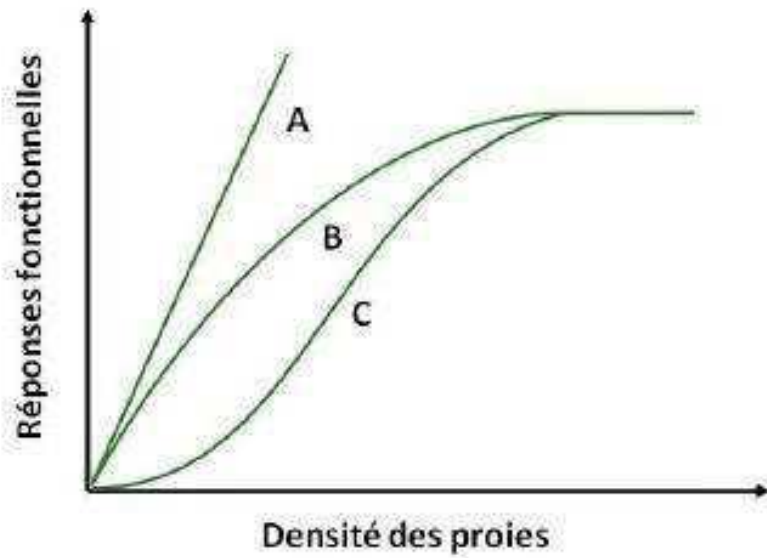


FIGURE 1.8 – Les trois types des fonctions réponses selon Holling.

Chapitre 2

Préliminaires

Sommaire

2.1	Équation différentielle	20
2.2	Notions de stabilité dans \mathbb{R}^2	23
2.3	Existence des orbites périodiques.	26
2.4	Contrôle optimal	28
2.5	Principe du maximum de Pontryagin	29

Ce chapitre est consacré à introduire les notions de base nécessaires utilisées pour la réalisation des travaux introduits dans cette thèse. Pour cela, nous allons rappeler dans ce qui suit quelques définitions, lemmes et théorèmes nécessaires. Ensuite, une brève introduction sur le contrôle optimal est donné en citant le principe du maximum de Pontryagin (Pour plus de détails voir [49]).

2.1 Équation différentielle

Supposons que U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

une application continue.

Définition 1 Une équation différentielle du premier ordre est la relation entre l'inconnu (noté ici y), sa variable (noté t) et sa dérivée première, telle que

$$\dot{y} = f(t, y), \quad (t, y) \in U, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Définition 2 La solution de l'équation (2.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^n$, est une fonction dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, vérifiant

1. $(\forall t \in I), (t, y(t)) \in U$.
2. $(\forall t \in I), \dot{y} = f(t, y(t))$.

Si f ne dépend pas explicitement du temps t , on parle d'EDO autonome, sinon c'est l'EDO non-autonome.

Définition 3 (Problème de Cauchy) *Étant donné $(t_0, y_0) \in U$. Le problème de Cauchy est formulé de la manière suivante*

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Une solution $y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ du système (2.2), est dite solution du problème de Cauchy avec condition initiale (t_0, y_0) .

Dans ce qui suit, nous introduisons des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy ci-dessus.

Définition 4 (Fonction localement lipschitzienne) [3]

On dit que l'application f est localement lipschitzienne en y si pour chaque $(t_0, y_0) \in U$, il existe un voisinage $U_0 \subset U$ et une constante $K > 0$, tel que

$$(\forall (t, y_1), (t, y_2) \in U_0) \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| < \|y_1 - y_2\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme dans \mathbb{R}^n .

Lemme 1 [31] *Si $f(t, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ sont continus sur U , alors f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur U .*

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz) [52]

*Si f est localement lipschitzienne en sa deuxième variable y , alors il existe une constante $a > 0$, tel que pour tout $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy (2.2) admet une **unique solution** dans $[t_0 - a, t_0 + a]$.*

Définition 5 — *Une **trajectoire** de la solution est donnée par*

$$A = \{(t, y(t)), t \in I\}.$$

— Une **orbite** de la solution est donnée par l'ensemble suivant

$$B = \{y(t), t \in I\}.$$

— L'ensemble de toutes les orbites de l'équation différentielle est dit **portrait de phase**.

Définition 6 (Solution périodique) Soit $y(t)$ une solution de (2.1).

$y(t)$ est une solution périodique s'il existe un $T > 0$, telle que

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad y(t + T) = y(t).$$

Définition 7 Une partie A de \mathbb{R}^n est compacte, si et seulement si A est à la fois fermée et bornée.

Définition 8 (Ensemble positivement invariant) Un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est dit positivement invariant pour un problème de Cauchy, si pour n'importe quel condition initiale $y_0 \in D$, $y(t)$ reste dans D pour tout $t \geq t_0$.

Définition 9 (Solution bornée) Une solution $y(t, t_0, y_0)$ du système (2.2) est dite bornée dans \mathbb{R}^n , s'il existe une région compacte $A \subset \mathbb{R}^n$ et un temps fini T , tel que

$$y(t, t_0, y_0) \in A, \text{ pour tout } t \geq T.$$

Définition 10 (persistance) [32]

Le système (2.2) est faiblement persistant si chaque solution $y(t)$ satisfait les deux conditions :

$$(i) \quad y(t) \geq 0, \forall t \geq 0.$$

$$(ii) \limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) > 0.$$

Le système (2.2) est fortement persistant si chaque solution $y(t)$ satisfait la condition suivante avec la première condition (i) de la persistance faible :

$$(iii) \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) > 0.$$

Définition 11 (Permanence) [32]

Pour un système différentiel, une composante $X(t)$ est dite permanente, s'il existe $0 < a < b$, tel que pour toute condition initiale $X(0) > 0$, la condition suivante est vérifiée :

$$a \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} X(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} X(t) \leq b.$$

Un système est permanent si toutes ses composantes sont permanentes.

Lemme 2 (Lemme de comparaison) [12]

Si $a, b > 0$ et $\frac{dX}{dt} \leq (\geq) X(t)(a - bX(t))$ avec $X(0) > 0$, alors

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} X(t) \leq \frac{a}{b} \quad (\liminf_{t \rightarrow +\infty} X(t) \geq \frac{a}{b}).$$

2.2 Notions de stabilité dans \mathbb{R}^2

La notion de stabilité joue un rôle important dans la théorie des systèmes dynamiques. Cette section est un rappel des définitions de la stabilité locale et globale du point d'équilibre.

Considérons le système autonome suivant

$$\dot{y} = f(y), \tag{2.3}$$

où $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Pour assurer l'existence et l'unicité des solutions, on suppose que f est localement lipschitzienne sur D .

Dans la pratique, ce n'est pas toujours possible de résoudre une équation différentielle, pour cela une étude qualitative du système (2.3) peut être faite. Cette étude commence par la recherche des points d'équilibre puis de trouver ses comportements.

Définition 12 (Point d'équilibre) *On appelle point d'équilibre du système (2.3) tout point y^* vérifiant*

$$f(y^*) = 0.$$

Un point d'équilibre du système est un état stationnaire, à ce stade les questions qui se posent : que peut-il se passer au voisinage de l'équilibre? Est ce que la solution va converger (cas de stabilité) ou va s'éloigner de ce point (cas d'instabilité)?

Les réponses à ces questions se résument à l'étude de la stabilité de cet équilibre.

Dans cette thèse nous nous basons sur les systèmes d'ordre deux, pour cela considérons le système autonome suivant

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases} \quad (2.4)$$

et $X(0) = (x_0, y_0)$ est la condition initiale au temps $t = 0$.

En supposant que les fonctions f_1 et f_2 sont localement lipschitziennes, l'existence et l'unicité de la solution du système (2.4) avec $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$,

découlent du **Théorème 1**.

Soit $X^* = (x^*, y^*)$ un point d'équilibre du système (2.4).

Définition 13 (stabilité, instabilité et stabilité asymptotique) [33]

— Le point d'équilibre X^* est dit **stable**, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\xi > 0$, tel que

$$\|X(0) - X^*\| < \xi \Rightarrow (\forall t \geq 0) \|X(t) - X^*\| < \varepsilon$$

— Le point d'équilibre X^* est dit **instable**, s'il n'est pas stable.

— Le point d'équilibre X^* est dit **asymptotiquement stable**, s'il est stable et il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $X(t)$ du système (2.4), on a

$$\|X(0) - X^*\| < r \Rightarrow (\forall t \geq 0) \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X^*\| = 0.$$

La linéarisation du système différentiel (non linéaire), qui est obtenu par un développement de Taylor du premier ordre des deux fonctions f_1 et f_2 autour de l'équilibre X^* , c'est une démarche nécessaire à suivre pour déterminer la nature de ce dernier.

Définition 14 (Linéarisation) *Le linéarisé du système non linéaire (2.4) autour du point d'équilibre $X^* = (x^*, y^*)$ est défini par*

$$X' = J(x^*, y^*)X$$

ou

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Où $J(x^*, y^*)$ est appelée matrice jacobienne calculée au point d'équilibre et notée par J^* . Le déterminant et la trace associés à J^* sont notés respectivement $\det(J^*)$ et $\text{tr}(J^*)$.

Théorème 2 (stabilité) [43]

Supposons pour le système (2.4) que $\det(J^*) \neq 0$ et $\text{tr}^2(J^*) - 4 \det(J^*) \geq 0$, alors on a les résultats suivants :

1. Si $\det(J^*) < 0$ alors le point d'équilibre X^* est un point selle pour le système (2.4).
2. Si $\det(J^*) > 0$ et $\text{tr}(J^*) < 0$ alors le point d'équilibre X^* est localement asymptotiquement stable.
3. Si $\det(J^*) > 0$ et $\text{tr}(J^*) > 0$ alors le point d'équilibre X^* est instable.

Théorème 3 (Lyapunov) [31] Soit X^* un point d'équilibre pour (2.4).

Soit $U_0 \subset U$ un voisinage de X^* et $V : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , vérifiant :

- ◇ $V(X^*) = 0$
- ◇ Pour tout $X \in U_0 \setminus \{X^*\}$, $V(X) > 0$
- ◇ $V(X) \rightarrow \infty$ lorsque $\|X\| \rightarrow \infty$
- ◇ Pour tout $X \in U_0$, $\frac{dV}{dX} < 0$

Alors X^* est globalement asymptotiquement stable.

2.3 Existence des orbites périodiques.

L'oscillation est l'un des phénomènes les plus importants qui se produisent dans les systèmes dynamiques. Un système oscille lorsqu'il a une solution

périodique non triviale qui a pour image dans le portrait de phase une trajectoire fermée, que l'on appelle habituellement une orbite périodique ou une orbite fermée. Une orbite périodique isolée est appelée un **cycle limite**.

Le fait que les orbites périodiques divisent le plan en deux régions, une à l'intérieur de l'orbite et l'autre à l'extérieur, permet d'obtenir des critères de détection de la présence ou l'absence de ces orbites périodiques pour les systèmes de dimension deux. Les plus célèbres de ces critères sont le théorème de Poincaré-Bendixon et le critère de Dulac.

Théorème 4 (Poincaré-Bendixon) [16]

Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact. Supposons que pour tout $t \geq 0$ la solution $X(t, X_0)$ du système (2.4) reste dans K , alors

1. ou bien $X(t, X_0)$ est une orbite périodique de (2.4),
2. ou bien $X(t, X_0)$ converge vers une solution périodique de (2.4),
3. ou bien $X(t, X_0)$ converge vers un point d'équilibre de (2.4).

Le résultat suivant, connu sous le nom de critère de Dulac, peut être utilisé pour exclure l'existence d'orbites périodiques dans certains cas.

Lemme 3 (Critère de Dulac) [52]

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine connexe. on suppose que (f_1, f_2) est continue et différentiable dans D .

Si la divergence $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)$ n'est pas identiquement nulle et de signe constant sur D , alors le système (2.4) n'admet pas de solution périodique.

2.4 Contrôle optimal

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé le "contrôle". Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres habituellement soumis à des contraintes. Le problème de contrôle optimal est de vouloir conduire un système dynamique contrôlé d'une configuration donnée à une configuration souhaitée, tout en minimisant ou maximisant un certain coût et en respectant certaines contraintes. Ce problème est modélisé par divers outils mathématiques : équations différentielles, équations intégrales, etc.

Définition 15 *Un système de contrôle à n équations différentielles du premier ordre est la donnée d'un espace d'état X , un espace de contrôle U et d'une loi d'évolution du type*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), E), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

où f est un vecteur de n composantes, il peut être linéaire ou non linéaire. $x(t) \in X$ est l'état du système à l'instant $t \in [0, T]$ et $u(t) \in U$ le contrôle choisi.

Définition 16 *On appelle U_{ad} l'ensemble des valeurs admissibles pour le contrôle $E(t)$ avec $E(t) \in U_{ad}$ tel que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T]$. Ces contrôles sont à valeurs dans un ensemble $U_{ad} \subset \mathbb{R}^m$ où m désigne le nombre de composantes du contrôle E .*

Déterminer un contrôle optimal E^* , permet de manipuler le système (2.5)

selon sa dynamique tout en maximisant la fonctionnelle J définie par

$$J(t, E) = \int_0^T G(t, x(t), E(t)) dt$$

avec $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et T peut être fixé ou non. Mathématiquement, le problème de contrôle optimal se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \max_{U_{ad}} J(t, E) \\ \text{sous la contrainte : } \dot{x}(t) = f(t, x(t), E(t)). \end{cases} \quad (2.6)$$

2.5 Principe du maximum de Pontryagin

Parmi les méthodes utilisées pour résoudre les problèmes de contrôle optimal, le Principe du maximum de Pontryagin (*PMP*).

Introduisons d'abord quelques définitions et propriétés essentielles.

Définition 17 (Contrôlabilité) *Un système est dit **contrôlable** en temps T , si pour tout couple d'état initiale x_0 et d'état final x_1 , il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que la solution correspondante vérifie $x(T) = x_1$.*

Définition 18 (Hamiltonien) *Considérons le système suivant*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), E(t)) \quad (2.7)$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 dans \mathbb{R}^n . Alors le Hamiltonien $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$H(t, x(t), \lambda(t), E(t)) = G(t, x(t), E(t)) + \lambda^T f(t, x(t), E(t)).$$

Théorème 5 (Principe du maximum de Pontryagin (PMP)) [49]

Si $E^*(t)$ est un contrôle optimal pour le problème (2.6), et $x^*(t)$ sa réponse, alors il existe une fonction $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint tel que pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x^*(t), \lambda(t), E^*(t)) \quad (2.8)$$

et les équations adjointes données par

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^*}(t, x^*(t), \lambda(t), E^*(t)). \quad (2.9)$$

Ainsi on a la **condition de maximisation** pour tout $t \in [0, T]$,

$$H(t, x^*(t), \lambda(t), E^*(t)) = \max_{E(t) \in U_{ad}} H(t, x^*(t), \lambda(t), E(t)).$$

De plus, si le système considéré est autonome c'est-à-dire f ne dépend pas du temps, alors l'application $H : t \rightarrow H(x^*(t), \lambda(t), E^*(t))$, pour $t \in [0, T]$, est constante.

Remarque. En l'absence de contraintes sur le contrôle, la condition de maximisation devient

$$\frac{\partial H}{\partial E} = 0.$$

Chapitre 3

Récolte optimale et stabilité d'un modèle proie-prédateur

Ce Chapitre fait l'objet de l'article [9] :

K. Belkhodja, A. Moussaoui, M.A. Aziz Alaoui

" Optimal harvesting and stability for a prey-predator model"

Nonlinear Analysis : Real World Applications 39 (2018) 321-336

Sommaire

3.1	Introduction.	33
3.2	Analyse mathématique et résultats principaux.	36
3.2.1	Positivité et bornitude des solutions	37
3.2.2	Persistence et permanence	39
3.3	Existence et stabilité des états d'équilibre.	44
3.3.1	Analyse de la stabilité des points d'équilibre	45

3.3.2	Stabilité globale du point d'équilibre intérieur . . .	47
3.4	Équilibre bionomique	50
3.5	Stratégie de récolte optimale.	53
3.6	Conclusion.	57

3.1 Introduction.

La dynamique proie-prédateur est habituellement représentée par une fonction réponse, qui est la quantité de proies consommées par un prédateur et par unité de temps. Typiquement, un modèle proie-prédateur se concentre sur les interactions entre deux espèces en tenant compte de certains aspects considérés comme nodaux pour expliquer la dynamique. Ces interactions dépendent de la nature de l'espèce étudiée [6, 41]. Récemment, dans [14], les auteurs ont proposé une nouvelle fonction réponse afin d'expliquer l'influence de l'évolution des fluctuations du niveau d'eau dans un lac artificiel sur la dynamique proie-prédateur des poissons. Dans le lac étudié, deux espèces interdépendantes sont considérées ; le brochet (Pike en anglais) qui est le prédateur le plus important et le gardon (Roach en anglais) qui est la proie. Cette fonction réponse est basée sur les considérations générales suivantes. Quand un prédateur attaque une proie, il a accès à une certaine quantité de nourriture en fonction du niveau d'eau. En automne, lorsque le niveau d'eau est bas, le prédateur est plus en contact avec la proie, et la prédation augmente. Inversement, au printemps, lorsque le niveau d'eau est élevé, il est plus difficile pour le prédateur de trouver une proie et la prédation diminue. On suppose que la fonction d'accessibilité pour la proie $b(t)$ est continue et 1-périodique, la valeur minimale b_1 est atteinte au printemps et la valeur maximale b_2 est atteinte durant l'automne. Le prédateur a besoin d'une quantité γ pour sa nourriture, mais il a accès à une quantité

$$\frac{b(t)x}{y + D}$$

qui dépend du niveau d'eau, où D mesure d'autres causes de mortalité en dehors de la prédation. Ainsi, si

$$\frac{b(t)x}{y+D} \geq \gamma$$

alors le prédateur sera satisfait de la quantité γ pour sa nourriture. Sinon, si

$$\frac{bxy}{y+D} \leq \gamma,$$

le prédateur se contentera de

$$\frac{b(t)x}{y+D}.$$

En résumé, la quantité de nourriture reçue par prédateur et par unité de temps est

$$\min\left(\frac{b(t)x}{y+D}, \gamma\right). \quad (3.1)$$

Les auteurs de [14] ont étudié le modèle proie-prédateur non autonome suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \min\left(\frac{b(t)x(t)}{y(t)+D}, \gamma\right)y(t), \\ \frac{dy}{dt} = -dy(t) + e \min\left(\frac{b(t)x(t)}{y(t)+D}, \gamma\right)y(t). \end{cases} \quad (3.2)$$

Les constantes mentionnées ci-dessus sont toutes positives. Les proies croient de façon logistique avec la capacité limite K et le taux de croissance intrinsèque a . En utilisant le théorème de continuité de Gaines et Mawhin de la théorie du degré de coïncidence [36], les auteurs ont établi des conditions suffisantes pour l'existence de solutions périodiques positives du système proie-prédateur (3.2). Une telle solution décrit une situation d'équilibre compatible avec la variabilité des conditions environnementales, de façon que les

deux populations survivent. Les trajectoires dans le plan de phase de ces solutions du système non-autonome prennent la place des points d'équilibre du système autonome. Dans les simulations numériques données dans [14], la fonction de taux de prédation périodique $b(t) = b(1 + 0,5 \cos(2\pi t))$ est utilisée, pour plus de détails, voir [14, 39, 38].

Dans le présent travail, nous nous concentrons sur le cas autonome et nous utilisons comme taux de prédation, la moyenne $b = \int_0^t b(s)ds$. De plus, pour étudier l'effet de la récolte sur l'écosystème proie-prédateur, nous incorporons et étendons le travail effectué par [14]. Notre but est d'obtenir des résultats théoriquement bénéfiques pour le développement durable du système proie-prédateur et de maintenir l'intérêt économique de la récolte à un niveau idéal. Par conséquent, nous étudions le modèle proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\min\left(\frac{bx(t)}{y(t)+D}, \gamma\right)y(t) + ax(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - qEx(t) = F_1(x, y), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -dy(t) + e \min\left(\frac{bx(t)}{y(t)+D}, \gamma\right)y(t) = F_2(x, y). \end{cases} \quad (3.3)$$

où q est le coefficient de capturabilité de la proie, en d'autres termes c'est la probabilité qu'une proie est capturée par unité de temps et E désigne l'effort consacré à la pêche.

Le présent chapitre est organisé comme suit : dans la section 3.2, nous nous concentrons sur la dynamique du système (3.3), en particulier, nous établissons des critères suffisants pour la bornitude, la permanence et l'extinction des prédateurs. La stabilité locale et globale du système est étudiée dans la section 3.3. Dans la section 3.4, nous étudions l'existence d'un équilibre bio-

nomique. La stratégie de récolte optimale est étudiée à l'aide du principe de maximum de Pontryagin dans la section 3.5. Quelques exemples numériques sont utilisés pour illustrer les résultats. Des brèves remarques finales sont données à la section 3.6 pour conclure ce chapitre.

3.2 Analyse mathématique et résultats principaux.

Dans cette section, nous donnons une analyse qualitative du système (3.3). Du point de vue biologique, nous nous intéressons à la dynamique du modèle (3.3) dans le premier quadrant \mathbb{R}_2^+ . Ainsi, nous considérons la condition initiale biologiquement significative $x(0) = x_0 \geq 0$ et $y(0) = y_0 \geq 0$. Tout d'abord, nous observons que, si " $E > \frac{a}{q}$ " alors $\dot{x} < 0$, donc, tout au long de notre analyse, nous faisons l'hypothèse suivante sur l'effort de pêche

$$E < \frac{a}{q}, \quad (H_0)$$

Nous supposons également, tout au long de ce chapitre, que le taux de prédation b satisfait

$$b < \min \left(\frac{\gamma(y_0 + D)}{x_0}, \frac{4a\gamma dD}{K(a + d - qE)^2} \right) := \tilde{b}. \quad (H_1)$$

Biologiquement, l'hypothèse (H_0) signifie que si l'effort de pêche augmente au-delà d'une valeur seuil (c'est-à-dire si $E > \frac{a}{q}$), alors les deux espèces disparaissent complètement.

L'hypothèse (H_1) sera utilisée au paragraphe 2.1 pour prouver la persistance

du système (3.3), et ça signifie que si le taux de prédation est inférieur à une valeur seuil \tilde{b} , toutes les espèces sont présentes et aucune d'entre eux n'ira à l'extinction.

Dans la suite, nous commençons par montrer que les solutions de (3.3) commençant de \mathbb{R}_2^+ , existent, restent dans \mathbb{R}_2^+ et sont uniformément bornées.

3.2.1 Positivité et bornitude des solutions

Tout d'abord, nous énonçons le lemme suivant

Lemme 4 *Soit $h : (x, y) \rightarrow \min((g(x, y), \gamma)$. Si g est localement lipschitzienne, alors la fonction h l'est aussi.*

Preuve. Il est facile de voir que

$$h(G, B) = \min(g(x, y), \gamma) = \frac{g(x, y) + \gamma - |g(x, y) - \gamma|}{2}.$$

La forme de h par rapport à g montre évidemment que si g est localement Lipschitzienne, alors h est localement Lipschitzienne. Ainsi, l'existence locale et l'unicité des solutions du système (3.3) sont obtenues pour le problème de Cauchy correspondant [23]. En ce qui concerne la positivité et la bornitude de la solution pour le système (3.3), nous avons le lemme suivant :

Lemme 5 1. *Le quadrant positif \mathbb{R}_2^+ est positivement invariant pour le système (3.3).*

2. *Toutes les solutions du système (3.3) qui commencent de \mathbb{R}_2^+ sont bornées.*

Preuve. Soit $[0, T_{max})$ l'intervalle maximal d'existence des solutions du système (3.3).

1. Du système (3.3), on déduit que $x = 0$ (respectivement $y = 0$) est un sous-ensemble invariant, c'est-à-dire $x = 0$ (respectivement $y = 0$) si et seulement si $x(t) = 0$ (respectivement $y(t) = 0$) pour un certain t . Ainsi, si $x(0) > 0$ (respectivement $y(0) > 0$), alors $x(t) > 0$ (respectivement $y(t) > 0$) pour tout $t \in [0, T_{max})$.
2. Considérons $w(t) = ex(t) + y(t)$. La dérivée par rapport au temps tout au long des solutions, est donnée par

$$\frac{dw}{dt} = e \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = eax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - eqEx - dy.$$

Alors

$$\frac{dw}{dt} + dw = ex \left[(a - qE + d) - \frac{a}{K}x \right] \leq \frac{eK}{4a} (a - qE + d)^2 := \mu$$

où μ est le maximum de la fonction $ex \left[(a - qE + d) - \frac{a}{K}x \right]$. En appliquant un théorème sur l'inégalité différentielle [23], on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq w(x, y) &\leq e^{-dt} w(0) + \frac{\mu}{d} \left(1 - \frac{\mu}{d}\right) \\ &\leq \max \left(w(0), \frac{\mu}{d} \right). \end{aligned}$$

Ce qui implique les solutions sont bornées, pour $T_{max} = +\infty$, . Par conséquent, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \leq \frac{\mu}{d}$, qui est indépendante de la condition initiale.

Donc, toutes les solutions du système (3.3) qui commencent de \mathbb{R}_2^+ entrent dans la région

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : 0 \leq w = ex + y \leq \frac{\mu}{d} + \varepsilon \right\},$$

pour tous $\varepsilon > 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

■

3.2.2 Persistance et permanence

Dans cette sous-section, nous analysons la Persistance (faible et forte) et le comportement de permanence du système (3.3). Géométriquement, la persistance signifie que les trajectoires qui commencent d'un cône positif sont finalement éventuellement bornées par des plans de coordonnées. D'autre part, la coexistence permanente (persistance uniforme) implique l'existence d'une région dans l'espace des phases à une distance non nulle de la limite dans laquelle les vecteurs de population doivent se situer en fin de compte, ce qui assure la survie des espèces au sens biologique.

Dans la suite, Notons par

$$m_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{K}{a} (a - qE - b),$$

$$m_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{ebm_1}{d} - D,$$

$$M_1 \stackrel{\text{déf}}{=} K,$$

$$M_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{ebK}{d} - D.$$

On remarque que $M_i > m_i, i = 1, 2$. On va montrer que $\max_{i=1,2}\{m_i, 0\}$ sont les limites inférieures des espèces, lorsque t tend vers l'infini. Ce qui est évident dans le cas où $m_i \leq 0$. Supposons maintenant que

$$m_i > 0, \quad i = 1, 2. \tag{H_2}$$

Notre résultat principal est indiqué dans la proposition suivante.

Proposition 1 *En plus de (H_0) , (H_1) , supposons que (H_2) est satisfaite. Alors le système (3.3) est permanent, c'est-à-dire, toute solution positive $(x(t), y(t))$ du système (3.3) satisfait*

$$0 < m_1 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M_1,$$

$$0 < m_2 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M_2.$$

Preuve. Comme les variables x, y sont positives, à partir de la première équation du système (3.3), il en résulte que

$$\frac{dx}{dt} \leq ax \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

et en utilisant **Lemme 2**, on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M_1. \tag{3.4}$$

Donc pour un arbitraire $\varepsilon_1 > 0$, il existe un nombre réel positif T_1 telle que

$$x(t) \leq K + \varepsilon_1, \forall t > T_1.$$

En outre, de l'équation du prédateur, on a pour $t > T_1$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &\leq y \left(-d + \frac{eb(M_1 + \varepsilon_1)}{y + D}\right), \\ &= \frac{y}{y + D} (eb(M_1 + \varepsilon_1) - dy - dD), \\ &\leq \frac{1}{D} y (eb(M_1 + \varepsilon_1) - dy - dD). \end{aligned}$$

Donc, en utilisant **Lemme 2** et le fait que ε_1 est arbitraire, on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M_2. \tag{3.5}$$

Par conséquent, pour un arbitraire $\varepsilon_2 > 0$, il existe un nombre réel positif $T_2 > T_1$ telle que

$$y(t) \leq M_2 + \varepsilon_2, \forall t > T_2.$$

On conclut que le système (3.3) est dissipatif.

■

Avant de produire la forte persistance du système (3.3), nous donnons le résultat suivant.

Proposition 2 *Sous l'hypothèse (H₁), on a $\forall t \geq 0$*

$$bx(t) < \gamma(y(t) + D).$$

Preuve. Soit

$$u(t) = bx(t) - \gamma(y(t) + D),$$

Notons que $u(0) < 0$ par la condition (H₁). Il est affirmé que $u(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$. Si ce n'est pas le cas, il existe $t_0 > 0$ telle que :

$$u(t_0) = 0 \text{ et } \frac{du}{dt}(t_0) \geq 0,$$

La condition $u(t_0) = 0$ implique que

$$y(t_0) = \frac{bx(t_0)}{\gamma} - D.$$

D'après (3.3), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t_0) &= b \frac{dx}{dt}(t_0) - \gamma \frac{dy}{dt}(t_0) \\ &= -b(b + e\gamma) \frac{y(t_0)}{y(t_0) + D} x(t_0) + b(a + d - qE)x(t_0) - \gamma dD - \frac{ba}{K} (x(t_0))^2, \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\frac{du}{dt}(t_0) \leq -\frac{ba}{K}(x(t_0))^2b(a+d-qE)x(t_0) - \gamma dD.$$

La condition (H_1) implique que

$$\frac{du}{dt}(t_0) < 0$$

ce qui entraîne une contradiction.

On conclut que $u(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$.

■

Par conséquent et sous l'hypothèse (H_1) , le système (3.3) se réduit à la forme simplifiée suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bxy}{y+D} - qEx, \\ \frac{dy}{dt} = -dy + \frac{ebxy}{y+D}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Maintenant, nous revenons à la preuve de la persistance (fortement) du système (3.6) (qui est équivalent au système (3.3) sous l'hypothèse (H_1)).

D'après la première équation du système (3.6), il est facile de voir

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x\left(a - \frac{ax}{K} - \frac{by}{y+D} - qE\right) \\ &\geq x\left(a - qE - b - \frac{ax}{K}\right). \end{aligned}$$

En utilisant le **Lemme 2**, on obtient

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq m_1. \quad (3.7)$$

Pour $\varepsilon_3 > 0$ assez petit, il existe un nombre réel positif T_3 , telle que

$$x(t) \geq m_1 - \varepsilon_3, \quad \forall t > T_3. \quad (3.8)$$

Par la suite, en appliquant (3.8) sur la deuxième équation du système (3.6), on obtient

$$\frac{dy}{dt} \geq \frac{y}{y+D} (eb(m_1 - \varepsilon_2) - dy - dD),$$

et pour $t \geq T_4 = \max\{T_2, T_4\}$, on obtient

$$\frac{dy}{dt} \geq \frac{1}{M_2 + \varepsilon_2 + D} y (eb(m_1 - \varepsilon_2) - dy - dD), \quad \forall t \geq T_4.$$

Donc en utilisant **Lemme 2** et le fait que ε_2 et ε_3 sont arbitraires, on a

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \frac{ebm_1}{d} - D := m_2. \quad (3.9)$$

Les équations (3.4), (3.5), (3.7) et (3.9), montrent que sous les hypothèses de la proposition ci-dessus, le système (3.6) est permanent. D'où la preuve de la **Proposition 1**.

Maintenant, nous allons chercher des conditions suffisantes pour lesquelles notre système n'est pas persistant. Ce résultat est illustré dans la proposition suivante

Proposition 3 *Si $M_2 < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.*

Preuve. En utilisant 3.4 et l'équation du prédateur, on obtient

$$\frac{dy}{dt} \leq y \left(-d + \frac{ebK}{D} \right),$$

alors en intégrant

$$y(t) \leq y_0 e^{(-d + \frac{ebK}{D})t}.$$

Donc si $M_2 < 0$, $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. C'est-à-dire le prédateur va à l'extinction. ■

Remarque 2 *Biologiquement, cela signifie que, lorsque le taux de prédation est assez petit, la population des prédateurs disparaît.*

3.3 Existence et stabilité des états d'équilibre.

Le système (3.6) possède les trois points d'équilibre suivants

- (i) L'équilibre trivial : $P^0 = (0, 0)$.
- (ii) L'équilibre sans prédateur : $P^1 = (\bar{x}, 0)$, avec $\bar{x} = \frac{K}{a}(a - qE)$.
- (iii) L'équilibre de coexistence (point d'équilibre intérieur) $P^* = (x^*, y^*)$.

Ce dernier est le point d'intersection de l'isocline de la proie (c'est-à-dire lorsque $\frac{dx}{dt} = 0$) et de l'isocline du prédateur (c'est-à-dire lorsque $\frac{dy}{dt} = 0$) données par

$$\begin{cases} a\left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{by^*}{y^* + D} - qE = 0 \\ -c + \frac{ebx^*}{y^* + D} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

où

$$y^* = \frac{1}{2} \left(B + \sqrt{B^2 - 4C} \right), \quad x^* = \frac{d}{eb} (y^* + D)$$

et

$$B = 2D - \frac{ebK(a - qE - b)}{ad}, \quad C = D^2 - \frac{ebKD(a - qE)}{ad}.$$

Notons que $\sqrt{B^2 - 4C}$ est toujours positif, alors, le point d'équilibre intérieur est positif si un des deux cas suivants est satisfait

1. $B < 0$, qui est équivalent à $0 < E < \frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK}\right) - \frac{b}{q}$.
2. $B \geq 0$ et $C < 0$, c'est-à-dire,

$$0 < \frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK}\right) - \frac{b}{q} \leq E < \frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK}\right).$$

Le point d'équilibre intérieur est positif, si et seulement si la condition

$$0 < E < \frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK}\right), \quad (H_3)$$

est satisfaite.

3.3.1 Analyse de la stabilité des points d'équilibre

La stabilité d'un point d'équilibre est déterminée par la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne autour de ce point d'équilibre.

Proposition 4 1. Le point d'équilibre P^0 est toujours un point selle.

2. Le point P^1 est stable si et seulement si

$$E > \frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK} \right). \quad (H_3^c)$$

3. Le point d'équilibre intérieur P^* , s'il existe, il est localement asymptotiquement stable.

Preuve. Pour obtenir les résultats de la stabilité locale, nous utilisons la matrice jacobienne associée au système (3.6)

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - qE - \frac{2ax}{K} - \frac{by}{y+D} & \frac{-bDx}{(y+D)^2} \\ \frac{eby}{y+D} & -d + \frac{ebDx}{(y+D)^2} \end{pmatrix}.$$

- La matrice jacobienne associée à l'équilibre $P^0 = (0, 0)$ est donnée par

$$J(0, 0) := \begin{pmatrix} a - qE & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Par conséquent, P^0 est un point selle.

- La matrice jacobienne calculée au point d'équilibre $P^1 = (\bar{x}, 0)$ est

$$J(\bar{x}, 0) := \begin{pmatrix} -(a - qE) & -\frac{ebK(a - qE)}{Da} \\ 0 & -d + \frac{ebK(a - qE)}{Da} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

si (H_3^c) est satisfaite, dans ce cas il n'existe pas de point d'équilibre intérieur, alors P_1 est stable. d'autre part, si

$$E < \frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK} \right),$$

alors P_1 est instable.

- La matrice jacobienne associée au point d'équilibre intérieur P^* est la suivante

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\frac{ax^*}{K} & -\frac{bDx^*}{(y^* + D)^2} \\ \frac{eby^*}{y^* + D} & -\frac{ebx^*y^*}{(y^* + D)^2} \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que la trace de $J(x^*, y^*)$ est

$$\text{tr} J(x^*, y^*) = -\frac{ax^*}{K} - \frac{dx^*y^*}{(y^* + D)^2} < 0,$$

et son déterminant est

$$\det J(x^*, y^*) = \frac{adx^{*2}y^*}{K(y^* + D)^2} + \frac{bdDx^*y^*}{(y^* + D)^3} > 0.$$

Donc (x^*, y^*) est localement asymptotiquement stable lorsqu'il existe, ce qui est illustré dans la figures 3.1.

■

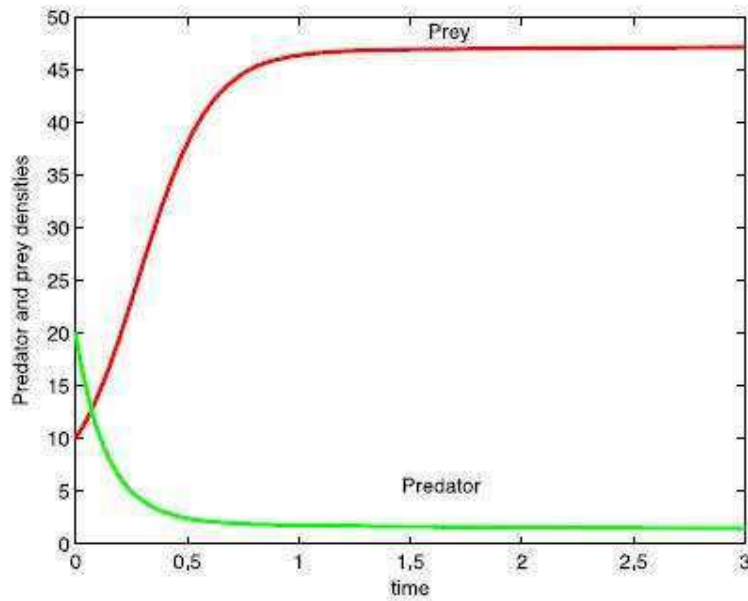


FIGURE 3.1 – La population des proies et des prédateurs convergent vers leurs valeurs d'équilibre.

3.3.2 Stabilité globale du point d'équilibre intérieur

Dans cette sous-section, nous effectuons une analyse de stabilité globale du système proposé (3.6) autour du point d'équilibre $P^* = (x^*, y^*)$ en construisant une fonction de Lyapunov appropriée.

Théorème 6 *Si les conditions (H_0) - (H_3) sont satisfaites, alors, le point d'équilibre P^* est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit

$$V(x, y) = \left[(x - x^*) - x^* \log\left(\frac{x}{x^*}\right) \right] + \alpha \left[(y - y^*) - y^* \log\left(\frac{y}{y^*}\right) \right],$$

où α est une constante positive à choisir de manière appropriée dans les étapes suivantes. On peut aisément constater que la fonction V est nulle à l'équilibre (x^*, y^*) et positive pour toutes les autres valeurs positives de x, y . La dérivée par rapport au temps de V le long des trajectoires de (3.6) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{x - x^*}{x} \frac{dx}{dt} + \alpha \frac{y - y^*}{y} \frac{dy}{dt} \\ &= (x - x^*) \left[(a - qE) - \frac{a}{K}x - \frac{by}{y + D} \right] + \alpha (y - y^*) \left[-d + \frac{ebx}{y + D} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

On a aussi l'ensemble des équations d'équilibre correspondant à l'état stationnaire $P^* = (x^*, y^*)$:

$$a\left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{by^*}{y^* + D} - qE = 0,$$

et

$$-d + \frac{ebx^*}{y^* + D} = 0.$$

On peut donc écrire l'équation (3.13) avec les deux équations ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (x - x^*) \left[(a - qE) - \frac{a}{K}x - \frac{by}{y + D} - (a - qE) + \frac{a}{K}x^* + \frac{by^*}{y^* + D} \right] \\ &\quad + \alpha (y - y^*) \left[-d + \frac{ebx}{y + D} + d - \frac{ebx^*}{y^* + D} \right]. \end{aligned}$$

En choisissant

$$\alpha = \frac{D}{e(y^* + D)},$$

l'équation ci-dessus devient

$$\frac{dV}{dt} = - \left[\frac{a}{K} (x - x^*)^2 + \frac{eb\alpha x^*}{(y + D)(y^* + D)} (y - y^*)^2 \right].$$

Évidemment, $(\frac{dV}{dt}) < 0$ strictement pour tout $x, y > 0$, sauf pour le point d'équilibre intérieur (x^*, y^*) où $(\frac{dV}{dt}) = 0$. Ainsi, $V(x, y)$ satisfait le théorème de stabilité asymptotique de Lyapunov [23] et par conséquent, le point d'équilibre intérieur (x^*, y^*) du système (3.6) est globalement asymptotiquement stable.

■

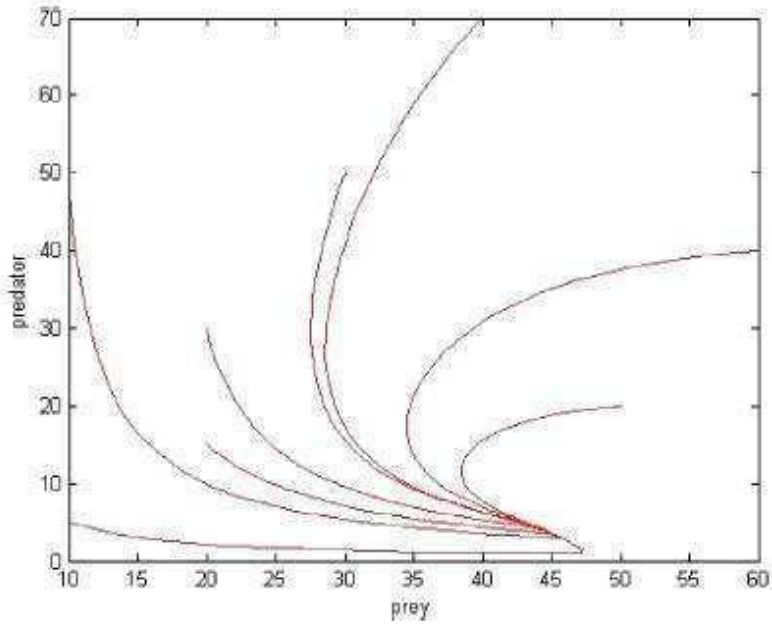


FIGURE 3.2 – Portrait de phase correspondant à différentes conditions initiales.

Remarque 3 *La conséquence de la stabilité globale est que l'exploitation ne changera pas de manière irréversible le système. Tant que les proies ne sont pas éteintes par une exploitation excessive de leur nourriture, le système est capable de se rétablir.*

3.4 Équilibre bionomique

Comme nous l'avons déjà vu, un équilibre biologique est donné par $\dot{x} = \dot{y} = 0$. L'équilibre bionomique est atteint lorsque le revenu total obtenu en vendant la biomasse récoltée est égal au coût total utilisé pour récolter cette biomasse [13].

Soit c le coût de pêche constant par unité d'effort et p le prix constant par unité de biomasse de proies.

Par suite, le revenu net à tout moment est donné par,

$$\pi = (pqx - c)E. \quad (3.14)$$

Ainsi, l'équilibre bionomique est $[x_\infty, y_\infty, E_\infty]$, où x_∞ , y_∞ et E_∞ sont les solutions positives des équations suivantes

$$\begin{aligned} a\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{by}{y + D} - qE &= 0, \\ -d + \frac{ebx}{y + D} &= 0, \end{aligned}$$

$$\pi = (pqx - c)E = 0.$$

On peut noter ici que si $c > pqx$, c'est-à-dire, si le coût de la pêche dépasse les revenus obtenus, le loyer économique obtenu de la pêche devient négatif. Ainsi, la pêche sera fermée et il n'y a pas d'équilibre bionomique. Par conséquent, pour atteindre l'équilibre bionomique, on doit avoir $c < pqx$.

En résolvant les équations ci-dessus, on obtient,

$$x_\infty = \frac{c}{pq}, \quad (3.15)$$

$$y_\infty = \frac{ebc}{pqd} - D, \quad (3.16)$$

où $y_\infty > 0$ si

$$\frac{ebc}{pqd} > D, \quad (H_4)$$

$$E_\infty = \frac{1}{q} \left(a \left(1 - \frac{c}{pqK} \right) - \frac{by_\infty}{y_\infty + D} \right). \quad (3.17)$$

Puisque $c < pqx < pqK$, alors $1 - \frac{c}{pqK} > 0$, et si (H_4) est vérifiée alors

$E_\infty > 0$, si

$$a \left(1 - \frac{c}{pqK} \right) > \frac{by_\infty}{y_\infty + D}. \quad (H_5)$$

Par conséquent, on a le théorème suivant.

Théorème 7 *L'équilibre bionomique non trivial $[x_\infty, y_\infty, E_\infty]$ existe si en plus des conditions (H_0) - (H_3) , les conditions (H_4) et (H_5) sont aussi satisfaites.*

Interprétation. Si $E > E_\infty$, alors le coût total utilisé pour la récolte de la proie dépasserait le total des revenus tirés de la pêche. Par conséquent, certains pêcheurs seraient perdants et, naturellement, ils abandonnent la pêche. Par conséquent, $E > E_\infty$ ne peut pas être maintenu indéfiniment. Inversement, c'est-à-dire si $E < E_\infty$, alors la pêcherie est plus rentable et, par conséquent, dans une pêcherie en accès libre, elle attirerait de plus en plus des pêcheurs. De même, $E < E_\infty$ ne peut pas être maintenu indéfiniment (voir figure 3.3).

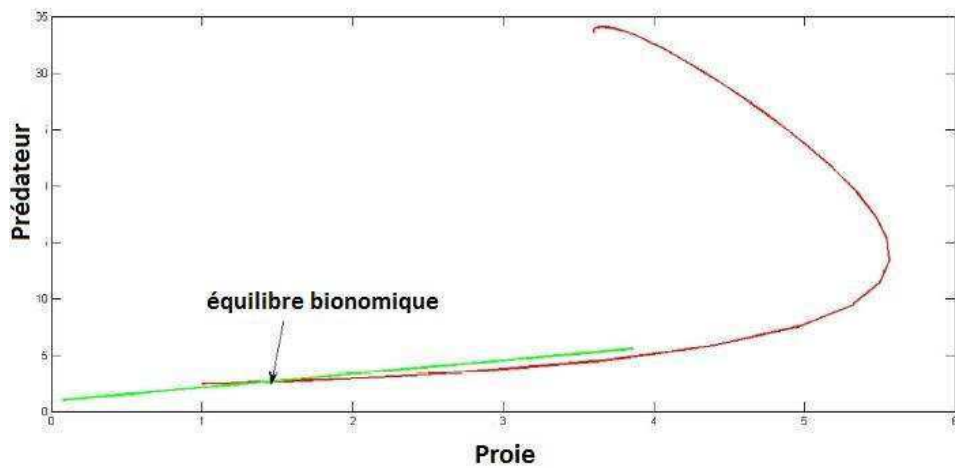


FIGURE 3.3 – Diagramme de phase montrant l'équilibre bionomique.

3.5 Stratégie de récolte optimale.

Le problème fondamental dans la détermination d'une stratégie de pêche optimale dans une pêcherie commerciale est de déterminer le compromis optimal entre les récoltes actuelles et futures [13, 30]. Comme l'a observé Clark [13], ce problème, est extrêmement difficile, non pas d'un point de vue mathématique, mais certainement d'un point de vue politique et philosophique.

Pour déterminer une stratégie de récolte optimale, nous considérons la valeur actuelle J d'un flux continu de revenus, donné par

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \pi(x, y, E) dt,$$

où π est donné par $\pi = (pqx - c)E$ et δ est le taux d'actualisation annuel instantané .

Notons par E_δ le contrôle optimal avec les états correspondants x_δ et y_δ . On prend $A = (x_\delta, y_\delta)$ comme le point d'équilibre optimal. Ici, nous avons l'intention de dériver un contrôle optimal E_δ , telle que

$$J(E_\delta) = \max\{J(E), E \in V\},$$

où $V = [0, E_{max}]$ est l'ensemble de contrôle, et E_{max} est l'effort de pêche maximal.

Le hamiltonien $H = H(x, y, \lambda_1, \lambda_2, E)$ pour ce problème de contrôle est donné par

$$\begin{aligned} H &= e^{-\delta t} (pqx - c)E + \lambda_1 \left(ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bxy}{y + D} - qEx \right) \\ &\quad + \lambda_2 \left(-dy + \frac{ebxy}{y + D} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec λ_1 et λ_2 sont les variables adjointes.

La fonction objective et les équations différentielles sont linéaires par rapport au contrôle, et l'on peut montrer par des résultats standards qu'un contrôle optimal et les états optimaux correspondants existent [22].

Puisque le hamiltonien est linéaire par rapport au contrôle, nous devons considérer si le contrôle optimal est bang-bang, singulier ou une combinaison. Le cas singulier pourrait se produire si la pente ou la fonction de commutation

$$\frac{\partial H}{\partial E} = e^{-\delta t}(pqx - c) - \lambda_1 qx := \sigma(t), \quad (3.19)$$

est nul sur l'intervalle de temps non trivial. Notez que le contrôle optimal serait à sa borne supérieure ou à sa borne inférieure selon

$$\sigma(t) > 0 \quad \text{ou} \quad < 0.$$

Pour étudier le cas singulier, supposons que $\sigma(t) = 0$ sur un intervalle non trivial. Dans ce cas, la stratégie de récolte optimale est

$$E(t) = \begin{cases} E_{max} & \text{si } \sigma(t) > 0, \\ E^* & \text{si } \sigma(t) = 0, \\ 0 & \text{si } \sigma(t) < 0. \end{cases}$$

Lorsque $\sigma(t) = 0$, il en résulte que

$$\lambda_1 qx = e^{-\delta t}(pqx - c) = e^{-\delta t} \frac{\partial \pi}{\partial E}. \quad (3.20)$$

Cela implique que le coût de récolte par unité d'effort est égal à la valeur actualisée du profit marginal futur de l'effort à l'état stationnaire.

Par le principe du maximum de Pontryagin[44], les variables adjointes satisfont

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\
&= -\left[e^{-\delta t} pqE + \lambda_1 \left\{ a - \frac{2ax}{K} - \frac{by}{y+D} - qE \right\} + \lambda_2 \left\{ \frac{ebDy}{y+D} \right\} \right]. \\
\dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\
&= -\left[\lambda_1 \left\{ a - \frac{-bDx}{(y+D)^2} - \frac{by}{y+D} - qE \right\} + \lambda_2 \left\{ -d + \frac{ebDx}{(y+D)^2} \right\} \right].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Nous cherchons à trouver la solution d'équilibre optimale du problème, par conséquent x, y et E seront traités comme des constantes dans les étapes suivantes.

Considérons l'équilibre intérieur $P^* = (x^*, y^*)$, pour le contrôle singulier, nous avons $\frac{\partial H}{\partial E} = 0$. D'où

$$\lambda_1 = e^{-\delta t} \left(p - \frac{c}{qx^*} \right). \tag{3.22}$$

Le prix fictif $\lambda_1 e^{-\delta t}$ reste borné lorsque $t \rightarrow \infty$, donc il satisfait la condition de transversalité à l'infini.

Maintenant, (3.22) peut être écrite comme $\lambda_1 = A_1 e^{-\delta t}$, où $A_1 = \left(p - \frac{c}{qx^*} \right)$.

de façon similaire, considérons l'équilibre $P^* = (x^*, y^*)$, et en utilisant l'équation (3.21), on obtient

$$\frac{d\lambda_2}{dt} - A_2 \lambda_2 = -A_1 A_3 e^{-\delta t}, \tag{3.23}$$

dont la solution est donnée par

$$\lambda_2(t) = \frac{A_1 A_3}{A_2 + \delta} e^{-\delta t}, \tag{3.24}$$

$$\text{où } A_1 = \left(p - \frac{c}{qx^*} \right), A_2 = \frac{ebDx^*}{(y^* + D)^2} - d, \text{ et } A_3 = \frac{-bDx^*}{(y^* + D)^2}.$$

De même, la condition de transversalité est satisfaite.

La trajectoire singulière est donnée par

$$\sigma(t) = 0. \quad (3.25)$$

L'équation ci-dessus, peut être écrite sous la forme

$$G(x^*) = \left(p - \frac{c}{qx^*} \right) - A_1 = 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une racine positive $x_\delta = x^*$, de l'équation $G(x^*) = 0$ dans l'intervalle $(0, K)$, si les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) < 0, \quad G(K) > 0, \quad G'(x) > 0 \quad \text{pour } x > 0.$$

Pour $x_\delta = x^*$, on obtient

$$y_\delta = \frac{eb}{d}x_\delta - D,$$

où

$$y_\delta > 0 \quad \text{si} \quad x_\delta > \frac{dD}{eb},$$

et

$$E_\delta = \frac{1}{q} \left[a \left(1 - \frac{x_\delta}{K} \right) - \frac{by_\delta}{y_\delta + D} \right],$$

en vérifiant

$$E_\delta > 0 \quad \text{si} \quad a \left(1 - \frac{x_\delta}{K} \right) > \frac{by_\delta}{y_\delta + D}.$$

3.6 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons examiné et analysé un modèle proie-prédateur exploité. Ce travail peut être considéré comme une extension du travail de [14, 39]. La principale modification ici c'est que le taux de prédation dans la fonction réponse est choisie en tant que la moyenne du taux de prédation durant l'année et que la population de proies est soumise à la pêche. Les objectifs étaient l'analyse des propriétés dynamiques des différents points d'équilibre du système, et l'étude de la stratégie de pêche qui aboutit à maximiser le profit sans conduire à l'extinction. Notre étude indique que l'effort de pêche et le taux de prédation jouent un rôle important dans la modification de différents comportements à l'état d'équilibre.

On a commencé par montrer que si l'effort de pêche augmente au-delà d'une valeur seuil, c'est-à-dire si $E > \frac{a}{q}$, alors les deux espèces vont disparaître et le système ne sera pas permanent. Pour éviter cette situation, l'hypothèse (H_0) a été supposée.

Aussi, pour simplifier notre étude, nous avons fait des hypothèses, en supposant que le taux de prédation est inférieur à une valeur critique donnée par la condition (H_1) qui dépend des paramètres biologiques.

Ensuite, en utilisant la théorie de la stabilité des équations différentielles ordinaires, nous avons prouvé que l'équilibre intérieur du modèle réduit existe sous certaines conditions et qu'il est globalement asymptotiquement stable. D'autre part, il est important de noter que la pêche peut avoir un impact sur l'existence et le comportement de l'équilibre positif, en effet pour

$0 < E < \frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK} \right)$, les deux populations de poissons peuvent être maintenues à un niveau d'équilibre approprié dans l'habitat. Si la pêche devient plus grande que le niveau $\frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK} \right)$, la surexploitation peut entraîner l'extinction des prédateurs. En effet, la densité de la population de proies diminue lorsque l'effort de pêche augmente, ce qui conduit le prédateur à se trouver dans une situation plus difficile pour trouver sa proie. Les principales contributions de ce document sont les suivantes :

1. La persistance des espèces dépend de deux facteurs. Le premier est biologique et concerne le taux de prédation b , en effet, nous avons montré que le seuil entre la persistance et l'extinction dépend fortement du taux de prédation b , si le taux de prédation est entre deux niveaux (ie, les hypothèses (H_1) , (H_2)), alors la population des proies et celle des prédateurs coexistent. Cependant, lorsque le taux de prédation est inférieur à une valeur critique donnée par la **Proposition 3**, alors le prédateur va à l'extinction. Le second est lié à l'exploitation et aux mécanismes qui réduisent l'effort de pêche (c'est-à-dire, l'hypothèse (H_3)). Ce dernier peut être réduit en installant des zones protégées où la pêche est interdite.
2. L'écosystème est souvent altéré par les activités humaines. Nous avons analysé la stratégie de récolte qui aboutit à maximiser le profit et ne conduit pas à l'extinction. Nous avons obtenu la stratégie optimale de pêche en utilisant le principe du maximum de Pontryagin.

Enfin, nous pouvons facilement vérifier la compatibilité de toutes les hypothèses utilisées dans ce travail. On peut souligner que dans ce travail,

plusieurs paramètres importants tels que le refuge, l'interaction avec d'autres espèces, etc., sont négligés. Par conséquent, d'autres recherches sont nécessaires pour répondre aux besoins de ce domaine.

Chapitre 4

Dynamique globale d'un système proie-prédateur et ses applications au contrôle biologique

Ce chapitre fait l'objet du proceeding [8].

K. Belkhodja, A. Moussaoui

” Global dynamics of a predator-prey system and its applications
to biological control. ”

*Proceedings of ICCSA 2014. Normandie University, Le Havre, France-June
(2014) 23-26.*

Dans ce chapitre, on a pris le modèle (3.3) du chapitre 3, et on a supposé que les deux espèces sont soumises à la pêche avec les efforts E_1 et E_2 , respectivement, et les coefficients de capturabilité des deux espèces sont $q_1, q_2 > 0$. D'où, le modèle suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \min\left(\frac{bx(t)}{y(t) + D}, \gamma\right) y(t) - q_1 E_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = -cy + e \min\left(\frac{bx(t)}{y(t) + D}, \gamma\right) y(t) - q_2 E_2 y. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ici, nous observons que, si $E_1 > \frac{a}{q_1}$ alors $\dot{x} < 0$. Par conséquent, tout au long de notre analyse, nous supposons que $E_1 < \frac{a}{q_1}$.

4.1 Quelques résultats préliminaires

Dans cette section, nous allons présenter quelques résultats préliminaires. Observant que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F_1(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F_2(x, y) = 0$, nous pouvons définir que $F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = 0$. De toute évidence, avec cette définition étendue, F_1 et F_2 sont des fonctions continues sur \mathbb{R}_2^+ . De plus, une solution avec une valeur initiale positive existe et est unique et même, elle reste positive.

Notre but est de montrer la bornitude des solutions qui peut être interprétée comme une restriction de la croissance de la population en raison des ressources limitées.

Avant de commencer, soit respectivement $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ la densité

initiale de la proie et du prédateur avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. Supposons que :

$$b < \frac{\gamma(y_0 + D)}{x_0}, \quad (H_1)$$

et

$$b < 4a\gamma D \frac{(c + q_2 E_2)}{K(a + c + q_2 E_2)^2}. \quad (H_2)$$

Alors nous avons la proposition suivante.

Proposition 5 *Pour tout $t \geq 0$,*

$$bx(t) < \gamma(y(t) + D).$$

Par conséquent le système (4.1) est réduit à sa simple forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bxy}{y + D} - q_1 E_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \frac{ebxy}{y + D} - q_2 E_2 y. \end{cases} \quad (4.2)$$

4.1.1 Bornitude du système

Le théorème suivant assure la bornitude du système (4.2).

Théorème 8 *Toutes les solutions du système (4.2) avec des conditions initiales de \mathbb{R}_2^+ sont uniformément bornées.*

4.2 Analyse des équilibres

Le système (4.2) possède trois points d'équilibres, cités dans la proposition suivante.

Proposition 6 \star *L'équilibre trivial : $P_0 = (0, 0)$, qui est un point selle.*

- ★ L'équilibre en l'absence des prédateurs ($y = 0$) : $P_1 = (\bar{x}, 0)$,
avec $\bar{x} = \frac{K}{a}(a - q_1 E_1)$. P_1 est localement stable si et seulement si

$$E_1 > \frac{a}{q_1} \left(1 - \frac{D(c + q_2 E_2)}{ebK} \right) \geq 0. \quad (4.3)$$

- ★ L'équilibre intérieur $P_2 = (x^*, y^*)$, avec x^* et y^* peuvent être obtenus en résolvant les équations

$$\begin{cases} a(1 - \frac{x^*}{K}) - \frac{by^*}{y^* + D} - q_1 E_1 = 0, \\ -c + \frac{ebx^*}{y^* + D} - q_2 E_2 = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Le point d'équilibre axial P^* s'il existe, il est localement asymptotiquement stable.

Le système (4.2) admet le point d'équilibre intérieur $P_2 = (x^*, y^*)$, si et seulement si

$$E_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad 0 < E_1 < \frac{a}{q_1} \left(1 - \frac{D(c + q_2 E_2)}{ebK} \right). \quad (4.5)$$

D'où

$$x^* = \frac{c + q_2 E_2}{d} (y^* + D)$$

et

$$y^* = \frac{1}{2} \left(B + \sqrt{B^2 - 4C} \right),$$

avec

$$B = 2D - \frac{ebK(-b + a - q_1 E_1)}{a(c + q_2 E_2)}, \quad C = D^2 - \frac{ebKD(a - q_1 E_1)}{a(c + q_2 E_2)}.$$

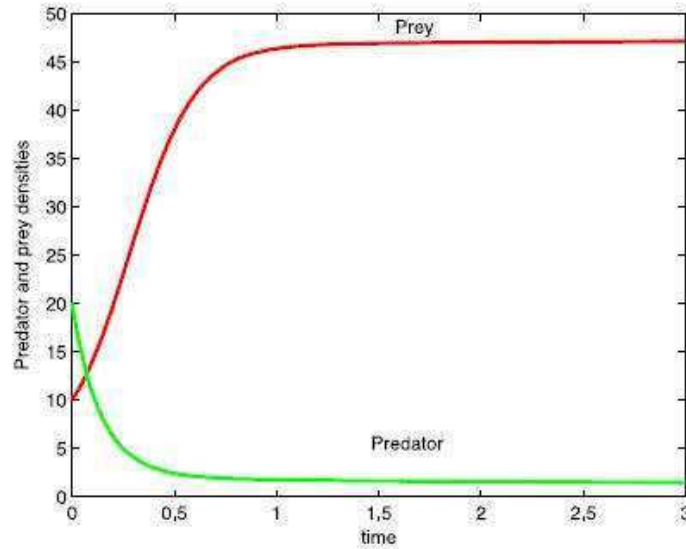


FIGURE 4.1 – La population des proies et des prédateurs convergent vers leurs valeurs d'équilibre. $a = 7$; $b = 10$; $c = 7.5$; $d = 12$; $K = 50$; $D = 70$; $q_1 = 1.3$; $q_2 = 0.37$; $E_1 = 0.15$; $E_2 = 1.25$.

4.3 Stabilité globale du point d'équilibre intérieur

Dans cette section, nous considérons la stabilité globale du système (4.2) en construisant une fonction de Lyapunov appropriée.

Nous définissons une fonction de Lyapunov

$$V(x, y) = \left[(x - x^*) - x^* \log\left(\frac{x}{x^*}\right) \right] + h \left[(y - y^*) - y^* \log\left(\frac{y}{y^*}\right) \right],$$

où h est une constante positive à choisir de manière appropriée dans les étapes suivantes. On remarque que la fonction V vérifie les conditions d'une fonction de Lyapunov.

La dérivée temporelle de V le long des trajectoires du système (4.2) est

donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{x - x^*}{x} \frac{dx}{dt} + h \frac{y - y^*}{y} \frac{dy}{dt} \\ &= (x - x^*) \left[(a - q_1 E_1) - \frac{a}{K} x - \frac{by}{y + D} \right] + h (y - y^*) \left[-(c + q_2 E_2) + \frac{ebx}{y + D} \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

On a aussi l'ensemble des équations d'équilibre correspondant à l'état stationnaire $P_2 = (x^*, y^*)$:

$$a \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{by^*}{y^* + D} - q_1 E_1 = 0$$

et

$$-c + \frac{dx^*}{y^* + D} - q_2 E_2 = 0.$$

On peut donc écrire l'équation (4.6) avec les deux équations ci-dessus sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (x - x^*) \left[(a - q_1 E_1) - \frac{a}{K} x - \frac{by}{y + D} - (a - q_1 E_1) + \frac{a}{K} x^* + \frac{by^*}{y^* + D} \right] \\ &\quad + h (y - y^*) \left[-(c + q_2 E_2) + \frac{ebx}{y + D} + (c + q_2 E_2) - \frac{ebx^*}{y^* + D} \right]. \end{aligned}$$

En choisissant

$$h = \frac{bD}{eb(y^* + D)},$$

on obtient

$$\frac{dV}{dt} = - \left[\frac{a}{K} (x - x^*)^2 + \frac{ebhx^*}{(y + D)(y^* + D)} (y - y^*)^2 \right].$$

Évidemment, $\frac{dV}{dt} < 0$ pour tout $x, y > 0$, sauf pour le point d'équilibre intérieur (x^*, y^*) où $\frac{dV}{dt} = 0$. Ainsi, $V(x, y)$ satisfait le théorème de stabilité asymptotique de Lyapunov et par conséquent, le point d'équilibre intérieur (x^*, y^*) du système (4.2) est globalement asymptotiquement stable.

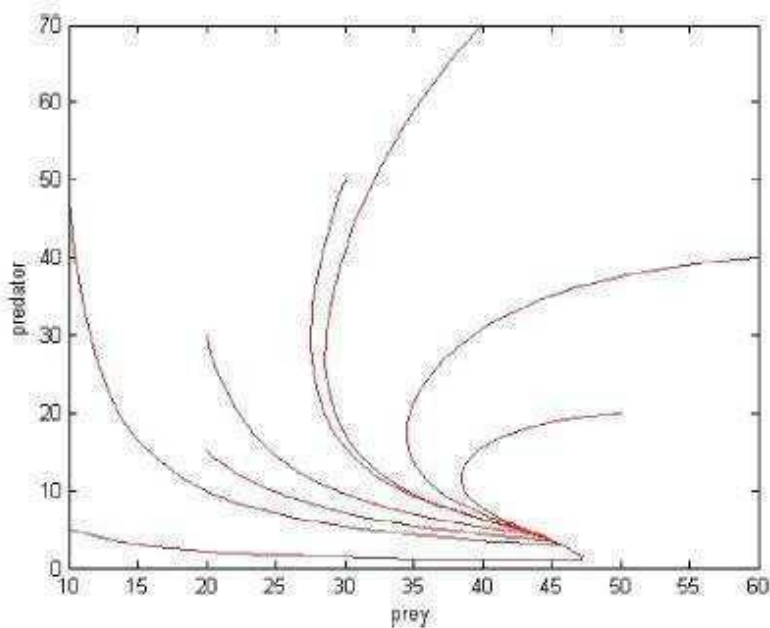


FIGURE 4.2 – Portrait de phase correspondant à différentes conditions initiales.

4.4 Équilibre bionomique

Montrons maintenant l'existence d'un équilibre bio-économique ou bio-nomique. Ce terme est une fusion des concepts de " l'équilibre biologique" et "l'équilibre économique" [13].

Soit c_1, c_2 le coût de récolte par unité d'effort, p_1, p_2 le prix constant par unité de biomasse de la proie et du prédateur, respectivement. Le revenu net à tout moment est donné par :

$$\begin{aligned}\pi &= (p_1 q_1 x - c_1) E_1 + (p_2 q_2 y - c_2) E_2 \\ &= \pi_1 + \pi_2,\end{aligned}$$

où $\pi_1 = (p_1q_1x - c_1)E_1$, $\pi_2 = (p_2q_2y - c_2)E_2$, en d'autres termes, π_1 et π_2 représentent les revenus nets correspondant à la pêche des proies et des prédateurs, respectivement.

Ainsi, l'équilibre bionomique $[x_\infty, y_\infty, E_{1\infty}, E_{2\infty}]$ est la solution des équations simultanées suivantes :

$$a\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{by}{y + D} - q_1E_1 = 0, \quad (4.7)$$

$$-c + \frac{ebx}{y + D} - q_2E_2 = 0, \quad (4.8)$$

$$\pi = (p_1q_1x - c_1)E_1 + (p_2q_2y - c_2)E_2 = 0. \quad (4.9)$$

Afin de déterminer l'équilibre bionomique, nous considérons maintenant les cas suivants :

1^{er} cas : Si $c_2 > p_2q_2y$, i.e. le coût est plus élevé que le revenu pour les prédateurs, alors la pêche des prédateurs sera arrêtée ($E_2 = 0$). Seule la pêcherie de proies reste opérationnelle (c'est-à-dire $c_1 < p_1q_1x$).

Nous avons alors $x_\infty = \frac{c_1}{p_1q_1}$ (de l'équation (4.9)).

Puisque $c_1 < p_1q_1x < p_1q_1K$, alors $(y_\infty, E_{1\infty})$ sera un point quelconque de la droite

$$a\left(1 - \frac{c_1}{p_1q_1K}\right) = \frac{by_\infty}{y_\infty + D} + q_1E_{1\infty}.$$

2^{ème} cas : Si $c_1 > p_1q_1x$, en d'autres termes, si le coût est supérieur au revenu de la pêcherie de proies, par conséquent cette dernière sera arrêtée ($E_1 = 0$) et seule la pêcherie de prédateurs reste opérationnelle

(c'est-à-dire $c_2 < p_2q_2y$).

Nous avons alors $y_\infty = \frac{c_2}{p_2q_2}$ (de l'équation (4.9)), en remplaçant y_∞ dans l'équation (4.7), on obtient

$$x_\infty = \frac{K}{a} \left(a - \frac{by_\infty}{y_\infty + D} \right) > 0$$

$$x_\infty > 0 \quad \text{si} \quad a > \frac{by_\infty}{y_\infty + D}$$

Substituant x_∞ dans l'équation (4.8), on obtient

$$E_{2\infty} = \frac{1}{q_2} \left(-c + \frac{ebx_\infty}{y_\infty + D} \right),$$

avec

$$E_{2\infty} > 0 \quad \text{si} \quad \frac{ebx_\infty}{y_\infty + D} > c_2.$$

3^{ème} cas : Si $c_1 > p_1q_1x$, $c_2 > p_2q_2y$. Dans ce cas, le coût est supérieur aux revenus pour les deux espèces et donc la pêche entière sera abandonnée.

4^{ème} cas : Si $c_1 < p_1q_1x$, $c_2 < p_2q_2y$. Cela veut dire que les revenus pour les deux espèces étant positif.

Dans ce cas, $x_\infty = \frac{c_1}{p_1q_1}$ et $y_\infty = \frac{c_2}{p_2q_2}$ (de l'équation (4.9)).

En remplaçant x_∞ et y_∞ dans les équations (4.7) et (4.8), on obtient

$$E_{1\infty} = \frac{1}{q_1} \left(a \left(1 - \frac{c_1}{p_1q_1K} \right) - \frac{bc_2}{c_2 + p_2q_2D} \right),$$

et

$$E_{2\infty} = \frac{1}{q_1} \left(\frac{ebc_1p_2q_2}{p_1q_1(c_2 + p_2q_2D)} - c \right).$$

Avec,

$$E_{1\infty} > 0 \quad \text{si} \quad a \left(1 - \frac{c_1}{p_1q_1K} \right) > \frac{bc_2}{c_2 + p_2q_2D}, \quad (4.10)$$

$$E_{2\infty} > 0 \quad \text{si} \quad \frac{ebc_1p_2q_2}{p_1q_1(c_2 + p_2q_2D)} > c. \quad (4.11)$$

Ainsi, le point d'équilibre bionomique non trivial $[x_\infty, y_\infty, E_{1\infty}, E_{2\infty}]$ existe, si et seulement si les conditions (4.10) et (4.11) se maintiennent ensemble.

4.5 Stratégie de récolte optimale

Dans cette section, notre objectif est de maximiser, la fonctionnelle objective du modèle de pêche (4.2), donnée par

$$J = \int_0^\infty \left((p_1q_1x - c_1)E_1 + (p_2q_2y - c_2)E_2 \right) e^{-\delta t} dt, \quad (4.12)$$

soumise aux contraintes d'état (4.2) et aux contraintes de contrôle

$$0 \leq E_i(t) \leq E_i^{max}, i = 1, 2.$$

avec δ le taux annuel d'actualisation.

Le hamiltonien pour ce problème de contrôle est le suivant

$$\begin{aligned} H &= H(x, y, \lambda_1, \lambda_2, E_1, E_2) \\ &= \left[(p_1q_1x - c_1)E_1 + (p_2q_2y - c_2)E_2 \right] e^{-\delta t} + \lambda_1 \left(ax \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{bxy}{y + D} - q_1E_1x \right) \\ &\quad + \lambda_2 \left(-cy + \frac{ebxy}{y + D} - q_2E_2y \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

où λ_1 et λ_2 sont les variables adjointes.

On a

$$\frac{\partial H}{\partial E_1} = e^{-\delta t} (p_1q_1x - c_1) - \lambda_1q_1x = \sigma_1(t), \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial E_2} = e^{-\delta t} \left(p_2 q_2 y - c_2 \right) - \lambda_2 q_2 y = \sigma_2(t). \quad (4.15)$$

Le contrôle optimal $E_i(t)$ ($i = 1, 2$) doit clairement satisfaire les conditions

$$E_i(t) = \begin{cases} E_i^{max} & \text{si } \sigma_i(t) > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma_i(t) < 0. \end{cases}$$

Puisque $\sigma_i(t)$ oblige $E_i(t)$ ($i = 1, 2$) à basculer entre les niveaux 0 et E_i^{max} , $\sigma_i(t)$ ($i = 1, 2$) est appelé fonction de commutation. En fonction du signe de la fonction de commutation $\sigma_i(t)$, la commande optimale $E_i(t)$ est un bang-bang qui commute d'un point extrême à un autre.

Il est évident que les variables de contrôle $E_i(t)$ ($i = 1, 2$) apparaissent linéairement dans la fonction hamiltonienne H . Ainsi, la condition $\sigma_i(t) = 0$ ($i = 1, 2$) est nécessaire pour que la commande singulière $E_i^*(t)$, avec $0 < E_i^*(t) < E_i^{max}$, soit optimale.

La stratégie de récolte optimale est donc

$$E_i(t) = \begin{cases} E_i^{max} & \text{si } \sigma_i(t) > 0 \\ E_i^* & \text{si } \sigma_i(t) = 0 \\ 0 & \text{si } \sigma_i(t) < 0 \end{cases}$$

pour $i = 1, 2$.

Pour le contrôle singulier $\sigma_i(t) = 0$ ($i = 1, 2$). Supposons que les contraintes de contrôle ne sont pas contraignantes, c'est-à-dire, la solution optimale ne se produit pas à 0 ou E_i^{max} .

Des équations (4.14) et (4.15), nous avons

$$\lambda_1 = e^{-\delta t} \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right), \quad (4.16)$$

$$\lambda_2 = e^{-\delta t} \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right). \quad (4.17)$$

Ainsi, les prix fictifs $e^{-\delta t} \lambda_i(t)$, ($i = 1, 2$) ne varient pas avec le temps pour l'équilibre optimal. Par conséquent, ils satisfont la condition de transversalité à ∞ , c'est-à-dire qu'ils restent bornés lorsque $t \rightarrow \infty$.

Nous avons l'intention de trouver ici une solution d'équilibre optimale du problème, donc x , y et E doivent être traités comme des constantes dans les étapes suivantes.

Par le principe du maximum [44], les variables adjointes satisfont

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -\left[e^{-\delta t} p_1 q_1 E_1 + \lambda_1 \left\{ a - \frac{2ax}{K} - \frac{by}{y+D} - q_1 E_1 \right\} + \lambda_2 \left\{ \frac{eby}{y+D} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

En utilisant les conditions d'équilibre, (4.18) devient

$$\dot{\lambda}_1 = -e^{-\delta t} p_1 q_1 E_1 + \lambda_1 \left(\frac{ax}{K} \right) - \lambda_2 \left(\frac{eby}{y+D} \right) \quad (4.19)$$

Remplaçons λ_1 et λ_2 dans (4.19) on obtient

$$\dot{\lambda}_1 = e^{-\delta t} \left[-p_1 q_1 E_1 + \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) \left(\frac{ax}{K} \right) - \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) \left(\frac{eby}{y+D} \right) \right]. \quad (4.20)$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ &= -\left[e^{-\delta t} (p_2 q_2 E_2) + \lambda_1 \left\{ \frac{-bDx}{(y+D)^2} \right\} + \lambda_2 \left\{ -c - q_2 E_2 + \frac{ebDx}{(y+D)^2} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Et en utilisant les conditions d'équilibre, (4.21) devient

$$\dot{\lambda}_2 = -e^{-\delta t} \left(p_2 q_2 E_2 \right) - \lambda_1 \left(\frac{-bDx}{(y+D)^2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{ebxy}{(y+D)^2} \right). \quad (4.22)$$

Donc on a

$$\dot{\lambda}_2 = e^{-\delta t} \left[-p_2 q_2 E_2 - \left(p_1 + \frac{c_1}{q_1 x} \right) \left(\frac{bDx}{(y+D)^2} \right) + \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) \left(\frac{ebxy}{(y+D)^2} \right) \right]. \quad (4.23)$$

En intégrant (4.20) et (4.23)

$$\lambda_1 = \frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \left[p_1 q_1 E_1 - \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) \left(\frac{ax}{K} \right) + \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) \left(\frac{eby}{y+D} \right) \right]. \quad (4.24)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \left[p_2 q_2 E_2 + \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) \left(\frac{bDx}{(y+D)^2} \right) - \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) \left(\frac{ebxy}{(y+D)^2} \right) \right]. \quad (4.25)$$

Des équations (4.16) et (4.24) on a,

$$\begin{aligned} e^{-\delta t} \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) &= \frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \left[p_1 q_1 E_1 - \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) \left(\frac{ax}{K} \right) + \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) \left(\frac{eby}{y+D} \right) \right]. \\ \Rightarrow p_1 q_1 E_1 &= \delta \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) - \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) \left(\frac{ax}{K} \right) + \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) \left(\frac{eby}{y+D} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Et de (4.17) et (4.25) on obtient,

$$\begin{aligned} e^{-\delta t} \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) &= \frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \left[p_2 q_2 E_2 + \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) \left(\frac{bDx}{(y+D)^2} \right) - \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) \left(\frac{ebxy}{(y+D)^2} \right) \right] \\ \Rightarrow p_2 q_2 E_2 &= \delta \left(p_2 + \frac{c_2}{q_2 y} \right) + \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) \left(\frac{bDx}{(y+D)^2} \right) + \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) \left(\frac{ebxy}{(y+D)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Les équations (4.26) et (4.27) donnent les efforts de récolte optimaux

$$E_1 = \frac{\delta \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) - \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) \left(\frac{ax}{K} \right) + \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) \left(\frac{eby}{y+D} \right)}{p_1 q_1}, \quad (4.28)$$

et

$$E_2 = \frac{\delta \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) + \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right) \left(\frac{bDx}{(y+D)^2} \right) - \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) \left(\frac{ebxy}{(y+D)^2} \right)}{p_2 q_2}. \quad (4.29)$$

Ainsi en résolvant les équations de l'état d'équilibre avec (4.28) et (4.29) nous obtenons la solution optimale (x_δ, y_δ) et les efforts de pêche optimaux $E_{1\delta}$ et $E_{2\delta}$.

4.6 Conclusion

Dans ce travail, un système proie-prédateur exploité avec une nouvelle fonction réponse est considéré. La stabilité locale et globale des équilibres ont été abordées. On a également constaté qu'il était possible de contrôler le système de telle sorte que d'approcher d'un état requis, en utilisant les efforts E_1 et E_2 comme contrôles. Nous avons examiné ensuite les possibilités d'existence des équilibres bionomiques (biologiques et économiques) du système. Ensuite, la stratégie de récolte optimale est discutée en utilisant le principe du maximum de Pontryaguin.

Conclusions et perspectives

Cette thèse est consacrée à l'étude de deux modèles de dynamique de populations. Le premier est un modèle proie-prédateur avec une pêche maintenue uniquement sur les proies et le second modèle concerne un système proie-prédateur avec une pêche des deux espèces.

On a présenté quelques modèles classiques en dynamique de populations allant du plus simple au plus compliqué pour deux populations. On a aussi rappelé des outils mathématiques importants pour l'analyse des modèles présentés dans les chapitres suivants. Pour le premier modèle, la persistance de l'espèce dépend de deux facteurs. Le premier est biologique et concerne le taux de prédation b , en effet, nous avons montré que le seuil entre la persistance et l'extinction dépend fortement du taux de prédation b . Le second est lié à l'exploitation et aux mécanismes qui réduisent l'effort de pêche. Ce dernier peut être réduit en limitant le temps de pêche en installant des zones protégées. L'écosystème est souvent altéré par les activités humaines. Nous avons analysé la stratégie de pêche qui aboutit à maximiser le profit et ne conduit pas à l'extinction. Nous avons obtenu la stratégie de pêche optimale en utilisant le principe du maximum de Pontryagin. Pour le deuxième modèle

proie-prédateur, nous avons supposé que les proies et les prédateurs sont exploités avec deux efforts de pêche différents. On a constaté qu'il était possible de contrôler le système de telle sorte que d'approcher d'un état requis, en utilisant les efforts E_1 et E_2 comme contrôles.

Bibliographie

- [1] H.R. Akcakaya, R. Arditi and L.R. Ginzburg. Ratio-dependent prediction : an abstraction that works, *Ecology* 76 (1995) 995-1004.
- [2] E. S. ALLMAN and J. A. ROHDES. *Mathematical models in biology - An introduction*. Cambridge University Press, (2004) :3-40.
- [3] H. AMANN. *Ordinary differential equations - An introduction to non-linear analysis*. Walter de Gruyter, Berlin. New York, (1990).
- [4] R. Arditi and L. R. Ginzburg. Coupling in predator-prey dynamics : ratio dependence. *J. Theor. Biol.* 139 (1989) 311-326.
- [5] P.Auger,C.Lett et J.C.Pogiale. *Modélisation mathématique en écologie*.
- [6] A. D. Bazykin. *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*. Series on Nonlinear Science. Ser. A, vol. 11. World Scientific, 244 Singapore. Chua, L.O. (Ed.), Original Russian version : Bazykin, A.D. Nauka, Moscow (1985).
- [7] J. R. Beddington. Mutual interference between parasites and its effect on searching efficiency. *J. Anim. Ecol.* 44 (1975) 331-340.

-
- [8] B. Belkhodja and A. Moussaoui, Global dynamics of a predator-prey system and its applications to biological control. Proceedings of ICCSA 2014. Normandie University, Le Havre, France-June (2014) 23-26.
- [9] K. Belkhodja, A. Moussaoui and M.A. Aziz Alaoui. Optimal harvesting and stability for a prey-predator model. *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 39 (2018) 321-336.
- [10] G. Birkhoff and G. C. Rota. *Ordinary differential Equations*. Ginn Boston, (1982).
- [11] K. Chakraborty, M. Chakraborty and T. Kar. Optimal control of harvest and bifurcation of a prey-predator model with stage structure. *Appl. Math. Comput.* 217 (2011) 8778-8792.
- [12] F. D. Chen. On a nonlinear non-autonomous predator-prey model with diffusion and distributed delay. *J. Comput. Appl. Math.* 180 (2005) 33-49.
- [13] C. W. Clark. *Mathematical bioeconomics, the Optimal management of renewable resources*, second ed. Wiley, New York, (1990).
- [14] N. Chiboub, S. M, Bouguima and A. Moussaoui. A prey-predator interaction under fluctuating level water. *Chaos, Solitons, Fractals* 45 (2012) 205-212.
- [15] H. Coops, M. Beklioglu and T.L. Crisman, The role of water-level fluctuations in shallow lake ecosystems workshop conclusions. *Hydrobiologia* 506 (2003) 23-27.

- [16] H. Dang-Vu et C. Delcarte. Bifurcations et chaos, une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Eds Ellipses, Universités -Mécanique, (2000).
- [17] T. Das, R. Mukherjee and K. Chaudhuri. Harvesting of a preypredator fishery in the presence of toxicity. *Appl. Math. Model.* 33 (2008) 2282-2292.
- [18] D. L. DeAngelis. A model for trophic interaction. *Ecology* 56 (1975) 881-892.
- [19] N. C. Fellah, S.M. Bouguima and A. Moussaoui. The effect of water level in a prey-predator interactions : A nonlinear analysis study, *Chaos, Solitons & Fractals.* 45 (2012) 205-212.
- [20] H; I. Freedman. *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology.* Marcel Dekker, (1980).
- [21] H. I. Freedman and G. S. K. Wolkowicz. Predator-prey systems with group defence : The paradox of enrichment revisited. *Bull. Math. Biol.* 48 (1986) 493-508.
- [22] W.H. Fleming and R.W. Rishel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control,* Springer Verlag, New York, (1975).
- [23] J. Hale. *Ordinary Differential Equations* Malabar, FL :Krieger, (1988).
- [24] Hale, J . (1993). *The theory of Functional Differential Equation with Applications in Population Dynamics,* Academie Press, New York.

-
- [25] M. P. Hassell and G. C. Varley. New inductive population model for insect parasites and its bearing on biological control. *Nature* 223 (1969) 1133-1136.
- [26] A. Hastings. Global stability of two species systems. *J. Math. Biol.* 5 (1978) 399-403.
- [27] X. Z, He. Stability and delays in a predator-prey system *J. Math. Anal. Appl.* 198 (1996) 355-370.
- [28] C, S, Holling. The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the European pine sawfly. *Can. Entomol.* 91 (1959) 293-320.
- [29] M. Jerry and N. Raissi. A policy of fisheries management based on continuous fishing effort. *J. Biol. Syst.* 9 (2001) 247-254.
- [30] T. K. Kar and U.K. Pahari. Modelling and analysis of a prey-predator system with stage-structure and harvesting. *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 8 (2007) 601609.
- [31] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Third Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, (2002).
- [32] Y. Kuang. *Delay Differential Equations, with Applications in population Dynamics*. Academic Press, New York, (1993).
- [33] A. Lyapunov. *Problème Général de la Stabilité du Mouvement* (1907).(Translation of the Russian original) Reprinted in *Ann.Math. Stud*, (1892), vol. 17. 10, 11.

- [34] T. R. MALTHUS. Essai sur le principe de population, volume 2(5e) Edition de Jean-Paul Maréchal. Paris, Garnier-Flammarion, Traduit de l'anglais par P. et G.Prévost en 1823 sur l'édition de 1817, édition, (1992).
- [35] A.Maiti, B.Patra and G.P. Samanta. Bionomic exploitation of a ratio-dependent predator-prey system, international journal of mathematical education in science and technology, Vol. 39, No. 8, 15 December (2008) 1061-1076.
- [36] R.E. Gaines and J.L. Mawhin. Coincidence Degree and Nonlinear Differential equations, Springer-Verlag, Berlin, (1977), p. 83.
- [37] M.A. Menouer and A. Moussaoui. Effects of consecutive water level fluctuations and harvesting on predator-prey interactions. Chaos, Solitons and Fractals (2016).
- [38] Moussaoui A. A reaction-diffusion equations modelling the effect of fluctuating water levels on prey-predator interactions. Appl Math Comput (2015); 268 :1110-385 21.
- [39] A. Moussaoui and S. M. Bouguima. A prey-predator interaction under fluctuating level water. Math. Meth. Appl. Sci. 38 (2015) 123-137.
- [40] A. Moussaoui, S. Bassaid and E. A. Dads. The impact of water level fluctuations on a delayed prey-predator model. Nonlinear Anal. Real World Appl. 21 (2015) 170-184.
- [41] J. D. Murray. Mathematical biology. Berlin : Springer-Verlag. (1993).

- [42] D. Pal a, G.S. Mahaptra b and G.P. Samanta. Optimal harvesting of prey-predator system with interval biological parameters : A bioeconomic model. *Mathematical Biosciences* 241 181187, (2013).
- [43] L. PERKO. *Differential equations and dynamical systems*. Springer 3rd Edition Verlag, New York (2001).
- [44] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyonskii, R.V, Gamkreldre and E. F.Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*. Wiley, NewYork, (1962).
- [45] L. Pontryagin et al.. *Mathematical theory of optimal processes*. Eds Mir Moscou, page 504 ; (1974).
- [46] T. Pradhan and K.S. Chaudhuri. Bioeconomic modeling of selective harvesting in an inshore-offshore fishery. *Differential Equations and Dynamic Systems* 7 (3), 305320, (1999).
- [47] X. Song and L. Chen. Optimal harvesting and stability for a two-species competitive system with stage structure. *Mathematical Biosciences* 170 (2001) 173-186.
- [48] R. M. Solow. The economics of resources or the resources of economics. *Am. Econ. Rev.* 64 (1974) 1-14.
- [49] E. TRELAT. *Contrôle optimal : Théorie et applications*. Ed Vuibert(2002).
- [50] S.Touzeau. *Modèle de contrôle en gestion des pêches*, thèse de doctorat. Université de Nice Sophia-Antipolis, (1997).

-
- [51] P.F. Verhulst. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*, 10, (1838), 113-121.
- [52] F.Verhulst. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Springer-Verlag, New-York, (1990).
- [53] V.Volterra. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthier-Villars, Paris, (1931).
- [54] J.H. Wlosinski and E.R. Koljord. *Effects of Water Levels on Ecosystems, an Annotated Bibliography, Long Term Resource Monitoring Program*. Technical Report 96-T007, (1996).
- [55] Yunfei. Lv, R. Yuan and Y. Pei. A prey-predator model with harvesting for fishery resource with reserve area. *Applied Mathematical Modelling* 1-15, (2012).
- [56] N.Zhang, F.Chen, Q.Su, and T.Wu. Dynamic Behaviors of a Harvesting Leslie-Gower Predator-Prey Model, *Discrete Dynamics in Nature and Society*. doi :10.1155/2011/473949. (2011).

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude mathématique de quelques modèles issus de la dynamique de populations. D'abord, nous étudions le comportement asymptotique d'un modèle proie-prédateur avec une nouvelle fonction réponse modélisant une population de poissons, et dont la pêche est portée sur les proies. En se basant sur le principe du maximum de Pontryaguin, nous maximisons les avantages qui proviennent de la pêche, tout en conservant l'espèce. Ensuite, nous étudions ce modèle proie-prédateur mais en pêchant les proies et les prédateurs avec deux efforts de pêche différents.

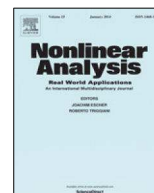
Mots clés : Modèle proie-prédateur, stabilité, équilibre bioéconomique, contrôle optimal, principe du maximum de Pontryaguin.

Abstract: This thesis is devoted to the mathematical study of some models resulting from population dynamics. First, we study the asymptotic behavior of a prey-predator model with a new response function modeling a fish population, and whose fishing is focused on prey. Based on the principle of Pontryaguin's maximum, we maximize the benefits that come from fishing, with conservation of the species. Next, we study this prey-predator model but by fishing prey species and predators with two different fishing efforts.

Keywords: Prey-predator model, stability, bioeconomic equilibrium, optimal control, maximum principle of Pontryaguin.

ملخص تتعلق هذه الأطروحة بدراسة بعض الأنظمة الديناميكية للسكان. أولاً، ندرس السلوك المتناظر لنموذج الفريسة المفترسة مع وظيفة استجابة والتي تتركز على صيد الفريسة، و هذا لدراسة تعظيم الدخل الصافي من الصيد، مع الحفاظ على الأنواع، وذلك بالإعتماد على مبدأ بونترياجين. ثم ندرس هذا النموذج الفريسة و المفترس و لكن بصيد الفريسة و المفترس بجهود صيد مختلفة.

الكلمات المفتاحية : نموذج فريسة و مفترس، الاستقرار، التوازن الحيوي الاقتصادي، التحكم الأمثل، مبدأ بونترياجين.



Optimal harvesting and stability for a prey–predator model

K. Belkhodja^a, A. Moussaoui^{a,*}, M.A. Aziz Alaoui^b^a *Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Tlemcen, Algeria*^b *Normandie Univ, UNIHAVRE, LMAH, FR-CNRS-3335, ISCN, 76600 Le Havre, France*

ARTICLE INFO

Article history:

Received 24 June 2016

Received in revised form 20 May 2017

Accepted 12 July 2017

Keywords:

Prey–predator fishery

Global stability

Optimal control

ABSTRACT

This paper describes a fish prey–predator model with a new functional response. The dynamics of the system is discussed mainly from the point of view of permanence and stability. We obtain conditions that affect the persistence of the system. Local asymptotic stability of various equilibrium solutions is explored to understand the dynamics of the model system. The global asymptotic stability of positive interior equilibrium solution is established using suitable Lyapunov functional. We then examine possibilities of the existence of bionomic equilibrium. Lastly, the optimal harvesting policy is obtained by using the Pontryagin's maximum principle. The objective is to maximize the monetary social benefit as well as conservation of the ecosystem.

© 2017 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction and mathematical model

Predator–prey dynamics are usually represented by a functional response, which is the amount of prey eaten per predator and per unit of time. This functional is a proxy of the flux of matter from one trophic level to another as it determines the transfer of biomass in the food chain [1]. Typically, a predator–prey model focuses on interactions between two species taking into account some aspects that are considered nodal to explain the dynamics. These interactions depend on the nature of the studied species [2–4]. Recently, in [5], authors proposed a new response functional in order to explain the influence of changing water level fluctuations in an artificial lake on fish predator–prey dynamics. In the studied lake, two interdependent species are considered; the pike (brochet in French) which is the most important predator and the roach (gardon in French) which is the prey. This response functional is based on the following general considerations. When a predator attacks a prey, it has access to a certain quantity of food depending on the water level. When the water level is low, during the autumn, the predator is more in contact with the prey, and the predation increases. Conversely, when the water level is high, in the spring, it is more difficult for the predator to find a prey and the predation decreases. It is assumed that the accessibility function $b(t)$ for

* Corresponding author.

E-mail addresses: moussaoui.ali@gmail.com, al_moussaoui@mail.univ-tlemcen.dz (A. Moussaoui).

the prey is continuous and 1-periodic, the minimum value b_1 is reached in spring and the maximum value b_2 is attained during autumn. The predator needs a quantity γ as food, but it has access to a quantity

$$g(x, y) = \frac{b(t)x}{y + D},$$

which depends on the water level, where D measures other causes of mortality outside of predation. Thus, if

$$g(x, y) \geq \gamma,$$

then the predator will be satisfied with the quantity γ for his food. Otherwise, if

$$g(x, y) < \gamma,$$

the predator will content himself with

$$g(x, y) = \frac{b(t)x}{y + D}.$$

To summarize, the quantity of food received per predator and per unit of time is

$$\min \left(\frac{b(t)x}{y + D}, \gamma \right). \tag{1}$$

The authors in [5] studied the following non-autonomous prey–predator model

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \min \left(\frac{b(t)x(t)}{y(t) + D}, \gamma \right) y(t), \\ \dot{y} = -dy(t) + e \min \left(\frac{b(t)x(t)}{y(t) + D}, \gamma \right) y(t). \end{cases} \tag{2}$$

The constants mentioned above are all positive. The prey grow logistically with carrying capacity K and intrinsic growth rate a . By using Gaines and Mawhin’s continuation theorem of coincidence degree theory [6], the authors have established sufficient conditions for the existence of positive periodic solutions of the prey–predator system (2). Such a solution describes an equilibrium situation consistent with the variability of environmental conditions, such that both populations survive. The trajectories in the phase plane of these solutions of the nonautonomous system take the place of the equilibria points of the autonomous system. In the numerical simulations given in [5], the periodic predation rate function $b(t) = b(1 + 0.5\cos(2\pi t))$ is used, for more details, see [5,7–9].

In the present work, we focus on the autonomous case and use as predation rate, the mean function $b = \int_0^1 b(t)dt$. Moreover, to investigate the effects of harvesting on the prey–predator ecosystem, we incorporate and extend the work done by [5]. We aim to obtain some results which are theoretically beneficial to maintaining the sustainable development of the prey–predator system as well as keeping the economic interest of harvesting at an ideal level. Therefore, we study the following prey–predator model:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \min \left(\frac{bx(t)}{y(t) + D}, \gamma \right) y(t) - qEx(t) := F_1(x, y), \\ \dot{y} = -dy(t) + e \min \left(\frac{bx(t)}{y(t) + D}, \gamma \right) y(t) := F_2(x, y), \end{cases} \tag{3}$$

where q is the catchability coefficient of the prey species and E denotes the effort devoted to the harvesting.

The present article is organized as follows: In Section 2, we focus on the dynamics of the system (3), specifically, we establish sufficient criteria for the boundedness, permanence, and predator extinction. The local and the global stability of the dynamical system for the model are studied in Section 3. In Section 4, the existence of a bionomic equilibrium is investigated. The optimal harvesting policy is studied with the help of Pontryagin’s maximum principle in Section 5. Some numerical examples are taken up to illustrate the results. Brief concluding remarks are given in Section 6 to close this work.

2. Mathematical analysis and main result

In this section, we give a qualitative analysis of system (3). From the standpoint of biology, we are only interested in the dynamics of model (3) in the closed first octant \mathbb{R}_+^2 . Thus, we consider the biologically meaningful initial condition $x(0) = x_0 \geq 0$ and $y(0) = y_0 \geq 0$.

It is easy to see that if $E > \frac{a}{q}$ then $\dot{x} < 0$, hence, throughout this analysis, we make the following assumption on the fishing effort:

$$E < \frac{a}{q}. \tag{H_0}$$

We also assume throughout this work that the predation rate b satisfies:

$$b < \min \left\{ \frac{\gamma(y_0 + D)}{x_0}, \frac{4a\gamma Dd}{K(a + d - qE)^2} \right\} := \tilde{b}. \tag{H_1}$$

Biologically, assumption (H₀) means that if the fishing effort increases beyond a threshold value (that is if $E > \frac{a}{q}$), then the two species vanish eventually.

Assumption (H₁) will be used in Subsection 2.1 to prove the persistence of system (3), and means that if the predation rate is less than a threshold value \tilde{b} , all the species are present and none of them will go to extinction.

We start by showing that solutions of (3) starting into \mathbb{R}_+^2 , exist, will remain there and are uniformly bounded. First of all, we state the following lemma:

Lemma 1. *Let $h : (x, y) \rightarrow \min(g(x, y), \gamma)$. If g is locally Lipschitz, then it is also goes for h .*

Proof. It is easy to see that

$$h(x, y) = \min(g(x, y), \gamma) = \frac{g(x, y) + \gamma - |g(x, y) - \gamma|}{2}.$$

The form of h with respect to g obviously shows that if g is locally Lipschitz, then h is locally Lipschitz. Hence, local existence and uniqueness of solutions of system (3) are obtained for the corresponding Cauchy problem [10]. □

Regarding the positivity and boundedness of the solution for system (3) we have the following lemma:

Lemma 2. 1. *The positive cone \mathbb{R}_+^2 is positively invariant for (3).*

2. *All the solutions of system (3) which initiate in \mathbb{R}_+^2 are bounded, with ultimate bound.*

Proof. Let the interval $[0, T_{max})$ be the maximal interval of existence of solutions of system (3).

1. From system (3), it follows that $x = 0$ (resp. $y = 0$) is an invariant subset, that is, $x = 0$ (resp. $y = 0$) if and only if $x(t) = 0$ (resp. $y(t) = 0$) for some t . Thus if $x(0) > 0$ (resp. $y(0) > 0$), then $x(t) > 0$ (resp. $y(t) > 0$) for all $t \in [0, T_{max})$.

2. Let us consider $w(t) = ex(t) + y(t)$, then the time derivative along the solutions of the system (3) is given by

$$\frac{dw}{dt} = e \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = eax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - eqEx - dy.$$

Hence

$$\frac{dw}{dt} + dw = ex \left[(a - qE + d) - \frac{a}{K}x \right] \leq e \frac{K}{4a} (a - qE + d)^2 := \mu$$

where μ is the maximum value of the function $ex \left[(a - qE + d) - \frac{a}{K}x \right]$. By using the differential inequality [10], we obtain

$$\begin{aligned} 0 \leq w(t) &\leq e^{-dt}w(0) + \frac{\mu}{d}(1 - e^{-dt}) \\ &\leq \max\left(w(0), \frac{\mu}{d}\right). \end{aligned}$$

From the well known extension theorem, we have $T_{max} = \infty$, therefore the solutions are bounded. Moreover, we have $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \leq \frac{\mu}{d}$, which is independent of the initial condition.

Hence all the solutions of (3) that initiate in \mathbb{R}_+^2 are confined in the region

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq w = ex + y \leq \frac{\mu}{d} + \varepsilon \right\},$$

for any $\varepsilon > 0$ as $t \rightarrow \infty$.

2.1. Persistence and permanence

In this subsection, we analyze the persistence (weak and strong) and permanence behavior of system (3).

Definition 1 (Persistence). System (3) is said to be weakly persistent if every solution $(x(t), y(t))$ satisfies two conditions:

- (i) $x(t) \geq 0, y(t) \geq 0, \forall t \geq 0$.
- (ii) $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) > 0, \limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) > 0$.

System (3) is said to be strongly persistent if every solution $(x(t), y(t))$ satisfies the following condition along with the first condition of the weak persistence:

- (iii) $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) > 0, \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) > 0$.

Definition 2 (Permanence and non-permanence). System (3) is said to be permanent if there exist positive constants $0 < m \leq M$ such that,

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \right\} \geq m, \quad \max \left\{ \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t), \limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \right\} \leq M$$

for all solutions $(x(t), y(t))$ of system (3) with positive initial values.

System (3) is said to be non-permanent if there is a positive solution $(x(t), y(t))$ of (3) and such that,

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \right\} = 0.$$

Geometrically, persistence means that trajectories that initiate in a positive cone are eventually bounded away from coordinate planes. On the other hand, permanently coexistence (uniform persistence) implies the existence of a region in the phase space at a non-zero distance from boundary in which population vectors must lie ultimately. The last ensures the survival of species in biological sense.

To establish the persistence for system (3), we need to recall the following lemma, whose proof can be found in [11].

Lemma 3. *If $a, b > 0$ and $\frac{dX}{dt} \leq$ (resp. \geq) $X(t)(a - bX(t))$, with $X(0) > 0$, then we have*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} X(t) \leq \frac{a}{b} \left(\text{resp. } \liminf_{t \rightarrow \infty} X(t) \geq \frac{a}{b} \right).$$

Let us denote:

$$\begin{aligned} m_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{K}{a}(a - qE - b), \\ m_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{ebm_1}{d} - D, \\ M_1 &\stackrel{\text{def}}{=} K, \\ M_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{ebM_1}{d} - D, \end{aligned}$$

then $M_i > m_i, i = 1, 2$. We will show that $\max\{m_i, 0\}(i = 1, 2)$ are the lower bounds for the limiting bounds of species, as time t goes to infinity. This is obvious when $m_i \leq 0$. Therefore, it is assumed that:

$$m_i > 0, i = 1, 2. \tag{H_2}$$

Our main result is stated in the following proposition.

Proposition 1. *In addition to (H₀), (H₁), assume further that (H₂) holds. Then system (3) is permanent, i.e., any positive solution (x(t),y(t)) of system (3) satisfies*

$$\begin{aligned} 0 < m_1 &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M_1, \\ 0 < m_2 &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M_2. \end{aligned}$$

Proof. As the variables x, y are positive, from the first equation of system (3), it follows that:

$$\frac{dx}{dt} \leq ax \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

using Lemma 3, we get

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M_1. \tag{4}$$

Thus, for arbitrary $\varepsilon_1 > 0$, there exists a positive real number T_1 such that

$$x(t) \leq M_1 + \varepsilon_1, \forall t \geq T_1.$$

Further, from the predator equation, it follows that for $t \geq T_1$,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &\leq y \left(-d + \frac{eb(M_1 + \varepsilon_1)}{y + D}\right), \\ &= \frac{y}{y + D} (eb(M_1 + \varepsilon_1) - dD - dy), \\ &\leq \frac{1}{D} y (eb(M_1 + \varepsilon_1) - dD - dy). \end{aligned}$$

Using Lemma 3 and the arbitrariness of ε_1 , we obtain

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M_2. \tag{5}$$

Thus, for arbitrary $\varepsilon_2 > 0$, there exists a positive real number $T_2 > T_1$, such that

$$y(t) \leq M_2 + \varepsilon_2, \forall t \geq T_2.$$

Hence, system (3) is dissipative.

Before proving the strongly persistence of system (3), we give the following result.

Proposition 2. *Under hypothesis (H₁), we have for all t ≥ 0,*

$$bx(t) < \gamma(y(t) + D).$$

Proof. Let

$$u(t) = bx(t) - \gamma(y(t) + D),$$

note that $u(0) < 0$ by assumption (H₁). It is claimed that $u(t) < 0$ for all $t \geq 0$. If this was not the case, there exists $t_0 > 0$ such that:

$$u(t_0) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{du}{dt}(t_0) \geq 0.$$

The condition $u(t_0) = 0$ implies that

$$y(t_0) = \frac{bx(t_0)}{\gamma} - D.$$

From (3), we get

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t_0) &= b\frac{dx}{dt}(t_0) - \gamma\frac{dy}{dt}(t_0) \\ &= -b(b + e\gamma)\frac{y(t_0)}{y(t_0) + D}x(t_0) + b(a + d - qE)x(t_0) - \gamma dD - \frac{ba}{K}(x(t_0))^2, \end{aligned}$$

it follows that

$$\frac{du}{dt}(t_0) \leq -\frac{ba}{K}(x(t_0))^2 + b(a + d - qE)x(t_0) - \gamma dD.$$

Condition (H₁) implies that

$$\frac{du}{dt}(t_0) < 0,$$

which leads to a contradiction. Therefore $u(t) < 0$ for all $t \geq 0$. □

Consequently under hypothesis (H₁) system (3) is reduced to the simple form

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bxy}{y + D} - qEx, \\ \frac{dy}{dt} = -dy + \frac{ebxy}{y + D}. \end{cases} \tag{6}$$

Now, we come back to the proof of the (strongly) persistence of system (6) (which is equivalent to system (3) under hypothesis (H₁)).

According to the first equation of system (6), it is easy to see that

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \left(a - \frac{ax}{K} - \frac{by}{y + D} - qE \right) \\ &\geq x \left(a - qE - b - \frac{ax}{K} \right). \end{aligned}$$

Using Lemma 3, we obtain

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq m_1. \tag{7}$$

For arbitrary $\epsilon_3 > 0$, there exists a positive real number T_3 such that

$$x(t) \geq m_1 - \epsilon_3, \forall t \geq T_3. \tag{8}$$

Thus, by applying (8) to the second equation of system (6), we obtain

$$\frac{dy}{dt} \geq \frac{y}{y + D} \left(eb(m_1 - \epsilon_3) - dD - dy \right),$$

and for $t \geq T_4 = \max\{T_2, T_3\}$, we get

$$\frac{dy}{dt} \geq \frac{1}{M_2 + \epsilon_2 + D} y \left(eb(m_1 - \epsilon_3) - dD - dy \right), \forall t \geq T_4.$$

Using Lemma 3 and the arbitrariness of ϵ_2 and ϵ_3 , we obtain

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \frac{ebm_1}{d} - D := m_2. \tag{9}$$

Eqs. (4), (5), (7) and (9), show that under the assumption of Proposition 1, system (3) is permanent. \square

In the next proposition, we are able to give sufficient conditions under which the given system is not persistent.

Proposition 3. *If $M_2 < 0$, then $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, that is, the predator goes to extinction.*

Proof. Using the upper bounds for x , from the predator equation, we have

$$\frac{dy}{dt} \leq y \left(-d + \frac{ebM_1}{D} \right),$$

then

$$y(t) \leq y_0 e^{\left(-d + \frac{ebM_1}{D}\right)t}.$$

Thus, under the given hypothesis, $y(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. That is predator goes to extinction. \square

Remark 1. Biologically, it means that, when the predation rate is enough small, the predator disappears.

3. Steady states and their existence

System (6) possesses the following three equilibria:

(i) The trivial equilibrium $P^0 = (0, 0)$.

(ii) The predator free equilibrium $P^1 = (\bar{x}, 0)$, where $\bar{x} = \frac{K}{a} (a - qE)$.

(iii) The steady state of coexistence (interior equilibrium point) $P^* = (x^*, y^*)$. The last is the point of intersection of the prey zero growth rate isocline (i.e., $\frac{dx}{dt} = 0$) and the predator zero growth rate isocline (i.e., $\frac{dy}{dt} = 0$) given by

$$\begin{cases} a \left(1 - \frac{x^*}{K} \right) - \frac{by^*}{y^* + D} - qE = 0, \\ -d + \frac{ebx^*}{y^* + D} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

where $y^* = \frac{1}{2} (-B + \sqrt{B^2 - 4C})$, $x^* = \frac{d}{eb} (y^* + D)$

and

$$B = 2D - \frac{ebK(a-qE-b)}{ad} = D - m_2, C = D^2 - \frac{ebKD(a-qE)}{ad}.$$

Note that $\sqrt{B^2 - 4C}$ is always positive, then, the interior equilibrium is positive if one of the two cases holds:

1. $B < 0, (m_2 > D)$ which is equivalent to $0 < E < \frac{a}{q}(1 - \frac{2dD}{ebK}) - \frac{b}{q}$,
2. $B \geq 0$ and $C < 0$, that is $0 < \frac{a}{q}(1 - \frac{2dD}{ebK}) - \frac{b}{q} \leq E < \frac{a}{q}(1 - \frac{dD}{ebK})$.

Hence, the interior equilibrium is positive if and only if condition

$$0 < E < \frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK} \right), \tag{H_3}$$

holds.

3.1. Dynamical behavior: stability analysis

The stability of the equilibrium state is determined by the nature of the eigenvalues of the Jacobian matrix around the equilibrium point.

Proposition 4. 1. *The equilibrium point P^0 is always a saddle point.*

2. *The point P^1 is stable iff*

$$E > \frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK} \right). \tag{H_3^c}$$

3. *The Steady state P^* is locally asymptotically stable when it exists.*

Proof.

To obtain the local stability results, we use the Jacobian matrix associated to system (6)

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - qE - \frac{2ax}{K} - \frac{by}{y + D} & \frac{-bDx}{(y + D)^2} \\ \frac{eby}{y + D} & -d + \frac{ebDx}{(y + D)^2} \end{pmatrix}.$$

The Jacobian matrix of the equilibrium $P_0 = (0, 0)$ is

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a - qE & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}.$$

Hence, P_0 is a saddle point.

• The Jacobian matrix of the equilibrium $P_1 = (\bar{x}, 0)$ is

$$J(\bar{x}, 0) = \begin{pmatrix} -(a - qE) & -\frac{bK(a - qE)}{Da} \\ 0 & -d + \frac{ebK(a - qE)}{Da} \end{pmatrix}.$$

If (H_3^c) holds, then P_1 is stable, and there is no interior equilibrium, otherwise, if

$$E < \frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK} \right),$$

then P_1 is unstable.

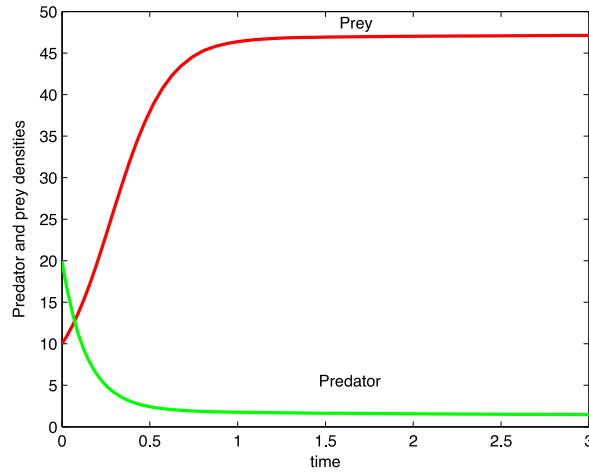


Fig. 1. Both the prey and predator populations converge to their equilibrium values. $a = 12, b = 10, K = 20, e = 1.25, p = 1, D = 4, q = 6, E = 0.15$.

• The Jacobian matrix for P^* is

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\frac{ax^*}{K} & -\frac{bDx^*}{(y^* + D)^2} \\ \frac{eby^*}{y^* + D} & -\frac{ebx^*y^*}{(y^* + D)^2} \end{pmatrix}.$$

It is easy to see that the trace of $J(x^*, y^*)$ is

$$\text{tr}J(x^*, y^*) = -\frac{ax^*}{K} - \frac{ebx^*y^*}{(y^* + D)^2} < 0,$$

and its determinant is

$$\det J(x^*, y^*) = \frac{aebx^{*2}y^*}{K(y^* + D)^2} + \frac{eb^2Dx^*y^*}{(y^* + D)^3} > 0.$$

Hence (x^*, y^*) is locally asymptotically stable whenever it exists (see Figs. 1 and 2). \square

3.2. Global stability

In this subsection, we shall establish the global asymptotic stability of the co-existing equilibrium point P^* by constructing a suitable Lyapunov function.

Theorem 1. *If conditions (H_0) – (H_3) hold, then, the co-existing equilibrium point P^* is globally asymptotically stable.*

Proof. Let

$$V(x, y) = \left[(x - x^*) - x^* \log\left(\frac{x}{x^*}\right) \right] + \alpha \left[(y - y^*) - y^* \log\left(\frac{y}{y^*}\right) \right],$$

where α is a positive constant to be chosen suitably in the subsequent steps. It can be easily verified that the function V is zero at the equilibrium (x^*, y^*) and is positive for all other positive values of x, y .

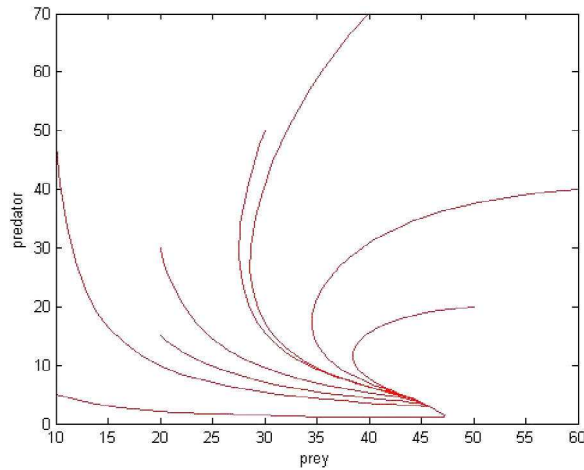


Fig. 2. Phase space trajectories corresponding to different initial conditions.

The time derivative of V along the trajectories of (6) is given by

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{x - x^*}{x} \frac{dx}{dt} + \alpha \frac{y - y^*}{y} \frac{dy}{dt} \\ &= (x - x^*) \left[(a - qE) - \frac{a}{K}x - \frac{by}{y + D} \right] + \alpha (y - y^*) \left[-d + \frac{ebx}{y + D} \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Also we have the set of equilibrium equations corresponding to the steady state $P_2 = (x^*, y^*)$:

$$\begin{aligned} a \left(1 - \frac{x^*}{K} \right) - \frac{by^*}{y^* + D} - qE &= 0, \\ -d + \frac{ebx^*}{y^* + D} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

We can write Eq. (11) together with the above two equations in the form:

$$\frac{dV}{dt} = (x - x^*) \left[-\frac{a}{K}x - \frac{by}{y + D} + \frac{a}{K}x^* + \frac{by^*}{y^* + D} \right] + \alpha (y - y^*) \left[\frac{ebx}{y + D} - \frac{ebx^*}{y^* + D} \right].$$

By choosing

$$\alpha = \frac{D}{e(y^* + D)},$$

we obtain

$$\frac{dV}{dt} = - \left[\frac{a}{K}(x - x^*)^2 + \frac{ebhx^*}{(y + D)(y^* + D)}(y - y^*)^2 \right]$$

thus, $\frac{dV}{dt} < 0$ strictly for all $x, y > 0$ except the interior equilibrium point (x^*, y^*) where $\frac{dV}{dt} = 0$. Thus $V(x, y)$ satisfies Lyapunov’s asymptotic stability theorem [10], and the interior equilibrium point P^* of system (6) is globally asymptotically stable. \square

Remark 2. The consequence of global stability is that exploitation will not irreversibly change the system. As long as the prey are not made extinct by excessive exploitation of their food supply, the system is able to recover.

4. Bionomic equilibrium

As we have already seen, a biological equilibrium is given by $\dot{x} = \dot{y} = 0$. The bionomic equilibrium is said to be achieved when the total revenue obtained by selling the harvested biomass equals the total cost utilized in harvesting it [12].

Let c be a constant fishing cost per unit effort and p the constant price per unit biomass of prey fish. Then, the economic rent (net revenue) at any time is given by,

$$\pi = (pqx - c) E. \tag{13}$$

The bionomic equilibrium is $P_\infty(x_\infty, y_\infty, E_\infty)$, where $x_\infty, y_\infty, E_\infty$ are the positive solutions of

$$\begin{aligned} a \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{by}{y + D} - qE &= 0, \\ -d + \frac{ebx}{y + D} &= 0, \\ \pi = (pqx - c)E &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

It may be noted here that if $c > pqx$, i.e., if fishing cost exceeds the revenue obtained from it, then the economic rent obtained from the fishery becomes negative. Hence the fishery will be closed and no bionomic equilibrium exists. Therefore, in order to achieve the bionomic equilibrium, the following inequality must hold $c < pqx$.

Solving the above equations, we get,

$$x_\infty = \frac{c}{pq}, \tag{15}$$

$$y_\infty = \frac{ebc}{pqd} - D, \tag{16}$$

where $y_\infty > 0$, if

$$\frac{ebc}{pqd} - D > 0 \tag{H_4}$$

and

$$E_\infty = \frac{1}{q} \left[a \left(1 - \frac{c}{pqK}\right) - \frac{by_\infty}{y_\infty + D} \right]. \tag{17}$$

Since $c < pqx < pqK$, therefore $1 - \frac{c}{pqK} > 0$, and since (H₄) is satisfied, hence

$E_\infty > 0$, if

$$a \left(1 - \frac{c}{pqK}\right) > \frac{by_\infty}{y_\infty + D}. \tag{H_5}$$

Therefore, we have the following theorem.

Theorem 2. *The bionomic equilibrium $P_\infty(x_\infty, y_\infty, E_\infty)$ exists if in addition to (H₀)–(H₃), conditions (H₄) and (H₅) hold together.*

Interpretation. If $E > E_\infty$, then the total cost utilized in harvesting the prey population would exceed the total revenues obtained from the fishery. Hence, some of the fishermen would be in loss and, naturally, they would withdraw their participation from the fishery. Hence $E > E_\infty$ cannot be maintained indefinitely. If conversely $E < E_\infty$, then the fishery is more profitable, and hence in an open access fishery it would attract more and more fishermen. This will have an increasing effect on the harvesting effort. Hence $E < E_\infty$ also cannot be maintained indefinitely (see Fig. 3).

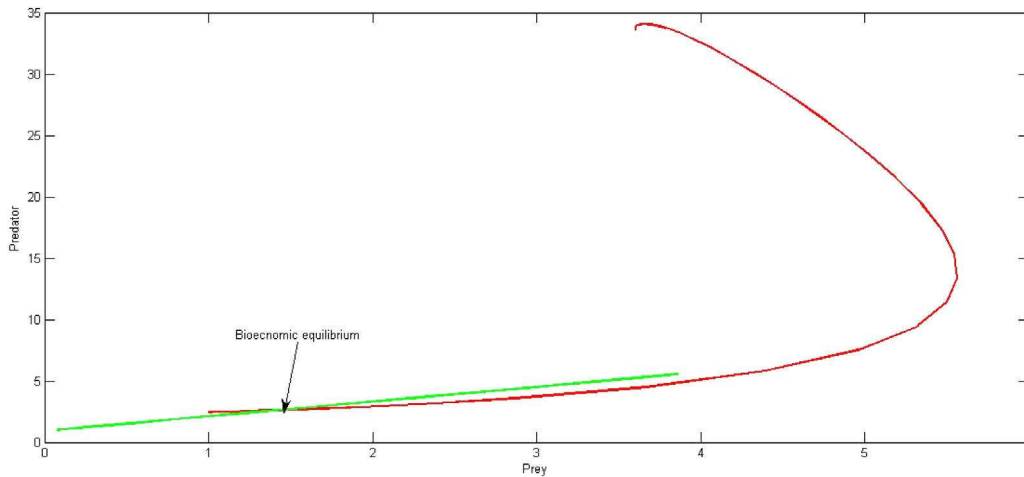


Fig. 3. Phase diagram showing the unique bioeconomic equilibrium. $a = 12, b = 10, K = 20, e = 1.25, p = 1, D = 4, q = 6, E = 0.15$.

5. Optimal harvesting policy

The fundamental problem in the determination of an optimal harvest policy in a commercial fishery is to determine the optimal trade-off between the current and future harvests [12–18]. As observed by Clark [12], this problem, which is the very essence of resource conservation, is an exceedingly difficult one, not from a mathematical point of view perhaps, but certainly from a political and philosophical viewpoint. The standard device used to handle questions of inter temporal economic benefits is time discounting. Although there is considerable controversy as to the social justifiability of this concept [19], time discounting is a normal practice in business management.

To determine an optimal harvesting policy, we consider the present value J of a continuous time-stream of revenues, given by

$$J(E) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \pi(x, y, E) dt, \tag{18}$$

where π is given by $\pi = (pqx - c)E$ and δ is the instantaneous annual rate of discount.

Let us denote by E_δ an optimal control with corresponding states x_δ and y_δ . We take $A_\delta = (x_\delta, y_\delta)$ as optimal equilibrium point. Here we intend to derive optimal control E_δ such that

$$J(E_\delta) = \max\{J(E), E \in V\},$$

where $V = [0, E_{max}]$ is the control set, and E_{max} is a feasible upper limit for the harvesting effort.

Now the Hamiltonian of this optimal control problem is

$$H = e^{-\delta t} (pqx - c) E + \lambda_1 \left(ax \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{bxy}{y + D} - qEx \right) + \lambda_2 \left(-dy + \frac{ebxy}{y + D} \right), \tag{19}$$

where λ_1 and λ_2 are the adjoint variables.

The objective functional and the differential equations are linear in the control with bounded states, and one can show by standard results that an optimal control and corresponding optimal states exist [20].

Since the Hamiltonian is linear in the control, we must consider if the optimal control is bang–bang (at its lower or upper bound), singular or a combination. The singular case could occur if the slope or the switching function

$$\frac{\partial H}{\partial E} = e^{-\delta t} (pqx - c) - \lambda_1 qx := \sigma(t) \tag{20}$$

is zero on non-trivial interval of time. Note that the optimal control would be at its upper bound or its lower bound according to:

$$\sigma(t) > 0 \text{ or } < 0.$$

To investigate the singular case, let us suppose $\sigma(t) = 0$ on some non-trivial interval. In this case, the optimal harvesting policy is

$$E(t) = \begin{cases} E_{max} & \text{if } \sigma(t) > 0, \\ E^* & \text{if } \sigma(t) = 0, \\ 0 & \text{if } \sigma(t) < 0. \end{cases}$$

When $\sigma(t) = 0$, it follows that

$$\lambda_1 qx = e^{-\delta t} (pqx - c) = e^{-\delta t} \frac{\partial \pi}{\partial E}. \tag{21}$$

This implies that the users cost of harvest per unit of effort equals the discounted value of the future marginal profit of the effort at the steady-state level.

By the maximum principle [21], the adjoint variables satisfy

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -\left[e^{-\delta t} pqE + \lambda_1 \left\{ a - \frac{2ax}{K} - \frac{by}{y+D} - qE \right\} + \lambda_2 \left\{ \frac{eby}{y+D} \right\} \right], \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ &= -\left[\lambda_1 \left\{ \frac{-bDx}{(y+D)^2} \right\} + \lambda_2 \left\{ -d + \frac{ebDx}{(y+D)^2} \right\} \right]. \end{aligned} \tag{22}$$

We seek to find the optimal equilibrium solution of the problem, hence x, y and E are to be treated as constants in the subsequent steps.

Considering the interior equilibrium $P_2 = (x^*, y^*)$, for singular control, we have $\frac{\partial H}{\partial E} = 0$. This gives

$$\lambda_1 = e^{-\delta t} \left(p - \frac{c}{qx^*} \right). \tag{23}$$

The shadow price $\lambda_1 e^{\delta t}$ remains bounded as $t \rightarrow \infty$, hence it satisfies the transversality condition at ∞ .

Now, (23) can be written as $\lambda_1 = A_1 e^{-\delta t}$, where $A_1 = p - \frac{c}{qx^*}$.

Similarly, considering the interior equilibrium $P_2 = (x^*, y^*)$, from (22), we get

$$\frac{d\lambda_2}{dt} - A_2 \lambda_2 = -A_1 A_3 e^{-\delta t}, \tag{24}$$

whose solution is given by

$$\lambda_2(t) = \frac{A_1 A_3}{A_2 + \delta} e^{-\delta t}, \tag{25}$$

where $A_1 = p - \frac{c}{qx^*}$, $A_2 = \frac{ebDx^*}{(y^*+D)^2} - d$ and $A_3 = -\frac{bDx^*}{(y^*+D)^2}$, which also satisfies the transversality condition.

The singular path is given by

$$\left(p - \frac{c}{qx^*}\right) = A_1, \quad (26)$$

which can be written as $G(x^*) = \left(p - \frac{c}{qx^*}\right) - A_1 = 0$.

There exists a unique positive root $x^* = x_\delta$ of $G(x^*) = 0$ in the interval $0 < x_\delta < K$ if the following inequalities hold:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) < 0, \quad G(K) > 0, \quad G'(x) > 0 \quad \text{for } x > 0.$$

For $x^* = x_\delta$, we get

$$y_\delta = \frac{eb}{d}x_\delta - D,$$

where

$$y_\delta > 0 \quad \text{if } x_\delta > \frac{dD}{eb}$$

and

$$E_\delta = \frac{1}{q} \left[a \left(1 - \frac{x_\delta}{K} \right) - \frac{by_\delta}{y_\delta + D} \right],$$

which verifies

$$E_\delta > 0 \quad \text{if } a \left(1 - \frac{x_\delta}{K} \right) > \frac{by_\delta}{y_\delta + D}.$$

6. Concluding remarks

In the present paper, we have considered and analyzed a predator–prey system with harvesting taking into account the quantity of food received by the predator. This work can be looked upon as an extension of the work in [5,7]. The main modification here is that the predation rate in the functional response is chosen as the average of predation rate in one year and prey population is subjected to harvesting. The objectives were the analysis of the dynamical properties of different equilibrium points of the system, and studying the harvesting strategy that results in maximizing the profit without leading to extinction. Our investigation indicates that fishing effort and predation rate play an important role to change different steady state behaviors.

Firstly, we showed that if the fishing effort increases beyond a threshold value, that is, if $E > \frac{a}{q}$, then both species will become extinct and the system will not be permanent. To avoid this situation, hypothesis (H_0) was assumed.

Also, in order to simplify our study, we have made few assumptions, assumed that the predation rate is less than a critical value given by condition (H_1) which depends on biological parameters.

Secondly, with use of the stability theory of ordinary differential equations, we proved that the interior equilibrium of the reduced model exists under certain conditions, and it is globally asymptotically stable. On the other hand, it is important to note that the presence of harvesting can impact the existence and the behavior of the positive equilibrium, that is for $0 \leq E \leq \frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK} \right)$, the two fish populations can be maintained at an appropriate equilibrium level in the habitat. As harvesting becomes larger than the level $\frac{a}{q} \left(1 - \frac{dD}{ebK} \right)$, overharvesting can lead to the extinction of the predators. Indeed, the density of the prey

population decreases with increasing effort used to harvesting, which leads to a more difficult situation for the predator to find a prey, and to possible extinction. The major contributions of this paper are as follows:

1. The persistence of the species depends on two factors. The first is biological and concerns the predation rate b , indeed, we have shown that the threshold between persistence and extinction depends critically on the predation rate b , if the predation rate is between two levels (i.e., (H_1) , (H_2) hold), then both prey and predator population coexist. However, when predation rate is less than a critical value given by [Proposition 3](#), then the predator goes to extinction. The second is linked to the exploitation and mechanisms that reduce the fishing effort (i.e., (H_3) holds). The last can be reduced by limiting the time for fishing, reducing the capacity that a vessel can carry, or installing protected area.

2. The ecosystem is often altered by human activities. We analyzed the harvesting strategy that results in maximizing the profit and does not lead to extinction. We obtained the optimal harvesting equation by using Pontryagin's maximum principle.

Finally, we can easily check the compatibility of all hypotheses used in this work. The results and the methodological framework outlined here will provide a useful tool to investigate the consequences for particular real systems in future work. It may also be pointed out that in this paper several important parameters such as refuge, interaction with other species, etc. are disregarded. Hence, further research is necessary to accomplish the needs in this field.

Acknowledgments

This work is supported by the National Research Project: CNEPRU B02020140100. Most part of this work was done during the stay of the second author at Applied Mathematics Laboratory of Le Havre University. We thank the referees for their many thoughtful suggestions that lead to an improved exposition of our manuscript.

References

- [1] J.C. Poggiale, Predator–prey models in heterogeneous environment: Emergence of functional response, *Math. Comput. Modelling* 27 (1998) 63–71.
- [2] A.D. Bazykin, in: L.O. Chua (Ed.), *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, in: *Series on Nonlinear Science. Ser. A*, Vol. 11, World Scientific, Singapore, 1985 Original Russian version: Bazykin, AD Nauka, Moscow.
- [3] C.S. Holling, The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the European pine sawfly, *Can. Entomol.* 91 (1959) 293–320.
- [4] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [5] N. Chiboub, S.M. Bouguima, A. Moussaoui, A prey-predator interaction under fluctuating level water, *Chaos Solitons Fractals* 45 (2012) 205–212.
- [6] R.E. Gaines, J.L. Mawhin, *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, p. 83.
- [7] A. Moussaoui, S.M. Bouguima, A prey-predator interaction under fluctuating level water, *Math. Methods Appl. Sci.* 38 (2015) 123–137.
- [8] A. Moussaoui, S. Bassaid, E.A. Dads, The impact of water level fluctuations on a delayed prey-predator model, *Nonlinear Anal. RWA* 21 (2015) 170–184.
- [9] A. Moussaoui, A reaction–diffusion equations modelling the effect of fluctuating water levels on prey-predator interactions, *Appl. Math. Comput.* 268 (2015) 1110–1121.
- [10] J. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Krieger, Malabar, FL, 1988; *Appl.* 198, 1996p. 355–370.
- [11] F.D. Chen FD, On a nonlinear non-autonomous predator–prey model with diffusion and distributed delay, *J. Comput. Appl. Math.* 180 (2005) 33–49.
- [12] C.W. Clark, *Mathematical Bioeconomics, the Optimal Management of Renewable Resources*, second ed., Wiley, New York, 1990.
- [13] B. Belkhdja, A. Moussaoui, Global dynamics of a predator–prey system and its applications to biological control, in: *Proceedings of ICCSA 2014*, Normandie University, Le Havre, France, June 2014, pp. 23–26.
- [14] K. Chakraborty, M. Chakraborty, T. Kar, Optimal control of harvest and bifurcation of a prey-predator model with stage structure, *Appl. Math. Comput.* 217 (2011) 8778–8792.
- [15] T. Das, R. Mukherjee, K. Chaudhuri, Harvesting of a prey–predator fishery in the presence of toxicity, *Appl. Math. Model.* 33 (2008) 2282–2292.

- [16] M. Jerry, N. Raissi, A policy of fisheries management based on continuous fishing effort, *J. Biol. Syst.* 9 (2001) 247–254.
- [17] X. Song, L. Chen, Optimal harvesting and stability for a two-species competitive system with stage structure, *Math. Biosci.* 170 (2001) 173–186.
- [18] T.K. Kar, U.K. Pahari, Modelling and analysis of a prey-predator system with stage-structure and harvesting, *Nonlinear Anal. RWA* 8 (2007) 601–609.
- [19] R.M. Solow, The economics of resources or the resources of economics, *Amer. Econ. Rev.* 64 (1974) 1–14.
- [20] W.H. Fleming, R.W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer Verlag, New York, 1975.
- [21] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyonskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, New York, 1962.