République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

En : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques appliquées \ Equations aux dérivées partielles et applications

Par :TOUATI Sarra

Sujet

Classification des solutions oscillantes pour le système d'Euler

Soutenu publiquement, le 27 / 09 / 2018 , devant le jury composé de :

Mr. Ahmed BENSEDIK	M.C.B	U. Tlemcen	Examinateur
Mr. Bachir MISSIRDI	M.C.B	U. Tlemcen	Examinateur
Mr. Mekki HOUBAD	M.C.B	U. Tlemcen	Encadreur

Remerciment

En premier lieu, je remercie Allah, le tout puissant, qui m'a donné durant toutes ces années la santé, le courage et la volonté pour réaliser ce travail.

Je remercie vivement, Monsieur Mekki HOUBAD, pour avoir assuré la direction de ce travail, et pour m'avoir apporté la rigueur scientifique nécessaire à son bon déroulement.

Je remercie mes professeurs ; Monsieur Ahmed Bensedik et Monsieur Bachir MESSIRDI de m'avoir fait l'honneur d'acceptant de participer à ce jury.

Que ce travail témoigne de mes respects à mon père et ma mère, grace à leurs tendre encouragement ils ont pu créer le climat affectueux et propice pour réaliser mes études.

A mon cher fils Souhaib, à mon cher mari, à mon cher frère Abdelkader.

A mes chère soeurs Yasmina et Souhila.

A mes deux chère familles Touati et Serir.

A tous mes professeurs et tous mes collègues.

Table des matières

1

Introduction.

Soit $(T, V, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ avec $T\,V \leq r$. on travail dans un domaine de détermination qui à la forme d'un cône tronqué

$$\Omega_r^T := \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^3;\ |x| + t\,V \leq r\}, \qquad |x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

On étudier l'expression $u^\varepsilon(t,x)$, avec $\varepsilon \in]0,1]$, qui est une solution spéciale pour le système de burger trie dimensionnel sans terme source

$$\partial_t u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon = 0, \qquad (t,x) \in \Omega_r^T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3. \tag{1.1}$$

On complète (1.1) avec la famille des données initiales oscillantes

$$u^\varepsilon(0,x) = h^\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} h_1^\varepsilon(x) \\ h_2^\varepsilon(x) \\ h_3^\varepsilon(x) \end{pmatrix} = w\Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big), \quad (x,\varepsilon) \in \Omega_r^0 \times]0,1]. \tag{1.2}$$

La fonctions $h^\varepsilon(x)$ est définie dans la boule fermée Ω_r^0 (de center zéro et de rayon r) par l'utilisation d'un profil borné $w(x,\theta) \in \mathcal{C}_b^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^3)$ satisfait

$$\exists\ (x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}; \qquad \partial_\theta w(x,\theta) \neq 0, \qquad \mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

et une phase $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0; \mathbb{R})$ non stationnaire

$$\nabla\varphi(x) := \begin{pmatrix} \partial_1\varphi(x) \\ \partial_2\varphi(x) \\ \partial_3\varphi(x) \end{pmatrix} \neq 0, \qquad \forall\ x \in \Omega_r^0. \tag{1.4}$$

L'equation (1.1) est le prototype d'un système hyperbolique quasilinéaire. La solution $u^\varepsilon(t,x)$ of (1.1) a travers la donnée initiale $h^\varepsilon(x)$ admet une vitesse de propagation finie V. Vu (1.2), on note par $w = {}^t(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, on obtient

$$V := sup\,\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{3} w_i(x,\theta)^2\Big)^{1/2};\ (x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}\Big\} < \infty.$$

Pour résoudre le problème de Cauchy (1.1)-(1.2) dans la classe des fonctions $\mathcal{C}^1$ dans le domaine de détermination Ω_r^T with $(T,r) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ indépendamment de $\varepsilon \in]0,1]$. On note par $D_x h^\varepsilon$ la matrice Jacobienne de h^ε,

$$D_x h^\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 h_1^\varepsilon(x) & \partial_2 h_1^\varepsilon(x) & \partial_3 h_1^\varepsilon(x) \\ \partial_1 h_2^\varepsilon(x) & \partial_2 h_2^\varepsilon(x) & \partial_3 h_2^\varepsilon(x) \\ \partial_1 h_3^\varepsilon(x) & \partial_2 h_3^\varepsilon(x) & \partial_3 h_3^\varepsilon(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}^3).$$

Le point de départ est le Théorème 2.6 de [1]. pour avoir des solution dans Ω_r^T de classe $\mathcal{C}^1$ pour le problème de Cauchy (1.1)-(1.2), il suffit de voir ce qui ce passe à l'instant $t = 0$. Une condition nécessaire et suffisante est d'avoir

$$\big(D_x h^\varepsilon(x)\big)^3 = 0, \qquad \forall\,(x,\varepsilon) \in \Omega_r^0 \times]0,1]. \tag{1.5}$$

Et vu (see [1]), la solution de (1.1)-(1.2) satisfait $\operatorname{div} u^\varepsilon = 0$ dans Ω_r^T.

1.1 Résultats principaux.

Dans cet article on travaille dans le cas de la dimension $d = 3$.

Définition 1. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0;\mathbb{R})$ et $w \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T};\mathbb{R}^3)$ deux fonctions vérifiant les deux conditions*

$$\partial_\theta w(x,\theta) \not\equiv 0\,, \qquad \nabla\varphi(x) \not\equiv 0\,. \tag{1.6}$$

Le couple (φ, w) est dit <u>compatible</u> dans $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$si la famille $\{h^\varepsilon\}_\varepsilon$ associée à (φ, w) selon (1.2) satisfait (1.5).

Théorème 1. *Il existe une large classe des couples compatibles (φ, w).*

Théorème 2. *Soit (φ, w) un couple compatible dans $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$. Alors ils existe une fonctions $\mathbf{W}(\varphi,\psi,\theta) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T};\mathbb{R})$ et une fonctions $\psi(x,\theta) \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T};\mathbb{R})$ tel que le profil $w(x,\theta)$ ce factorise selon la forme*

$$w(x,\theta) = \mathbf{W}\big(\varphi(x),\psi(x,\theta),\theta\big)\,, \qquad \nabla\varphi \wedge \nabla\psi \not\equiv 0\,. \tag{1.7}$$

Il existe $T > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t\Phi + \big(\mathbf{W}(\Phi,\Psi,\theta)\cdot\nabla\big)\Phi = 0\,, & \Phi(0,x) = \varphi(x)\,, \\ \partial_t\Psi + \big(\mathbf{W}(\Phi,\Psi,\theta)\cdot\nabla\big)\Psi = 0\,, & \Psi(0,x,\theta) = \psi(x,\theta)\,, \end{cases} \tag{1.8}$$

admet une solution $(\Phi,\Psi)(t,x,\theta)$ dans le domaine $\Omega_r^T \times \mathbb{T}$. On a $\partial_\theta\Phi \equiv 0$ et pour tout $\varepsilon \in\,]0,1]$, l'oscillation

$$u^\varepsilon(t,x) = \mathbf{W}\left(\Phi(t,x), \Psi\left(t,x,\frac{\Phi(t,x)}{\varepsilon}\right), \frac{\Phi(t,x)}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \in\,]0,1] \tag{1.9}$$

est une solution de (1.1) dans le domaine Ω_r^T associée à la donnée initiale $u^\varepsilon(0,\cdot)$ as in (1.2). De plus, pour tout $t \in [0,T]$ le couple $\big(\Phi(t,\cdot), \widetilde{\mathbf{W}}(t,\cdot)\big)$ tel que

$$\widetilde{\mathbf{W}}(t,x,\theta) := \mathbf{W}\big(\Phi(t,x),\Psi(t,x,\theta),\theta\big)$$

est compatible dans $B(0, r - tV[\times\mathbb{T}$. Plus précisément, pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\nabla\Phi\cdot\partial_\theta\mathbf{W} + \partial_\theta\Psi\;\nabla\Phi\cdot\partial_\Psi\mathbf{W} \equiv 0\,, \tag{1.10}$$

$$(\nabla\Phi\cdot\partial_\Psi\mathbf{W})\;(\nabla\Psi\cdot\partial_\theta\mathbf{W} + \partial_\theta\Psi\;\nabla\Psi\cdot\partial_\Psi\mathbf{W}) \equiv 0\,, \tag{1.11}$$

$$(\nabla\Phi\cdot\partial_\varphi\mathbf{W})^2 + (\nabla\Phi\cdot\partial_\Psi\mathbf{W})\;(\nabla\Psi\cdot\partial_\varphi\mathbf{W}) \equiv 0\,, \tag{1.12}$$

$$\nabla\Phi\cdot\partial_\varphi\mathbf{W} + \nabla\Psi\cdot\partial_\Psi\mathbf{W} \equiv 0\,. \tag{1.13}$$

2

Notion des couples compatibles.

A partir de maintenant on écrit $f \equiv 0$ et $f \not\equiv 0$ pour affirmer respectivement que f est identiquement nul dans son domaine de définition ou elle est non -identiquement nul.Soit les deux vecteurs $u = {}^t(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ et $v = {}^t(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, on note par

$$u \cdot v := u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 , \quad u \otimes v := \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}, \qquad u \wedge v := \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

On peut interpréter (1.5) sous la forme des conditions sur (w, φ).

Proposition 1. *Soit $\varphi \in C^1(\Omega_r^0; \mathbb{R})$ et $w \in C^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^3)$ satisfait les conditions (1.6). Le couple (φ, w) est compatible sur $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$ si et seulement si il est solution sur $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$ du système $\mathcal{S}$ formé par*

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\theta u \equiv 0 , \tag{2.1}$$

$$\nabla\varphi \cdot (D_x w \; \partial_\theta w) \equiv 0 , \tag{2.2}$$

$$(D_x w)^3 \equiv 0 , \tag{2.3}$$

$$M \,(D_x w)^2 + D_x w \, M \, D_x w + (D_x w)^2 \, M \equiv 0 , \quad M := \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi . \tag{2.4}$$

Preuve. On a

$$D_x h^\varepsilon(x) = (D_x w)\Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) + \frac{1}{\varepsilon} \, \partial_\theta w \Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) \otimes \nabla\varphi(x) .$$

La condition (1.5) elle peut être toujours formulé sous la forme

$$\sum_{j=0}^{3} \varepsilon^{-j} \; \Xi_j \Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) \equiv 0 , \qquad \Xi_j(x, \theta) \in C^0\big(\Omega_r^0 \times \mathbb{T}, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}^3)\big)$$

tel que

$$\begin{aligned} \Xi_0 &= (D_x w)^3 \; , \\ \Xi_1 &= (D_x w)^2 \, M + D_x w \, M \, D_x w + M \, (D_x w)^2 , \\ \Xi_2 &= M^2 \, D_x w + D_x w \, M^2 + M \, D_x w \, M \, , \\ \Xi_3 &= M^3 . \end{aligned}$$

pour avoir (1.5) pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, il est nécessaire et suffisante d'avoir

$$\forall \, (x, \theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}, \quad \forall \, j \in \{0, 1, 2, 3\} \; : \qquad \Xi_j \equiv 0 . \tag{2.5}$$

Le bute est de résoudre (2.5) pour certain $r \in \mathbb{R}_+^*$. les contraintes $\Xi_0 \equiv 0$ et $\Xi_1 \equiv 0$ sont des répétitions de (2.3) et (2.4). Donc

$$M^3 = (\nabla\varphi \cdot \partial_\theta w)^2 \; \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi \; = \; 0 , \qquad \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi \not\equiv 0 ,$$

L'ex-amination de Ξ_3 donne (2.1). Vu (2.1), on a toujours $M^2 \equiv 0$. Donc la conditions $\Xi_2 \equiv 0$ ce transforme en $M \; D_x w \; M \equiv 0$, ce qui donne (2.2). □

2.1 Cas de rang un.

On suppose que

$$rg\big(D_x w(x,\theta)\big) = dim\big(Im(D_x w)(x,\theta)\big) = 1\,, \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}\,. \tag{2.6}$$

Le théorème du rang constant [2] et la compacité du tor $\mathbb{T}$, on fait diminuer $r \in \mathbb{R}_+^*$ si nécessaire, on peut avoir deux fonctions $\psi \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T};\mathbb{R})$ et $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{T};\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\nabla\psi \not\equiv 0\,, \quad \partial_\psi \mathbf{W} \not\equiv 0\,, \quad w(x,\theta) = \mathbf{W}\big(\psi(x,\theta),\theta\big), \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}\,. \tag{2.7}$$

Lemme 1. *On suppose (1.6) et (2.7). Alors, le couple (φ, w) est compatible dans le domaine $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$ si et seulement si*

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\theta u \equiv 0\,, \tag{2.8}$$

$$(\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W})\,(\nabla\psi \cdot \partial_\theta w) \equiv 0\,, \tag{2.9}$$

$$\nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} \equiv 0\,. \tag{2.10}$$

Preuve. La condition (2.8) est la même que la condition (2.1). Vu (2.7), on a $D_x w = \partial_\psi \mathbf{W} \otimes \nabla\psi$ ce qui transforme (2.3) en

$$(\nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W})^2\; \partial_\psi \mathbf{W} \otimes \nabla\psi \equiv 0\,, \qquad \partial_\psi \mathbf{W} \otimes \nabla\psi \not\equiv 0$$

et cela implique (2.10). La contrainte (2.10) réduit la contrainte (2.4) en

$$D_x w\; M\; D_x w = (\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W})\,(\nabla\psi \cdot \partial_\theta w)\; \partial_\psi \mathbf{W} \otimes \nabla\psi \equiv 0\,.$$

ce qui donne (2.9) qui garantie (2.2). □

2.2 Cas de rang deux.

On suppose que

$$rg\big(D_x w(x,\theta)\big) = dim\big(Im(D_x w)(x,\theta)\big) = 2, \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}\,. \tag{2.11}$$

On applique le théorème du rang constant [2] pour avoir l'existence des deux fonctions scalaires $\psi \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T};\mathbb{R})$, $\tilde{\psi} \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T};\mathbb{R})$ et un fonction vectoriel $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T};\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\forall\,(x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T} : \quad \begin{cases} \nabla\psi \wedge \nabla\tilde{\psi} \not\equiv 0\,, \\ \partial_\psi \mathbf{W} \wedge \partial_{\tilde{\psi}} \mathbf{W} \not\equiv 0\,, \\ w(x,\theta) = \mathbf{W}\big(\tilde{\psi}(x,\theta), \psi(x,\theta), \theta\big)\,, \end{cases} \tag{2.12}$$

2.2.1 Factorisation des couples compatibles.

2.2.1.1 Version locale de la factorisation.

On note par $\vec{0} = (0,0,0) \in \Omega_r^0 \subset \mathbb{R}^3$. on travaille localement au voisinage du point $(\vec{0},\tilde{\theta}) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}$. On choisie un voisinage convexe Γ satisfait $(\vec{0},\tilde{\theta}) \in \Gamma \subset \Omega_r^0 \times \mathbb{T}$. Typiquement on peut prendre

$$\Gamma \equiv \Gamma_{r,\tilde{r}}^{\tilde{\theta}} := \Omega_r^0 \times]\tilde{\theta} - \tilde{r}\,, \tilde{\theta} + \tilde{r}[\,, \qquad (r,\tilde{r},\tilde{\theta}) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1[\times \mathbb{T}\,.$$

Soit (φ, w) un couple compatible dans $\Gamma_{r,\tilde{r}}^{\tilde{\theta}}$. Par un changement$w(x,\theta)$ en $w(x,\theta-\tilde{\theta})$,on peut toujours supposer que $\tilde{\theta} = 0$. Autrement on va travailler dans $\Gamma_{r,\tilde{r}}^{0}$. On note i, j et k trois éléments distincts choisi dans $\{1,2,3\}$. La conditions (2.11)donne l'existence de k tel que

$$\nabla w_k(x,\theta) \in Vec\left\langle \nabla w_i(x,\theta), \nabla w_j(x,\theta)\right\rangle, \quad \forall\, (x,\theta) \in \Gamma^0_{r,\tilde r}, \tag{2.13}$$

$$\nabla w_i(x,\theta) \wedge \nabla w_j(x,\theta) \neq 0\,, \quad \forall\, (x,\theta) \in \Gamma^0_{r,\tilde r}. \tag{2.14}$$

La direction $\nabla\varphi(\vec{0})$ ne peut être colinéaire simultanément à $\nabla w_i(\vec{0},0)$ et $\nabla w_j(\vec{0},0)$. On choisie les indices $l \in \{i,j\}$ d'une manière que $\nabla\varphi(\vec{0}) \wedge \nabla w_l(\vec{0},0) \neq 0$. Alors, on fait une permutation des trois directions x_1, x_2 et x_3 (avec une permutation correspondante pour les composantes w_1, w_2 et w_3) dans le bute d'avoir $l = 1$ et $k = 3$. Alors, par une restriction de $r \in \mathbb{R}^*_+$ et $\tilde r \in]0,1[$, on peut obtenir

$$\nabla\varphi \wedge \nabla w_1 \not\equiv 0\,, \qquad \forall\, (x,\theta) \in \Gamma^0_{r,\tilde r} \tag{2.15}$$

les deux conditions (2.13) et (2.14) ce transforme en

$$\nabla w_3(x,\theta) \in Vec\left\langle \nabla w_1(x,\theta), \nabla w_2(x,\theta)\right\rangle, \quad \forall\, (x,\theta) \in \Gamma^0_{r,\tilde r}, \tag{2.16}$$

$$\nabla w_1(x,\theta) \wedge \nabla w_2(x,\theta) \neq 0\,, \quad \forall\, (x,\theta) \in \Gamma^0_{r,\tilde r}. \tag{2.17}$$

La contrainte (2.16) donne l'existence d'une fonctions scalaire $\mathbb{W}_3$ dans $C^1(\mathbb{R}^2 \times]-\tilde r, \tilde r[; \mathbb{R})$ tel que

$$w_3(x,\theta) = \mathbb{W}_3\big(w_1(x,\theta), w_2(x,\theta), \theta\big), \qquad \forall\, (x,\theta) \in \Gamma^0_{r,\tilde r}. \tag{2.18}$$

alors, utilisant la convention

$$\mathbb{W}(w_1,w_2,\theta) = \begin{pmatrix} \mathbb{W}_1(w_1,w_2,\theta) \\ \mathbb{W}_2(w_1,w_2,\theta) \\ \mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta) \end{pmatrix},$$

on peut obtenir

$$w(x,\theta) = \mathbb{W}\big(w_1(x,\theta), w_2(x,\theta), \theta\big), \quad \forall\, (x,\theta) \in \Gamma^0_{r,\tilde r}. \tag{2.19}$$

Lemme 2. *On sélectionne un couple (φ, w) compatible dans $\Gamma^0_{r,\tilde r}$ et satisfait (2.16)-(2.17). Alors, il existe une fonctions scalaire $W_2 \in C^1(\mathbb{R}^2 \times]-\tilde r, \tilde r[; \mathbb{R})$ tel que la composante w_2 ce met sous la forme*

$$w_2(x,\theta) = W_2\big(\varphi(x), w_1(x,\theta), \theta\big), \quad \forall\, (x,\theta) \in \Gamma^0_{r,\tilde r}. \tag{2.20}$$

Preuve. Pour avoir (2.20), il suffit de monter que

$$\nabla w_2(x,\theta) \in Vec\left\langle \nabla\varphi(x), \nabla w_1(x,\theta)\right\rangle, \quad \forall\, (x,\theta) \in \Gamma^0_{r,\tilde r}. \tag{2.21}$$

La preuve ce fait par contradiction. On suppose que (2.21) n'est pas vérifiée

$$\exists\, (x_0,\theta_0) \in \Gamma^0_{r,\tilde r}, \qquad \nabla w_2(x_0,\theta_0) \notin Vec\left\langle \nabla\varphi(x_0), \nabla w_1(x_0,\theta_0)\right\rangle. \tag{2.22}$$

On combine (2.15) et (2.22), on remarque que les vecteurs $\nabla\varphi(x_0)$, $\nabla w_1(x_0,\theta_0)$ et $\nabla w_2(x_0,\theta_0)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. On utilise la définition des Ξ_j et les conditions (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4), on obtient

$$\big(D_x w + \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi\big)^3 = \sum_{j=0}^{3} \Xi_j = 0\,.$$

Donc la matrice

$$D_x w + \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi = \begin{pmatrix} {}^t\nabla w_1 + \partial_\theta w_1\, {}^t\nabla\varphi \\ {}^t\nabla w_2 + \partial_\theta w_2\, {}^t\nabla\varphi \\ {}^t\nabla w_3 + \partial_\theta w_3\, {}^t\nabla\varphi \end{pmatrix}$$

est de rang deux. De plus vu (2.18) on a

$$\nabla w_3 + \partial_\theta w_3 \, \nabla\varphi = \partial_{w_1}\mathbb{W}_3 \, (\nabla w_1 + \partial_\theta w_1 \, \nabla\varphi) + \partial_{w_2}\mathbb{W}_3 \, (\nabla w_2 + \partial_\theta w_2 \, \nabla\varphi) + \partial_\theta \mathbb{W}_3 \, \nabla\varphi \,.$$

et vu (2.18) on en déduit que le gradient de la troisième composante de w est combinaison linéaires des gradients des deux premier ce qui donne vu le faite q'on a une base que

$$(\partial_\theta \mathbb{W}_3)\big(w_1(x_0,\theta_0), w_2(x_0,\theta_0), \theta_0\big) = 0. \tag{2.23}$$

Les fonctions calculer en $(x,\theta) = (x_0,\theta_0)$. L'information (2.23) implique que

$$\partial_\theta w_3 \;=\; \partial_{w_1}\mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta_0)\,\partial_\theta w_1 \;+\; \partial_{w_2}\mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta_0)\,\partial_\theta w_2 \,.$$

Vu (1.6), on a $\partial_\theta w_1(x_0,\theta_0) \neq 0$ ou $\partial_\theta w_2(x_0,\theta_0) \neq 0$. On considère le cas $\partial_\theta w_2(x_0,\theta_0) \neq 0$. L'autre situation ($\partial_\theta w_1 \neq 0$) ce fait de la même manière

La condition (2.23) ce simplifier quand on va réécrire les conditions (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4). Par exemple (2.1) ce transforme en

$$\nabla\varphi \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} = -\,\frac{\partial_\theta w_1}{\partial_\theta w_2}\,\nabla\varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}. \tag{2.24}$$

La condition (2.3) ni rien autre que

$$(D_x w)^3 = \big[(D_x w)^2 \,\partial_{w_1}\mathbb{W}\big] \otimes \nabla w_1 + \big[(D_x w)^2\,\partial_{w_2}\mathbb{W}\big] \otimes \nabla w_2 \;\equiv\; 0 \,.$$

vu (2.17),cette identitée est possible si

$$(D_x w)^2\,\partial_{w_1}\mathbb{W} \;\equiv\; 0, \qquad\qquad (D_x w)^2\,\partial_{w_2}\mathbb{W} \;\equiv\; 0. \tag{2.25}$$

On définie

$$\alpha := {}^t\nabla w_1 \, D_x w \, \partial_{w_1}\mathbb{W} \,, \quad \beta := {}^t\nabla w_2 \, D_x w \, \partial_{w_1}\mathbb{W} \,,$$

on trouve que

$$(D_x w)^2\,\partial_{w_1}\mathbb{W} \;=\; \alpha\,{}^t(1,0,\partial_{w_1}\mathbb{W}_3) \;+\; \beta\,{}^t(0,1,\partial_{w_2}\mathbb{W}_3) \,.$$

La première conditions de (2.25) informe que les deux coefficients α et β sont nul, donc

$$(\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W})^2 + (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W})\,(\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}) = 0 \,, \tag{2.26}$$

$$(\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W})\,(\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} + \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}) = 0 \,. \tag{2.27}$$

Par la même méthode au niveau de la second condition,on peut avoir les conditions nécessaire est suffisante

$$(\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W})\,(\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} + \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}) = 0 \,, \tag{2.28}$$

$$(\nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W})^2 + (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W})\,(\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}) = 0 \,. \tag{2.29}$$

On va montrer que c'est impossible d'avoir

$$\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} + \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} \neq 0. \tag{2.30}$$

On suppose que (2.30) est vrai. Alors, les relations (2.27) et (2.28) implique que $\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} = 0$ et $\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} = 0$. On utilise ces informations, les deux relations (2.26) et (2.29) donne $\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} = 0$ et $\nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} = 0$. Ces deux dernières informations sont en contradiction avec (2.30). Donc on ai sur d'avoir

$$\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} + \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} = 0. \tag{2.31}$$

La condition (2.31) simplifier (2.27) et (2.28). et les (2.29) est équivalente à (2.26). Donc l'analyse de (2.3) est le même que que celui de (2.26)-(2.31). Ces deux contraintes (2.26) et (2.31) affirme que les deux vecteurs

$$(\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}, \nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}) \in \mathbb{R}^2, \qquad (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}, \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}) \in \mathbb{R}^2$$

sont colinéaire. Autrement dit on peut avoir $(\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ tel que

$$\nabla w_1 \cdot (\tilde{\alpha}\ \partial_{w_1}\mathbb{W} + \tilde{\beta}\ \partial_{w_2}\mathbb{W}) = 0, \qquad \nabla w_2 \cdot (\tilde{\alpha}\ \partial_{w_1}\mathbb{W} + \tilde{\beta}\ \partial_{w_2}\mathbb{W}) = 0. \tag{2.32}$$

On considère (2.2) calculer en (x_0, θ_0). L'exploitation de (2.23), (2.24) et (2.31), permet de formuler (2.2) selon

$$\Big[2\ \partial_\theta w_1\ (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}) + \partial_\theta w_2\ (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}) \\ - \frac{(\partial_\theta w_1)^2}{\partial_\theta w_2}\ (\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W})\Big]\ (\nabla \varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}) = 0. \tag{2.33}$$

On multiplier (2.33) par $\partial_\theta w_2\ (\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W})$. Alors, on utilise (2.26) et (2.31) on obtient

$$(\nabla \varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W})\ (\nabla w_2 \cdot \partial_\theta w)^2 = 0\,. \tag{2.34}$$

De la même manière, on multiplier (2.33) par $\partial_\theta w_2\ (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W})$. Alors, on utilise (2.26) pour extraire

$$(\nabla \varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W})\ (\nabla w_1 \cdot \partial_\theta w)^2 = 0\,. \tag{2.35}$$

On a deux situations

$\triangleright 1 \triangleleft$ <u>*La cas*</u> $\nabla \varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} \neq 0$. Les équations (2.1), (2.34) et (2.35) implique que $\nabla \varphi$, ∇w_1 et ∇w_2 sont dans le même plan $(\partial_\theta w^\perp)$. Donc ils sont linéairement dépendant, ce qui contredit (2.22).

$\triangleright 2 \triangleleft$ <u>*Le cas*</u> $\nabla \varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} = 0$. A partir de (2.24), on en déduit que $\nabla \varphi \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} = 0$. Ce qui affirme que

$$\nabla \varphi \cdot (\alpha'\ \partial_{w_1}\mathbb{W} + \beta'\ \partial_{w_2}\mathbb{W}) = 0, \quad \forall\,(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2. \tag{2.36}$$

On choisi $\alpha' = \tilde{\alpha}$ et $\beta' = \tilde{\beta}$. Suivant la définition de la fonction $\mathbb{W}$ et le fait que $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \neq (0,0)$, on a

$$\tilde{\alpha}\ \partial_{w_1}\mathbb{W} + \tilde{\beta}\ \partial_{w_2}\mathbb{W} = {}^t(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \star) \neq (0,0,0)\,.$$

Les informations (2.32) et (2.36) (where $\alpha' = \tilde{\alpha}$ and $\beta' = \tilde{\beta}$) indique que les vecteurs $\nabla \varphi$, ∇w_1 et ∇w_2 sont dans le même plan, à savoir $(\tilde{\alpha}\ \partial_{w_1}\mathbb{W} + \tilde{\beta}\ \partial_{w_2}\mathbb{W})^\perp$. ce qui donne que ces trois vecteurs sont linéairement dépendante ce qui contredit la conditions (2.22).

On conclusion (2.21) est vérifiée. □

Proposition 2 (Version locale)**.** *On suppose (2.11) et on sélectionne $\tilde{\theta} \in \mathbb{T}$. Soit (φ, w) un couple compatible dans $\Gamma^{\tilde{\theta}}_{r,\tilde{r}}$. Alors, par un choix de $r \in \mathbb{R}^*_+$ et $\tilde{r} \in]0,1[$ convenablement et par une permutation des directions x_1, x_2 et x_3 (on accorde avec les composantes w_1, w_2 et w_3 de w), Il est possible d'avoir (2.15) et d'écrire le profil $w(x,\theta)$ selon la forme*

$$w(x,\theta) = W\big(\varphi(x), w_1(x,\theta), \theta\big), \qquad (x,\theta) \in \Gamma^{\tilde{\theta}}_{r,\tilde{r}} \tag{2.37}$$

tel que la fonctions $W = {}^t(W_1, W_2, W_3) \in C^1(\mathbb{R}^2 \times]-\tilde{r}, \tilde{r}[; \mathbb{R}^3)$ et les deux composantes W_1 et W_2 vérifiants

$$W_1(\varphi, w_1, \theta) = w_1\,, \qquad \forall\ (\varphi, w_1, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times]-\tilde{r}, \tilde{r}[, \tag{2.38}$$

$$\partial_\varphi W_2(\varphi, w_1, \theta) \neq 0\,, \qquad \forall\ (\varphi, w_1, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times]-\tilde{r}, \tilde{r}[. \tag{2.39}$$

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\tilde{\theta} = 0$. Vu la relations (2.20), la fonctions w_3 peut être mise sous la forme

$$w_3(x,\theta) = W_3\big(\varphi(x), w_1(x,\theta), \theta\big), \qquad \forall\ (x,\theta) \in \Gamma^0_{r,\tilde{r}}$$

avec $W_3(\varphi, w_1, \theta) := \mathbb{W}_3\big(w_1, W_2(\varphi, w_1, \theta), \theta\big)$. Ce qui permet de définir

$$W_1(\varphi, w_1, \theta) := w_1\,, \qquad \forall\ (\varphi, w_1, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times]-\tilde{r}, \tilde{r}[.$$

Avec ces conventions, on a (2.37) et (2.38). Vu la condition (2.15), pour avoir (2.11), le vecteur $\partial_\varphi W \wedge \partial_{w_1} W$ doit être non nul dans $\mathbb{R}^2\times]-\tilde{r},\tilde{r}[$. ce qui donne que la fonctions $\partial_\varphi W_2$ doit être non nul dans $\mathbb{R}^2\times]-\tilde{r},\tilde{r}[$. Ce qui exactement la condition (2.39). □

2.2.2 Version globale de la factorisation.

Proposition 3. *Soit (φ, w) un couple compatible dans le domaine $\Omega^0_r \times \mathbb{T}$. On fait diminuer $r \in \mathbb{R}^*_+$ si nécessaire, on peut trouver une fonction $\psi \in \mathcal{C}^1(\Omega^0_r \times \mathbb{T}; \mathbb{R})$ satisfait $\nabla\varphi \wedge \nabla\psi \not\equiv 0$ et une fonction vectoriel $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^3)$ tel que*

$$w(x,\theta) = \mathbf{W}\big(\varphi(x), \psi(x,\theta), \theta\big)\,, \qquad \forall\ (x,\theta) \in \Omega^0_r \times \mathbb{T}. \tag{2.40}$$

Preuve. On sélectionne un couple compatible (φ, w). La condition (2.11) implique que

$$dim\ Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle = 2, \qquad \forall\ (x,\theta)\ \in\ \Omega^0_r \times \mathbb{T}. \tag{2.41}$$

Localement par une permutation des coordonnées x_1, x_2 et x_3 de la manière qui figure dans la Proposition 2, on peut obtenir

$$\nabla\varphi \in Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2\rangle\,.$$

Ainsi

$$\nabla\varphi\ \in\ Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle\,.$$

Observant que cette propreté ne dépend pas du choix des coordonnées. Donc elle est vrai dans tout le domaine d'étude. Alors nécessairement on a

$$\nabla\varphi\ \in\ Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle\,, \qquad \forall\ (x,\theta)\ \in\ \Omega^0_r \times \mathbb{T}. \tag{2.42}$$

On fixe $\theta \in \mathbb{T}$. Et soit la fonction $\Psi_\theta \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ et $r_\theta \in]0,r[$, on introduit

$$\psi_\theta(x,\tilde{\theta}) := \Psi_\theta(w_1, w_2, w_3)(x,\tilde{\theta})\,, \qquad \forall\,(x,\tilde{\theta}) \in \Omega^0_{r_\theta}\times]\theta - r_\theta, \theta + r_\theta[.$$

A partir de (2.41) et (2.42) on peut déduire l'existence de $\Psi_\theta \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ et de $r_\theta \in]0,r[$ tel que $\nabla\varphi$ ne soit pas colinéaire à $\nabla\psi_\theta$, à savoir que le premier composant de $\nabla\varphi \wedge \nabla\psi_\theta$ est positive

$$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi_\theta)_1\ >\ 0, \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Omega^0_{r_\theta}\times]\theta - r_\theta, \theta + r_\theta[$$

tandis que

$$Vec\,\langle \nabla\varphi, \nabla\psi_\theta\rangle \equiv Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle\,, \quad \forall\,(x,\theta) \in \Omega^0_{r_\theta}\times]\theta - r_\theta, \theta + r_\theta[.$$

La famille des intervalles $]\theta - r_\theta, \theta + r_\theta[$ avec $\theta \in \mathbb{T}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{T}$. Or $\mathbb{T}$ est un compact, alors il existe un sous recouvrement finie de

$$\mathbb{T} \subset \bigcup_{i=1}^{N}]\theta_i - r_{\theta_i}, \theta_i + r_{\theta_i}[.$$

On considère une partition de l'unité de la forme $\{\chi_i\}_{i=1}^N$ tel que la fonction $\chi_i \in C^\infty(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$ est ajuster de tel sorte que

$$supp\, \chi_i \subset]\theta_i - r_{\theta_i}, \theta_i + r_{\theta_i}[\,, \qquad \sum_{i=1}^N \chi_i \equiv 1.$$

On remplace $r \in \mathbb{R}_+^*$ par le minimum des nombres r_{θ_i} (avec $i \in \{1, \cdots, N\}$). Alors, on peut introduire

$$\psi(x, \theta) := \sum_{i=1}^N \psi_{\theta_i}(x, \theta)\, \chi_i(\theta).$$

Les rendements de construction précédentes donne (2.45) ainsi que

$$Vec\, \langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle \equiv Vec\, \langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3 \rangle\,, \qquad \forall\, (x, \theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}. \tag{2.43}$$

La restriction (2.43) informe que les trois composantes w_i peut être exprimer comme des fonctions de φ, ψ et de θ. Ce qui donne (2.40). □

2.3 Les conditions nécessaires et suffisantes sur $(\varphi, \psi, \mathbf{W})$.

Soit la condition (2.40), le calcule fournit

$$D_x w(x, \theta) = \partial_\varphi \mathbf{W} \otimes \nabla\varphi + \partial_\psi \mathbf{W} \otimes \nabla\psi\,. \tag{2.44}$$

Vu (2.11), les deux vecteurs $\nabla\varphi$ et $\nabla\psi$, ainsi que $\partial_\varphi \mathbf{W}$ and $\partial_\psi \mathbf{W}$, sont indépendants. autrement dit

$$\nabla\varphi \wedge \nabla\psi \not\equiv 0\,, \qquad \partial_\varphi \mathbf{W} \wedge \partial_\psi \mathbf{W} \not\equiv 0\,. \tag{2.45}$$

La condition (1.6) ce transforme en

$$\partial_\theta \psi\ \partial_\psi \mathbf{W} + \partial_\theta \mathbf{W} \not\equiv 0\,. \tag{2.46}$$

Proposition 4. *On suppose (2.11), (2.40) et (2.46). Alors le couple* (φ, w) *est compatible dans le domaine* $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$ *si et seulement si on a (2.45) coupler avec*

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\theta \mathbf{W} + \partial_\theta \psi\ \nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} \equiv 0\,, \tag{2.47}$$

$$(\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W})\ (\nabla\psi \cdot \partial_\theta \mathbf{W} + \partial_\theta \psi\ \nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W}) \equiv 0\,, \tag{2.48}$$

$$(\nabla\varphi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W})^2 + (\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W})\ (\nabla\psi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W}) \equiv 0\,, \tag{2.49}$$

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W} + \nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} \equiv 0\,. \tag{2.50}$$

Preuve. On compare les deux Propositions 1 et 4, on remarque (2.8)-(2.9)-(2.10) est un cas spéciale de (2.47)-(2.48)-(2.49)-(2.50). Il suffit de travailler avec $\partial_\varphi \mathbf{W} \equiv 0$. La restriction (2.47) est une répétition de (2.1). La contrainte (2.48), s'obtient à partir de la contrainte (2.2) dans laquelle la matrice $D_x w(x, \theta)$ est remplacé comme dans (2.44). La relation (2.1) donne des simplifications au niveau de (2.48). Avec (2.44), on peut formuler (2.3) selon

$$(D_x w)^2\ \partial_\varphi \mathbf{W} \otimes \nabla\varphi\ +\ (D_x w)^2\ \partial_\psi \mathbf{W} \otimes \nabla\psi\ =\ 0\,.$$

Rappelons (2.45). Les deux vecteurs $\nabla\varphi$ et $\nabla\psi$ seront indépendant, la dernière identités ce transforme en

$$(D_x w)^2 \, \partial_\varphi \mathbf{W} = 0\,, \tag{2.51}$$
$$(D_x w)^2 \, \partial_\psi \mathbf{W} = 0\,. \tag{2.52}$$

Injectant (2.44) dans (2.51). Alors, l'exploitation de (2.45) permet d'avoir

$$(\nabla\varphi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W})^2 + (\nabla\psi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W})\,(\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W}) = 0\,, \tag{2.53}$$
$$(\nabla\psi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W})\;(\nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} + \nabla\varphi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W}) \quad = 0\,. \tag{2.54}$$

On fait la même chausse avec (2.52). Ce qui donne

$$(\nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W})^2 + (\nabla\psi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W})\,(\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W}) = 0\,, \tag{2.55}$$
$$(\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W})\;(\nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} + \nabla\varphi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W}) \quad = 0\,. \tag{2.56}$$

Les relations (2.49) et (2.53) sont similaires. Observant qu'on peut obtenir

$$\nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} + \nabla\varphi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W} \neq 0.$$

En effet, dans un tel cas, (2.53), (2.54), (2.55) et (2.56) fournirait

$$\partial_\varphi \mathbf{W} \,\in\, Vec\,\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle^\perp\;, \qquad \partial_\psi \mathbf{W} \,\in\, Vec\,\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle^\perp\;.$$

Autrement dit , à cause de (2.45), les deux vecteurs $\partial_\varphi \mathbf{W}$ et $\partial_\psi \mathbf{W}$ de $\mathbb{R}^3$ sont colinéaires. Ceci est incohérent avec (2.45). Donc nécessairement on a (2.50).
Maintenant on va voir l'implication inverse, Utilisant (2.40) et (2.45), les relations (2.1), (2.2), (2.11) et (1.6) sont respectivement équivalentes à (2.47), (2.48), (2.45) et (2.46).
Donc la contrainte (2.3) est la même chausse que (2.53), (2.54), (2.55) et (2.56). Les trois conditions (2.53), (2.54) et (2.56) sont prises en compte au niveau de (2.49) and (2.50). En vue de (2.50), la condition restante (2.55) ce réduit en (2.53).
Il reste à vérifier que la relation (2.4) est en effet une conséquence des contraintes de la Proposition 4. À cette fin, utilisant (2.44) afin d'identifier les différents termes de (2.4). Avec (2.49) et (2.50), on peut facilement avoir $M\,(D_x w)^2 \equiv 0$. Alors on peut exploiter (2.47) et (2.48) pour avoir

$$D_x w\, M\, D_x w + (D_x w)^2\, M \,=\, (\nabla\psi \cdot \partial_\theta w)\;(\nabla\varphi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W} + \nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W})\;\partial_\psi \mathbf{W} \otimes \nabla\varphi\,.$$

En vue de (2.50), on a (2.4). La preuve de la Proposition 4 est terminée. □

3

Les couples compatibles dans le cas ou $\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} \equiv 0$.

3.1 D'autres ajustements.

Avant d'aller plus loin dans l'analyse, nous devons prendre soin de traiter des situations qui sont pas pris en compte dans [3]. On note

$$\widetilde{\mathbf{W}}(x,\theta) := \mathbf{W}\big(\varphi(x), \psi(x,\theta), \theta\big),$$

l'article [3] est basée sur les différentes conditions, voir (35) de [3]

$$\prod\nolimits_{\partial_\theta \widetilde{\mathbf{W}}^\perp} D_x \widetilde{\mathbf{W}} \prod\nolimits_{\nabla\varphi^\perp} \equiv \prod\nolimits_{(\partial_\theta\psi\, \partial_\psi \mathbf{W} + \partial_\theta \mathbf{W})^\perp} (\partial_\psi \mathbf{W} \otimes \nabla\psi) \prod\nolimits_{\nabla\varphi^\perp} \equiv 0\,. \tag{3.1}$$

Dans le bute de ne pas reproduire ce qui est apparu en [3], on va travailler avec $\mathbf{W}$, φ et ψ ajuster de tel faccon que

$$\partial_\psi \mathbf{W} \wedge \partial_\theta \mathbf{W} \not\equiv 0\,, \quad \nabla\psi \wedge \nabla\varphi \not\equiv 0\,.$$

Il existe plusieurs manière pour factoriser le profil $w(x,\theta)$ comme il est proposé dans (2.40). En effet, si

$$\chi(\varphi,\psi,\theta) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T};\mathbb{R})$$

une fonction quelconque tel que $\partial_\psi \chi \not\equiv 0$, on note

$$\tilde{\psi} := \chi(\varphi,\psi,\theta)\ ,$$

on trouve

$$w \equiv \mathbf{W}(\varphi,\psi,\theta) \equiv \widetilde{\mathbf{W}}(\varphi,\tilde{\psi},\theta)$$

avec

$$\mathbf{W}(\varphi,\psi,\theta) \equiv \widetilde{\mathbf{W}}\big(\varphi, \chi(\varphi,\psi,\theta), \theta\big)\ .$$

Alors, on va avoir

$$\partial_\psi \mathbf{W} \equiv \partial_\psi \chi\, \partial_{\tilde{\psi}} \widetilde{\mathbf{W}} \not\equiv 0$$

avec

$$\partial_\varphi \mathbf{W} \equiv \partial_\varphi \widetilde{\mathbf{W}} + \partial_\varphi \chi\, \partial_\psi \mathbf{W}/\partial_\psi \chi\,, \qquad \partial_\theta \tilde{\psi} \equiv \partial_\theta \psi\, \partial_\psi \chi + \partial_\theta \chi\,.$$

Dans cette transformation $\partial_\psi \mathbf{W} \not\equiv 0$ et $\partial_\varphi \mathbf{W} \not\equiv 0$ sont préserve. autrement dit, on a une certain liberté concernant $\partial_\theta \psi$. On ajustant χ convenablement, on ait sur que $\partial_\theta \psi \not\equiv 0$ ou $\partial_\theta \psi \equiv 0$. Selon les circonstances, nous allons utiliser une ou l'autre de ces deux conditions. En prévision de ce qui suit, nous mettons de côté le cadre (3.2) donnée ci-après

$$\partial_\theta \psi \not\equiv 0\,, \qquad \partial_\varphi \mathbf{W} \not\equiv 0\,, \qquad \partial_\psi \mathbf{W} \wedge \partial_\theta \mathbf{W} \not\equiv 0\,, \qquad \nabla\psi \wedge \nabla\varphi \not\equiv 0\,. \tag{3.2}$$

Nous discutons ici le système (2.47)-(2.48)-(2.49)-(2.50) sous la restriction (3.2) est dans le cas ou

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} \equiv 0.$$

autrement dit on va travailler avec (2.40), (2.45) et (3.2) combiné avec les conditions

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\theta \mathbf{W} = 0, \tag{3.3}$$
$$\nabla\varphi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W} = 0, \tag{3.4}$$
$$\nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} = 0, \tag{3.5}$$
$$\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} = 0. \tag{3.6}$$

3.2 La structure feuilletée associé à la phase φ.

Lemme 3. *On suppose les conditions (1.6), (2.45) et (3.2) ainsi que (3.3), (3.4), (3.5) et (3.6). On fait diminuer $r \in \mathbb{R}_+^*$ et par une permutation des coordonnées x_1, x_2, x_3 et des composantes $\partial_1\varphi$, $\partial_2\varphi$, $\partial_3\varphi$, on a l'existence de deux fonctions scalaires $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ajuster de tel sorte que*

$$\nabla\varphi(x) \equiv \begin{pmatrix} f\big(\varphi(x)\big) \\ 1 \\ g\big(\varphi(x)\big) \end{pmatrix} \partial_2\varphi(x), \qquad \forall\, x \in \Omega_r^0. \tag{3.7}$$

Preuve. Les conditions (3.3) et (3.6) informe que la directions $\nabla\varphi$ est parallèle à $\partial_\theta \mathbf{W} \wedge \partial_\psi \mathbf{W} \not\equiv 0$. ainsi la direction $\nabla\varphi$ peut être vu comme fonction de (φ,ψ,θ). On diminue $r \in \mathbb{R}_+^*$ et on permute les coordonnées x_1, x_2, x_3 et les composantes $\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi$, on peut toujours avoir

$$\nabla\varphi \;=\; E(\varphi,\psi,\theta)\,\partial_2\varphi\,, \qquad E(\varphi,\psi,\theta) := \begin{pmatrix} f(\varphi,\psi,\theta) \\ 1 \\ g(\varphi,\psi,\theta) \end{pmatrix}.$$

Or la fonction φ ne dépend pas de θ, alors nécessairement on a

$$\partial_\theta\psi\,\partial_\psi E + \partial_\theta E \equiv 0.$$

Dans le cas ou $\partial_\psi E \equiv 0$, on a aussi $\partial_\theta E \equiv 0$ donc (3.7) est vérifiée. A partir de maintenant on suppose que

$$\partial_\psi E \not\equiv 0.$$

L'application $\partial_\theta\psi$ peut être représenter comme une fonction de (φ,ψ,θ), ce qui donne

$$\partial_\theta\psi = k(\varphi,\psi,\theta)$$

avec $k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T};\mathbb{R})$. On considère n'importe qu'elle fonction $\chi(\varphi,\psi,\theta)$ satisfait

$$\partial_\psi\chi \not\equiv 0\,, \quad k\,\partial_\psi\chi + \partial_\theta\chi \equiv 0.$$

On défini $\tilde\psi := \chi(\varphi,\psi,\theta)$. On peut faire un changement des variables (φ,ψ,θ) à $(\varphi,\tilde\psi,\theta)$ ce qui donne

$$E(\varphi,\psi,\theta) \equiv \tilde E(\varphi,\tilde\psi,\theta).$$

On observe que

$$\partial_\theta\big[E(\varphi,\psi,\theta)\big] \equiv \partial_\theta\psi\,\partial_\psi E + \partial_\theta E \equiv 0 \equiv \partial_\theta\big[\tilde E(\varphi,\tilde\psi,\theta)\big] \equiv \partial_\theta\tilde\psi\,\partial_{\tilde\psi}\tilde E + \partial_\theta\tilde E\,.$$

Par construction on a $\partial_\theta\tilde\psi \equiv 0$. Il en résulte que la fonction $\tilde E$ ne dépend pas de θ. Donc

$$\nabla\varphi = \tilde E(\varphi,\tilde\psi)\,\partial_2\varphi\,, \quad \tilde E(\varphi,\tilde\psi) := \begin{pmatrix} \tilde f(\varphi,\tilde\psi) \\ 1 \\ \tilde g(\varphi,\tilde\psi) \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Or $\partial_\psi E \equiv 0$, donc on a nécessairement $\partial_{\tilde\psi}\tilde E \not\equiv 0$. On pose $\mathbf{W}(\varphi,\psi,\theta) \equiv \widetilde{\mathbf{W}}(\varphi,\tilde\psi,\theta)$, on va travailler avec (3.3)-(3.4)-(3.5)-(3.6) mais cette fois avec $\widetilde{\mathbf{W}}$ et $\tilde\psi$ à la place de $\mathbf{W}$ et ψ. On décompose $\widetilde{\mathbf{W}}$ en

$$\widetilde{\mathbf{W}}(\varphi,\tilde\psi,\theta) = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde g \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde f \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \tilde f \\ 1 \\ \tilde g \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

ou les trois fonctions α, β et γ dépend en φ, $\tilde\psi$ et θ. La condition (3.3) donne $\partial_\theta\gamma \equiv 0$. De plus la restriction (3.6) permet d'avoir

$$\partial_{\tilde\psi}\gamma\,(\tilde f^2+1+\tilde g^2) - \alpha\,\partial_{\tilde\psi}\tilde g - \beta\,\partial_{\tilde\psi}\tilde f + \gamma\,(\tilde f\,\partial_{\tilde\psi}\tilde f + \tilde g\,\partial_{\tilde\psi}\tilde g) \equiv 0\,. \tag{3.10}$$

On dérive (3.10) en θ, on obtient

$$\partial_\theta\alpha\,\partial_{\tilde\psi}\tilde g + \partial_\theta\beta\,\partial_{\tilde\psi}\tilde f \equiv 0\,. \tag{3.11}$$

La symétrie de la deuxième dérivation exprimé sous la forme $\partial^2_{13}\varphi \equiv \partial^2_{31}\varphi$ peut être traduit par

$$\begin{pmatrix} -\partial_{\tilde\psi}\tilde g \\ \tilde f\,\partial_{\tilde\psi}\tilde g - \tilde g\,\partial_{\tilde\psi}\tilde f \\ \partial_{\tilde\psi}\tilde f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1\tilde\psi \\ \partial_2\tilde\psi \\ \partial_3\tilde\psi \end{pmatrix} \equiv 0\,. \tag{3.12}$$

On combine (3.11) et (3.12) avec $\partial_{\tilde\psi}\tilde E \not\equiv 0$, on peut déduire que

$$\nabla\tilde\psi\cdot\partial_\theta\widetilde{\mathbf{W}} \equiv \partial_\theta\beta\,\partial_1\tilde\psi - (\tilde f\,\partial_\theta\beta + \tilde g\,\partial_\theta\alpha)\,\partial_2\tilde\psi + \partial_\theta\alpha\,\partial_3\tilde\psi \equiv 0\,. \tag{3.13}$$

Or $\nabla\varphi\wedge\nabla\tilde\psi \not\equiv 0$. Donc les relations (3.3), (3.5), (3.6) et (3.13) indique que les deux vecteurs $\partial_\theta\widetilde{\mathbf{W}}$ et $\partial_{\tilde\psi}\widetilde{\mathbf{W}}$ sont colinéaires.Il s'ensuit que

$$\partial_\theta\mathbf{W}\wedge\partial_\psi\mathbf{W} = \partial_\psi\chi\,\partial_\theta\widetilde{\mathbf{W}}\wedge\partial_{\tilde\psi}\widetilde{\mathbf{W}} \equiv 0.$$

Cette dernière information est clairement en contradiction avec (3.2). □

Rappelons ici un résultat de base (voir [4, 3]) concernant (3.7).

Lemme 4. *On sélectionne trois fonctions $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ et $\varphi_{00}(x_2)$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Alors, pour $r \in \mathbb{R}^*_+$ assez petit, il existe une unique expression $\varphi(x) \in \mathcal{C}^1(\Omega^0_r;\mathbb{R})$ satisfait (3.7), à savoir*

$$\partial_1\varphi - f\circ\varphi\;\partial_2\varphi = 0\,, \qquad \partial_3\varphi - g\circ\varphi(x)\;\partial_2\varphi = 0\,, \qquad \forall\, x\in\Omega^0_r \tag{3.14}$$

avec la donnée initiale $\varphi(0,x_2,0) = \varphi_{00}(x_2)$ pour tout $x_2 \in]-r,r[$.

Preuve. Le problème de Cauchy pour la première lois de conservation donné au niveau de (3.14), à savoir

$$\partial_1\varphi_0 - f\circ\varphi_0\;\partial_2\varphi_0 = 0\,, \qquad \varphi_0(0,x_2) = \varphi_{00}(x_2) \tag{3.15}$$

admet une solution de classe $\mathcal{C}^1$ notée $\varphi_0(x_1,x_2)$ au voisinage du point $(0,0)\in\mathbb{R}^2$. Alors, On considère la solution locale de classe $\mathcal{C}^1$ $\varphi(x)$ de

$$\partial_3\varphi - g\circ\varphi(x)\;\partial_2\varphi = 0\,, \qquad \varphi(x_1,x_2,0) = \varphi_0(x_1,x_2)\,. \tag{3.16}$$

Pour avoir (3.7), il suffit d'avoir

$$\Xi := \partial_1\varphi - f\circ\varphi(x)\,\partial_2\varphi \equiv 0$$

pour tout $x_3 \neq 0$. Cette propriété est une conséquence de la construction précédente qui implique que

$$\partial_3\Xi - g\circ\varphi(x)\;\partial_2\Xi = g'\circ\varphi\;\partial_2\varphi\;\Xi\,, \qquad \Xi(x_1,x_2,0) = 0\,.$$

□

3.3 Description de (φ, w).

Dans ce paragraphe 3.3, le point de départ pour la description de (3.9) qui est basé sur un fonction auxiliaire $\psi(x)$ (ne dépende pas de θ). a ce stade, on sais que w peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} w(x,\theta) = \mathbf{W}\big(\varphi(x),\psi(x),\theta\big) &= \alpha\big(\varphi(x),\psi(x),\theta\big)\begin{pmatrix} 0 \\ -g\circ\varphi(x) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &+ \beta\big(\varphi(x),\psi(x),\theta\big)\begin{pmatrix} 1 \\ -f\circ\varphi(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\big(\varphi(x),\psi(x),\theta\big)\begin{pmatrix} f\circ\varphi(x) \\ 1 \\ g\circ\varphi(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.17}$$

avec la phase φ satisfait (3.14). Il faut ajuster les ingrédients φ, ψ et $\mathbf{W}$ selon (3.3)-$\cdots$-(3.6). On observe que la contrainte (3.3) est la même chausse que

$$\partial_\theta \gamma \equiv 0.$$

On utilise (3.14), la condition (3.6) est équivalente à

$$\partial_\psi \gamma \equiv 0.$$

Donc la fonction γ dépend que de la variable φ. On pose

$$\gamma(\varphi,\psi,\theta) \equiv \gamma(\varphi).$$

Maintenant on peut interpréter les deux conditions (3.4) et (3.5) en

$$-\alpha\ g' - \beta\ f' + \gamma'\ (f^2+1+g^2) + \gamma\ (f\ f' + g\ g') = 0\,, \tag{3.18}$$

$$\partial_\psi\alpha\ \nabla\psi\cdot{}^t(0,-g,1) + \partial_\psi\beta\ \nabla\psi\cdot{}^t(1,-f,0) = 0\,. \tag{3.19}$$

A partir de (3.18), il est simple d'extraire

$$\partial_\theta\alpha\ g' + \partial_\theta\beta\ f' \equiv 0\,, \qquad \partial_\psi\alpha\ g' + \partial_\psi\beta\ f' = 0\,. \tag{3.20}$$

La discutions de (3.18)-(3.19) est séparée en deux cas.

3.3.1 Le cas $f' \equiv g' \equiv 0$.

Par hypothèse on a $f \equiv a$ et $g \equiv b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Donc

$$\varphi(x) = \varphi_{00}(a\,x_1 + x_2 + b\,x_3)\,, \qquad \varphi_{00} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})\,. \tag{3.21}$$

vu (3.18), on a $\gamma \equiv c$ pour $c \in \mathbb{R}$. De plus la fonction $\psi(x)$ peut être mise sous la forme

$$\psi(x) = \Psi(x_1, x_3, a\,x_1 + x_2 + b\,x_3)\,, \qquad \Psi(X,Y,Z) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})\,. \tag{3.22}$$

Alors, la condition (3.19) ce transforme en un lois de conservation (impliquant Z et θ comme paramètre)

$$\partial_\psi\beta\big(\varphi_{00}(Z),\Psi,\theta\big)\ \partial_X\Psi + \partial_\psi\alpha\big(\varphi_{00}(Z),\Psi,\theta\big)\ \partial_Y\Psi \equiv 0\,. \tag{3.23}$$

Au niveau de (3.23), les variables Z et θ joue le rôle d'un paramètre. Or $\Psi(X,Y,Z)$ ne dépend pas de $\theta \in \mathbb{T}$, on a alors (quand $\partial_\psi\alpha \not\equiv 0$)

$$\partial_\psi\beta = \chi(\varphi,\psi)\ \partial_\psi\alpha\,, \qquad \chi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})\,. \tag{3.24}$$

l'équation (3.23) ce réduit en

$$\chi\big(\varphi_{00}(Z),\Psi\big)\ \partial_X\Psi + \partial_Y\Psi \equiv 0\,. \tag{3.25}$$

Nous pouvons résumer la situation dans laquelle $\nabla\varphi\cdot\partial_\psi\mathbf{W} \equiv 0$ et $f' \equiv g' \equiv 0$ selon lé résultat suivant

Proposition 5. *On choisie $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On sélectionne les fonctions lisse $\varphi_{00}(Z)$, $\chi(\varphi,\psi)$ et $\alpha(\varphi,\psi,\theta)$, n'importe qu'elles fonctions $\beta(\varphi,\psi,\theta)$ et $\Psi(X,Y,Z)$ vérifiant respectivement (3.24) et (3.25). On définie $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ selon (3.21) et (3.22). On considère la fonction $w(x,\theta)$ donnée par*

$$w = \alpha(\varphi,\psi,\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} + \beta(\varphi,\psi,\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Alors, le couple (φ, w) est compatible.

Soit φ donnée par (3.21). Et soit la fonction $m \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{T};\mathbb{R})$, on définie

$$\beta(\varphi,\psi,\theta) := m(\varphi,\theta) + \varphi\int_0^{\psi} s\,(\partial_\psi\alpha)(\varphi,s,\theta)\,ds\,.$$

Alors, on a (3.23) avec $\psi(x) = x_1/\big(1 + x_3\varphi(x)\big)$. les vecteurs $\nabla\varphi$ et $\nabla\psi$ sont no colinéaire. Par un choix de m et de α convenablement, on peut obtenir

$$\begin{aligned}\partial_\psi \mathbf{W}\wedge\partial_\theta\mathbf{W} &= (\partial_\psi\alpha\,\partial_\theta\beta - \partial_\psi\beta\,\partial_\theta\alpha)\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \\ &= \partial_\psi\alpha\left(\partial_\theta m - \varphi\int_0^{\psi}\partial_\theta\alpha(\varphi,s,\theta)\,ds\right)\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \not\equiv 0.\end{aligned}$$

La relation (3.1) n'est pas satisfait. Cette examole montre que la situation présenter au niveau de la Proposition 5 n'appara^it pas dans [3].

On note que le support en (X,Y) pour une solution no trivial $\Psi \not\equiv 0$ de (3.25) ne peut être compacte. De plus quand χ dune faccon non linéaire en ψ, dû à la formation des singularités, la construction est valable toujours d'une manière locale.

3.3.2 Le case $f' \not\equiv 0$ ou $g' \not\equiv 0$.

Vu (3.20), on a $\partial_\theta\mathbf{W}\wedge\partial_\psi\mathbf{W} \equiv 0$ ce qui implique (3.1). cette situation est exclus au niveau de (3.2) par ce que elle appara^it en [3].
On va voir ce qui ce passe quand $f' \not\equiv 0$, l'autre situation ($g' \not\equiv 0$) est similaire. Soit la fonction $\psi(x)$ ide la forme

$$\psi(x) = \Psi\big(x_1, x_3, \varphi(x)\big), \qquad \Psi(X,Y,Z) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}). \tag{3.27}$$

A partir de (3.20), on extrait $\partial_\psi\beta$ en fonction de $\partial_\psi\alpha$. Injectant le résultat dans (3.19). vu (3.2), on a $\partial_\psi\alpha \not\equiv 0$. Ce qui donne

$$\Psi(X,Y,\varphi) = \Psi_0\big(g'(\varphi)\,Y + f'(\varphi)\,X\big), \qquad \Psi_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}). \tag{3.28}$$

Le variable φ est fixé, la fonction Ψ est constant sur les lignes. Encore le support ne peut être compacte.

Proposition 6. *On sélectionne les fonctions f, g, γ et Ψ_0 dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ avec $f' \not\equiv 0$. On applique le Lemme 4, on peut construire une phase $\varphi(x)$ solution de (3.14). On définie la fonction $\psi(x)$ selon (3.27) et (3.28). On donne n'importe qu'elle $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T};\mathbb{R})$ avec $\partial_\psi\alpha \not\equiv 0$, on définie $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T};\mathbb{R})$ selon la relation (3.18). Finalement on considère l'expression $w(x,\theta)$ donnée par (3.17) ou $\gamma(\varphi,\psi,\theta) \equiv \gamma(\varphi)$. Alors, le couple (φ, w) est compatible.*

Un exemple, on prend $f(\varphi) = \varphi$, $g(\varphi) = \varphi^{-1}$ et $\gamma(\varphi) \equiv 0$. Et une solution de (3.7), par exemple

$$\varphi(x) = \frac{1 - x_2}{2x_1} + \sqrt{\left(\frac{1 - x_2}{2x_1}\right)^2 - \frac{x_3}{x_1}}.$$

Pour la fonction ψ, Soit la fonction $\Xi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, On peut prendre

$$\psi(x) \equiv \psi(x,\theta) = \Xi\big(\varphi(x), x_2 + 2\varphi(x)\,x_1, x_3 - \varphi(x)^2\,x_1\big).$$

4

Couples compatibles dans le cas ou $\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} \not\equiv 0$.

On discute le système (2.47)-(2.48)-(2.49)-(2.50) sous réserve de la condition (3.2) et dans le cas ou

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} \not\equiv 0.$$

Lemme 5. *Soit $\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} \not\equiv 0$. Le couple (φ, w) avec w donné par (2.40) est compatible si et seulement si il existe une fonction $k(x,\theta)$ tel que*

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\theta w \equiv 0\,, \tag{4.1}$$
$$\nabla\psi \cdot \partial_\theta w \equiv 0\,, \tag{4.2}$$
$$\nabla\varphi \cdot \big(\partial_\varphi \mathbf{W} - k\ \partial_\psi \mathbf{W}\big) \equiv 0\,, \tag{4.3}$$
$$\nabla\psi \cdot \big(\partial_\varphi \mathbf{W} - k\ \partial_\psi \mathbf{W}\big) \equiv 0\,, \tag{4.4}$$
$$(k\ \nabla\varphi + \nabla\psi) \cdot \partial_\varphi \mathbf{W} \equiv 0\,, \tag{4.5}$$
$$(k\ \nabla\varphi + \nabla\psi) \cdot \partial_\psi \mathbf{W} \equiv 0\,. \tag{4.6}$$

Preuve. La relation (4.1) est une répétition de (2.47). Quand $\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} \not\equiv 0$, la condition (2.48) est la même chausse que (4.2). A partir de (2.49) et (2.50), on peut extraire

$$(\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W})\,(\nabla\psi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W}) - (\nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W})\,(\nabla\varphi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W})\ \equiv\ 0$$

ce qui donne que les deux vecteur ${}^t(\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W}, \nabla\psi \cdot \partial_\psi \mathbf{W})$ et ${}^t(\nabla\varphi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W}, \nabla\psi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W})$ sont colinéaires. Le deuxième peut être obtenu on multiplinat le premier (ce qui est par hypothèse non nul) par un facteur k. Ce qui est précisément (4.3) et (4.4). A partir de (2.49) ou de (2.50) avec (4.3) et (4.4), on peut extraire (4.5) et (4.6). Inversement, a partir des informations (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6), il est simple d'obtenir (2.49) et (2.50). □

4.1 Réduction du problème : préliminaires.

4.1.1 Retraitement du problème.

Vu que $\partial_\psi \mathbf{W} \not\equiv 0$, par une permutation des coordonnées, on peut toujours supposer que $\partial_\psi \mathbf{W}_2 \not\equiv 0$, on fait un changement des variables ψ en $\mathbf{W}_2(\varphi,\psi,\theta)$. Après cette modifications on va travailler avec

$$\mathbf{W}(\varphi,\psi,\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}(\varphi,\psi,\theta) \\ \psi \\ \mathbf{W}_3(\varphi,\psi,\theta) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V} := \mathbf{W}_1\,. \tag{4.7}$$

Vu (3.2) qui affirme en particulier que $\partial_\varphi \mathbf{W} \not\equiv 0$. Par une permutation des indices 1 et 3 (si nécessaire), on peut supposer que $\partial_\varphi \mathbf{W}_1 \equiv \partial_\varphi \mathbf{V} \not\equiv 0$. Ce qui permet de voir $\mathbf{W}_3$ comme une fonctions de $(\psi, \mathbf{V}, \theta)$. Donc on peut trouver une certain fonction $\mathfrak{L}(\psi, \mathbf{V}, \theta) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}; \mathbb{R})$ tel que

$$\mathbf{W}(\varphi,\psi,\theta)=\begin{pmatrix}\mathbf{V}(\varphi,\psi,\theta)\\ \psi\\ \mathfrak{L}\big(\psi,\mathbf{V}(\varphi,\psi,\theta),\theta\big)\end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

On utilise (3.2) avec (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4), on conclut que les vecteurs $\partial_\theta w$ et $\partial_\varphi \mathbf{W}-k\,\partial_\psi \mathbf{W}$ sont colinéaire ce qui donne l'existence d'une fonction $\beta(x,\theta)$ tel que

$$\partial_\varphi \mathbf{W}-\tilde{k}\,\partial_\psi \mathbf{W}=\beta\,\partial_\theta \mathbf{W},\qquad \tilde{k}:=k+\beta\,\partial_\theta\psi\,. \tag{4.9}$$

Vu (4.8), cette informations (4.9) ce transforme en

$$\beta\,\partial_\theta\mathfrak{L}\equiv 0\,,\qquad \partial_\varphi\mathbf{V}\,=\,\beta\,\partial_\theta\mathbf{V}\,,\qquad k\,=\,-\beta\,\partial_\theta\psi\,. \tag{4.10}$$

Or $\partial_\varphi \mathbf{V}\not\equiv 0$, donc on a $\beta\not\equiv 0$ et $\partial_\theta\mathbf{V}\not\equiv 0$, cette dernière information devient une conséquence de (3.2). Nécessairement on doit avoir $\partial_\theta\mathfrak{L}\equiv 0$. On introduit

$$v(x,\theta)\,:=\,\mathbf{V}\big(\varphi(x),\psi(x,\theta),\theta\big)\,,\qquad v\in\mathcal{C}^1(\Omega_r^0\times\mathbb{T};\mathbb{R})\,. \tag{4.11}$$

On note

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\psi,v)=\mathfrak{L}(\psi,v)(x,\theta):=\mathfrak{L}\big(\psi(x,\theta),v(x,\theta)\big),\\ \partial_\psi\mathfrak{L}(\psi,v):=\partial_\psi\mathfrak{L}\big(\psi(x,\theta),v(x,\theta)\big),\\ \partial_v\mathfrak{L}(\psi,v):=\partial_{\mathbf{V}}\mathfrak{L}\big(\psi(x,\theta),v(x,\theta)\big).\end{aligned}$$

Observant que

$$\nabla\varphi\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\ \partial_v\mathfrak{L}\end{pmatrix}\partial_\theta\mathbf{V}=\nabla\varphi\cdot\partial_\theta w-\nabla\varphi\cdot\partial_\psi\mathbf{W}\,\partial_\theta\psi.$$

Vu les restrictions (4.1), la condition $\partial_\theta\psi\not\equiv 0$ de (3.2) et l'hypothèse $\nabla\varphi\cdot\partial_\psi\mathbf{W}\not\equiv 0$, on assure d'avoir $\partial_\theta\mathbf{V}\not\equiv 0$. Donc

$$\partial_\varphi\mathbf{V}\not\equiv 0\,,\qquad \partial_\theta\mathbf{V}\not\equiv 0\,,\qquad \partial_\theta\psi\not\equiv 0\,,\qquad k\,\equiv\,-\partial_\theta\psi\,\frac{\partial_\varphi\mathbf{V}}{\partial_\theta\mathbf{V}}\,. \tag{4.12}$$

Proposition 7. *Soit (3.2), (4.8) et* $\nabla\varphi\cdot\partial_\psi\mathbf{W}\not\equiv 0$. *Alors, la fonction* $\mathfrak{L}$ *ne dépend pas de* $\theta\in\mathbb{T}$ *et on a la restriction (4.12). De plus le système (4.1)-$\cdots$-(4.6) est équivalant à*

$$\partial_\theta v\big[\partial_1\varphi+\partial_v\mathfrak{L}(\psi,v)\,\partial_3\varphi\big]+\partial_\theta\psi\,\big[\partial_2\varphi+\partial_\psi\mathfrak{L}(\psi,v)\,\partial_3\varphi\big]\equiv 0\,, \tag{4.13}$$
$$\partial_\theta v\big[\partial_1\psi+\partial_v\mathfrak{L}(\psi,v)\,\partial_3\psi\big]+\partial_\theta\psi\,\big[\partial_2\psi+\partial_\psi\mathfrak{L}(\psi,v)\,\partial_3\psi\big]\equiv 0\,, \tag{4.14}$$
$$\partial_1\psi+\partial_v\mathfrak{L}(\psi,v)\,\partial_3\psi-\partial_\theta\psi\,\frac{\partial_\varphi\mathbf{V}}{\partial_\theta\mathbf{V}}\big[\partial_1\varphi+\partial_v\mathfrak{L}(\psi,v)\,\partial_3\varphi\big]\equiv 0\,, \tag{4.15}$$

ou v *est donnée par (4.11) avec* $\partial_\varphi\mathbf{V}$ *et* $\partial_\theta\mathbf{V}$ *calculer en* (φ,ψ,θ).

Preuve. Vu (4.11), a partir de (4.13) et de (4.14), on peut déduire que

$$\partial_\theta v\big[\partial_1 v+\partial_v\mathfrak{L}(\psi,v)\,\partial_3 v\big]+\partial_\theta\psi\,\big[\partial_2 v+\partial_\psi\mathfrak{L}(\psi,v)\,\partial_3 v\big]\,\equiv\,0\,. \tag{4.16}$$

Vu la condition (4.10) on conclus que la fonction $\mathfrak{L}$ ne dépend pas de la variable $\theta\in\mathbb{T}$, et on a les conditions (4.12). Par construction on sais que

$$w(x,\theta)\,=\,\begin{pmatrix}v(x,\theta)\\ \psi(x,\theta)\\ \mathfrak{L}(\psi,v)(x,\theta)\end{pmatrix},\qquad \partial_\theta w\not\equiv 0\,. \tag{4.17}$$

Avec une connaissance de (3.2) et de (4.8), les deux contraintes (4.1) et (4.2) sont équivalanet à l'exitence d'une fonction non nul $\alpha(x,\theta)$ tel que

$$\partial_\theta v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_v \mathfrak{L} \end{pmatrix} + \partial_\theta \psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_\psi \mathfrak{L} \end{pmatrix} = \alpha\ \nabla\varphi \wedge \nabla\psi\,. \tag{4.18}$$

Or $\partial_\varphi \mathbf{V} \not\equiv 0$, donc on a

$$\partial_\varphi \mathbf{W} \wedge \partial_\psi \mathbf{W} = \partial_\varphi \mathbf{V} \begin{pmatrix} -\partial_v \mathfrak{L} \\ -\partial_\psi \mathfrak{L} \\ 1 \end{pmatrix} \not\equiv 0.$$

On combine ceci avec (4.5), (4.6) et (4.12) on a l'existence d'une fonction scalaire non nul $\gamma(x,\theta)$ tel que

$$-\partial_\theta \psi\, \frac{\partial_\varphi \mathbf{V}\big(\varphi(x),\psi(x,\theta),\theta\big)}{\partial_\theta \mathbf{V}\big(\varphi(x),\psi(x,\theta),\theta\big)}\,\nabla\varphi + \nabla\psi\ =\ \gamma \begin{pmatrix} \partial_v \mathfrak{L} \\ \partial_\psi \mathfrak{L} \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

On injecte l'expression $\nabla\psi$ donnée par (4.19) dans (4.18) dans le bute d'extraire

$$\partial_\theta v = -\alpha\ \gamma\ (\partial_2\varphi + \partial_\psi \mathfrak{L}\, \partial_3\varphi)\,, \tag{4.20}$$

$$\partial_\theta \psi = +\alpha\ \gamma\ (\partial_1\varphi + \partial_v \mathfrak{L}\, \partial_3\varphi)\,, \tag{4.21}$$

$$\partial_\theta v\ \partial_v \mathfrak{L} + \partial_\theta \psi\ \partial_\psi \mathfrak{L} = +\alpha\ \gamma\ (\partial_\psi \mathfrak{L}\, \partial_1\varphi - \partial_v \mathfrak{L}\, \partial_2\varphi)\,. \tag{4.22}$$

Or $\alpha\gamma \not\equiv 0$ (car $\partial_\theta\psi \not\equiv 0$), a partir de (4.20) et de (4.21), on peut déduire (4.13). De plus, la relation (4.22) ne donne pas des nouvelles informations car elle est une combinaison linéaire de (4.20) et de (4.21). On remarque que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_v \mathfrak{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_v \mathfrak{L} \\ \partial_\psi \mathfrak{L} \\ -1 \end{pmatrix} \equiv 0\,, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_\psi \mathfrak{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_v \mathfrak{L} \\ \partial_\psi \mathfrak{L} \\ -1 \end{pmatrix} \equiv 0\,.$$

On utilise cette identité et (4.13), au niveau de (4.19) on multiplie par le vecteur non nul $\partial_\theta w$, on peut obtenir (4.14). La dernière condition (4.15) est juste le produit de (4.19) par le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_v \mathfrak{L} \end{pmatrix}.$$

Inversement, on suppose que $\varphi(x)$ et $\psi(x,\theta)$ sont elle que $\nabla\varphi \wedge \nabla\psi \not\equiv 0$ et vérifiant localement le système (4.13)-(4.14)-(4.15) pour une certain fonction $\mathfrak{L}(\psi, v)$ et $\mathbf{V}(\varphi,\psi,\theta)$. On définie v et w selon (4.11) et (4.17).

Les deux conditions (4.1) et (4.2) deviennent une conséquence directe de (4.13) et de (4.14). On peut obtenir (4.9), d'ou (4.3) et (4.4), a partir de (4.10) on ajustant les coefficients β (et alors k) convenablement. A ce stade l'interprétation de (4.13)-(4.14)-(4.15) est que le vecteur à gauche de (4.19) est orthogonal à la direction ${}^t(1,0,\partial_v\mathfrak{L})$ et à ${}^t(0,1,\partial_\psi\mathfrak{L})$. Donc on a (4.19) pour certain coefficient γ. Ce qui est exactement (4.5) and (4.6). □

Vu que $\partial_\theta w \not\equiv 0$, par une rotation dans l'espace des variables $x \in \mathbb{R}^3$, on peut obtenir $\partial_\theta v \not\equiv 0$. Toutes les restrictions dans (4.12) est stbale par cette modifications (si elle est assez petites). Donc on travaille localement en (x,θ) sous l'hypothèse $\partial_\theta v \not\equiv 0$ et (4.12).

4.1.2 Un ensemble de changement des variables.

On soustraire (4.15) de (4.14), on utilise (4.13) pour remplacer $\partial_1\varphi + \partial_v\mathfrak{L}(\psi, v)\,\partial_3\varphi$, et on exploite (3.2) pour faire des simplifications dans le bute d'extraire l'identité

$$\frac{(\partial_2\psi + \partial_\psi\mathfrak{L}\,\partial_3\psi)}{\partial_\theta\psi} = \frac{\partial_\varphi\mathbf{V}\,(\partial_2\varphi + \partial_\psi\mathfrak{L}\,\partial_3\varphi)}{\partial_\theta\mathbf{V}}. \tag{4.23}$$

L'identités

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c + \gamma a}{d + \gamma b}, \quad \forall\gamma \in \mathbb{R}.$$

on applique ceci à (4.23) avec $\gamma = \partial_\psi\mathbf{V}$ on a

$$\frac{\partial_2\psi + \partial_\psi\mathfrak{L}\,\partial_3\psi}{\partial_\theta\psi} = \frac{\partial_\varphi\mathbf{V}\,(\partial_2\varphi + \partial_\psi\mathfrak{L}\,\partial_3\varphi) + \partial_\psi\mathbf{V}\,(\partial_2\psi + \partial_\psi\mathfrak{L}\,\partial_3\psi)}{\partial_\theta\mathbf{V} + \partial_\psi\mathbf{V}\,\partial_\theta\psi}.$$

Vu (4.11), on obtient alors

$$\frac{\partial_2\psi + \partial_\psi\mathfrak{L}\,\partial_3\psi}{\partial_\theta\psi} = \frac{\partial_2 v + \partial_\psi\mathfrak{L}\,\partial_3 v)}{\partial_\theta v}. \tag{4.24}$$

Or $\partial_\theta v \not\equiv 0$, on peut travailler localement avec les variables (x, v) a la place de (x, θ). La fonction φ ne dépend pas de $\theta \in \mathbb{T}$ et donc ne dépend pas de v. Par contre la fonction ψ peut être mise sous la forme

$$\psi(x, \theta) = u\big(x, v(x, \theta)\big), \qquad \partial_v u \not\equiv 0. \tag{4.25}$$

On reformule (4.24) au niveau de $u(x, v)$ on a

$$\partial_2 u + \partial_u\mathfrak{L}(u, v)\,\partial_3 u = 0. \tag{4.26}$$

Vu (4.16) et on exploite (4.26), la contrainte (4.14) devient

$$\partial_1 u + \partial_v\mathfrak{L}(u, v)\,\partial_3 u = 0. \tag{4.27}$$

Un fois on a la fonction $u(x, v)$, ce n'est pas compliquer d'avoir $v(x, \theta)$. Pour cela il suffit de considérer la lois de conservation suivant

$$\partial_1 v + \partial_v\mathfrak{L}\big(u(x, v), v\big)\,\partial_3 v + \partial_v u(x, v)\,\big[\partial_2 v + \partial_u\mathfrak{L}\big(u(x, v), v\big)\,\partial_3 v\big] \equiv 0. \tag{4.28}$$

Ainsi le système (4.13)-(4.14)-(4.15) est la me chausse que d'identifié les deux expressions $u(x, v)$ et $v(x, \theta)$ comme il est expliquer avant sous réserve de la contrainte

$$\partial_1\varphi + \partial_v\mathfrak{L}\big(u(x, v), v\big)\,\partial_3\varphi\ , + \partial_v u(x, v)\,\big[\partial_2\varphi + \partial_u\mathfrak{L}\big(u(x, v), v\big)\,\partial_3\varphi\big] \equiv 0. \tag{4.29}$$

Or $v \in K \subset \mathbb{R}$ elle va être considérer au niveau de (4.29), comme un paramètre. Toute la difficulté est de *résoudre (4.29) avec une phase $\varphi(x)$ qui ne dépend pas de v*. On va expliquer dans un premier temps ce qui ce passe quand $\partial_3 u \equiv 0$. Et en suite on représente la problématique quand $\partial_3 u \not\equiv 0$.

• **Le cas** $\boxed{\partial_3 u \equiv 0}$. Vu (4.26) et (4.27), on a $\nabla_x u \equiv 0$. Donc $u(x, v) = U(v)$ avec la fonction $U \in \mathcal{C}^1(K; \mathbb{R})$ tel que $U' \not\equiv 0$. Nécessairement la fonction $\mathbf{V}$ dépend de ψ. Ce qui est en contradiction avec (4.12). Pour faire apparâitre une certain curiosité on va voir ce qui ce passe quand $\partial_3 u \equiv 0$ et $U' \not\equiv 0$. On note $\tilde{\mathfrak{L}}(v) := \mathfrak{L}\big(U(v), v\big)$, on remarque que (4.29) devient

$$\partial_1\varphi(x) + U'(v)\,\partial_2\varphi(x) + \tilde{\mathfrak{L}}'(v)\,\partial_3\varphi(x) \equiv 0. \tag{4.30}$$

Vu que les variables x et v sont indépendant. alors la relation (4.30) implique que

$$\tilde{\mathfrak{L}}(v) \equiv \mathfrak{L}\big(U(v), v\big) = a\,v + b\,U(v) + c$$

pour certain $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On va discuter

$$\partial_1\varphi + a\,\partial_3\varphi + U'(v)\,(\partial_2\varphi + b\,\partial_3\varphi) \equiv 0. \tag{4.31}$$

Ceci est possible si et seulement si $U' \equiv c \in \mathbb{R}$ et

$$\varphi(x) = \Phi\big(c\,x_1 - x_2, (a+b\,c)\,x_2 - c\,x_3\big), \qquad \Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R};\mathbb{R}).$$

De plus la fonction v peut être obtenu à partir de

$$\partial_1 v + a\,\partial_3 v + U'(v)\,(\partial_2 v + b\,\partial_3 v) = 0, \qquad v(0,\cdot) = v_0. \tag{4.32}$$

Par une variations des ingrédients a, b, U, Φ et v_0, on obtient un large classe des solutions du système (4.13)-(4.14)-(4.15).

• **<u>Le</u> <u>cas</u>** $\boxed{\partial_3 u \not\equiv 0}$**.** Dans le cas ou $\partial_3 u \not\equiv 0$, on peut faire un changement des variables (x,v) en (x_1,x_2,u,v). En particulier les applications φ, $\partial_v u$ et $\partial_3 u$ peut être vu comme des fonctions de (x_1,x_2,u,v) a ma place de (x,v). Ce qui permet d'établir les conventions

$$\varphi(x) = \Phi\big(x_1,x_2,u(x,v),v\big), \qquad \forall\,(x,v), \tag{4.33}$$
$$\partial_v u(x,v) = R\big(x_1,x_2,u(x,v),v\big), \qquad \forall\,(x,v), \tag{4.34}$$
$$\partial_3 u(x,v) = S\big(x_1,x_2,u(x,v),v\big), \qquad \forall\,(x,v). \tag{4.35}$$

Vu que $R \not\equiv 0$ et $S \not\equiv 0$. La contrainte (4.29) ce transforme en

$$X\,\Phi \equiv 0, \qquad X := \partial_1 + R\,\partial_2, \tag{4.36}$$

avec φ ne dépend pas de v qui peut être exprimer par

$$Y\,\Phi \equiv 0, \qquad Y := R\,\partial_u + \partial_v. \tag{4.37}$$

Le reste de ce chapitre 4 est consacré au cas $\partial_3 u \not\equiv 0$.

Rappelle du travaille. *Dans le cas ou $\partial_3 u \not\equiv 0$, le problème est de trouver une fonction non constante $\Phi(x_1,x_2,u,v)$ satisfait l'équation de transport (4.36) et (4.37) avec les coefficients $R(x_1,x_2,u,v)$ issue à partir de (4.26), (4.27) et de (4.34).*

Vu la présence de u et de v au niveau de φ et qui passe au niveau de (4.37) l'expression que $\partial_\theta\varphi \equiv 0$ devient un peut non naturelle. La procédure est de simplifier (4.29).

4.1.3 Réduction du problème : l'étape géométrique.

L'existence d'une solution non constante pour (4.36)-(4.37) découle des propriété géométrique des deux vecteurs X et Y. On introduit l'Algèbre de Lie $\mathcal{A}$ générée par les crochet de Poisson successive X et Y. La dimension est au plus 4, On a alors

$$\mathcal{A} \equiv \big\langle X\,,\, Y\,,\, [X;Y],\, \big[X;[X;Y]\big],\, \big[Y;[X;Y]\big]\big\rangle.$$

Proposition 8. *Le système (4.36)-(4.37) admet une solution non constante Φ si et seulement si la dimension de $\mathcal{A}$ est inférieure strictement à 4. On a deux situations*
i) dim $\mathcal{A}$ = 2. *La fonction $\Phi(x_1,x_2,u,v)$ dépend de deux variables indépendantes. Alors le coefficient R satisfait*

$$\partial_1 R + R\,\partial_2 R \equiv X\,R \equiv 0, \qquad R\,\partial_u R + \partial_v R \equiv Y\,R \equiv 0. \tag{4.38}$$

ii) dim $\mathcal{A}$ = 3. *La fonction $\Phi(x_1,x_2,u,v)$ dépendant d'une seul variable. Le coefficient R satisfait $XR \not\equiv 0$ ou $YR \not\equiv 0$ avec*

$$(XR)\,YXR - 2\,(XR)\,XYR + (YR)\,X^2R = 0, \tag{4.39}$$
$$(YR)\,XYR - 2\,(YR)\,YXR + (XR)\,Y^2R = 0. \tag{4.40}$$

Preuve. On rappelle que le crochet du Poisson des deux champs de vecteur X et Y est le champs de vecteur $[X;Y]$ qui est ajuster de tel sorte que

$$[X;Y]\, f = -YR\, \partial_2 f + XR\, \partial_u f = XYf - YXf\,, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4;\mathbb{R})\,.$$

A partir de (4.36) et de (4.37), il est simple de conclure que

$$Z\,\Phi \equiv 0\,, \quad \forall Z \in \mathcal{A}.$$

Dans le cas ou $dim\,\mathcal{A} = 4$, la fonction Φ est constante. Autrement dit la phase φ est stationnaire, ce qui contredit (1.4). Donc nécessairement la dimension est inférieure strictement à 4.
i) dim $\mathcal{A}$ = 2. Ce cas est possible si et seulement si $[X;Y]$ est une combinaison linéaire de X et Y, ce qui donne (4.38). On applique le Théorème de Frobenius [2], on a le champs plane $Vec\,\langle X, Y\rangle$ est associée avec une structure feuilleté de $\mathbb{R}^4$ par une variété de dimension deux 2 tel que le long de cette variété Φ est constante. Alors la fonction Φ admet deux degré de liberté. En particulier elle peut être une solution non constante pour le système (4.36)-(4.37).
i) dim $\mathcal{A}$ = 3. Pour avoir (4.38), il faut que $XR \not\equiv 0$ ou $YR \not\equiv 0$. Alors, pour avoir $dim\,\mathcal{A} = 3$, il est nécessaire d'imposer

$$\big[X;[X;Y]\big] \in Vec\big\langle X, Y, [X;Y]\big\rangle, \tag{4.41}$$
$$\big[Y;[X;Y]\big] \in Vec\big\langle X, Y, [X;Y]\big\rangle. \tag{4.42}$$

Sous les deux conditions (4.41) et (4.42), on a $dim\,\mathcal{A} = 3$. On applique le théorème de Frobenius [2], on a la hyperplan des champs $Vec\big\langle X, Y, [X;Y]\big\rangle$ est asscoiée à une structure feuilleté de $\mathbb{R}^4$ par une hypersurface sur laquelle Φ doit être constante. Autrement dit la fonction Φ peut variée dans une direction transversal à cette hypersurface. Maintenant on va convertir les conditions (4.41)-(4.42) sous la forme des contraintes impliquant R. Le calcule fournit

$$\begin{aligned}\big[X;[X;Y]\big] f &= (-2XYR + YXR)\,\partial_2 f \,+\, X^2 R\,\partial_u f\,,\\ \big[Y;[X;Y]\big] f &= -Y^2 R\,\partial_2 f \,+\, (2YXR - XYR)\,\partial_u f\,.\end{aligned}$$

On combine ces informations avec la forme spéciale de X, Y et $[X;Y]$, on peut déduire que les deux contraintes (4.41) and (4.42) ont lieu si le vecteur $[X;Y]$ est colinéaire à $\big[X;[X;Y]\big]$ et à $\big[Y;[X;Y]\big]$. Cette remarque conduit directement à (4.39) et à (4.40). □
On donne une donnée initiale $R(0,x_2,u,0) := R_{00}(x_2,u)$, on peut résoudre le système des deux lois de conservation (4.38) de la même manière que dans le Lemme 4. Alors, pour avoir Φ, il suffit de fixée une fonction quelconque $\Phi_{00}(x_2,u)$ satisfait $\nabla_{x_2,u}\Phi_{00} \not\equiv 0$ et d'intégrée les deux équations

$$\partial_1\Phi + R\,\partial_2\Phi \,\equiv\, 0\,, \qquad R\,\partial_u\Phi + \partial_v\Phi \,\equiv\, 0\,. \tag{4.43}$$

La discutions des deux conditions (4.39)-(4.40) est délicate. Le bute est de construire R et Φ dans le cas le plus générale possible (quand $XR\ YR \not\equiv 0$).

Lemme 6. *On fixe une fonction non nulle quelconque $\mathcal{Q}(y,R,\Phi) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^*)$. On sélectionne un couple de fonctions $R_{00}(x_1,x_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ et $\Phi_{00}(x_1,x_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ satisfait*

$$\nabla_{x_1,x_2}\Phi_{00} \not\equiv 0,$$

ainsi que

$$\partial_1 R_{00} + R_{00}\,\partial_2 R_{00} \,\not\equiv\, 0\,, \qquad \partial_1\Phi_{00} + R_{00}\,\partial_2\Phi_{00} \,\equiv\, 0\,. \tag{4.44}$$

Alors, le système (4.39)-(4.40) admet une solution $R(x_1,x_2,u,v)$ tel que

$$R(x_1,x_2,0,0) = R_{00}(x_1,x_2)\,, \qquad X\,R \not\equiv 0\,, \qquad Y\,R \not\equiv 0\,. \tag{4.45}$$

De plus, il existe une solution non constante Φ of (4.36)-(4.37) tel que

$$\Phi(x_1,x_2,0,0) = \Phi_{00}(x_1,x_2)\,, \qquad \frac{Y\,R}{X\,R} \equiv \mathcal{Q}(R\,x_1 - x_2, R, \Phi)\,. \tag{4.46}$$

Preuve. On commence par étudier la structure du système (4.39)-(4.40). Or $XR \not\equiv 0$, on peut introduire la quantité

$$Q := \frac{YR}{XR}.$$

Les restrictions (4.39) et (4.40) sont équivalant à

$$YQ - Q\,XQ \;=\; 0\,, \tag{4.47}$$

$$-[Y;X]\,R + (XQ)\,(XR) \;=\; 0\,. \tag{4.48}$$

Or $YR \not\equiv 0$ vu que $X\Phi \equiv 0$, on peut toujours considérer la fonction Q comme fonctions des variables (x_1, x_2, R, Φ), on pose alors

$$Q(x_1,x_2,u,v) \;=\; \mathfrak{Q}\big(x_1,x_2,R(x_1,x_2,u,v),\Phi(x_1,x_2,u,v)\big)\,.$$

Vu la définition de Q et le fait que $X\Phi \equiv 0$ et $Y\Phi \equiv 0$, l'équation (4.47) ce transforme en $X\mathfrak{Q} = 0$, donc

$$\mathfrak{Q} \equiv \mathcal{Q}(R\,x_1 - x_2, R, \Phi),$$

pour une certain fonction $\mathcal{Q}(T, R, \Phi) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$.
Les conditions (4.47) et (4.48) ce transforme en deux lois de conservation

$$\begin{aligned} \partial_v R \;+\; R\,\partial_u R - &\mathcal{Q}(R\,x_1 - x_2, R, \Phi)\,\partial_1 R \\ &- \mathcal{Q}(R\,x_1 - x_2, R, \Phi)\;R\,\partial_2 R \;\equiv\; 0\,, \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned} \partial_u R - &\mathcal{Q}(R\,x_1 - x_2, R, \Phi)\,\partial_2 R \\ &+ (x_1\,\partial_T \mathcal{Q} + \partial_R \mathcal{Q})(R\,x_1 - x_2, R, \Phi)\,(\partial_1 R + R\,\partial_2 R) \;\equiv\; 0\,. \end{aligned} \tag{4.50}$$

On considère l'équation (4.50) écrite pour $R_0(x_1, x_2, u)$ est associée à la donnée initiale

$$R_0(x_1,x_2,0) \;=\; R_{00}(x_1,x_2).$$

L'accès àR_0 (et donc à R) à besoin de

$$\Phi_0(x_1,x_2,u) := \Phi(x_1,x_2,u,0)$$

(et de Φ). Par construction la fonction Φ est constante le long des caractéristiques associée à (4.49) et à (4.50). Pour cela il suffit de savoir

$$\Phi_{00}(x_1,x_2) := \Phi_0(x_1,x_2,0).$$

Vu (4.49) comme une équation d'évolution en v associée à la donnée initiale R_0. pour les mêmes raison d'avant, on peut résoudre ce problème de Cauchy une fois on connais Φ_{00}. La difficulté découle du problème de compatibilité entre (4.49) et (4.50). Il faut que l'expression R obtenu soit une solution de (4.50). Poue cela il faut montrer que (4.50) ce propage (dans la direction v). cela est dû à l'identité

$$(Y - \alpha\,X)\big\{-[Y;X]\,R + (XQ)\,(XR)\big\} \;=\; \frac{2\,\big\{-[Y;X]\,R + (XQ)\,(XR)\big\}^2}{XR}\,.$$

On note que $Y\,R \not\equiv 0$ est une conséquence de (4.49) et de $\mathcal{Q} \not\equiv 0$. La fonction Φ peut être obtenu avec la même procédure, par une première intégration de (4.50) et vu (4.49). Géométriquement on a

$$\nabla\Phi \;=\; \lambda \begin{pmatrix} -R\,XR \\ XR \\ YR \\ -R\,YR \end{pmatrix}, \qquad \lambda \neq 0$$

ce qui implique que les surfaces de niveau de Φ coupe le plan $\{u = v = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ d'une manière transversal. Donc il existe une unique fonction Φ satisfait (4.46). □

4.1.4 Réduction du problème : étape analytique.

dans le paragraphe précédent 4.1.3, on a développé les aspect de R reliée à (4.38) ou à (4.39) et (4.40). Le coefficient $R(x_1, x_2, u, v)$ est également liés par la relation implicite (4.34) pour sélectionne une fonction $u(x, v)$ satisfait (4.26) et (4.27).

Au niveau de (4.26) et de (4.27), la variable v joue le rôle d'u paramètre. La situation est la même que dans le Lemme 4. Il suffit de sélectionné une donnée initiale $u_{00}(x_3, v) \equiv u(0, 0, x_3, v)$ tel que $\partial_3 u_{00} \not\equiv 0$ dans le bute d'avoir (localement en $\mathbb{R}^4$) une certain solution u de (4.26) et de (4.27) satisfait $\partial_3 u \not\equiv 0$.

Proposition 9. *Soit $u(x, v)$ n'importe qu'elle solution locale de (4.26) de (4.27) satisfait $\partial_3 u \not\equiv 0$. On définie $R(x_1, x_2, u, v)$ à partir de (4.34). Alors, il existe une fonction $\mathfrak{K} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ tel que R peut être mise sous la forme*

$$R(x_1, x_2, u, v) = -\frac{\partial_v \alpha(x_1, x_2, u, v)}{\partial_u \alpha(x_1, x_2, u, v)} \tag{4.51}$$

la fonction scalaire α est donnée par

$$\alpha(x_1, x_2, u, v) := \mathfrak{K}(u, v) + \partial_v \mathfrak{L}(u, v)\, x_1 + \partial_u \mathfrak{L}(u, v)\, x_2\,. \tag{4.52}$$

Dans ce contexte les deux restriction $R \not\equiv 0$ et $S \not\equiv 0$ qui sont prérequis dans l'analyse, vu après (4.35), ce transforme en

$$\partial_u \mathfrak{K} \not\equiv 0\,, \quad \partial_v \mathfrak{K} \not\equiv 0.$$

Preuve. à partir de (4.26) et de (4.27), on peut déduire que

$$\begin{aligned}
\partial_1(\partial_v u) + \partial_v \mathfrak{L}\, \partial_3(\partial_v u) + (\partial^2_{vv} \mathfrak{L} + \partial^2_{uv} \mathfrak{L}\, \partial_v u)\, \partial_3 u &= 0\,, && (4.53)\\
\partial_1(\partial_3 u) + \partial_v \mathfrak{L}\, \partial_3(\partial_3 u) + \partial^2_{uv} \mathfrak{L}\, (\partial_3 u)^2 &= 0\,, && (4.54)\\
\partial_2(\partial_v u) + \partial_u \mathfrak{L}\, \partial_3(\partial_v u) + (\partial^2_{uv} \mathfrak{L} + \partial^2_{uu} \mathfrak{L}\, \partial_v u)\, \partial_3 u &= 0\,, && (4.55)\\
\partial_2(\partial_3 u) + \partial_u \mathfrak{L}\, \partial_3(\partial_3 u) + \partial^2_{uu} \mathfrak{L}\, (\partial_3 u)^2 &= 0\,. && (4.56)
\end{aligned}$$

Or $\partial_3 u \not\equiv 0$, donc ces équations peut être interpréter par rapport au variables x_1, x_2, u et v. Alors, on a les différente EDOs (relativement à x_1 et à x_2) :

$$\partial_1 \left(\frac{R}{S}\right) = -\partial^2_{vv} \mathfrak{L}, \qquad \partial_1 \left(\frac{1}{S}\right) = \partial^2_{uv} \mathfrak{L}, \tag{4.57}$$

$$\partial_2 \left(\frac{R}{S}\right) = -\partial^2_{uv} \mathfrak{L}, \qquad \partial_2 \left(\frac{1}{S}\right) = \partial^2_{uu} \mathfrak{L}. \tag{4.58}$$

On remarque que u et v jouent le rôle des paramètres.Il est facile d'intégré (4.57) et (4.58). Ce qui donne l'existence de deux fonctions $k(u, v)$ et $h(u, v)$ tel que

$$\frac{R}{S} = k(u, v) - \partial^2_{vv} \mathfrak{L}(u, v)\, x_1 - \partial^2_{uv} \mathfrak{L}(u, v)\, x_2\,, \tag{4.59}$$

$$\frac{1}{S} = h(u, v) + \partial^2_{uv} \mathfrak{L}(u, v)\, x_1 + \partial^2_{uu} \mathfrak{L}(u, v)\, x_2\,. \tag{4.60}$$

Les deux fonctions k et h sont liée l'une à l'autre. Cecei est dû à l'égalité des dérivées partiels mixte $\partial_v(\partial_3 u)$ et $\partial_3(\partial_v u)$:

$$\begin{aligned}
\partial_v\big[\partial_3 u(x, v)\big] &= \partial_v\big[S(x_1, x_2, u, v)\big]\\
&= \partial_u S\, R + \partial_v S\\
&= \partial_3\big[\partial_v u(x, v)\big]\\
&= \partial_3\big[R(x_1, x_2, u, v)\big]\\
&= \partial_u R\, S\,.
\end{aligned}$$

Autrement dit on doit avoir

$$\frac{R\,\partial_u S - S\,\partial_u R}{S^2} = -\partial_u\left(\frac{R}{S}\right) = -\frac{\partial_v S}{S^2} = \partial_v\left(\frac{1}{S}\right).$$

Cela est les deux équations (4.59) et (4.60) donne

$$-\partial_u k = \partial_v h.$$

Donc il existe une fonction $\mathfrak{K}(u,v)$ tel que

$$k = -\partial_v \mathfrak{K}\,, \quad h = \partial_u \mathfrak{K}.$$

On divise (4.59) par (4.60) et en remplace k et h comme ils sont indiqué précédemment, on obtient (4.51) et (4.52). □

La formule explicite (4.51) et (4.52) indique que

$$R = -\frac{\partial_1 \beta}{\partial_2 \beta}$$

avec

$$\beta(x_1,x_2,u,v) := \partial_v\mathfrak{K}\,x_1 + \partial_u\mathfrak{K}\,x_2 + \frac{1}{2}\,\partial^2_{vv}\mathfrak{L}\,x_1^2 + \partial^2_{uv}\mathfrak{L}\,x_1\,x_2 + \frac{1}{2}\,\partial^2_{uu}\mathfrak{L}\,x_2^2\,.$$

On combine ces informations on obtient dans ce paragraphe 4.1.4 avec (4.36) et (4.37), on peut remarquer que

$$R = -\frac{\partial_1\Phi}{\partial_2\Phi} = -\frac{\partial_1\beta}{\partial_2\beta}, \qquad R = -\frac{\partial_v\alpha}{\partial_u\alpha} = -\frac{\partial_v\Phi}{\partial_u\Phi}. \tag{4.61}$$

Maintenant on peut produire une autre interprétation pour *le problème intermédiaire en cours d'étude*.

Remarque 1. La question est de savoir si on peut trouver deux fonctions $\mathfrak{K}(u,v)$ et $\mathfrak{L}(u,v)$ qui donne une factorisation de Φ sous la forme

$$\Phi = \mathcal{A}\big(x_1,x_2,\alpha(x_1,x_2,u,v)\big) = \mathcal{B}\big(u,v,\beta(x_1,x_2,u,v)\big), \qquad \nabla\Phi \not\equiv 0\,.$$

Or $\nabla\Phi \not\equiv 0$, les deux fonctions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne peut être constante. Ceci est al source de la difficulté.

4.2 Teste des conditions d'intégrabilité.

Maintenant on va injecter R donnée par (4.51)-(4.52) dans les deux conditions (4.38) ou (4.39)-(4.40). Dans cette procédure on à une petite liberté sur les fonctions $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{K}$. Le bute c'est d'avoir des contraintes sur $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{K}$.

Dans le paragraphe 4.2.1, on examine le cas $dim\,\mathcal{A} = 2$, c'est (4.38). Et ensuite, dans le paragraphe 4.2.2, on considère le cas $dim\,\mathcal{A} = 3$, c'est (4.39)-(4.40).

4.2.1 Critère bidimensionnelle.

On ait dans le cas ou $dim\,\mathcal{A} = 2$. On va travailler avec (4.38).

Lemme 7. *La fonction R donnée par (4.51) avec α as in (4.52) satisfait (4.38) si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée*

i.1. *On a $\partial^2_{vv}\mathfrak{L} \equiv 0$. La fonction $\mathfrak{L}$ est linéaire*

$$\mathfrak{L}(u,v) = a + b\,u + c\,v\,, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

En plus on peut trouver $\mathfrak{R} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tel que

$$R(u,v) = \mathfrak{R}\big(\mathfrak{K}(u,v)\big), \qquad \mathfrak{R}(\mathfrak{K})\, \partial_u \mathfrak{K} + \partial_v \mathfrak{K} = 0\,. \tag{4.62}$$

i.2. *On a $\partial^2_{vv}\mathfrak{L} \not\equiv 0$. On peut trouver $\mathfrak{H} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tel que*

$$\partial_u \mathfrak{L}(u,v) = \mathfrak{H}\big(\partial_v \mathfrak{L}(u,v)\big), \qquad \partial_u \mathfrak{K} - \mathfrak{H}'(\partial_v \mathfrak{L})\, \partial_v \mathfrak{K} = 0\,. \tag{4.63}$$

Dans le cas (4.62), on ait face à une lois de conservation. Dans le second cas (4.63), On doit résoudre une équation d'Hamilton-Jacobi. Dans ces deux cas, la détermination de $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{L}$ peut s'achevé une fois les deux fonction sont donnée $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, à savoir $\mathfrak{R}(\cdot)$ et $\mathfrak{K}(u,0)$ ou $\mathfrak{H}(\cdot)$ et $\mathfrak{K}(u,0)$.

Preuve. Le calcule de XR donne une fraction rationnelle polynomial en x. Plus spécialement

$$XR = -(\partial_v \alpha)^{-3}\, P(x)$$

avec

$$P(x) = a_{(0,0)} + \Xi(\mathfrak{L}) \sum a_\beta\, x^\beta\,, \qquad \Xi(\mathfrak{L}) := \partial^2_{uu}\mathfrak{L}\, \partial^2_{vv}\mathfrak{L} - (\partial^2_{uv}\mathfrak{L})^2\,.$$

La somme porte sur tous les multi-indices $\beta \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \le |\beta| \le 2$. On trouve

$$\begin{aligned}
a_{(0,0)} &= (\partial_u \mathfrak{K})^2\, \partial^2_{vv}\mathfrak{L} - 2\, \partial_u \mathfrak{K}\, \partial_v \mathfrak{K}\, \partial^2_{uv}\mathfrak{L} + (\partial_v \mathfrak{K})^2\, \partial^2_{uu}\mathfrak{L},\\
a_{(1,0)} &= 2\, \partial_v \mathfrak{K},\\
a_{(0,1)} &= 2\, \partial_u \mathfrak{K},\\
a_{(2,0)} &= \partial^2_{vv}\mathfrak{L},\\
a_{(1,1)} &= 2\, \partial^2_{uv}\mathfrak{L},\\
a_{(0,2)} &= \partial^2_{uu}\mathfrak{L}.
\end{aligned}$$

On suppose que $\Xi(\mathfrak{L}) \not\equiv 0$. Alors, la condition $XR \equiv 0$ informe que toutes les coefficients a_β avec $|\beta| \le 2$ sont nuls. En particulier, on a

$$\partial_u \mathfrak{K} \equiv 0\,, \quad \partial_v \mathfrak{K} \equiv 0.$$

Ceci n'est pas possible care cette situation est exclus. Nécessairement, on doit imposer

$$\Xi(\mathfrak{L}) \equiv 0.$$

i.1. Dans le cas ou $\partial^2_{vv}\mathfrak{L} \equiv 0$, la condition $\Xi(\mathfrak{L}) \equiv 0$ ce transforme en

$$\partial^2_{uv}\mathfrak{L} \equiv 0.$$

donc

$$a_{(0,0)} = (\partial_v \mathfrak{K})^2\, \partial^2_{uu}\mathfrak{L} \equiv 0\,.$$

La fonction $\mathfrak{L}$ doit être linéaire en u et en v, donc

$$\mathfrak{L}(u,v) = a + b\,u + c\,v.$$

Vu que $R \equiv -\partial_v \mathfrak{K}/\partial_u \mathfrak{K}$. La contrainte $YR \equiv 0$ ce transforme en

$$\partial_u \mathfrak{K}\, (R\, \partial_u R + \partial_v R) \equiv -\partial_v \mathfrak{K}\, \partial_u R + \partial_u \mathfrak{K}\, \partial_v R \equiv 0$$

idonc $R \equiv \mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ pour certain $\mathfrak{R} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Ce qui donne (4.62).

i.2. Dans le cas $\partial^2_{vv}\mathfrak{L} \not\equiv 0$, la relation $\Xi(\mathfrak{L}) \equiv 0$ est équivalanet à

$$\partial_u \mathfrak{L} = \mathfrak{H}(\partial_v \mathfrak{L})$$

pour certain $\mathfrak{H} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Alors la condition

$$a_{(0,0)} \equiv 0$$

ce transforme en

$$\partial^2_{vv}\mathfrak{L}\big[\partial_u \mathfrak{K} - \mathfrak{H}'(\partial_v \mathfrak{L})\,\partial_v \mathfrak{K}\big]^2 \equiv 0.$$

Vu la seconde partie de (4.63). Pn trouve

$$R \equiv -\mathfrak{H}'(\partial_v \mathfrak{L})^{-1}$$

combiné avec l'information précédente, il devient simple d'avoir que la relation $YR \equiv 0$ est vérifiée. □

4.2.2 Critère tridimensionnelle.

Dans le cas ou $dim\,\mathcal{A} = 3$. On va travailler avec (4.39) et (4.40), et $XR \not\equiv 0$ *ou* $YR \not\equiv 0$.On considère séparément des situation différentes concernant XR or YR.

Lemme 8. *[Le cas $XR \equiv 0$ et $YR \not\equiv 0$]. La fonction R donnée par (4.51) avec α tel que (4.52) satisfait $XR \equiv 0$, (4.39) et (4.40) sans (4.38) si et seulement si la fonction $\mathfrak{L}$ est linéaire*

$$\mathfrak{L}(u,v) = a + bu + cv\ , \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,$$

tandis que

$$R \equiv -\frac{\partial_v \mathfrak{K}}{\partial_u \mathfrak{K}}$$

avec $\mathfrak{K}$ tel que

$$(\partial_v \mathfrak{K})^2\ \partial^2_{uu}\mathfrak{K} - 2\,\partial_u \mathfrak{K}\,\partial_v \mathfrak{K}\,\partial^2_{uv}\mathfrak{K} + (\partial_u \mathfrak{K})^2\ \partial^2_{vv}\mathfrak{K} \not\equiv 0\,. \tag{4.64}$$

Preuve. La discution est la même que celle donnée dans la preuve du Lemme 7. L'option **i.2** doit être exclus car elle produit $YR \equiv 0$. Vu **i.1** on a (4.62) doivent être échangées avec (4.64). □

Lemme 9. *soit*

$$S_0(x_1,x_2) = \frac{b + A(t)\ x_1 + C(t)\ x_2}{1 + C(t)\ x_1 + B(t)\ x_2}, \qquad \partial_1 S_0 + S_0 \partial_2 S_0 = 0.$$

Alors A, B, C sont des constante.

Preuve. pour $x_1 = 0$ et ensuite $x_2 = 0$ et en dérivant en t on en obtient que

$$A' = b\ C', \quad A'\ C - C'\ A = 0, \quad C' = b\ B', \quad C'\ B - C\ B' = 0,$$

on suppose que $C' \neq 0$ ce qui donne que $A = b\ C$ et $C = bB$ alors $S_0 = b$ donc nécessairement $C' = 0$ et donc

$$A' = 0, \quad b\ B' = 0, \quad C\ B' = 0,$$

le cas $B' \neq 0$ donne $b = C = 0$ en remplaccant ces quantités dans l'expression de S_0 et en dérive en t on obtient que nécessairement $B' = 0$ et donc A, B, C sont des constantes. □

Lemme 10. *[Le cas $XR \not\equiv 0$ et $YR \equiv 0$]. La fonction R donnée par (4.51) avec α tel que (4.52) satisfait $YR \equiv 0$, (4.39) et (4.40) sans (4.38) si et seulement si la fonction $\mathfrak{K}$ est linéaire ne u et en v, autrement dit*

$$\mathfrak{K}(u,v) = \alpha\, u + \beta\, v + \gamma\ , \quad \alpha \neq 0\ , \quad \beta \neq 0,$$

tandis que la fonction $\mathfrak{L}(u,v)$ est polynomial en u et v avec un degré inférieure au égale à 2. De plus, les coefficients concernés doivent être adaptés afin d'avoir $XR \not\equiv 0$.

Preuve. On a (4.40) et la condition (4.39) ce réduit à $YXR \equiv 0$ ce qui donne

$$[X;Y]\,R = XYR - YXR \equiv 0 \equiv XR\,\partial_u R.$$

vu que $\partial_u R \equiv 0$ et $\partial_v R \equiv 0$. La fonction R ne dépend pas de (u,v) on note

$$R(x_1,x_2,u,v) = R(x_1,x_2).$$

vu l'expression de R en fonction de α en déduit que pour certain fonction $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$

$$\alpha = \mathfrak{K} + \partial_v \mathfrak{L}\, x_1 + \partial_u \mathfrak{L}\, x_2 = \Lambda\big(x_1, x_2, -R(x_1,x_2)\ v + u\big)$$

En particulier pour $(x_1,x_2) = (0,0)$, et vu que $\partial_u \mathfrak{K} \not\equiv 0$ et $\partial_v \mathfrak{K} \not\equiv 0$, donc on a

$$\mathfrak{K}(u,v) \equiv K(u - a\,v)\,, \qquad a \in \mathbb{R}^*\,, \qquad K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})\,, \qquad K' \not\equiv 0\,.$$

alors

$$R(x_1,x_2) = \frac{-a\ K' + \partial^2_{vv}\mathfrak{L}\, x_1 + \partial^2_{vu}\mathfrak{L}\, x_2}{K' + \partial^2_{vu}\mathfrak{L}\, x_1 + \partial^2_{uu}\mathfrak{L}\, x_2}$$

appliquant ce lemme précédent à pour R.

Dans le cas ou $K' = 0$. on a bien $(\partial^2_{vv}\mathfrak{L}, \partial^2_{uv}\mathfrak{L}, \partial^2_{uu}\mathfrak{L}) \in \mathbb{R}^3$ donc $\mathfrak{L}$ est un polynôme de degré au plus 2.

On suppose que $K' \neq 0$. On peut toujours écrire R sous la forme

$$R(x_1,x_2) = \frac{-a + \dfrac{\partial^2_{vv}\mathfrak{L}}{K'}\ x_1 + \dfrac{\partial^2_{vu}\mathfrak{L}}{K'}\ x_2}{1 + \dfrac{\partial^2_{uv}\mathfrak{L}}{K'}\ x_1 + \dfrac{\partial^2_{uu}\mathfrak{L}}{K'}\ x_2},$$

Utilisant le lemme précédent pour la fonction R on déduit alors que

$$\partial^2_{vv}\mathfrak{L} = \beta_1\ K', \quad \partial^2_{vu}\mathfrak{L} = \beta_2\ K', \quad \partial^2_{uu}\mathfrak{L} = \beta_3\ K', \tag{4.65}$$

la troisième contrainte de (4.65) donne

$$\mathfrak{L} = \beta_3\ \mathbf{K}(-a\ v + u) + H_1(v)u + H(v), \quad \mathbf{K}' = K$$

ce qui transforme la première et la deuxième contrainte de (4.65) en

$$(\beta_3\ b^2 - \beta_1)\ K'(-a\ v + u) + H_1''(v)u + H''(v) = 0$$
$$(\beta_3\ b - \beta_2)\ K'(-a\ v + u) + H_1'(v) = 0$$

ce qui donne

$$(\beta_3\ a^2 - \beta_1)\ K'' = 0, \quad (-\beta_3\ a - \beta_2)\ K'' = 0$$

si on suppose que $K'' \neq 0$ on déduit que

$$\beta_3\ a^2 = \beta_1, \quad -\beta_3\ a = \beta_2\ ,$$

ce qui donne que $R = -a$ et donc $XR = 0$ donc nécessairement $K'' = 0$ ce qui donne que K' est une constante et donc vu (4.65) on déduit que $\mathfrak{L}$ est un polynôme de degrés au plus deux et que K est un polynôme de degré une. □

Il reste le cas ou $XR \not\equiv 0$ et $YR \not\equiv 0$.

Proposition 10. *[Le cas $XR \not\equiv 0$ et $YR \not\equiv 0$]. La fonction R satisfait $(XR)(YR) \not\equiv 0$ et donnée par (4.51) avec α vérifiée (4.52) et satisfait (4.39) et (4.40) quand les deux expressions $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{L}$ sont ajuster suivant les deux situation distinctes suivante*

ii.1. *Les deux fonctions $\mathfrak{L}(u,v)$ et $\mathfrak{K}(u,v)$ sont des polynômes en u et v avec un dégrée inférieure au égale à 2*

$$\mathfrak{L}(u,v) = a_{20}u^2 + 2a_{11}uv + a_{02}v^2 + a_1u + a_2v + a_0\,, \quad a_\star \in \mathbb{R}, \tag{4.66}$$

$$\mathfrak{K}(u,v) = k_{20}u^2 + 2k_{11}uv + k_{02}v^2 + k_1u + k_2v + k_0\,, \quad k_\star \in \mathbb{R}, \tag{4.67}$$

tel que les coefficients a_{20}, a_{11} et a_{02} (non tous nuls) et les coefficients k_{20}, k_{11} et k_{02} (non tous nul) ajuster de tel sorte que

$$k_{11}a_{02} - k_{02}a_{11} = k_{20}a_{02} - k_{02}a_{20} = k_{20}a_{11} - k_{11}a_{20} = 0. \tag{4.68}$$

ii.2. *La fonction $\mathfrak{L}(u,v)$ peut être mise sous la forme*

$$\mathfrak{L}(u,v) \,=\, a\,u \,+\, \mathbb{F}(b\,u+v)\,, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.69}$$

tel que la fonction auxiliaire $\mathbb{F} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R};\mathbb{R})$ satisfait $\mathbb{F}^{(3)} \not\equiv 0$ et solution de l'EDO

$$(\gamma s^2 + 2\beta s + \delta)\,\mathbb{F}^{(3)}(s) \,+\, 3(\gamma s + \beta)\,\mathbb{F}^{(2)}(s) \,=\, 0\,, \qquad s \in \mathbb{R} \tag{4.70}$$

avec les constantes γ, β et δ non tous nuls. La gradient de $\mathfrak{K}(u,v)$ est ajuster comme c'est indiqué au niveau de (4.76) (tel que les fonctions polynomiale A et B sont définie dans la preuve).

ii.3. *La fonction $\mathfrak{L}(u,v)$ peut être mise sous la forme*

$$\mathfrak{L}(u,v) \,=\, u\,\mathbb{F}\big(u^{-1}(v+\alpha)\big) \,+\, \mathbb{G}(u)\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.71}$$

tel que les fonctions auxiliaires $\mathbb{F} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $\mathbb{G} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ satisfait

$$\mathbb{F}^{(2)}(u) \neq 0\,, \qquad \delta\,\mathbb{F}^{(2)}(u) \,=\, u^3\,\mathbb{G}^{(2)}(u)\,, \qquad u \in \mathbb{R} \tag{4.72}$$

avec $\delta \in \mathbb{R}^*$. De plus $\mathfrak{K}(u,v) = \partial_v\mathfrak{L}(u,v)$.

Preuve. Ci-dessous, nous vérifions que les différents choix décrits dans les paragraphes **ii.1**, **ii.2** et **ii.3** sont commodes. Montrer qu'il n'y a pas d'autres situations possibles est délicate. Cet aspect de la discussion est reportée à l'appendice **??**. Vu que (4.39)-(4.40) est équivalent à (4.47)-(4.48) ou à (4.49)-(4.50). On commence par regarder l'équation (4.49) qui ni rein autre que $Z\,R \equiv 0$ ou Z est le champs de vecteur

$$Z := Y - \mathcal{Q}(Rx_1 - x_2, R, \Phi)\,X\,, \qquad X = \partial_1 + R\,\partial_2\,, \qquad Y = R\,\partial_u + \partial_v\,.$$

Par construction ona aussi

$$Z\,(Rx_1 - x_2) \equiv 0\,, \qquad Z\,\Phi \equiv 0\,, \qquad Z\big[\mathcal{Q}(Rx_1 - x_2, R, \Phi)\big] \equiv 0\,. \tag{4.73}$$

On sélectionne $\tilde{v} \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0. On donne $f \in \mathcal{C}^1_l(\mathbb{R}^4;\mathbb{R})$, note $f_{\tilde{v}}(x_1,x_2,u) := f(x_1,x_2,u,\tilde{v})$. Pour l'instant on a

$$R_{\tilde{v}}(x_1,x_2,u) := R(x_1,x_2,u,\tilde{v})$$

et

$$Q_{\tilde{v}}(x_1,x_2,u) \,:=\, Q(x_1,x_2,u,\tilde{v}) \,=\, \mathcal{Q}(R_{\tilde{v}}\,x_1 - x_2, R_{\tilde{v}}, \Phi_{\tilde{v}})\,.$$

On adopte les conventions suivantes

$$d_v f := \partial_v\big[f(x_1,x_2,u+R_{\tilde{v}}\,v, \tilde{v}+v)\big]$$

$$= (R_{\tilde v}\, \partial_u f \,+\, \partial_v f)(x_1, x_2, u + R_{\tilde v}\, v, \tilde v + v)\,,$$
$$d_v^2 f := \partial_v (d_v f) \,=\, (R_{\tilde v}^2\, \partial^2_{uu} f \,+ 2\, R_{\tilde v}\, \partial^2_{uv} f \,+ \partial^2_{vv} f)(x_1, x_2, u + R_{\tilde v}\, v, \tilde v + v)\,.$$

Pour éviter les confusions, de retenir que, en général, nous avons

$$d_v^2 \not\equiv d_v \circ d_v\,.$$

Vu (4.73), les caractéristique associé à (4.49) et qui commence à partir du point $(x_1, x_2, u, \tilde v)$ est une ligne droite donnée par

$$(X_1, X_2, U, V)(v) = (\, x_1 - Q_{\tilde v}\, v\,,\, x_2 - Q_{\tilde v}\, R_{\tilde v}\, v\,,\, u + R_{\tilde v}\, v\,,\, \tilde v + v\,)\,. \tag{4.74}$$

La fonction R doit être constante le long de ces caractéristiques. Exprimant ce principe avec les définitions (4.51)-(4.52) on a

$$d_v \mathfrak{K} + d_v(\partial_v \mathfrak{L})\, x_1 + d_v(\partial_u \mathfrak{L})\, x_2 - Q_{\tilde v}\; v\; d_v^2 \mathfrak{L} \,\equiv\, 0\,. \tag{4.75}$$

• **La situation ii.1.** Observent que, dû à (4.66), les trois quantités

$$d_v(\partial_v \mathfrak{L})\,, \quad d_v(\partial_u \mathfrak{L})\,, \quad d_v^2 \mathfrak{L}\,,$$

sont des fonctions constante. Ainsi, l'application de la dérivée seconde ∂^2_{vv} à l'identité (4.75), permet d'extraire

$$\partial^3_{uuu}\mathfrak{K}(U,V)\, R_{\tilde v}^3 + 3\, \partial^3_{uuv}\mathfrak{K}(U,V)\, R_{\tilde v}^2 + 3\, \partial^3_{uvv}\mathfrak{K}(U,V)\, R_{\tilde v} + \partial^3_{vvv}\mathfrak{K}(U,V) = 0\,.$$

Or les trois variables $R_{\tilde v}$, U et V sont indépendante, don nécessairement on a (4.67). Alors, observant que

$$\partial_u R \,=\, -2\, (\partial_u \alpha)^{-1}\, (k_{11} + k_{20}\, R)\,, \qquad \partial_v R \,=\, -2\, (\partial_u \alpha)^{-1}\, (k_{02} + k_{11}\, R)\,,$$
$$\partial_1 R \,=\, -2\, (\partial_u \alpha)^{-1}\, (a_{02} + a_{11}\, R)\,, \qquad \partial_2 R \,=\, -2\, (\partial_u \alpha)^{-1}\, (a_{11} + a_{20}\, R)\,.$$

Il s'ensuit que

$$Q(x_1, x_2, u, v) \,\equiv\, \mathcal{Q}(R) \,=\, \frac{YR}{XR} \,=\, \frac{k_{02} + 2\, k_{11}\, R + k_{20}\, R^2}{a_{02} + 2\, a_{11}\, R + a_{20}\, R^2}\,.$$

On peut travailler au niveau de (4.47)-(4.48). Par construction, la condition (4.47) est vérifiée. On plus, (4.48) ce transforme en

$$\partial_u R \,-\, \mathcal{Q}(R)\, \partial_2 R \,+\, \mathcal{Q}'(R)\, (\partial_1 R + R\, \partial_2 R) \,=\, 0\,.$$

Cette relation revient à la même chose que

$$(k_{11}\, a_{02} - k_{02}\, a_{11}) + (k_{20}\, a_{02} - k_{02}\, a_{20})\; R + (k_{20}\, a_{11} - k_{11}\, a_{20})\; R^2 \,=\, 0\,.$$

Cette fonction polynomiale en R est identiquement nul si et seulement si on a (4.68).

• **La situation ii.2.** Vu que $\mathbb{F}^{(2)} \not\equiv 0$, on peut introduire

$$A(u,v) \,:=\, \frac{\partial_u \mathfrak{K}(u,v)}{\mathbb{F}^{(2)}(b\; u + v)}\,, \qquad B(u,v) \,:=\, \frac{\partial_v \mathfrak{K}(u,v)}{\mathbb{F}^{(2)}(b\; u + v)}\,. \tag{4.76}$$

Avec ces conventions, la fonction R peut être mise sous la forme

$$R \,=\, -\frac{B(u,v) + x_1 + b\; x_2}{A(u,v) + b\; x_1 + b^2\; x_2}$$

Tandis que

$$Q \;=\; \tilde{Q}(R,u,v) \;:=\; \frac{\partial_u A \; R^2 + (\partial_v A + \partial_u B)\; R + \partial_v B}{(R\,b+1)^2}\,.$$

La condition (4.47) ce réduit à $\partial_v \tilde{Q} \,+\, R\;\partial_u \tilde{Q} \,=\, 0$. Compte tenu de la forme spécifique ci-dessus de la fonction Q, on trouve une fonction en R dont les coefficients doivent être nuls. Ce critère donne

$$\partial^2_{uu} A \;=\; 2\,\partial^2_{uv} A + \partial^2_{uu} B \;=\; \partial^2_{vv} A + 2\;\partial^2_{uv} B \;=\; \partial^2_{vv} B \;\equiv\; 0\,. \tag{4.77}$$

L'exploitation de (4.77), permet d'obtenir

$$\begin{aligned} A(u,v) &= +\alpha\,u\,v - \gamma\,v^2 + a_0^1\,u + a_1^1\,v + a^0\,,\\ B(u,v) &= -\alpha\,u^2 + \gamma\,u\,v + b_0^1\,u + b_1^1\,v + b^0\,. \end{aligned}$$

Vu (4.48) qui peuvent également être formulés sous forme de

$$\partial_u R - Q\;\partial_2 R + XQ = 0.$$

On note

$$\mathfrak{D} := A + b\;x_1 + b^2\;x_2,$$

nous constatons que

$$\mathfrak{D}\,(R\;b+1)\,XQ \;=\; 2\;b\;\partial_v B - \partial_v A - \partial_u B + (b\;\partial_v A + b\;\partial_u B - 2\;\partial_u A)\;R\,.$$

Encore, la condition (4.48) ce transforme en une fraction en R ces coefficients doit être nuls. Il s'ensuit que

$$-3\;\partial_u A + 2\;b\;\partial_v A + b\;\partial_u B = 0\,, \tag{4.78}$$

$$-2\;\partial_u B + 3\;b\;\partial_v B - \partial_v A = 0\,. \tag{4.79}$$

Il demeure $\alpha = -b\,\gamma$ et

$$A(u,v) \;=\; -b\,\gamma\,u\,v - \gamma\,v^2 + b\,(-b_0^1 + 2\,b\,b_1^1)\,u + (-2\,b_0^1 + 3\,b\,b_1^1)\,v + a^0\,.$$

On retourne à (4.76), on va tester l'existence de $\mathfrak{K}$ suivant le théorème de Clairaut. Ceci est garantie par (4.70) si on choisie

$$\beta := b_0^1 - b\,b_1^1\,,\quad \delta = b\,b^0 - a^0.$$

Les restriction en γ, β et δ découle des deux conditions $XR \not\equiv 0$ et $YR \not\equiv 0$.

• **La situation ii.3.** La définition de R donne

$$R \;=\; -\frac{R_1(x_1,x_2,u,v)}{R_2(x_1,x_2,u,v)} \;:=\; -\;\frac{1 + x_1 + a(u,v)\;x_2}{a(u,v)\;(1+x_1) + b(u,v)\;x_2}\,, \tag{4.80}$$

où nous avons introduit

$$a(u,v) \;:=\; -u^{-1}\;(v+\alpha)\,, \qquad b(u,v) \;=\; u^{-2}\,\big[(v+\alpha)^2 + \delta\big]. \tag{4.81}$$

On utilise la formule donnée par R au niveau de (4.80) pour calculer

$$Q(x_1,x_2,u,v) \;\equiv\; \frac{YR}{XR} \;\equiv\; \frac{(YR_1)\,R_2 \;-\; (YR_2)\,R_1}{(XR_1)\,R_2 \;-\; (XR_2)\,R_1}\,.$$

A partir de (4.80), on peut toujours extraire

$$1 + x_1 \;=\; -\frac{h_1(u,v,R)}{h_2(u,v,R)}\;x_2 \;:=\; -\,\frac{a(u,v) + R\,b(u,v)}{1 + R\,a(u,v)}\;x_2\,.$$

Alors, on remplace $1 + x_1$ en conséquence de l'expression de Q, on peut avoir

$$Q(x_1, x_2, u, v) = \mathfrak{Q}(R, x_2, u, v) = \mathfrak{Q}_1(R, u, v)\, \mathfrak{Q}_2(R, u, v)^{-1}\, x_2$$

ou $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ sont des fonctions en R, u et v. On trouve

$$\mathfrak{Q}_1 := (b\, Ya - a\, Yb)\, h_2^2 + Yb\, h_1\, h_2 - Ya\, h_1^2,$$
$$\mathfrak{Q}_2 := (b - a^2)\, h_2\, (h_2 + R h_1).$$

Après plusieurs simplifications. On trouve $Q = -x_2 u^{-1}$ permettant de vérifier (4.47) directement. En plus, la condition (4.48) ce réduit à

$$R_1\, (u\, \partial_u + x_2\, \partial_2)\, R_2 - R_2\, (u\, \partial_u + x_2\, \partial_2)\, R_1 + R_1\, R_2 \equiv 0.$$

En prend en compte la définition de R_1, R_2, a et b, cette dernière relation devient évident à vérifier.. □

4.3 Discussion summary.

Jusqu'à présent, nous avons décrit les conditions qui sont nécessaires pour progresser. Il s'agit ici d'expliquer comment procéder concrètement pour construire des couples compatibles (φ, w) dans le cas $\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} \not\equiv 0$. On sélectionne une fonction $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{K}$ selon le paragraphe 4.2.1 ou 4.2.2. En particulier on a $\partial_u \mathfrak{K} \not\equiv 0$ et $\partial_v \mathfrak{K} \not\equiv 0$. On définie le coefficients $R(x_1, x_2, u, v)$ selon (4.51) et (4.52). Unr fois on connais R, on a accès à Φ. Plus précieusement dans le cas ou $dim\, \mathcal{A} = 2$, la fonction Φ est entièrement déterminée par la prescription

$$\Phi_{00}(x_2, u) := \Phi(0, x_2, u, 0) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}), \qquad \nabla_{x_2, u} \Phi_{00} \not\equiv 0. \tag{4.82}$$

Dans le cas ou $dim\, \mathcal{A} = 3$ (implique que $XR \not\equiv 0$ et $YR \not\equiv 0$), la situation est plus restrictive. Alors la fonction $\Phi_{00}(x_2, u)$ dépend d'une seul variable u. En effet, elle peut être obtenue en résolvant

$$-YR\, \partial_2 \Phi_{00} + XR\, \partial_u \Phi_{00} = 0, \quad \Phi_{00}(0, u) = \Phi_{000}(u) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}). \tag{4.83}$$

Une fois la fonction $\Phi_{00}(x_2, u)$ fixé comme il est indiquer en haut, on peut avoir une phase non stationnaire $\Phi(x_1, x_2, u, v)$. Maintenant on sélectionne une fonction $\chi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tel que $\chi' \not\equiv 0$ et on considère la fonction $u_{00}(x_3, v)$ solution de l'équation différentielle ordinaire (dont la variable est v)

$$\partial_u \mathfrak{K}(u_{00}, v)\, \partial_v u_{00} + \partial_v \mathfrak{K}(u_{00}, v) = 0, \qquad u_{00}(x_3, 0) = \chi(x_3). \tag{4.84}$$

Par construction l'expression $u_{00}(x_3, v)$ satisfait (4.34). La résolution des équations (4.26) et (4.27), quand v parcours un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}$ et joue le rôle d'un paramètre, a déjà été discuté.

On donne $\mathfrak{L}$ et u_{00}, il existe une unique expression $u(x, v) \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times K; \mathbb{R})$ satisfait (4.26)-(4.27) avec la donnée initiale

$$u(0, 0, x_3, v) = u_{00}(x_3, v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}). \tag{4.85}$$

De plus, comme une conséquence de la preuve de la Proposition 9, on a la relation (4.34) pour tout (x, v). En déduit l'expression de φ à partir de $\Phi(x_1, x_2, u, v)$ et $u(x, v)$ selon la formule (4.33), on obtient une fonction $\varphi(x)$ qui ne dépend pas de v.

La détermination de la fonction $v(x, \theta)$ est difficile. vu (4.11) et (4.25), on peut extraire l'identité fonctionnelle

$$v(x, \theta) = \mathbf{V}\big(\varphi(x), u\big(x, v(x, \theta)\big), \theta\big), \qquad \forall\, (x, \theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}. \tag{4.86}$$

En particulier pour $x = 0$ et pour tout $\theta \in \mathbb{T}$, on ait face à

$$v(0, \theta) = \mathbf{V}\big(\varphi(0), u_{00}\big(0, v(0, \theta)\big), \theta\big), \qquad \varphi(0) = \Phi_{00}\big(0, \chi(0)\big).$$

Pour simplifier, on peut choisir une fonction $v(x,\theta)$ tel que $v(0,\cdot)\equiv 0$. Et la fonction $\mathbf{V}(\varphi,\psi,\theta)$ doit être sous la forme

$$\mathbf{V}\big(\varphi(0),\chi(0),\theta\big)\equiv 0\,,\qquad \forall\,\theta\in\mathbb{T}\,. \tag{4.87}$$

Dans ce qui suit, nous choisissons une fonction $\mathbf{V}$ satisfait (4.87). On suppose que $\partial_\theta\mathbf{V}$n'est pas une fonction nulle et que

$$\partial_v\mathfrak{K}\big(\chi(0),0\big)\,\partial_\psi\mathbf{V}\big(\varphi(0),\chi(0),\theta\big)+\partial_u\mathfrak{K}\big(\chi(0),0\big)\neq 0\,,\qquad\forall\,\theta\in\mathbb{T}\,. \tag{4.88}$$

Pour chaque $\theta\in\mathbb{T}$, les informations (4.87) et (4.88) permettre d'appliquer Théorème des fonctions implicite au point $(0,\theta,0)$ à l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ (x,\theta,v)&\longmapsto v-\mathbf{V}\big(\varphi(x),u(x,v),\theta\big)\,.\end{aligned}$$

Il donne localement, près de $(0,\theta)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{T}$, une unique fonction $v(x,\theta)$ satsifait la relation (4.86). Dû à la compacité de $\mathbb{T}$, on ajuste le nombre $r\in\mathbb{R}_*^+$ suffisamment petit, on peut garantir (4.86). On note que l'expression $v(x,\theta)$ est (par construction) nécessairement une solution de (4.28). De plus, on a pas $\partial_\theta v\equiv 0$.

On definie la fonction $\psi(x,\theta)$ selon (4.25). Tout les ingrédients $\varphi(x)$, $\psi(x,\theta)$ et $\mathbf{V}(\varphi,\psi,\theta)$ sont déterminés. Alors le profil $w(x,\theta)$ est connu. On utilise (2.40) et (4.8). Par construction, le couple (φ,w) est compatible. Ci-dessous, nous résumer la discussion précédente en précisant clairement les degrés de liberté à disposition dans la construction de couples compatibles (φ,w).

Proposition 11. *Dans le cas $\nabla\varphi\cdot\partial_\psi\mathbf{W}\not\equiv 0$, La classe des couples compatibles (φ,w) est entièrement déterminer par la donnée locale de*

- *fonction $\mathfrak{L}(u,v)$ et $\mathfrak{K}(u,v)$ donnée selon le paragraphe 4.2.1 ou 4.2.2 ;*
- *une fonction $\Phi_{00}(x_2,u)$ qui satisfait (4.83) quand $dim\,\mathcal{A}=3$;*
- *une fonction $\chi(x_3)$;*
- *une fonction $\mathbf{V}(\varphi,\psi,\theta)$ ajuster selon (4.87) et (4.88).*

4.4 Des exemples.

Le but ici est d'illustrer les différentes situations qui peuvent se produire à travers des exemples de correspondance. Dans la pratique, nous sélectionnons fonctions $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{K}$ résultant des différents cas classées dans la section4.2. Dans chaque cas, on produit les phases correspondantes $\varphi(x)$, et aussi l' ingrédients u et v permettant de récupérer le profil $w(x,\theta)$ selon (4.17) et (4.25).

Pour faciliter la présentation, nous rappelons ci-dessous les équations à résoudre. Une fois $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{K}$ fixés l'expression R est donnée par (4.51) et (4.52). Par construction, il existe une fonction Φ adéquate tel que

$$\partial_1\Phi\,+\,R\,\partial_2\Phi\,\equiv\,0\,,\qquad\partial_v\Phi\,+\,R\,\partial_u\Phi\,\equiv\,0\,. \tag{4.89}$$

La fonction u doit satisfait (4.26), (4.27) et (4.34)

$$\begin{cases}\partial_1 u\,+\,\partial_v\mathfrak{L}(u,v)\,\partial_3 u\,\equiv\,0\,,\\ \partial_2 u\,+\,\partial_u\mathfrak{L}(u,v)\,\partial_3 u\,\equiv\,0\,,\\ \partial_v u(x,v)\,=\,R\big(x_1,x_2,u(x,v),v\big)\,.\end{cases} \tag{4.90}$$

La fonction $v(x,\theta)$ est obtenu à travers (4.28)

$$\begin{aligned}&\partial_1 v\,+\,\partial_v\mathfrak{L}\big(u(x,v),v\big)\,\partial_3 v\\ &\qquad+\partial_v u(x,v)\,\big[\partial_2 v+\partial_u\mathfrak{L}\big(u(x,v),v\big)\,\partial_3 v\big]\,\equiv\,0\,.\end{aligned} \tag{4.91}$$

Alors, il est possible de déterminer φ selon (4.33). Par construction, la fonction φ ne dépend pas de θ et elle satisfait (4.29).

4.4.1 Exemple dans le cas cas i.1 du Lemme 7.

Par hypothèse la fonction $\mathfrak{L}$ est linéaire

$$\mathfrak{L}(u, v) = a\ u + b\ v + c\ , \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

La fonction R est tel que

$$R \equiv -\frac{\partial_v \mathfrak{K}}{\partial_u \mathfrak{K}}$$

doit être indiqué au niveau de (4.62). Pour simplifier en prend

$$R \equiv 1$$

alors

$$\Phi = \Phi_{00}(x_2 - x_1, u - v).$$

A partir de (4.90), on déduit que

$$u(x, v) = \chi(x_3 - a\ x_2 - b\ x_1) + v.$$

De plus la fonction v peut être écrite sous la forme

$$v(x, \theta) \ = \ v_0\big(x_1 - x_2, x_3 - (a + b)\ x_2, \theta\big)\,, \qquad \partial_\theta v_0 \neq 0\,.$$

Et donc

$$\varphi(x) = \Phi_{00}\big(x_2 - x_1, \chi(x_3 - a\ x_2 - b\ x_1)\big).$$

4.4.2 Exemple dans le cas i.2 du Lemme 7.

Pour simplifier la discution on travaille avec le choix

$$\mathfrak{H}(t) = t$$

implique que les deux fonctions $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{K}$ sont en fonction de $u + v$. Pour l'instant on a

$$\mathfrak{L}(u, v) = \mathrm{L}(u + v)$$

pour certain fonction L satisfait

$$\mathrm{L}^{(2)} \not\equiv 0.$$

De plus on trouve

$$R \equiv -1\ , \quad \Phi = \Phi_{00}(x_1 + x_2, u + v).$$

Vu (4.90), on en déduit que $u(x, v)$ peut être mise sous la forme

$$\tilde{u}(x_1 + x_2, x_3) - v$$

ou $\tilde{u}(z, x_3)$ est obtenu on résolvant la lois de conservation

$$\partial_z \tilde{u}(z, x_3) + \mathrm{L}'\big(\tilde{u}(z, x_3)\big)\ \partial_3 \tilde{u}(z, x_3) \ = \ 0\,, \qquad \tilde{u}(0, x_3) = \chi(x_3)\,.$$

A partir de (4.91), on déduit que $v(x, \theta) = \tilde{v}(x_1 + x_2, x_3, \theta)$. On remarque que

$$\varphi(x) \ = \ \Phi_{00}\big(x_1 + x_2, \tilde{u}(x_1 + x_2, x_3)\big)\,.$$

4.4.3 Exemple dans le cas u Lemme 8.

La fonction $\mathfrak{L}$ est linéaire

$$\mathfrak{L}(u,v) = a\ u + b\ v + c\ , \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

La fonction $\mathfrak{K}$ satisfait (4.64). On choisie

$$\mathfrak{K}(u,v) = -\frac{1}{2}\ v^2 + u$$

dans le bute de travaille avec

$$R \equiv v.$$

A partir de (4.89), on peut extraire

$$\Phi = \Phi_{00}(2u - v^2).$$

Cela est accepter, on remarque que Φ dépend d'une seul variables. de plus

$$u(x,v) \ = \ 2^{-1}\ v^2 + \chi(x_3 - a\ x_2 - b\ x_1)\,, \qquad \chi^{(1)} \neq 0\,.$$

A partir de (4.91), on obtient

$$v(x,\theta) \ = \ \tilde{v}(b\,x_1 - x_3, a\,x_2 - x_3, \theta)\,, \qquad \tilde{v}(y,z) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$$

ou $\tilde{v}(y,z)$ doit satisfaire la lois de Burger

$$b\,\partial_z \tilde{v} + a\,\tilde{v}\,\partial_y \tilde{v} \equiv 0.$$

Finalement

$$\varphi(x) \ = \ \big(\Phi_{00} \circ \chi\big)(x_3 - a\ x_2 - b\ x_1)\,.$$

4.4.4 Exemple dans le cas du Lemme 10.

Le cadre est le Lemme 10 avec

$$\mathfrak{K} = \alpha\,u + \beta\,v + \gamma.$$

On choisie

$$\mathfrak{L} = \frac{v^2}{2}$$

de sorte que

$$R = -\frac{(\beta + x_1)}{\alpha}$$

et

$$\Phi \equiv \varphi = \Phi_{00}\left(x_2 + \frac{\beta}{\alpha}x_1 + \frac{1}{2\alpha}x_1^2\right).$$

On note que

$$u(x,v) = -\frac{1}{\alpha}\big[(\beta + x_1)\,v - x_3\big] + c\ , \quad c \in \mathbb{R}.$$

De plus la fonction v est obtenu à travers

$$\partial_1 v \ + \ v\ \partial_3 v \ - \ \frac{1}{\alpha}\ (x_1 + \beta)\ \partial_2 v \ \equiv \ 0\,.$$

4.4.5 Exemple dans le cas ii.1 de la Proposition 10.

En accord avec (4.66) et (4.67), on peut sélectionner

$$\mathfrak{K}(u,v) = \mathfrak{L}(u,v) = v^2 + u$$

de sorte que

$$R = -2\,(v + x_1)$$

et

$$\Phi \equiv \Phi_{00}(v^2 + u + x_1^2 + 2\,x_1\;v + x_2).$$

De plus

$$u(x,v) \;=\; -2\;v\;x_1 - x_2 + x_3 - v^2\,, \qquad \varphi(x) \;=\; \Phi_{00}(x_1^2 + x_3)\,,$$

et la fonction $v(x,\theta)$ est n'importe quel solution de

$$\partial_1 v \;-\; 2\;(x_1 + v)\;\partial_2 v \;-\; 2\,x_1\;\partial_3 v \;=\; 0\,.$$

4.4.6 Exemple dans le cas ii.2 de la Proposition 10.

On choisie

$$\mathfrak{K}(u,v) = \frac{u}{v}\,, \quad \mathfrak{L}(u,v) = \frac{1}{2\,v}$$

de sorte que

$$R = \frac{u}{v} - \frac{x_1}{v^2}.$$

On put prendre

$$\Phi(x_1,x_2,u,v) \;=\; \Phi_{00}\left(\frac{u}{v}\,x_1 - \frac{x_1^2}{2\,v^2} - x_2\right), \qquad u(x,v) \;=\; x_3\,v + \frac{x_1}{2\,v} + \alpha\,v\,.$$

La fonction v est encore une solution pour une lois de conservation. De plus, on travaille avec φ qui est une fonction d'une expression quadratique en x

$$\varphi(x) = \Phi_{00}(x_1\,x_3 + \alpha\,x_1 - x_2).$$

4.4.7 Exemple dans le cas ii.3 de la Proposition 10.

En accorde avec (4.72), on sélectionne

$$\mathbb{F}(t) = \frac{t^2}{2}\,, \qquad \mathbb{G}(t) = \frac{1}{2\,t}\,, \qquad \delta = 1\,, \qquad \alpha = 0\,, \qquad \mathfrak{L}(u,v) = \frac{v^2+1}{2\,u}\,.$$

A partir de (4.27), on peut déduire la relation implicite

$$u(x,v) = \tilde{U}\big(v\;x_1 - u(x,v)\;x_3, x_2, v\big)\,, \quad \tilde{U}(X,x_2,v) \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})\,. \tag{4.92}$$

A partir de (4.26) avec (4.92), on peut extraire

$$\tilde{U}(X,x_2,v) = \underline{U}\big(2\;X\;\tilde{U} - (v^2+1)\;x_2, v\big)\,, \quad \underline{U}(Y,v) \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})\,. \tag{4.93}$$

On utilise (4.92) et (4.93) dans le bute d'extraire respectivement $\partial_v u$ et $\partial_X \tilde{U}$. On remplace x_3 comme indiqué comme une fonction de x_1, x_2, Y, v et $\underline{U}$. Selon cette méthode, on obtient une première expression de $\partial_v u$. Il est comparé ci-dessous avec une entrée directement à partir de (4.51)-(4.52). On trouve

$$R \equiv \partial_v u \;=\; \frac{\dfrac{\partial_v \underline{U}}{2\;\underline{U}\;\partial_Y \underline{U}} + x_1 - \dfrac{v}{u}\;x_2}{\dfrac{v}{\underline{U}}\left[\dfrac{\underline{U} - 2\;Y\;\partial_Y \underline{U}}{2\;v\;\underline{U}\;\partial_Y \underline{U}} + x_1\right] - \dfrac{v^2+1}{u^2}\;x_2} \;=\; \frac{1 + x_1 - \dfrac{v}{u}\;x_2}{\dfrac{v}{\underline{U}}\,[1 + x_1] - \dfrac{v^2+1}{u^2}\;x_2}\,.$$

Il s'ensuit que

$$\underline{U}(Y,v) = v \pm \sqrt{Y+v^2}.$$

La fonction $u(x,v)$ peut être déduit juste en imposant $u(0,0)=0$ combiné avec la relation implicite

$$u(x,v) \;=\; \underline{U}\big(2\ v\ x_1\ u(x,v) - 2\ x_3\ u(x,v)^2 - (v^2+1)\ x_2, v\big)\,.$$

De plus on fixe $\Phi(x_1,x_2,u,v)$ sous la forme

$$\Phi = \underline{\Phi}\big(u\ (1+x_1) - v\ x_2, x_2, u, v\big)\,, \qquad \underline{\Phi}(Y,x_2,u,v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4;\mathbb{R})\,.$$

Vu la définition précédente de R, la condition (4.36) donné l'équation

$$-\ x_2\ \partial_Y \underline{\Phi} + Y\ \partial_2 \underline{\Phi} = 0.$$

Ainsi, il existe une certain fonction $\underline{\Phi}_0(X,u,v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ tel que

$$\underline{\Phi}(Y,x_2,u,v) = \underline{\Phi}_0(Y^2+x_2^2,u,v).$$

A partir de (4.37), on peut déduire que

$$\partial_v \underline{\Phi}_0 \equiv 0\ , \quad 2\ X\ \partial_X \underline{\Phi}_0 + u\ \partial_u \underline{\Phi}_0 = 0.$$

En conclusion on a le choix suivant

$$\Phi(x_1,x_2,u,v) \;=\; \Phi_{00}\left(\frac{[u\ (1+x_1) -\ v\ x_2]^2 + x_2^2}{u^2}\right)\,, \qquad \Phi_{00} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})\,.$$

avec $u(x,v)$ et $\Phi(x_1,x_2,u,v)$ comme en haut, on peut déduire $\varphi(x)$ a partir de (4.33).

5

Problème d'évolution.

Soit (φ, w) un couple compatible. On rappelle que le profil$w(x,\theta)$ peut être mise sous la forme (2.40) avec le triplet $(\varphi, \psi, \mathbf{W})$ ajuster selon (2.47)-(2.48)-(2.49)-(2.50) et satisfait (2.45). Dans ce chapiter on va expliquer ce qui ce passe lors de l'évolution dans le temps.

5.1 Propagation des données compatibles.

Le cadre de ce paragraphe 5.1 est de démontrer le Théorème 2. On considère le système (1.8). Les résultats standard (voir [5]) garanti l'existence local dans le temps des solutions de classe cC^1 dans le domaine $\Omega_r^T \times \mathbb{T}$ avec $T \in \mathbb{R}_+^*$ pour le problème (1.8). On introduit

$$\mathbf{U}(t,x,\theta) := \mathbf{W}\big(\Phi(t,x,\theta), \Psi(t,x,\theta), \theta\big).$$

A partir de (1.8), on peut déduire que

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} = 0\,, \qquad \mathbf{U}(0,x,\theta) = \mathbf{W}\big(\varphi(x), \psi(x,\theta), \theta\big) = w(x,\theta)\,. \tag{5.1}$$

On intègre (1.8) le long des caractéristiques associée (qui sont des droites), on peut exhiber les identités

$$\Phi(t,x,\theta) = \varphi\big(x - t\,\mathbf{U}(t,x,\theta)\big) \quad , \qquad \forall\,(t,x,\theta) \in \Omega_r^T \times \mathbb{T}\,, \tag{5.2}$$

$$\Psi(t,x,\theta) = \psi\big(x - t\,\mathbf{U}(t,x,\theta), \theta\big), \qquad \forall\,(t,x,\theta) \in \Omega_r^T \times \mathbb{T}\,. \tag{5.3}$$

Lemme 11. *On suppose que les trois ingrédients φ, ψ et $\mathbf{W}$ sont ajuster selon (2.47)-(2.48)-(2.49)-(2.50). Alors la fonction $\Phi(t,x,\theta)$ issue de (1.8) est tel que*

$$\partial_\theta \Phi \equiv 0.$$

De plus on note

$$y \equiv y(t,x) := x - t\,\mathbf{U}(t,x,\theta)\,, \qquad \Xi(y,\theta) := \big(\varphi(y), \psi(y,\theta), \theta\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}\,,$$

l'expression $\Psi(t,x,\theta)$ qui découle de (1.8) satisfait

$$\partial_\theta \Psi(t,x,\theta) \;\equiv\; \partial_\theta \psi(y,\theta) - t\;\nabla\psi(y,\theta)\cdot\big[\partial_\theta \mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big) + \partial_\theta\psi(y,\theta)\;\partial_\psi \mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big)\big]. \tag{5.4}$$

Preuve. On utilise la relation (5.2) et (5.3) avec la formule donnée pour $\mathbf{U}$ pour calculer $\partial_\theta\Phi$ et $\partial_\theta\Psi$ selon

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix}\partial_\theta\Phi(t,x,\theta)\\ \partial_\theta\Psi(t,x,\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t\,\nabla\varphi(y)\cdot\partial_\theta\mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big)\\ \partial_\theta\psi(y,\theta) - t\;\nabla\psi(y,\theta)\cdot\partial_\theta\mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big)\end{pmatrix}$$

avec la matrice $\mathcal{M}$ donnée par

$$\mathcal{M}(t,y,\theta) := \begin{pmatrix} 1+t\ \nabla\varphi(y)\cdot\partial_\varphi \mathbf{W} & t\ \nabla\varphi(y)\cdot\partial_\psi \mathbf{W} \\ t\ \nabla\psi(y,\theta)\cdot\partial_\varphi \mathbf{W} & 1+t\ \nabla\psi(y,\theta)\cdot\partial_\psi \mathbf{W} \end{pmatrix}.$$

Dans la formule précédente de la matrice $\mathcal{M}$, les fonctions $\partial_\star \mathbf{W}$ sont évalué en $\Xi(y,\theta)$. Une conséquence de (2.49) et de (2.50) on a

$$det\,\mathcal{M}(t,y,\theta) = 1.$$

On a donc

$$\partial_\theta\Phi(t,x,\theta) = -t\ \nabla\varphi\cdot(\partial_\theta \mathbf{W}+\partial_\theta\psi\ \partial_\psi \mathbf{W}) + t^2\left[(\nabla\psi\cdot\partial_\theta \mathbf{W})\,(\nabla\varphi\cdot\partial_\psi \mathbf{W})-(\nabla\varphi\cdot\partial_\theta \mathbf{W})\,(\nabla\psi\cdot\partial_\psi \mathbf{W})\right].$$

Le coté droite peut être vu comme une fonction en (y,θ). La condition (2.47) ni rien autre que

$$\nabla\varphi(y)\cdot\left[\partial_\theta\psi(y,\theta)\,\partial_\psi \mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big) + \partial_\theta \mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big)\right] = 0. \tag{5.5}$$

Donc

$$\partial_\theta\Phi(t,x,\theta) = t^2\ (\nabla\varphi\cdot\partial_\psi \mathbf{W})\ (\nabla\psi\cdot\partial_\theta \mathbf{W}+\partial_\theta\psi\ \nabla\psi\cdot\partial_\psi \mathbf{W}).$$

Vu (2.48), on a

$$\partial_\theta\Phi \equiv 0.$$

De la même manière qu'avant on peut obtenir

$$\begin{aligned}\partial_\theta\Psi(t,x,\theta) =& \partial_\theta\psi\ +\ t\ \big(\partial_\theta\psi\ \nabla\varphi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W} - \nabla\psi\cdot\partial_\theta \mathbf{W}\big)\\ &+t^2\left[(\nabla\varphi\cdot\partial_\theta \mathbf{W})\,(\nabla\psi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W}) - (\nabla\varphi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W})\,(\nabla\psi\cdot\partial_\theta \mathbf{W})\right].\end{aligned}$$

On exploite (2.49), (2.50) et (5.5), cela est équivalent à

$$\begin{aligned}\partial_\theta\Psi(t,x,\theta) =\ & \partial_\theta\psi - t\ \big(\nabla\psi\cdot\partial_\theta \mathbf{W}+\partial_\theta\psi\ \nabla\psi\cdot\partial_\psi \mathbf{W}\big)\\ &-t^2\ (\nabla\varphi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W})\ \nabla\psi\cdot\big(\partial_\theta \mathbf{W}+\partial_\theta\psi\ \partial_\psi \mathbf{W}\big).\end{aligned}$$

Vu (2.48) et (2.49),le terme en facteur de t^2 est nécessairement nul. De cette manière, nous pouvons voir comment (5.4) apparait. □

On considère l'expression u^ε définie dans le domaine Ω_r^T par

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t,x) :=& \mathbb{U}\Big(t,x,\tfrac{\Phi(t,x)}{\varepsilon}\Big)\\ =& \mathbf{W}\Big(\Phi(t,x),\Psi\big(t,x,\tfrac{\Phi(t,x)}{\varepsilon}\big),\tfrac{\Phi(t,x)}{\varepsilon}\Big), \qquad \varepsilon\in]0,1]. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Par construction on a $u^\varepsilon(0,\cdot)\equiv h^\varepsilon(\cdot)$ avec h^ε donnée par (1.2). Un calcule directe basé sur (1.8) indique que $u^\varepsilon(t,x)$ est solution de (1.1) sur Ω_r^T. On appique le Théorème 2.6 de [1], on obtient que $\big(D_x u^\varepsilon(t,x)\big)^3 \equiv 0$ sur $B(0,r-t\,V)$ pour tout $t\in[0,T]$. On répète dans le temps $t\in]0,T]$ la procédure de la Section 2, on peut déduire que les contraintes (2.47), (2.48), (2.49) et (2.50) ce propage. Autrement dit

Lemme 12. *Pour tout $t\in[0,T]$, les solutions $\Phi(t,x)$ et $\Psi(t,x,\theta)$ de (1.8) satisfait (1.10), (1.11), (1.12) and (1.13).*

Ces identités peut être aussi obtenu on utilisant (2.47)-(2.48)-(2.49)-(2.50) ainsi que (5.2), (5.3) et le Lemme 11. Le Théorème 2 est prouvé.

Pour compléter l'étude, on remarque que le rang de la solution est préservé. dans le cas du rang 1, cela est évident. Dans le cas de rang 2, il s'agit d'une conséquence de ce qui suit.

Lemme 13. *Les solutions $\Phi(t,x)$ et $\Psi(t,x,\theta)$ of (1.8) satisfait*

$$\big(\nabla\Phi\wedge\nabla\Psi\big)(t,x,\theta) = \big(\nabla\varphi\wedge\nabla\psi\big)(y,\theta), \qquad \forall\,(t,x,\theta)\in\Omega_r^T\times\mathbb{T}. \tag{5.7}$$

Ainsi, la mesure de volume $\nabla\Phi \wedge \nabla\Psi$ est constant le long des caractéristiques. Ceci est en fait un sous-produit de la relation de divergence libre.

Preuve. en différenciant (5.2) et (5.3) en ce qui concerne x_j, on peut extraire

$$M(t,y,\theta)\begin{pmatrix}\partial_j\Phi(t,x,\theta)\\ \partial_j\Psi(t,x,\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_j\varphi(y)\\ \partial_j\psi(y)\end{pmatrix}, \qquad \forall\, j \in \{1,2,3\}.$$

Il s'ensuit que

$$\nabla\Phi = (1 + t\ \nabla\psi\cdot\partial_\psi\mathbf{W})\ \nabla\varphi - t\ (\nabla\varphi\cdot\partial_\psi\mathbf{W})\ \nabla\psi\,, \tag{5.8}$$

$$\nabla\Psi = -t\ (\nabla\psi\cdot\partial_\varphi\mathbf{W})\ \nabla\varphi + (1 + t\ \nabla\varphi\cdot\partial_\varphi\mathbf{W})\ \nabla\psi\,. \tag{5.9}$$

On utilise (5.8) et (5.9) afin de calculer le produit vectoriel de $\nabla\Phi$ et $\nabla\Psi$. vu (2.49) et (2.50), on a (5.7).
□

5.2 Asymptotic phenomena.

la famille $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ fournir beaucoup d'informations sur les phénomènes complexes qui peuvent se produire au niveau de (1.1) lors du passage à la limite (quand $\varepsilon \to 0$).

On note $\mathcal{S}(t)$ avec $t \in \mathbb{R}_+^*$ le semi-groupe d'opérateur associée aux équations d'Euler incompréssible incompressible , pour l'instant on peut utiliser $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ pour étudier le problème bien posé (ou pas) de $\mathcal{S}(t)$ dans l'espace fonctionnelle (augmentant ainsi le délicat problème de la localisation des solutions, voir [6]). On peut aussi étudier la continuité faible en L^2 (ou pas) de $\mathcal{S}(t)$ (dans l'esprit de [4, 7]). Ces applications de notre approche actuelle ne seront pas développées dans ces pages. Néanmoins, nous allons souligner quelques-unes liées à un aspect très spécifique.

On va faire apparaitre le phénomène *de superposition des oscillations* déjà donnée en [4] (dans le cas $d = 2$ et en dehors du cas de la divergence nul) peut aussi apparaitre au niveau de (1.1) avec $d = 3$.

L'idée est de commencer à l'instant initial $t = 0$ avec une fonction $\psi(x)$ qui ne voit pas la variable $\theta \in \mathbb{T}$ et avec une fonction $\mathbf{W}_\varepsilon(\cdot)$ qui dépend d'un paramètre $\varepsilon \in]0,1]$ et contient des oscillations dans la variable ψ, comme indiqué en (**??**). Ensuite, dans le but de prouver le mécanisme (**??**), il suffit de présenter un certaine $t \in]0,T]$ tel que $\partial_\theta\Psi \not= 0$.

Vu (5.1) et par ce que $\partial_\theta\psi \equiv 0$, il suffit de tester si

$$\exists\,(x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}; \qquad \partial_\theta\mathbf{W}(\varphi,\psi,\theta)\cdot\nabla\psi = \partial_\theta w\cdot\nabla\psi \not= 0\,. \tag{5.10}$$

Dans le cadre $\nabla\varphi\cdot\partial_\psi\mathbf{W} \not\equiv 0$ de la Section 4.1, par ce que vu (4.2), il n'est pas possible d'avoir (5.10). Quand $\nabla\varphi\cdot\partial_\psi\mathbf{W} \equiv 0$, dans le cas $f' \not\equiv 0$ et $g' \not\equiv 0$, nous pouvons voir avec (3.17), (3.25) et (3.26) que

$$\partial_\theta w\cdot\nabla\psi = \left\{\partial_\theta\alpha\begin{pmatrix}0\\-g\\1\end{pmatrix} + \partial_\theta\beta\begin{pmatrix}1\\-f\\0\end{pmatrix}\right\}\cdot\left\{\Psi_0'\begin{pmatrix}f'(\varphi)\\0\\g'(\varphi)\end{pmatrix} + \partial_\varphi\Psi\begin{pmatrix}\partial_1\varphi\\ \partial_2\varphi\\ \partial_3\varphi\end{pmatrix}\right\}.$$

En prend en compte (3.14) et (3.20), nécessairement on a $\partial_\theta w\cdot\nabla\psi \equiv 0$. Il reste à examiner la situation de l'alinéa 3.3.1. Le contexte est celui de la Proposition 5. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $c = 0$ et $\varphi_{00} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On définie $\varphi(x)$ selon (3.21). On sélectionne une fonction α_ε tel que

$$\alpha_\varepsilon(\varphi,\psi,\theta) = A(\varphi,\psi,\psi/\varepsilon,\theta)\,, \qquad \partial_\psi A \not= 0\,, \qquad A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}^2;\mathbb{R})\,.$$

On choisie deux fonctions auxiliaire $\phi(\theta) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T};\mathbb{R})$ et $\Psi_0(T,Z) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ satisfit $\phi' \not= 0$ et $\partial_T\psi_0 \not= 0$. En prend

$$\chi \equiv 1\,, \qquad \beta_\varepsilon(\varphi,\psi,\theta) = \alpha_\varepsilon(\varphi,\psi,\theta) - \phi(\theta)\,, Psi(X,Y,Z) = \Psi_{\mathbf{0}}(Y-X,Z)\,.$$

De toute évidence, nous avons(3.24) et (3.25). Avec $w(x,\theta)$ définie selon (3.26), le calcule donne

$$\partial_\theta w \cdot \nabla\psi \;=\; \left\{ \partial_\theta \alpha \, \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} + \partial_\theta \beta \, \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cdot \left\{ \partial_T \Psi_{\mathbf{0}} \, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \partial_Z \Psi_{\mathbf{0}} \, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \right\} \;=\; \partial_T \Psi_{\mathbf{0}}\, \phi' \,\neq\, 0\,.$$

En fait, la solution correspondante à (**??**) peut être produit d'une manière explicite.

$$u^\varepsilon(t,x) \;=\; A_\varepsilon(t,x) \, \begin{pmatrix} 1 \\ -a-b \\ 1 \end{pmatrix} - \phi\big(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big) \, \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$A_\varepsilon(t,x) \;:=\; A\Big(\varphi(x), \frac{\psi\big(x_3 - x_1 - t\,\phi\big(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big)\big)}{\varepsilon}, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big)\,.$$

Bibliography

1. C. Cheverry, O. Guès, and G. Métivier. Large-amplitude high-frequency waves for quasilinear hyperbolic systems. *Adv. Differential Equations*, 9(7-8) :829–890, 2004.
2. William M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, No. 63.
3. C. Cheverry and M. Houbad. Compatibility conditions to allow some large amplitude WKB analysis for Burger's type systems. *Phys. D*, 237(10-12) :1429–1443, 2008.
4. C. Cheverry and O. Guès. Counter-examples to concentration-cancellation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 189(3) :363–424, 2008.
5. Denis Serre. *Systems of conservation laws. 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Hyperbolicity, entropies, shock waves, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
6. C. Cheverry. A deterministic model for the propagation of turbulent oscillations. *J. Differ. Equations*, 247(9) :2637–2679, 2009. doi:10.1016/j.jde.2009.08.009.
7. Andrew J. Majda and Andrea L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*, volume 27 of *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Résumé.
Dans ce mémoire de Master on étudier les équations d'Euler incompressible dans dans $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot) u^\varepsilon = 0 \\ \qquad u^\varepsilon(0,x) = h^\varepsilon(x) = w\left(x, \dfrac{\varphi}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

tel que $w \in C^1(\Omega_r^0) \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^3)$, $\varphi \in C^1(\Omega_r^0; \mathbb{R}^3)$ et $\varepsilon \in]0,1]$, vérifiant

$$\partial_\theta w(x,\theta) \neq 0, \quad \nabla\varphi(x) \neq 0, \quad \forall (x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}, \quad \Omega_r^0 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \quad \|x\| \leq r\right\}.$$

L'objectif est de donner les conditions nécessaires et suffisantes sur les donnée initiales $h^\varepsilon(x)$ pour avoir une solution du problème précédemment posé sur un domaine $\Omega_r^T \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$, de donner une méthode pour construire ces données initiales et finalement de décrire la structure des solutions récupérées.