

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du
Diplôme de master en mathématiques.
Option : Biomathématiques et Modélisation

Modèles Écologiques avec Retard à la Bifurcation

Présenté par : Azzi Cheyma

Mémoire soutenu le 3 juillet 2018 devant le jury composé de :

<i>Mme.</i> HADJ-SLIMANE Djamila	PROFESSEUR, UNIVERSITÉ DE TLEMCEN	Présidente
M. MOUSSAOUI Ali	PROFESSEUR, UNIVERSITÉ DE TLEMCEN	Examineur
M. BORSALI Fethi	MCB, UNIVERSITÉ DE TLEMCEN	Examineur
M. YADI Karim	PROFESSEUR, UNIVERSITÉ DE TLEMCEN	Encadreur

Année universitaire 2017-2018

Sommaire

Table des figures	2
DÉDICACES	3
REMERCIEMENTS	4
INTRODUCTION AU MÉMOIRE	5
1 Solution ‘canard’ : un paradigme	6
1.1 Théorie de Tikhonov pour les systèmes lents-rapides	6
1.2 Notion de stabilité pratique	9
1.3 Solution canard d’un modèle proie-prédateur	10
1.3.1 Le paradigme	10
1.3.2 Exemple	13
2 Retard à la bifurcation dans un modèle général de chasse	15
2.1 Introduction au modèle	15
2.2 Dynamiques lente et rapide	16
2.2.1 Équation rapide et variété lente	16
2.2.2 Équilibres de l’équation rapide	17
2.2.3 Équation lente et équilibres	19
2.3 Dynamique complète	20
2.3.1 Approximation sur un intervalle de temps borné	21
2.3.2 Retard à la bifurcation	22
2.3.3 La relation entrée-sortie au niveau de \mathcal{S}_1	23
2.3.4 La relation entrée-sortie au niveau de \mathcal{S}_2	25
2.3.5 Comportement de la solution au voisinage de la variété lente	25
2.4 Comportement asymptotique	34
2.4.1 Résultat de stabilité pratique	36
2.5 Application au modèle de Clark étendu	37
2.5.1 Simulation numérique	38
Bibliographie	42

Table des figures

1.1	Isoclines et direction du champs du système (1.11).	10
1.2	Les composantes attractives (en traits pleins) et répulsives (en traits discontinus) de la variété lente.	11
1.3	Exemple de 0-trajectoire du modèle (1.11).	12
1.4	Trajectoire du point d'entrée E jusqu'au point de sortie S .	13
2.1	La variété lente du système (2.5) : les composantes attractives sont indiquées en traits pleins et les composantes répulsives en traits discontinus, A, B, B_1, C, C_1, D et S sont les équilibres du système (2.4).	18
2.2	Signe de \dot{x} et \dot{y} dans les trois cas du lemme (3).	19
2.3	Les portraits de phase du système (2.5) en fonction du paramètre E .	20
2.4	Le faux comportement de la solution de (2.4) avec condition initiale $m_0 = (x_0, y_0, E_0)$.	22
2.5	Les fonctions g (en rouge) et h (en vert) définissant les applications $E \rightarrow G(E)$ et $E \rightarrow H(E)$ respectivement.	24
2.6	La fonction f définissant la fonction entrée-sortie $E \rightarrow F(E)$.	26
2.7	Comportement de la solution avec condition initiale $m_0 = (x_0, y_0, E_0)$ avec $b < E_0 < a_*$.	29
2.8	Comportement de la solution avec condition initiale $m_0 = (x_0, y_0, E_0)$ avec $E_0 > a_*$ et $H(E_0) < G(E_0)$.	30
2.9	Comportement de la solution avec condition initiale $m_0 = (x_0, y_0, E_0)$ avec $E_0 > a_*$ et $H(E_0) > G(E_0)$.	31
2.10	Variété lente du système (2.34), les parties attractives sont en traits pleins et les parties répulsives en traits discontinus.	37
2.11	la solution numérique dans le plan (E, y) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 3)$.	39
2.12	la solution numérique dans le plan (E, x) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 3)$.	39
2.13	la solution numérique dans le plan (x, y) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 3)$.	40
2.14	la solution numérique dans le plan (E, x) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 7)$.	40
2.15	la solution numérique dans le plan (E, y) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 7)$.	41
2.16	la solution numérique dans le plan (x, y) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 7)$.	41

DÉDICACES

A mes parents ;

A mes grands-parents : Benamar, Zakia, Bekhtaoui, Zahra ;

A ma tante Chafia ;

A mon frère Abdelfattah.

REMERCIEMENTS

Je rends grâce à Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je remercie mon encadreur Monsieur Yadi Karim pour ses précieux conseils, son aide et surtout sa grande patience.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger mon travail.

Mes plus sincères remerciements et tous mes respects pour le chef de département de Mathématiques Monsieur Mebkhout Benmiloud, ainsi qu'à tous mes professeurs.

Enfin, je ne remercierai jamais assez mes parents.

INTRODUCTION

Ce mémoire est principalement une synthèse de l'article de H. Boudjellaba et T.Sari intitulé *Stability loss delay in a class of slow and fast ecological models*, [<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00163654/>], 2007 [1]. Dans le premier chapitre nous présentons un paradigme de modèle proie-prédateur dans lequel apparaît une solution dite 'canard', illustrant un retard à la bifurcation. Pour cela, nous rappelons la théorie de Tikhonov pour les systèmes lents-rapides qui est le cadre nécessaire pour l'existence d'une solution canard. Au passage, nous introduisons la notion de stabilité pratique lorsque le paramètre de perturbation tend vers 0. L'exemple traité provient d'un article de S. Rinaldi et S. Muratori intitulé *Slow-fast limit cycles in predator-prey models*, dans *Ecological Modelling*, Elsevier Science Publishers B.V, Amsterdam, 61 : 287-308. 1992 [7]. Le second chapitre est consacré à l'étude d'un modèle de chasse général pour lequel nous nous intéressons principalement au comportement des solutions positives dont la description tient compte minutieusement du retard à la bifurcation. Nous en déduisons un résultat de stabilité pratique assurant la persistance uniforme du modèle. Finalement, nous illustrons les résultats par des simulations numériques.

Chapitre 1

Solution ‘canard’ : un paradigme

Dans ce chapitre, nous rappelons d’abord la théorie de Tikhonov pour les systèmes singulièrement perturbés et la notion de stabilité pratique. En deuxième lieu, nous présentons un paradigme de modèle proie-prédateur à travers lequel nous expliquons le phénomène de retard à la bifurcation produisant des solutions dites ‘canard’.

1.1 Théorie de Tikhonov pour les systèmes lents-rapides

Soit le problème :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) & x(0) = \alpha_\varepsilon, \\ \dot{y} = g(x, y, \varepsilon) & y(0) = \beta_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.1)$$

où ε est un paramètre de perturbation strictement positif, $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, f, g continues sur $\Omega \times [0, \varepsilon_0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m et $(\cdot) = d/dt$. Les conditions initiales α_ε et β_ε sont continues par rapport au paramètre ε . Le but est d’étudier les solutions de (1.1) quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Si on pose $\varepsilon = 0$, on obtient

$$\begin{cases} 0 = f(x, y, 0) & x(0) = \alpha_0, \\ \dot{y} = g(x, y, 0) & y(0) = \beta_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Une solution de (1.2) peut ne pas vérifier la condition initiale (α_0, β_0) . On ne peut pas espérer une convergence uniforme d’une solution de (1.1) vers une solution de (1.2) quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Le *théorème classique de dépendance continue par rapport aux paramètres* ne fonctionne pas (perturbation régulière). On parle de *perturbation singulière* et le système (1.1) est dit *singulièrement perturbé*. On dit aussi qu’il est *lent-rapide* ou à *deux échelles de temps*. En effet, si $f \neq 0$, \dot{x} est de l’ordre de $1/\varepsilon$ tandis que \dot{y} est de l’ordre de 1. La variable x est dite *rapide* et y est la variable *lente*. En effectuant le changement d’échelle du temps $\tau = t/\varepsilon$ (temps rapide), on obtient

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \varepsilon) & x(0) = \alpha_\varepsilon, \\ y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) & y(0) = \beta_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.3)$$

où

$$(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}.$$

Le système (1.3) est une perturbation régulière du problème

$$\begin{cases} x' = f(x, y, 0) & x(0) = \alpha_0, \\ y' = 0 & y(0) = \beta_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

D'après le théorème de dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales et aux paramètres, (1.4) donne une première approximation des solutions de (1.3) sur des intervalles de temps bornés quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Ainsi, une solution de (1.3) reste presque figée dans sa deuxième composante autour de $y = \beta_0$ et la première composante est approchée par une solution de

$$x' = f(x, \beta_0, 0), \quad x(0) = \alpha_0. \quad (1.5)$$

Le problème précédent est appelée *équation de la couche limite* et le système différentiel

$$x' = f(x, y, 0),$$

où y est un paramètre, est appelé *équation rapide* associée à (1.1). Elle décrit la phase rapide du mouvement.

Hypothèse 1 : *L'équation rapide a la propriété d'existence et d'unicité des solutions pour toute condition initiale préalablement fixée.*

On appelle *variété lente* \mathcal{N} de (1.1) l'ensemble des points d'équilibre de l'équation rapide.

Hypothèse 2 : *Il existe une application continue $\phi : Y \mapsto \mathbb{R}^n$ telle que*

$$\mathcal{N} = \{(x, y) \in \Omega : x = \phi(y), y \in Y\},$$

où Y est un compact d'intérieur non vide de \mathbb{R}^m . Cette application vérifie que $f(\phi(y), y, 0) = 0$. De plus la variété \mathcal{N} est isolée .

Hypothèse 3 : *L'équilibre $x = \phi(y)$ de l'équation rapide est asymptotiquement stable, uniformément par rapport $y \in Y$.*

Cette hypothèse exprime l'attractivité de la branche \mathcal{N} de la variété lente pour le système (1.1).

L'équation qui décrit alors la phase lente du mouvement est appelée *équation lente*. Elle est définie par

$$\frac{dy}{dt} = g(\phi(y), y, 0), y \in \text{int}Y,$$

où $\text{int}Y$ désigne l'intérieur de Y . On appelle *problème réduit*, le problème de Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = g(\phi(y), y, 0) \quad y(0) = \beta_0. \quad (1.6)$$

Hypothèse 4 : *L'équation lente a la propriété d'existence et d'unicité des solutions pour toute condition initiale préalablement fixée.*

Hypothèse 5 : $\beta_0 \in \text{int}Y$ et α_0 est dans le bassin d'attraction de l'équilibre $x = \phi(\beta_0)$.

Le théorème de Tikhonov donne alors des approximations des solutions de (1.1) à l'aide des solutions de l'équation de la couche limite et du problème réduit sur un intervalle de temps borné. Dans le cas où le problème singulièrement perturbé a la propriété d'unicité, nous avons la version suivante :

Théorème 1 ([5])

Supposons que $f, g, \alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ sont continues. Supposons satisfaites les hypothèses 1-5. Soit $\tilde{x}(\tau)$ la solution de (1.5) et $\bar{y}(t)$ la solution de (1.6) définie sur $[0, T]$. Alors si (1.1) a la propriété d'unicité, la solution $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ du ce problème et définie au moins sur $[0, T]$ et vérifie

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) &= \phi(\bar{y}(t)), & \text{pour tout } t \in]0, T], \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t), & \text{pour tout } t \in [0, T], \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon\tau, \varepsilon) &= \tilde{x}(\tau), & \forall \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Pour que l'approximation donnée par le théorème précédent soit valable pour tout $t > 0$, il suffit d'ajouter l'hypothèse suivante.

Hypothèse 6 : L'équation lente admet un point d'équilibre $y^* \in \text{int}Y$ asymptotiquement stable tel que β_0 est dans son bassin d'attraction.

Le résultat suivant est une extension du théorème de Tikhonov aux intervalles de temps non bornés.

Théorème 2 ([5])

Supposons que $f, g, \alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ sont continues. Supposons satisfaites les hypothèses 1-6. Soit $\tilde{x}(\tau)$ la solution de (1.5) et $\bar{y}(t)$ la solution de (1.6) définie pour tout $t \geq 0$. Alors si (1.1) a la propriété d'unicité, la solution $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ de ce problème et définie pour tout $t \geq 0$ et vérifie

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) &= \phi(\bar{y}(t)), & \text{pour tout } t > 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t), & \text{pour tout } t \geq 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon\tau, \varepsilon) &= \tilde{x}(\tau), & \text{pour tout } \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Exemple

Soit le système

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -x + 2y + \varepsilon z^2, & x(0) = \alpha_\varepsilon, \\ \dot{y} = x - 3y - z, & y(0) = \beta_\varepsilon, \\ \dot{z} = y - z^3, & z(0) = \gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (1.7)$$

1. L'équation rapide est donnée par $x' = -x + 2y$, où y et z sont des paramètres. L'hypothèse 1 est bien vérifiée.
2. N (calligraphique) est donnée par $x = 2y = \phi(y, z)$ et elle est bien isolée. L'hypothèse 2 est satisfaite.
3. L'attractivité de la variété lente uniformément pour tout compact (x, y) dans un compact K de \mathbb{R}^2 vient du fait que $d(-x + 2y)/dx = -1 < 0$ pour tout (y, z) . L'hypothèse 3 est vérifiée. L'attractivité est ici globale.
4. Le système lent est alors donné par

$$\begin{cases} \dot{y} = -y - z, \\ \dot{z} = y - z^3. \end{cases} \quad (1.8)$$

L'hypothèse 4 est vérifiée.

5. L'équation de la couche limite est définie par $x' = -x + 2\beta_0$ $x(0) = \alpha_0$, de solution $\tilde{x}(t)$.

6. Problème réduit est défini par

$$\begin{cases} \dot{y} = -y - z, & y(0) = \beta_0, \\ \dot{z} = -y - z^3, & z(0) = \gamma_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

de solution $(\bar{y}(t), \bar{z}(t))$. L'hypothèse 5 est vérifiée grâce à la globalité de l'attractivité des points d'équilibre de l'équation rapide.

7. On peut montrer que l'origine de l'équation lente globalement asymptotiquement stable en utilisant la fonction de Lyapounov $V(y, z) = y^2 + z^2$. L'hypothèse 6 est satisfaite.

En conclusion, d'après le théorème de Tikhonov pour les temps infinis

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon\tau, \varepsilon) &= \tilde{x}(\tau) && \text{pour tout } \tau \geq 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) &= (\bar{y}(t), \bar{z}(t)) && \text{pour tout } t \geq 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) &= \phi(\bar{y}(t), \bar{z}(t)) = 2\bar{y}(t) && \text{pour tout } t > 0. \end{aligned}$$

1.2 Notion du stabilité pratique

Considérons le système différentiel dépendant du paramètre positif $\varepsilon > 0$

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \quad (1.10)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue. Notons par $x(t, x_0, \varepsilon)$ les solutions telles que $x(0, x_0, \varepsilon) = x_0$. Nous ne supposons pas que la limite de f est définie lorsque ε tend vers 0. Le système (1.10) peut donc être singulièrement perturbé.

Définition 1

1. On dit que l'origine est **semi globalement pratiquement asymptotiquement stable (SGPAS)** pour le système (1.10) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ si, pour tout $R > 0$ et tout $r > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $T > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, tout $t \geq T$ et tout x_0 tel que $\|x_0\| < R$, toute solution $x(t, x_0, \varepsilon)$ de (1.10) satisfait $\|x(t, x_0, \varepsilon)\| < r$.
2. On dit que l'origine est **pratiquement asymptotiquement stable (PAS)** pour le système (1.10) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ s'il existe $R > 0$ tel que pour tout $r > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $T > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, tout $t \geq T$ et tout x_0 tel que $\|x_0\| < R$, toute solution $x(t, x_0, \varepsilon)$ de (1.10) satisfait $\|x(t, x_0, \varepsilon)\| < r$.

Remarque : La définition dit que toute solution vérifie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow \infty} x(t, x_0, \varepsilon) = 0$$

et la convergence est uniforme par rapport à la condition initiale x_0 dans la boule de \mathbb{R}^n de rayon R et de centre 0 (i.e. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow \infty} \sup_{\|x_0\| \leq R} \|x(t, x_0, \varepsilon)\| = 0$).

Le théorème de Tikhonov pour les temps infinis induit le résultat de stabilité pratique suivant.

Théorème 3 ([8])

Sous les hypothèses du théorème (2), le point $(\phi(y^*), y^*)$ est PAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$ pour le système singulièrement perturbé (1.1)

De l'exemple de la page 8 on a la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (2\bar{y}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)) = (0, 0, 0),$$

d'où $(0, 0, 0)$ est SGPAS pour (1.7) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

1.3 Solution canard d'un modèle proie-prédateur

1.3.1 Le paradigme

Considérons le système

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = xf(x, y) & x(0) = \alpha_\varepsilon, \\ \dot{y} = yg(x, y) & y(0) = \beta_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.11)$$

où les isoclines $\{f = 0\}$, $\{g = 0\}$ et la direction du champs sont telles qu'indiquées dans la figure (1.1). C'est précisément la configuration classique d'un modèle proie-prédateur avec croissance logistique de la proie 'x' et réponse fonctionnelle de type Holling II du prédateur 'y'. Le paramètre $\varepsilon > 0$ est considéré comme petit pour marquer une croissance de la proie

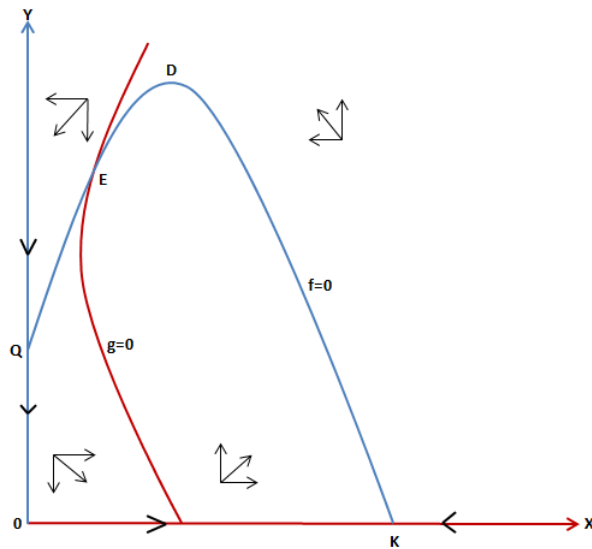


FIGURE 1.1 – Isoclines et direction du champs du système (1.11).

nettement plus rapide que celle du prédateur, ce qui est souvent le cas dans la réalité. On est en présence d'un système lent-rapide de variété lente $\{f = 0\}$ et $\{x = 0\}$. En dehors de cette variété, le champs est en réalité quasi-horizontale, orienté vers la gauche quand $f(x, y) < 0$ et vers la droite quand $f(x, y) > 0$. Les composantes attractives de la variété lente sont indiquées en traits pleins et les composantes répulsives en traits discontinus dans la figure (1.2).

On se propose de suivre une trajectoire partant d'un point P hors de la variété lente comme dans la figure (1.3). D'après le théorème de Tikhonov, une telle trajectoire arrive très vite près de la composante non triviale de la variété lente $\{f = 0\}$ (mouvement rapide), longe cette dernière lentement vers le haut (phase lente) jusqu'à s'approcher du sommet où cette variété perd son attractivité. On peut démontrer qu'elle saute très vite vers l'autre composante attractive de la variété lente (triviale) près du point A puis, toujours d'après le théorème de Tikhonov la trajectoire longe vers le bas la variété triviale $\{x = 0\}$ jusqu'à s'approcher du point Q où cette variété perd sa stabilité. On pourrait alors croire que cette trajectoire saute vers la composante attractive de la variété $\{f = 0\}$ au niveau du point Q comme cela a été présenté dans certains articles par exemple [6]. Ce comportement n'est pas le vrai à cause d'un phénomène de retard à la bifurcation (solution canard) : lorsqu'elle arrive près du point Q,

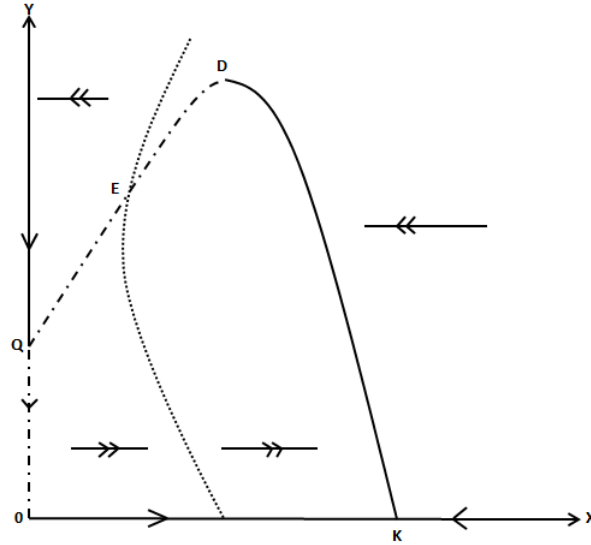


FIGURE 1.2 – Les composantes attractives (en traits pleins) et répulsives (en traits discontinus) de la variété lente.

la trajectoire continue à longer $\{x = 0\}$ dans sa partie répulsive jusqu'au point B avant de sauter vers la composante attractive de la variété $\{f = 0\}$. Nous donnons ici, à titre indicatif, la justification de Rinaldi et Muratori dans [7]. Notons que sur la figure (1.3) est représentée en bleu ce qu'on appellera une 0-trajectoire, la vraie trajectoire vivant dans un ε -voisinage de la 0-trajectoire. Le point Q étant dans l'intersection des deux composantes de la variété lente, dans un ε -voisinage de ce point, f et x sont tout deux de l'ordre de ε d'où, d'après la première équation de (1.11), \dot{x} est de l'ordre de ε . De là, $dy/dx = yg(x, y)/\frac{1}{\varepsilon}xf(x, y)$ est de l'ordre de $1/\varepsilon$ et la trajectoire est donc quasi-verticale. Nous montrons que la trajectoire continue a évoluer quasi verticalement jusqu'au voisinage du point B qui est tel que la croissance (lente) de x le long du segment QB compense sa décroissance le long du segment AQ . Plus précisément, fixons une valeur initiale (x_0, y_0) du couple proie-prédateur telle que :

$$E := (x_0, y_0) = (\varepsilon, y(0)), \quad y(0) > y_Q.$$

On a $\dot{x}(0) < 0$ et $\dot{y}(0) < 0$. Comme $(0, 0)$ est un point-selle selon la configuration, la trajectoire partant à l'instant $t = 0$ de E arrive une première fois à un instant $t = T$ en un point $S = (\varepsilon, y(T))$ comme schématisé sur la figure (1.4).

De la première équation de (1.11), on a

$$\frac{\varepsilon}{x}dx = f(x, y)dt. \quad (1.12)$$

D'autre part, de la deuxième on a

$$dt = \frac{1}{yg(x, y)}dy.$$

En remplaçant dt par son expression dans (1.12) il vient que

$$\frac{\varepsilon}{x}dx = \frac{f(x, y)}{yg(x, y)}dy.$$

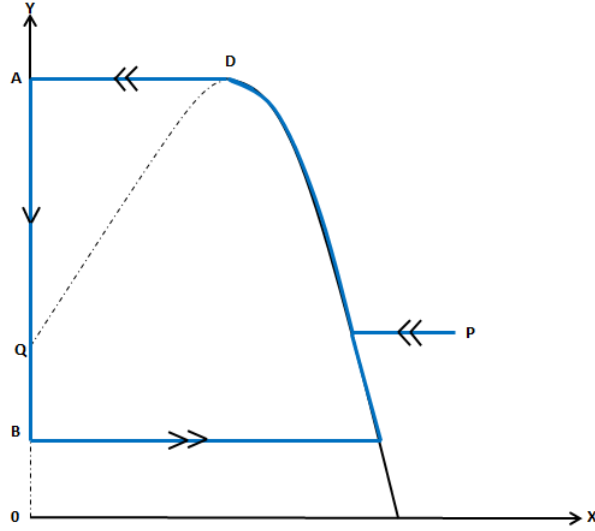


FIGURE 1.3 – Exemple de 0-trajectoire du modèle (1.11).

En intégrant entre les points E et S on a

$$\int_{x_E}^{x_S} \frac{\varepsilon}{x} dx = \int_{y_E}^{y_S} \frac{f(x, y)}{yg(x, y)} dy.$$

Comme $x_E = x_S = \varepsilon$, $y_E = y(0)$ et $y_S = y(T)$ alors

$$\int_{y(0)}^{y(T)} \frac{f(x, y)}{yg(x, y)} dy = 0.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, cette égalité devient

$$\int_{y(0)}^{y(T)} \frac{f(0, y)}{yg(0, y)} dy = 0.$$

Si le point d'entrée est $A := (0, y_{\max})$ comme sur la figure (1.3) alors le point de sortie $B := (0, y_{\min})$ est défini par

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{f(0, y)}{yg(0, y)} dy = 0. \quad (1.13)$$

L'égalité précédente est appelée *relation entrée-sortie de la solution canard*.

Même si ce n'est pas notre propos, il est bon de noter que la figure (1.3) montre la formation d'un 0-cycle limite ($ABCD$) dit lent-rapide (où cycle limite singulier). Ce 0-cycle limite a la propriété d'être semi globalement pratiquement asymptotiquement stable quand $\varepsilon \rightarrow 0$ pour toute condition initiale strictement positive. En vérité, il est montré, à l'aide d'un argument de point fixe qu'il existe un vrai cycle limite stable proche de $ABCD$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

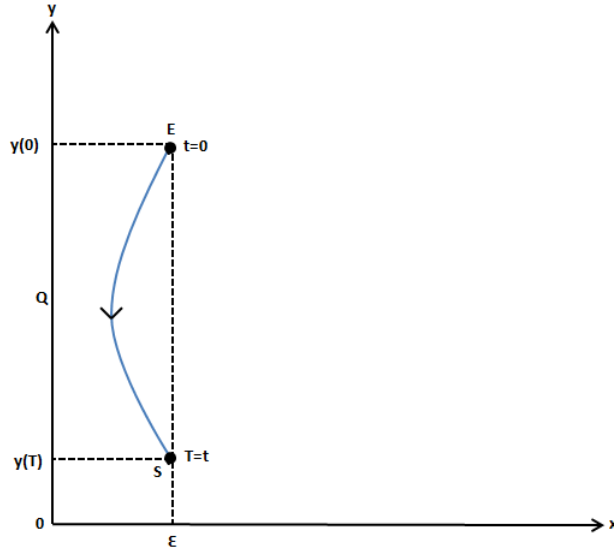


FIGURE 1.4 – Trajectoire du point d'entrée E jusqu'au point de sortie S .

Remarque : le vocable 'canard' vient de la découverte par le groupe d'Analyse Non Standard de ce phénomène illustré par des cycles de l'équation forcée de van der Pol ressemblant à un canard (voir [4]).

1.3.2 Exemple

Soit le modèle proie-prédateur classique

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(r^* \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{a^* y}{b+x} \right), \\ \dot{y} = y \left(e^* \frac{a^* x}{b+x} - m \right), \end{cases} \quad (1.14)$$

où r^* est le taux de croissance intrinsèque et K la capacité limite de la proie, a^* est le taux de prédation maximum du prédateur, e^* est le taux de conversion des proies consommées en biomasse de prédateurs, m est le taux de mortalité du prédateur et b est la constante de demi saturation représentant la densité de la population de la proie pour laquelle le taux de prédation est à sa moitié. Nous avons besoin de certaines hypothèses sur ces paramètres pour obtenir un modèle proie-prédateur lent-rapide. Voici la justification donnée dans [7] : pour que la proie, en présence du prédateur, ait une dynamique rapide il suffit que son taux de croissance intrinsèque et le taux de prédation soient grands tandis que le coefficient de conversion de biomasse est faible. Ce qui s'écrit

$$r^* = r/\varepsilon, a^* = a/\varepsilon, e^* = e\varepsilon,$$

où ε est un petit paramètre positif. Le modèle (1.14) devient alors

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{ay}{b+x} \right), \\ \dot{y} = y \left(\frac{cx}{b+x} - m \right), \end{cases} \quad (1.15)$$

où $c = e^*a^* = ea$. Le modèle (1.15) est un cas particulier du paradigme (1.11). La relation entre le minimum et le maximum du 0-cycle limite est alors donnée, d'après (1.13), par

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{r - \frac{a}{b}y}{-my} dy = \frac{r}{m} \ln \frac{y_{\min}}{y_{\max}} + \frac{a}{bm} (y_{\max} - y_{\min}).$$

Chapitre 2

Retard à la bifurcation dans un modèle général de chasse

Ce chapitre constitue une synthèse des articles suivants de H. Boudjellaba et T.Sari intitulés *Stability loss delay in a class of slow and fast ecological models*, [<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00163654/>], 2007 [1] et *Dynamic saddle-node bifurcation in a class of slow and fast predator-prey models*, [<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00270315/>], 2008 [2], dans lesquels est étudié, entre autres, le phénomène de retard à la bifurcation.

Le modèle proposé généralise le modèle de pêche (ou de chasse) de Clark [3] dans lequel l'effort de pêche possède une dynamique lente relativement à celle des deux espèces considérées. Nous insisterons sur ce qui est appelé relation entrée-sortie des solutions canard et énoncerons un résultat de stabilité pratique. Des simulations numériques seront exhibées pour le modèle de Clark lui-même.

2.1 Introduction au modèle

Considérons deux populations indépendantes qui ont une croissance logistique. En introduisant un effort de pêche E , nous aurons le modèle

$$\begin{aligned}x' &= rx(1 - x/K) - q_1Ex, \\y' &= sy(1 - y/L) - q_2Ey.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dans ce système, les paramètres r et s représentent les taux de croissance intrinsèques, q_1 et q_2 les taux de capture et K et L les capacités limites des deux populations respectivement. Pour le revenu net, Clark a utilisé l'expression

$$\pi(x, y, E) = (p_1q_1x + p_2q_2y - c)E,$$

où les prix p_1 et p_2 sont constants, c est le coût unitaire et cE est le coût de pêche. Clark a analysé ce système en trouvant *l'équilibre biologique*, i.e. solution des équations $x' = 0$ et $y' = 0$ du système (2.1) avec la condition $\pi(x, y, E) = 0$. Il a trouvé que sous certaines conditions, cet équilibre apparaît pour une valeur E_∞ de l'effort de pêche en un point (x_∞, y_∞) tel que $x_\infty > 0$ et $y_\infty > 0$. Clark a proposé une extension du modèle (2.1) en ajoutant une équation dynamique de l'effort de pêche de la forme $E' = \varepsilon\pi(x, y, E)$ où $\varepsilon > 0$ est un petit

paramètre. Le système devient

$$\begin{cases} x' = rx(1 - x/K) - q_1Ex, \\ y' = sy(1 - y/L) - q_2Ey, \\ E' = \varepsilon(p_1q_1x + p_2q_2y - c)E. \end{cases} \quad (2.2)$$

Clark a affirmé, sans le prouver, que dans le modèle (2.2), les variables convergent vers l'équilibre $(x_\infty, y_\infty, E_\infty)$. Nous proposons de présenter l'étude d'un modèle plus général menée par H. Boudjellaba et T.Sari ([1] et [2]). Soit le modèle (de type Kolmogorov)

$$\begin{cases} x' = xM(x, E), \\ y' = yN(y, E), \\ E' = \varepsilon EP(x, y). \end{cases} \quad (2.3)$$

C'est un système lent-rapide pour lequel nous donnons des conditions sur les fonctions M , N et P pour obtenir un équilibre $(x_\infty, y_\infty, E_\infty)$, avec $x_\infty > 0$, $y_\infty > 0$ et $E_\infty > 0$ qui soit SGPAS quand ε tend vers 0.

Dans [2], les mêmes auteurs généralisent le modèle au cas où M et N dépendent des trois variables x , y et E , auquel cas les deux équations des espèces ne sont plus découplées. Le modèle 'découplé' que nous considérons ici peut ne pas être pertinent d'un point de vue biologique, mais nous rappelons que le but essentiel de ce travail est plus d'expliquer 'le transitoire' des solutions que le comportement asymptotique.

2.2 Dynamiques lente et rapide

Considérons donc le système (2.4)

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = xM(x, E), \\ \varepsilon \dot{y} = yN(y, E), \\ \dot{E} = EP(x, y). \end{cases} \quad (2.4)$$

Comme notre système est lié à un modèle biologique, nous l'étudions dans le cône positivement invariant de \mathbb{R}^3

$$C = \{(x, y, E) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, E \geq 0\}.$$

Pour simplifier, on supposera que tous les systèmes étudiés ont la propriété d'existence et d'unicité pour toute condition initiale préalablement fixée. Dans le cas du modèle de Clark, les fonctions intervenant sont d'ailleurs toutes de classe au moins C^1 .

Dans ce qui suit nous numérotions les hypothèses par la lettre H .

$$H_0 : P(0, 0) < 0 \quad \text{pour tout } E > 0.$$

2.2.1 Équation rapide et variété lente

Elle est écrite à l'échelle du temps rapide $\tau = t/\varepsilon$ et elle est donnée par

$$\begin{cases} x' = xM(x, E), \\ y' = yN(y, E), \end{cases} \quad (2.5)$$

où E est un paramètre.

H1 : Il existe une fonction positive, continue et strictement décroissante $E \mapsto \xi(E)$ définie sur $[0, a]$ telle que $\xi(a) = 0$ et, pour tout $E \in [0, a]$,

$$\begin{cases} M(\xi(E), E) = 0, \\ M(x, E) > 0 \text{ pour } x < \xi(E), \\ M(x, E) < 0 \text{ pour } x > \xi(E). \end{cases} \quad (2.6)$$

Il existe une fonction positive, continue et strictement décroissante $E \mapsto \eta(E)$ définie sur $[0, b]$ avec $b > a$, telle que $\eta(b) = 0$ et, pour tout $E \in [0, b]$,

$$\begin{cases} N(\eta(E), E) = 0, \\ N(y, E) > 0 \text{ pour } y < \eta(E), \\ N(y, E) < 0 \text{ pour } y > \eta(E). \end{cases} \quad (2.7)$$

La variété lente de (2.4) est l'ensemble des points d'équilibre de l'équation rapide (2.5), c'est-à-dire

$$S = \{(x, y, E) \in C : xM(x, E) = yN(y, E) = 0\}.$$

D'après l'hypothèse *H1*, elle est formée de quatre composantes représentées par les quatre courbes suivantes (voir figure 2.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{(0, 0, E) \in C : E \geq 0\}, \\ \mathcal{S}_2 &= \{(0, y, E) \in C : y = \eta(E), 0 \leq E \leq b\}, \\ \mathcal{S}_3 &= \{(x, y, E) \in C : x = \xi(E), y = \eta(E), 0 \leq E \leq a\}, \\ \mathcal{S}_4 &= \{(x, 0, E) \in C : x = \xi(E), 0 \leq E \leq a\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.2.2 Équilibres de l'équation rapide

A partir de l'hypothèse *H1* :

- i) si $E \geq b$, $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre de (2.5).
- ii) si $a < E < b$, (2.5) a deux point d'équilibre $(0, 0)$ et $(0, \eta(E))$.
- iii) si $0 \leq E \leq a$, (2.5) a quatre points d'équilibre : $(0, 0)$, $(\xi(E), 0)$, $(\xi(E), \eta(E))$ et $(0, \eta(E))$.

La stabilité de ces points d'équilibre est donnée par le lemme suivant (voir figures (2.1)) et (2.3) :

Lemme 1

D'après l'hypothèse H1

1. Lorsque $E \geq b$, l'équilibre $(0, 0)$ est un nœud stable.
2. Lorsque $a \leq E < b$, $(0, 0)$ est un point selle de séparatrice stable l'axe des x et de séparatrice instable l'axe des y et $(0, \eta(E))$ est un nœud stable.

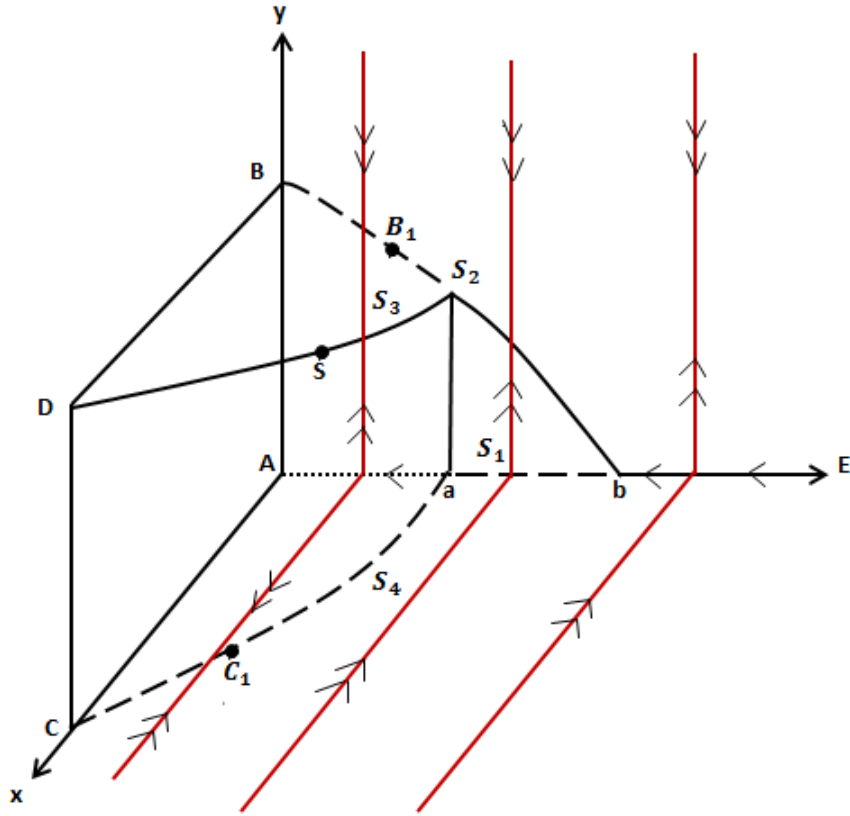


FIGURE 2.1 – La variété lente du système (2.5) : les composantes attractives sont indiquées en traits pleins et les composantes répulsives en traits discontinus, A , B , B_1 , C , C_1 , D et S sont les équilibres du système (2.4).

3. Lorsque $0 \leq E < a$, $(0, 0)$ est un nœud instable, $(0, \eta(E))$ est un point selle de séparatrice stable l'axe des y , $(\xi(E), 0)$ est un point selle de séparatrice stable l'axe des x et $(\xi(E), \eta(E))$ est un nœud stable.
De plus le bassin d'attraction du nœud stable $(0, 0)$ est le cône $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ et celui du nœud stable $(\xi(E), \eta(E))$ est le cône ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

Preuve

Notons que les équations de (2.5) sont découplées. La nature des équilibres de (2.5) découle donc directement de celle de chaque équilibre de chaque équation.

1. Si $E \geq b$, d'après (2.6) et (2.7), le signe de \dot{x} et \dot{y} est indiqué par la figure (2.2); d'où $(0, 0)$ est un nœud stable.
2. Si $a \leq E < b$, d'après (2.6) et (2.7), le signe de \dot{x} et \dot{y} est indiqué par la figure (2.2); d'où $(0, 0)$ est un point selle et $(0, \eta(E))$ est un nœud stable.
3. Si $0 \leq E < a$, le signe de \dot{x} et \dot{y} est indiqué par la figure (2.2); d'où $(0, 0)$ est un nœud instable, $(0, \eta(E))$ est un point selle de séparatrice stable $\{x=0, E \text{ constant}\}$, $(\xi(E), 0)$ est un point selle de séparatrice stable $\{y=0, E \text{ constant}\}$ et $(\xi(E), \eta(E))$ est un nœud stable.

Ce lemme amène l'interprétation biologique suivante : quand les deux populations de densité x et y sont exploitées simultanément avec un grand effort de pêche (ou chasse) $E \geq b$

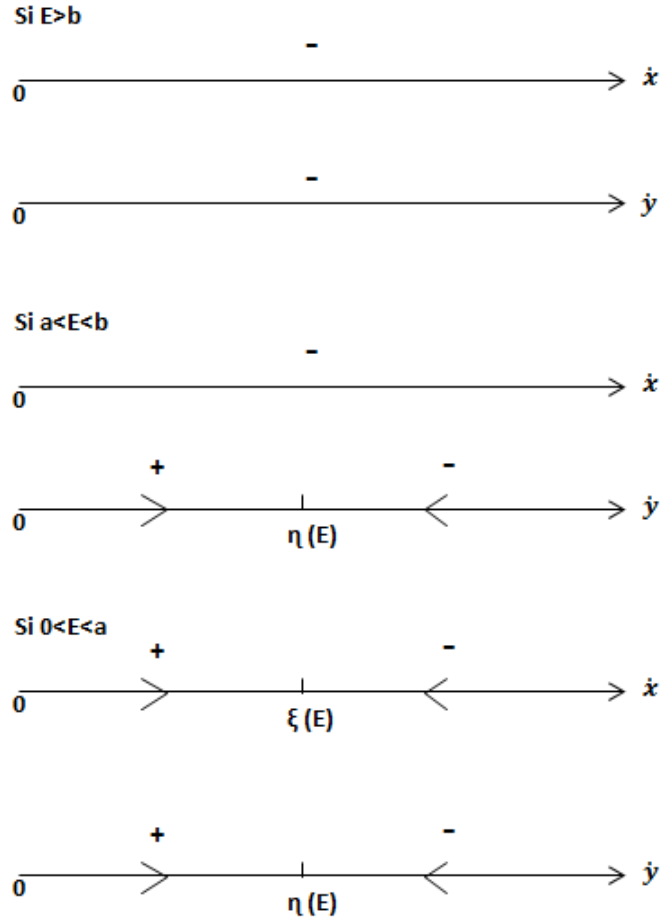


FIGURE 2.2 – Signe de \dot{x} et \dot{y} dans les trois cas du lemme (3).

alors elles tendent vers l’extinction. Si l’effort est modéré, i.e. $a \leq E < b$, alors l’une des deux populations tend vers l’extinction et l’autre, plus forte, persiste et converge vers son équilibre. Enfin, si l’effort E est faible i.e. $0 \leq E < a$ alors les deux populations persistent à l’équilibre.

Remarque : Le système (2.5) génère des bifurcations nœud-selle quand E traverse les valeurs a et b : quand E croît jusqu’à la valeur a , le point selle $(\xi(E), 0)$ et le nœud instable $(0, 0)$ coïncident et deviennent le point selle $(0, 0)$, et le point selle $(\eta(E), 0)$ et le nœud stable $(\xi(E), \eta(E))$ coïncident et deviennent le nœud stable $(0, \eta(E))$. Quand E croît jusqu’à la valeur b , le nœud stable $(0, \eta(E))$ et le point selle $(0, 0)$ coïncident et deviennent le nœud stable $(0, 0)$.

2.2.3 Équation lente et équilibres

D’après (2.8) et les résultats du lemme précédent, les différentes équations lentes du système (2.4) sont définies comme suit :

- 1) sur la courbe lente \mathcal{S}_1 , qui est attractive pour $E > b$, l’équation lente est donnée par

$$\dot{E} = EP(0, 0), \quad E > 0, \quad (2.9)$$

- 2) sur la courbe lente \mathcal{S}_2 , qui est attractive pour $a < E < b$, l’équation lente est donnée par

$$\dot{E} = EP(0, \eta(E)), \quad 0 < E < b, \quad (2.10)$$

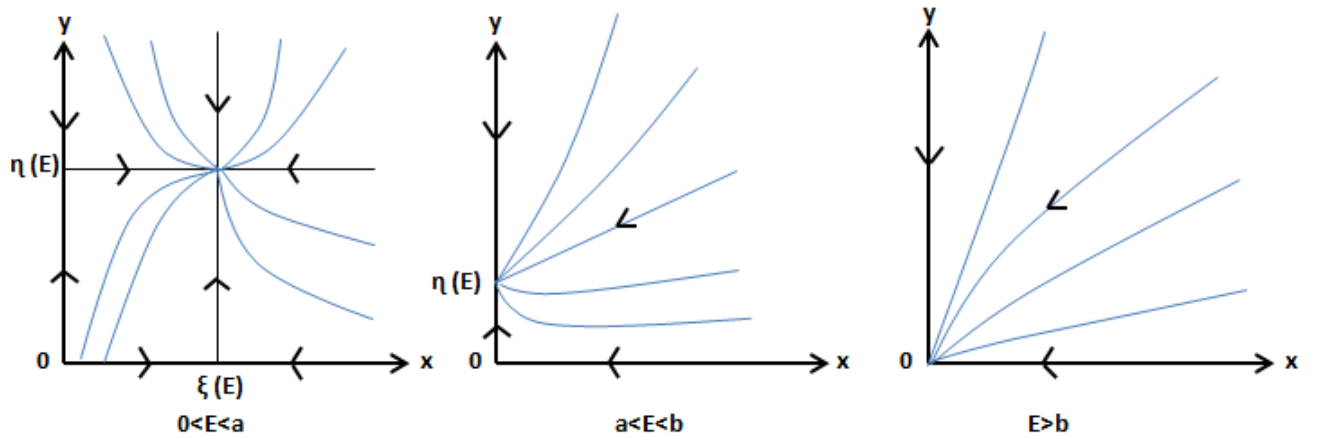


FIGURE 2.3 – Les portraits de phase du système (2.5) en fonction du paramètre E .

3) sur la courbe lente \mathcal{S}_3 , qui est attractive, l'équation lente est donnée par

$$\dot{E} = EP(\xi(E), \eta(E)), \quad 0 < E < a, \quad (2.11)$$

4) sur la courbe lente \mathcal{S}_4 , qui est répulsive, l'équation lente est donnée par

$$\dot{E} = EP(\xi(E), 0), \quad 0 < E < a. \quad (2.12)$$

En vue de l'application du modèle de Clark, il est naturel de faire l'hypothèse suivante sur les dynamiques lentes :

H2 : Il existe des valeurs $E_\infty \in]0, a[$, $b_1 \in [0, a[$ et $c_1 \in [0, a[$ telles que $E = E_\infty$, $E = b_1$ et $E = c_1$ sont des équilibres GAS pour les équations lentes (2.11), (2.10) et (2.12) respectivement.

Cette hypothèse induira une information sur les équilibres du modèle de départ telle qu'expliqué dans le paragraphe suivant.

2.3 Dynamique complète

A partir de (H2), on peut déduire les équilibres du système singulièrement perturbé (2.4) :

1. Un équilibre intérieur $S = (x_\infty, y_\infty, E_\infty) \in \mathcal{S}_3$, avec $x_\infty = \xi(E_\infty)$ et $y_\infty = \eta(E_\infty)$.
2. Des équilibres triviaux $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, \eta(0), 0)$, $C = (\xi(0), 0, 0)$, $D = (\xi(0), \eta(0), 0)$.
3. Un équilibre au bord $B_1 = (0, \eta(b_1), b_1) \in \mathcal{S}_2$ si $b_1 > 0$, et c'est un point selle de variété stable le plan invariant $\{x = 0\}$ selon (2.6).
4. Un autre équilibre au bord $C_1 = (\xi(c_1), 0, c_1) \in \mathcal{S}_4$ si $c_1 > 0$, et c'est un point selle de variété stable le plan invariant $\{y = 0\}$ selon (2.7).

On note que si $c_1 = 0$, les équilibres C et C_1 coïncident et que si $b_1 = 0$, les équilibres B et B_1 coïncident.

2.3.1 Approximation sur un intervalle de temps borné

Nous examinons trois cas selon la position E_0 de la condition initiale (x_0, y_0, E_0) de (2.4).
i) Cas $E_0 \geq b$: d'après le lemme 1, l'équilibre $(0, 0)$ de (2.5) est GAS pour toutes conditions initiales $x_0 \geq 0$ et $y_0 \geq 0$. D'après le théorème de Tikhonov, la solution de (2.4) saute rapidement près de la courbe lente $(x, y) = (0, 0)$, longe cette dernière en décroissant en E jusqu'à atteindre en un temps fini la valeur $E = b$ où cette courbe perd sa stabilité. Plus exactement, selon le théorème de Thikonov, si $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), E(t, \varepsilon))$ est la solution de (2.4) de condition initiale $x(0, \varepsilon) = x_0 > 0$, $y(0, \varepsilon) = y_0 > 0$ et $E(0, \varepsilon) = E_0 > b$, alors nous avons les limites uniformes par rapport au temps suivantes

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T_b] \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(t, \varepsilon) &= \bar{E}(t), \\ \forall t \in]0, T_b] \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) &= (0, 0), \end{aligned}$$

où \bar{E} est la solution du problème réduit (2.9) de condition initiale E_0 telle que $\bar{E}(T_b) > b$ et $T_b > 0$ est dans le domaine de définition de $\bar{E}(t)$.

ii) Cas $a \leq E_0 < b$: d'après le lemme 1, l'équilibre $(0, \eta(E))$ de (2.5) est GAS pour toutes conditions initiales $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. D'après le théorème de Tikhonov, la solution de (2.4) saute rapidement près de la courbe lente $(x, y) = (0, \eta(E))$, longe cette dernière en décroissant en E jusqu'à atteindre en un temps fini la valeur $E = a$ où cette courbe perd sa stabilité. Plus exactement, selon le théorème de Thikonov, si $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), E(t, \varepsilon))$ est la solution de (2.4) de condition initiale $x(0, \varepsilon) = x_0 > 0$, $y(0, \varepsilon) = y_0 > 0$ et $E(0, \varepsilon) = E_0 \in]a, b[$, alors nous avons les limites uniformes par rapport au temps suivantes

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T_a] \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(t, \varepsilon) &= \bar{E}(t), \\ t \in]0, T_a] \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) &= (0, \eta(\bar{E})), \end{aligned}$$

où $\bar{E}(t)$ est la solution du problème réduit (2.10) de condition initiale E_0 telle que $\bar{E}(T_a) > a$ et $T > 0$ est dans le domaine de définition de $\bar{E}(t)$.

iii) Cas $0 \leq E_0 < a$: d'après le lemme 1, l'équilibre $(\xi(E), \eta(E))$ de (2.5) est GAS pour toutes conditions initiales $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. D'après le théorème de Tikhonov, la solution de (2.4) saute rapidement près de la courbe lente $(x, y) = (\xi(E), \eta(E))$ et elle longe cette dernière. Plus exactement, si $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), E(t, \varepsilon))$ est la solution de (2.4) de condition initiale $x(0, \varepsilon) > x_0$, $y(0, \varepsilon) = y_0 > 0$ et $E(0, \varepsilon) = E_0 \in]0, a[$, alors nous avons les limites uniformes par rapport au temps suivantes

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T] \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(t, \varepsilon) &= \bar{E}(t), \\ \forall t \in]0, T] \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) &= (\xi(\bar{E}(t)), \eta(\bar{E}(t))), \end{aligned}$$

où $\bar{E}(t)$ est la solution du problème réduit (2.11) de condition initiale E_0 comprise entre 0 et a et $T > 0$ est dans le domaine de définition de $\bar{E}(t)$.

Les fonctions μ et ν sont définies pour $E > 0$, la fonction λ est définie pour $E \in]b_1, b[$ et la fonction κ est définie pour $E \in]a_1, a[$.

2.3.3 La relation entrée-sortie au niveau de \mathcal{S}_1

Soit (x_0, y_0, E_0) une condition initiale de (2.4) telle que $y_0 = 0$ et $E_0 > a$. Étant donné que le plan $\{y = 0\}$ est invariant, le système (2.4) s'écrit

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = xM(x, E), \\ \varepsilon \dot{y} = 0, \\ \dot{E} = EP(x, 0), \end{cases} \quad (2.13)$$

pour lequel la variété \mathcal{S}_1 est une variété lente attractive pour $E > a$ et \mathcal{S}_4 est une variété lente attractive. La solution de (2.13), donc de (2.4), arrive très vite au voisinage de $x = 0$, reste proche de la variété lente \mathcal{S}_1 qu'elle longe en décroissant en E jusqu'à atteindre une valeur $E_1 = H(E_0) < a$ à déterminer. Ensuite, elle saute vers le voisinage de la courbe \mathcal{S}_4 qu'elle longe en s'approchant du point d'équilibre $C_1 = (\xi(a_1), 0, a_1)$. La fonction $E_0 \mapsto E_1 = H(E_0)$ est calculée par la méthode suivante ([4]). Soit

$$h(E) = \int_a^E \mu(u) du.$$

Sachant que $h'(E) = \mu(E)$, d'après H0 et (2.6), $h'(E) < 0$ si $0 < E < a$ et $h'(E) > 0$ si $E > a$. La fonction h admet donc un minimum en a . Définissons l'application

$$H = h_+^{-1} \circ h_- : [a, +\infty[\mapsto]0, a],$$

où h_- et h_+ sont les restrictions de h sur $[a, +\infty[$ et $]0, a]$ respectivement. Nous avons

$$\int_E^{H(E)} \mu(u) du = \int_E^a \mu(u) du + \int_a^{H(E)} \mu(u) du = -h(E) + h(H(E))$$

Comme $h(H(E)) = h(E)$ (voir figure (2.5)) nous avons l'égalité

$$\int_E^{H(E)} \mu(u) du = 0. \quad (2.14)$$

En particulier, la sortie $E_1 = H(E_0)$ est donnée par

$$\int_{E_0}^{H(E_0)} \mu(u) du = 0,$$

et l'on a bien que $H(E_0) < a$.

Soit à présent (x_0, y_0, E_0) une condition initiale de (2.4) telle que $x_0 = 0$ et $E_0 > b$. Étant donné que le plan $\{x = 0\}$ est invariant, notre système s'écrit

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = 0, \\ \varepsilon \dot{y} = yN(y, E), \\ \dot{E} = EP(0, y), \end{cases} \quad (2.15)$$

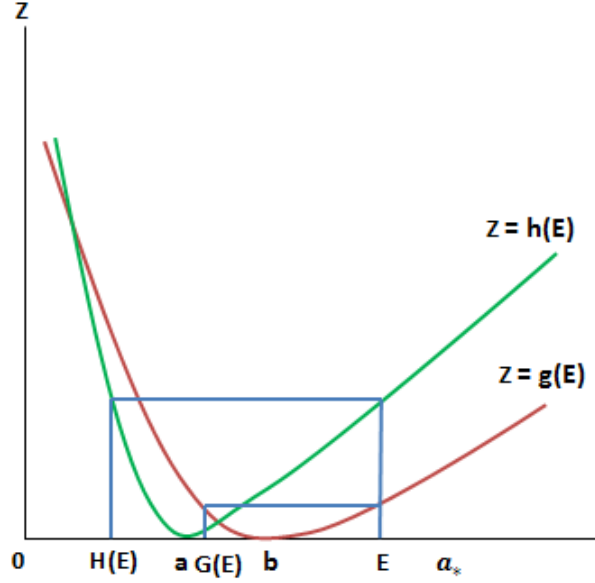


FIGURE 2.5 – Les fonctions g (en rouge) et h (en vert) définissant les applications $E \rightarrow G(E)$ et $E \rightarrow H(E)$ respectivement.

pour lequel la variété \mathcal{S}_1 est une variété lente attractive pour $E > b$ et \mathcal{S}_2 est une variété lente attractive. La solution de (2.15), donc de (2.4), arrive très vite au voisinage de $y = 0$, reste proche de la variété lente \mathcal{S}_1 qu'elle longe en décroissant en E jusqu'à atteindre une valeur $E_1 = G(E_0) < b$ à déterminer. Ensuite elle saute vers le voisinage de la courbe \mathcal{S}_2 qu'elle longe en s'approchant du point d'équilibre $B_1 = (0, \eta(b_1), b_1)$. La fonction $E_0 \mapsto E_1 = G(E_0)$ est calculée en considérant l'intégrale :

$$g(E) = \int_b^E \nu(u) du.$$

Sachant que $g'(E) = \nu(E)$, d'après H0 et (2.7), $g'(E) < 0$ si $E < b$ et $g'(E) > 0$ si $E > b$. La fonction g a un minimum en b . Définissons l'application

$$G = g_+^{-1} \circ g_- : [b, +\infty[\mapsto]0, b],$$

où g_- et g_+ sont les restrictions de g sur $[b, +\infty[$ et $]0, b]$ respectivement. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_E^{G(E)} \nu(u) du &= \int_E^b \nu(u) du + \int_b^{G(E)} \nu(u) du \\ &= -g(E) + g(G(E)). \end{aligned}$$

Comme $g(G(E)) = g(E)$ (voir figure 2.5) on a l'égalité

$$\int_E^{G(E)} \nu(u) du = 0. \tag{2.16}$$

En particulier, la sortie $E_1 = G(E_0)$ est donnée par

$$\int_{E_0}^{G(E_0)} \nu(u) du = 0,$$

et l'on a bien que $G(E_0) < b$.

Définition 2

La fonction $E \in [b, \infty[\mapsto K(E) = \max(G(E), H(E)) \in]0, b]$ est appelée la fonction entrée-sortie le long de la courbe lente $(x, y) = (0, 0)$.

Remarque : Soit $a_* = G^{-1}(a)$. Si $E \in [b, a_*]$ alors $H(E) < a \leq G(E)$ (voir figure (2.5)). Si $E > a_*$ alors $H(E) < G(E)$ ou $H(E) > G(E)$.

2.3.4 La relation entrée-sortie au niveau de \mathcal{S}_2

Soit (x_0, y_0, E_0) une condition initiale telle que $a < E_0 < b$. La solution de (2.4) arrive très vite au voisinage de \mathcal{S}_2 , elle reste proche de cette variété lente qu'elle longe en décroissant en E jusqu'à atteindre une valeur $E_1 = F(E_0) < a$ à déterminer. La fonction $E_0 \mapsto E_1 = F(E_0)$ est calculée en considérant, pour tout $E \in]b_1, b]$, la fonction f suivante

$$f(E) = \int_a^E \lambda(u) du.$$

Sachant que $f'(E) = \lambda(E)$, d'après (2.6) et H2, $f'(E) < 0$ si $b_1 < E < a$ et $f'(E) > 0$ si $a < E < b$. La fonction f admet donc un minimum en a . Définissons l'application

$$F = f_+^{-1} \circ f_- : [a, b[\mapsto]b_1, a],$$

où f_- et f_+ sont les restrictions de f sur $[a, b[$ et $]b_1, a]$ respectivement. Nous avons

$$\int_E^{F(E)} \lambda(u) du = \int_E^a \lambda(u) du + \int_a^{F(E)} \lambda(u) du = -f(E) + f(F(E))$$

Comme $f(F(E)) = f(E)$ (voir figure (2.6)) on a l'égalité

$$\int_E^{F(E)} \lambda(u) du = 0. \tag{2.17}$$

En particulier, la sortie $E_1 = F(E_0)$ est donnée par

$$\int_{E_0}^{F(E_0)} \lambda(u) du = 0.$$

et l'on a bien que $F(E_0) < a$.

Définition 3

La fonction $E \in [a, b[\mapsto F(E) \in]b_1, a]$ est appelée la fonction entrée-sortie le long de la courbe lente $(x, y) = (0, \eta(E))$

2.3.5 Comportement de la solution au voisinage de la variété lente

Retard à la bifurcation au voisinage de la courbe \mathcal{S}_2

Nous conseillons, à ce niveau, le lecteur de se référer régulièrement à la figure (2.1) pour une meilleure compréhension. Soit $\gamma(t, \varepsilon)$ la trajectoire de (2.4) partant de (x_0, y_0, E_0) telle

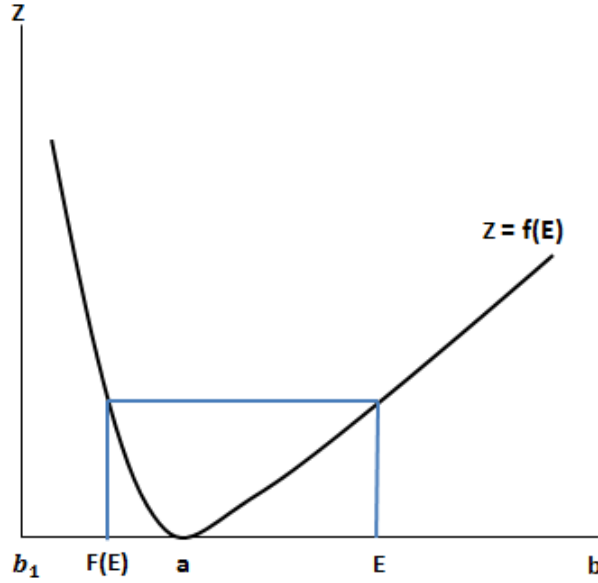


FIGURE 2.6 – La fonction f définissant la fonction entrée-sortie $E \rightarrow F(E)$.

que $a < E < b$ et $0 < x_0 < 1$ avec x_0 pas trop grand. Si ε est petit, d'après le théorème de Tikhonov cette trajectoire reste entre les plans $\{x = x_0\}$ et $\{x = 0\}$. Comme nous l'avons expliqué, elle arrive très vite au voisinage de l'équilibre $(0, \eta(E))$, elle reste près de cet équilibre en décroissant en E jusqu'à atteindre la valeur a où ce dernier perd sa stabilité. Notons l'intersection suivante de cette trajectoire avec le plan $\{x = x_0\}$ par $(x_0, y(t_1, \varepsilon), E(t_1, \varepsilon))$ où $t_1 = t_1(x_0, y_0, E_0, \varepsilon)$ dépend de la condition initiale (x_0, y_0, E_0) et de ε . La limite

$$E_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(t_1, \varepsilon),$$

existe et ne dépend que de E_0 . Dans le théorème qui suit nous décrivons avec plus de précisions le comportement de $\gamma(t, \varepsilon)$, notamment après l'instant de sortie.

Théorème 4 ([1])

Soit $E_0 \in]a, b[$. Pour $\varepsilon > 0$ petit, la trajectoire $\gamma(t, \varepsilon)$ de (2.4) quitte le voisinage du point $(0, \eta(E_1), E_1) \in \mathcal{S}_2$ avec $E_1 = F(E_0)$ et elle saute au voisinage du point $(\xi(E_1), \eta(E_1), E_1) \in \mathcal{S}_3$ près de la séparatrice instable $\{y = \eta(E_1)\}$ du point selle $(0, \eta(E_1))$ de la dynamique rapide.

Preuve

Effectuons le changement de variable

$$X = \varepsilon \ln x, \quad 0 < x < 1.$$

Le système (2.4) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{X} = M(\exp(X/\varepsilon), E), \\ \varepsilon \dot{y} = yN(y, E), \\ \dot{E} = EP(\exp(X/\varepsilon), y), \end{cases} \quad (2.18)$$

avec la conditions initiale $(\varepsilon \ln x_0, y_0, E_0)$. Le système (2.18) est un système lent-rapide, X et E sont les variables lentes et y est la variable rapide. L'équation rapide est définie par

$$y' = yN(y, E). \quad (2.19)$$

L'équilibre $y = \eta(E)$ de (2.19) est attractif pour tout $E \in [0, b[$ (d'après le lemme 1). L'équation lente, sachant que $X < 0$, est donnée par

$$\dot{X} = M(0, E), \quad \dot{E} = EP(0, \eta(E)). \quad (2.20)$$

D'après le théorème de Tikhonov, la composante y s'approche très vite du point d'équilibre $y = \eta(E)$ de la dynamique rapide, puis une transition lente se développe près de la surface $y = \eta(E)$, cette transition est approchée par la solution de (2.20) avec conditions initiales $X(0) = 0$ et $E(0) = E_0$, notée $(X(t), E(t))$. La deuxième composante de cette solution est en fait donnée par $E = \bar{E}(t)$ où $\bar{E}(t)$ est la solution de (2.10) telle que $\bar{E}(0) = E_0$. Pour la première composante, d'après (2.20)

$$dX = xM(0, E)dt \quad \text{et} \quad dt = dE/EP(0, \eta(E)).$$

Alors

$$dX = \frac{M(0, E)}{EP(0, \eta(E))}dE.$$

En intégrant nous aurons

$$\int_{X(0)}^{X(t)} dX = \int_{E_0}^{E(t)} \frac{M(0, u)}{uP(0, \eta(u))} du,$$

d'où

$$X(t) = \int_{E_0}^{E(t)} \frac{M(0, u)}{uP(0, \eta(u))} du.$$

En particulier pour $t = t_1$

$$X(t_1) = \int_{E_0}^{E(t_1)} \frac{M(0, u)}{uP(0, \eta(u))} du = \int_{E_0}^{E(t_1)} \lambda(u) du.$$

D'après (2.17), l'instant t_1 correspond à la sortie si $E_1 := E(t_1) = F(E_0)$ auquel cas $X(t_1) = 0$. Ainsi $X(t_1, \varepsilon) = o(1)$, c'est-à-dire $x(t_1, \varepsilon)$ est proche de 1. La trajectoire $\gamma(t, \varepsilon)$ coupe donc le plan $\bar{x} = x_0$ quand E est proche de $E_1 = F(E_0)$. Elle saute alors du voisinage du point $(0, \eta(E_1), E_1) \in \mathcal{S}_2$ vers le voisinage du point $(\xi(E_1), \eta(E_1), E_1) \in \mathcal{S}_3$ près de la séparatrice instable $\{y = \eta(E_1)\}$ du point selle $(0, \eta(E_1))$ de la dynamique rapide.

Retard à la bifurcation au voisinage de la courbe \mathcal{S}_1

Supposons à présent que (x_0, y_0, E_0) est une condition initiale de (2.4) telle que $E_0 > b$, $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. Le théorème suivant décrit le comportement de la trajectoire considérée notamment après sa sortie.

Théorème 5 ([1])

Pour $\varepsilon > 0$ petit, la solution de (2.4) reste près de la courbe lente \mathcal{S}_1 quand $E_1 < E < E_0$ où $E_1 = K(E_0)$.

i) Si $E_0 \in [b, a_*]$, alors la solution quitte le voisinage du point $(0, 0, E_1) \in \mathcal{S}_1$ et saute près du point $(0, \eta(E_1), E_1) \in \mathcal{S}_2$, près de la séparatrice $\{x = 0\}$ du point selle $(0, 0)$ de la dynamique rapide.

ii) Si $E_0 > a_*$ et $H(E_0) < G(E_0)$, alors la solution quitte le voisinage du point $(0, 0, E_1) \in \mathcal{S}_1$ et elle saute près du point $(0, \eta(E_1), E_1) \in \mathcal{S}_2$, près de l'orbite $\{x = 0\}$ du nœud instable $(0, 0)$ de la dynamique rapide.

iii) Si $E_0 > a_*$ et $H(E_0) > G(E_0)$, alors la solution quitte le voisinage du point $(0, 0, E_1) \in \mathcal{S}_1$ et saute près du point $(\xi(E_1), 0, E_1) \in \mathcal{S}_4$, près de l'orbite $\{y = 0\}$ du nœud instable $(0, 0)$ de la dynamique rapide.

Preuve

Soit $0 < x_0 < 1$ et $0 < y_0 < 1$. D'après le théorème de Tikhonov et pour $\varepsilon > 0$ petit, la solution reste entre les plans $\{x = x_0\}$, $\{y = y_0\}$, $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$. Sous le changement de variable

$$X = \varepsilon \ln x, Y = \varepsilon \ln y,$$

le système (2.4) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{X} = M(\exp(X/\varepsilon), E), \\ \dot{Y} = N(\exp(Y/\varepsilon), E), \\ \dot{E} = EP(\exp(X/\varepsilon), \exp(Y/\varepsilon)), \end{cases} \quad (2.21)$$

avec la condition initiale $(\varepsilon \ln x_0, \varepsilon \ln y_0, E_0)$. Le système (2.21) est une perturbation régulière de

$$\begin{cases} \dot{X} = M(0, E), \\ \dot{Y} = N(0, E), \\ \dot{E} = EP(0, 0), \end{cases} \quad (2.22)$$

avec la condition initiale $(0, 0, E_0)$. Notons par $(X(t), Y(t), E(t))$ la solution de (2.22) considérée. D'après la deuxième équation de (2.22), $dX = xM(0, E)dt$ et $dt = dE/EP(0, 0)$ d'où

$$dX = \frac{M(0, E)}{EP(0, 0)}dE.$$

En intégrant nous obtenons

$$\int_{X(0)}^{X(t)} dX = \int_{E_0}^{E(t)} \frac{M(0, u)}{uP(0, 0)} du.$$

Alors

$$X(t) =: \beta(E(t)) = \int_{E_0}^{E(t)} \frac{M(0, u)}{uP(0, 0)} du. \quad (2.23)$$

Par la même méthode

$$Y(t) =: \gamma(E(t)) = \int_{E_0}^{E(t)} \frac{N(0, u)}{uP(0, 0)} du \quad (2.24)$$

où $E(t) := E_0 \exp(P(0, 0)t)$ est en fait la solution de (2.9) telle que $E(0) = E_0$. Soit $E_1 = K(E_0) := \max(G(E_0), H(E_0))$ et $t_1 = \frac{1}{P(0, 0)} \ln \frac{E_1}{E_0}$ avec $E(t_1) = E_1$ et $E(t_1, \varepsilon) = E_1 + o(1)$.

Quand E est proche de E_1 , i.e. quand t est proche de t_1 , la solution saute loin de l'axe des E comme suit :

Cas (i) et (ii) : si $E_0 \in [b, a_*]$ où $E_0 > a_*$ et $H(E_0) < G(E_0)$, alors $E_1 = G(E_0)$. De (2.23) nous avons

$$X(t_1) = \int_{E_0}^{E(t_1)} \frac{M(0, u)}{uP(0, 0)} du \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{E_0}^a \frac{M(0, u)}{uP(0, 0)} du + \int_a^{E(t_1)} \frac{M(0, u)}{uP(0, 0)} du \\
&= -h(E_0) + h(E_1).
\end{aligned}$$

Comme $h(G(E_0)) < h(E_0)$ alors

$$X(t_1) < 0.$$

De même d'après (2.24) et pour $t = t_1$, sachant que $E_1 = E(t_1) = G(E_0)$ et selon (2.16) on a

$$Y(t_1) = \int_{E_0}^{E(t_1)} \frac{N(0, u)}{uP(0, 0)} du = \int_{E_0}^{E(t_1)} \nu(u) du = 0.$$

Ainsi $X(t_1, \varepsilon) = X(t_1) + o(1)$ et $Y(t_1, \varepsilon) = o(1)$ d'où $x(t_1, \varepsilon) = \exp((X(t_1) + o(1))/\varepsilon)$ est petit et $y(t_1, \varepsilon) = \exp(o(1)/\varepsilon)$ est proche de 1. La solution atteint donc encore le plan $\{y = y_0\}$ asymptotiquement au temps t_1 . A l'instant t_1 la solution quitte le voisinage du point $(0, 0, E_1)$ de \mathcal{S}_1 et saute près du point $(0, \eta(E_1), E_1)$ de \mathcal{S}_2 (voir figures (2.7) et (2.8)), près de la séparatrice $\{x = 0\}$ du point selle $(0, 0)$ de la dynamique rapide si $E_0 \in [b, a_*$ et près de l'orbite $\{x = 0\}$ du nœud instable $(0, 0)$ de la dynamique rapide si $E_0 > a_*$ et $H(E_0) < G(E_0)$.

Cas (iii) : si $E_0 > a_*$ et $H(E_0) > G(E_0)$, alors $E_1 = H(E_0)$. De (2.24) nous avons

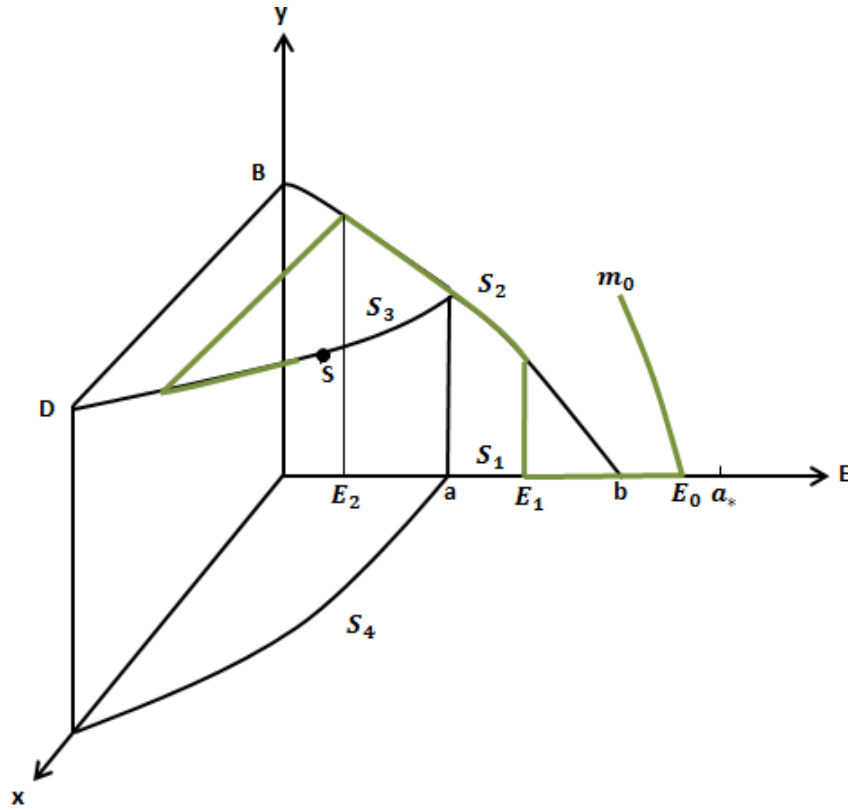


FIGURE 2.7 – Comportement de la solution avec condition initiale $m_0 = (x_0, y_0, E_0)$ avec $b < E_0 < a_*$.

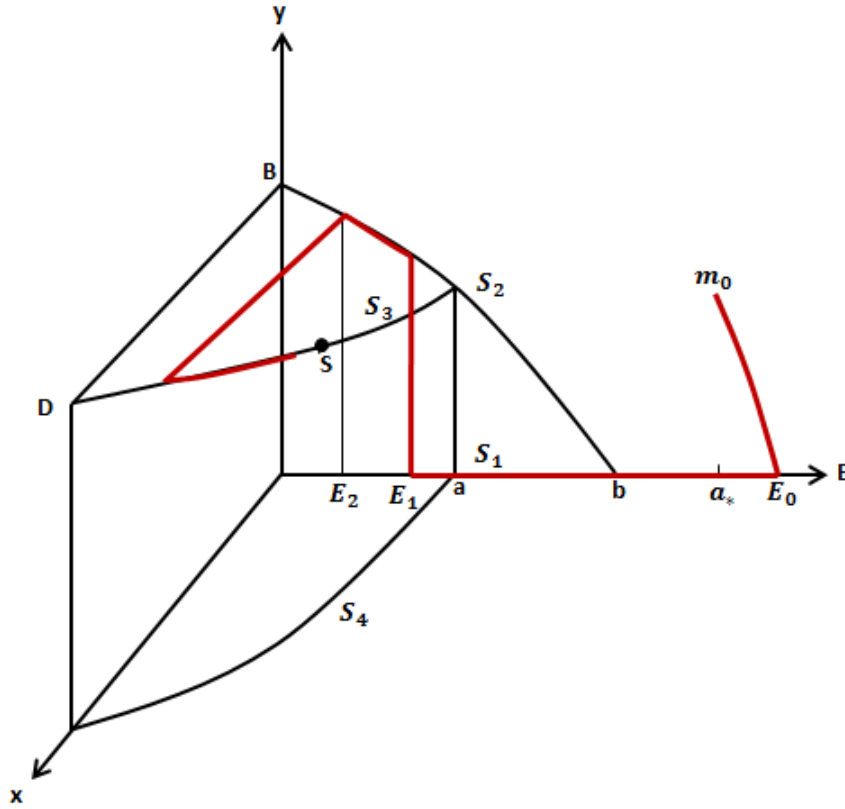


FIGURE 2.8 – Comportement de la solution avec condition initiale $m_0 = (x_0, y_0, E_0)$ avec $E_0 > a_*$ et $H(E_0) < G(E_0)$.

$$\begin{aligned}
 Y(t_1) &= \int_{E_0}^{E(t_1)} \frac{N(0, u)}{uP(0, 0)} du. & (2.26) \\
 &= \int_{E_0}^b \frac{N(0, u)}{uP(0, 0)} du + \int_b^{E(t_1)} \frac{M(0, u)}{uP(0, 0)} du \\
 &= -g(E_0) + g(E_1).
 \end{aligned}$$

Comme $g(H(E_0)) < g(E_0)$ alors

$$Y(t_1) < 0.$$

De même, d'après (2.23) et pour $t = t_1$, sachant que $E_1 = E(t_1) = H(E_0)$ et selon (2.14) nous avons

$$X(t_1) = \int_{E_0}^{E(t_1)} \frac{M(0, u)}{uP(0, 0)} du = \int_{E_0}^{E(t_1)} \mu(u) du = 0.$$

Ainsi $X(t_1, \varepsilon) = o(1)$ et $Y(t_1, \varepsilon) = Y(t_1) + o(1)$ d'où $y(t_1, \varepsilon) = \exp((Y(t_1) + o(1))/\varepsilon)$ est petit et $x(t_1, \varepsilon) = \exp(o(1)/\varepsilon)$ est proche de 1. La solution atteint encore le plan $\{x = x_0\}$ asymptotiquement au temps t_1 . A l'instant t_1 la solution quitte le voisinage du point $(0, 0, E_1)$ de S_1

et saute près du point $(\xi(E_1), 0, E_1)$ de \mathcal{S}_4 (voir figure (2.9)), près de l'orbite $\{y = 0\}$ du nœud instable $(0, 0)$ de la dynamique rapide si $E_0 > a_*$ et $H(E_0) > G(E_0)$.

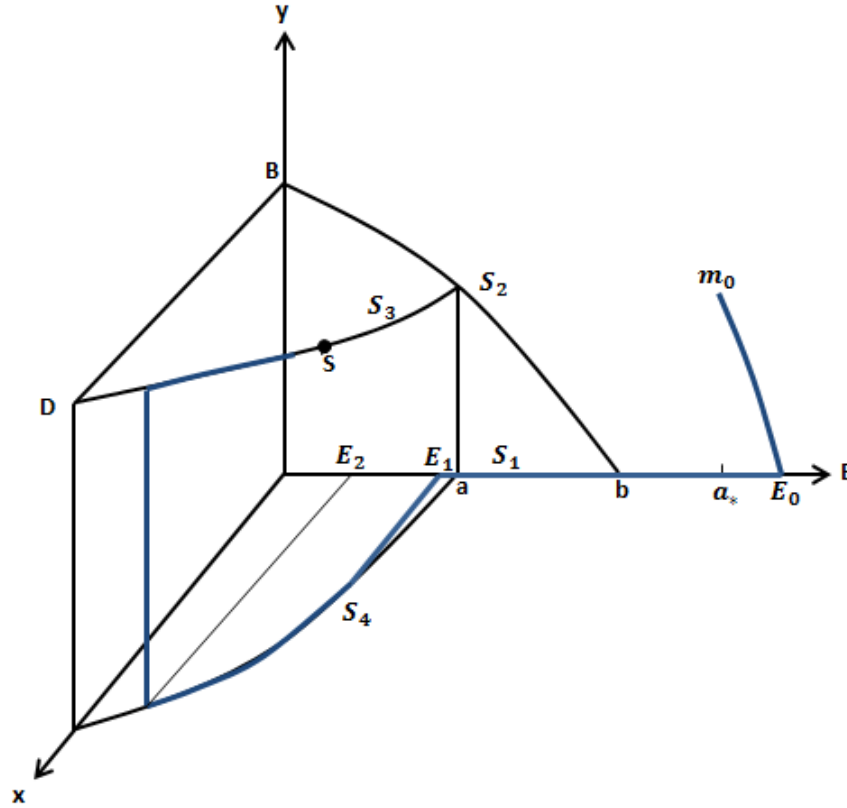


FIGURE 2.9 – Comportement de la solution avec condition initiale $m_0 = (x_0, y_0, E_0)$ avec $E_0 > a_*$ et $H(E_0) > G(E_0)$.

Comportement après les instants de sortie

Quand $E_1 = K(E_0)$ la solution de (2.4) saute loin de la courbe lente $(0, 0)$. Le reste du comportement est donné par les théorèmes suivants.

Théorème 6 ([1])

Soit $E_0 \in [b, a_*]$. Pour $\varepsilon > 0$ petit, la solution de (2.4) reste près de la courbe lente $(x, y) = (0, \eta(E))$ tant que $E_2 < E < E_1$ où $E_1 = G(E_0)$ et $E_2 \in]b_1, a]$ est donné par

$$\int_{E_0}^{E_1} \frac{M(0, E)}{EP(0, 0)} dE + \int_{E_1}^{E_2} \frac{M(0, E)}{EP(0, \eta(E))} dE = 0. \quad (2.27)$$

La solution saute du voisinage de $(0, \eta(E_2), E_2) \in \mathcal{S}_2$ vers le voisinage du point $(\xi(E_2), \eta(E_2), E_2)$ de \mathcal{S}_3 près de la séparatrice instable $\{y = \eta(E_2)\}$ du point selle $(0, \eta(E_2))$ de la dynamique rapide.

Ce résultat reste vrai dans le cas où $E_0 > a_*$, $H(E_0) < G(E_0)$ et $P(0, \eta(0)) < 0$ mais dans ce cas $E_2 \in]0, E_1[$.

Preuve

Pour $t > t_1$, nous utilisons le changement de variable précédent $X = \varepsilon \ln x$ avec $0 < x < 1$. Le système (2.4) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{X} = M(\exp(X/\varepsilon), E), \\ \varepsilon \dot{y} = yN(y, E), \\ \dot{E} = EP(\exp(X/\varepsilon), y). \end{cases}$$

Son équation rapide est

$$y' = yN(y, E).$$

L'équation lente est donnée par

$$\dot{X} = M(0, E), \quad \dot{E} = EP(0, \eta(E)). \quad (2.28)$$

D'après le théorème de Tikhonov, la composante y s'approche très vite de l'équilibre $y = \eta(E)$ de l'équation rapide, puis une transition lente se développe près de la surface $y = \eta(E)$. Cette transition est approchée par la solution de (2.28) avec conditions initiales $X(t_1) = X_1$ et $E(t_1) = E_1$. Cette solution est donnée par $E(t) = \bar{E}(t)$ où $\bar{E}(t)$ est la solution de (2.10) telle que $\bar{E}(t_1) = E_1$ et d'après (2.28)

$$dX = xM(0, E)dt \quad \text{et} \quad dt = dE/EP(0, \eta(E)).$$

Alors

$$dX = \frac{M(0, E)}{EP(0, \eta(E))}dE.$$

En intégrant nous avons

$$\int_{X(t_1)}^{X(t)} dX = \int_{E_1}^{E(t)} \frac{M(0, u)}{uP(0, \eta(u))}du.$$

Alors

$$X(t) = \delta(E(t)) := X(t_1) + \int_{E_1}^{E(t)} \frac{M(0, u)}{uP(0, \eta(u))}du, \quad (2.29)$$

où X_1 est donné par (2.25). Pour $t = t_2$,

$$X(t_2) = X(t_1) + \int_{E_1}^{E(t_2)} \frac{M(0, u)}{uP(0, \eta(u))}du.$$

Soit t_2 l'instant de sortie et $E(t_2) = E_2$. Alors $X(t_2) = 0$ c'est-à-dire $X(t_2, \varepsilon) = o(1)$. De là, la variable originale $x(t_2, \varepsilon)$ est proche de 1, donc la trajectoire considérée $\gamma(t, \varepsilon)$ de (2.4) recoupe le plan $\{x = x_0\}$ quand \bar{E} est asymptotiquement proche de E_2 . Elle saute alors du voisinage du point $(0, \eta(E_2), E_2)$ de \mathcal{S}_2 vers le voisinage du point $(\xi(E_2), \eta(E_2), E_2)$ de \mathcal{S}_3 près de la séparatrice instable $\{y = \eta(E_2)\}$ du point selle $(0, \eta(E_2))$ de la dynamique rapide. Dans le cas où $E_0 > a_*$, $H(E_0) < G(E_0)$ et $P(0, \eta(E)) < 0$, la preuve est la même que dans le cas où $E_0 \in [b, a_*]$, mais $E_1 \in]0, a[$, $b_1 = 0$ et E_2 , donné par (2.27), est dans $]0, E_1[$.

Théorème 7 ([1])

Soit $E_0 > a_*$. Si $H(E_0) > G(E_0)$ et $P(\xi(0), 0) < 0$ alors pour $\varepsilon > 0$ petit, la solution de (2.4) reste près de la courbe lente $(x, y) = (\xi(E), 0)$ tant que $E_2 < E < E_1$ où $E_1 = H(E_0)$ et $E_2 \in]0, E_1[$ est donné par

$$\int_{E_0}^{E_1} \frac{N(0, E)}{EP(0, 0)} dE + \int_{E_1}^{E_2} \frac{M(0, E)}{EP(\xi(E), 0)} dE = 0. \quad (2.30)$$

La solution saute du voisinage de $(\xi(E_2), 0, E_2) \in \mathcal{S}_4$ vers le voisinage du point $(\xi(E_2), \eta(E_2), E_2)$ de \mathcal{S}_3 près de la séparatrice instable $x = \xi(E_2)$ du point selle $(\xi(E_2), 0)$ de la dynamique rapide.

Preuve

Pour $t > t_1$, nous utilisons le changement de variable $Y = \varepsilon \ln y$ avec $0 < y < 1$. Le système (2.4) s'écrit

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = xM(x, E), \\ \dot{Y} = N(\exp(X/\varepsilon), E), \\ \dot{E} = EP(x, \exp(Y/\varepsilon)). \end{cases}$$

Son équation rapide est

$$x' = xM(x, E).$$

L'équation lente est donnée par

$$\dot{Y} = N(0, E), \quad \dot{E} = EP(\xi(E), 0). \quad (2.31)$$

L'équilibre $x = \xi(E)$ est attractif pour $E \in [0, a[$. D'après le théorème de Tikhonov, la composante x converge très vers le point d'équilibre $x = \xi(E)$, puis une transition lente se développe près de la surface $x = \xi(E)$. Cette transition est approchée par la solution de (2.31) avec conditions initiales $Y(t_1) = Y_1$ et $E(t_1) = E_1$. Cette solution est en fait donnée par $E = \bar{E}(t)$ où $\bar{E}(t)$ est la solution de (2.12) telle que $\bar{E}(t_1) = E_1$ et, d'après (2.31),

$$dY = yN(0, E)dt \quad \text{et} \quad dt = dE/EP(\xi(E), 0).$$

Alors

$$dY = \frac{N(0, E)}{EP(\xi(E), E)} dE.$$

En intégrant nous aurons

$$\int_{Y(t_1)}^{Y(t)} dY = \int_{E(t_1)}^{E(t)} \frac{N(0, u)}{uP(\xi(u), 0)} du.$$

Alors

$$Y(t) = \varrho(E(t)) := Y(t_1) + \int_{E_1}^{E(t)} \frac{N(0, u)}{uP(\xi(u), 0)} du,$$

où $Y(t_1)$ est donné par (2.26). Pour $t = t_2$

$$Y(t_2) = Y(t_1) + \int_{E_1}^{E(t_2)} \frac{N(0, u)}{uP(\xi(u), 0)} du.$$

Soit t_2 l'instant de sortie. Alors $Y(t_2) = 0$ c'est-à-dire $Y(t_2, \varepsilon) = o(1)$. De là, la variable originale $y(t_2, \varepsilon)$ est proche de 1, donc la trajectoire considérée de (2.4) $\gamma(t, \varepsilon)$ coupe le plan $\{y = y_0\}$ quand \bar{E} est asymptotiquement proche de E_2 . Elle saute alors du voisinage du point $(\xi(E_2), 0, E_2) \in \mathcal{S4}$ vers le voisinage du point $(\xi(E_2), \eta(E_2), E_2) \in \mathcal{S3}$ près de la séparatrice instable $x = \xi(E_2)$ du point selle $(\xi(E_2), 0)$ de la dynamique rapide.

Remarque

Dans le cas où $P(0, \eta(0)) > 0$, $(0, \eta(b_1), b_1)$ est un équilibre de (2.4) et il existe une situation particulière présentant un phénomène de perte de temps près d'un équilibre. Soit $b_{1*} > b$ défini par $g(b_{1*}) = g(b_1)$. Supposons que $H(b_{1*}) < G(b_{1*})$. D'après le théorème 5, la solution de (2.4) avec condition initiale $x(0, \varepsilon) > 0$, $y(0, \varepsilon) > 0$ et $E(0, \varepsilon) = b_{1*}$ saute rapidement près de la variété lente $(0, 0)$, reste proche de cette dernière tant que $b_1 < E < b_{1*}$. Elle saute alors rapidement du voisinage du point $(0, 0, b_1)$ vers le voisinage du point d'équilibre $(0, \eta(b_1), b_1)$, et peut donc rester longtemps près de cet équilibre.

Dans le cas où $P(\xi(0), 0) > 0$, $(\xi(c_1), 0, c_1)$ est un équilibre de (2.4) et il existe là aussi une situation particulière avec perte de temps près d'un équilibre. Soit $c_{1*} > b$ défini par $h(c_{1*}) = h(c_1)$. Supposons que $H(c_{1*}) > G(c_{1*})$. D'après le théorème 5, la solution de (2.4) avec condition initiale $x(0, \varepsilon) > 0$, $y(0, \varepsilon) > 0$ et $E(0, \varepsilon) = c_{1*}$ saute rapidement près de la variété lente $(0, 0)$, reste proche de cette dernière tant que $c_1 < E < c_{1*}$. Elle saute alors rapidement du voisinage du point $(0, 0, c_1)$ vers le voisinage du point $(\xi(c_1), 0, c_1)$ et peut donc rester longtemps près de cet équilibre.

2.4 Comportement asymptotique

Les propositions suivantes nous donnent le comportement de la solution pour tout $t > 0$ selon la position de E_0 . Leurs preuves sont données par l'application répétée du théorème de Tikhonov en tenant compte des relations entrée-sortie. Nous faisons le choix d'omettre ces preuves, celles-ci étant disponibles dans [1].

Proposition 1

Soit $E_0 \in]0, a[$. Soit $\bar{E}(t)$ la solution de (2.11) avec condition initiale $\bar{E}(0) = E_0$. Soit $\bar{x}(t) = \xi(\bar{E}(t))$ et $\bar{y}(t) = \eta(\bar{E}(t))$. Alors, pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t)),$$

uniformément pour $t \in [\delta, +\infty[$ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(t, \varepsilon) = \bar{E}(t),$$

uniformément pour $t \in [0, +\infty[$.

Proposition 2

Soit $E_0 \in [a, b]$. Soit $\bar{E}_1(t)$ la solution de (2.10) avec condition initiale $\bar{E}_1(0) = E_0$. Soit $E_1 = F(E_0)$ et soit l'instant $t_1 > 0$ tel que $\bar{E}(t_1) = E_1$. Soit $\bar{E}_2(t)$ la solution de (2.11) avec condition initiale $\bar{E}_2(t_1) = E_1$. Soit

$$\bar{E}(t) = \begin{cases} \bar{E}_1(t) & \text{pour } t \in [0, t_1], \\ \bar{E}_2(t) & \text{pour } t \in [t_1, +\infty[, \end{cases} \quad (2.32)$$

et

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in]0, t_1[, \\ \xi(\bar{E}_2(t)) & \text{pour } t \in]t_1, +\infty[, \end{cases}$$

et

$$\bar{y}(t) = \eta(\bar{E}(t)) \quad \text{pour } t \in]0, +\infty[.$$

Alors, pour tout $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t)),$$

uniformément pour $t \in [\delta, t_1 - \delta] \cup [t_1 + \delta, +\infty[$ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(t, \varepsilon) = \bar{E}(t),$$

uniformément pour $t \in [0, +\infty[$.

Proposition 3

Soit $E_0 > b$. Nous supposons que $P(0, \eta(0)) < 0$ et $H(E_0) < G(E_0)$. Soit $\bar{E}_0(t)$ la solution de (2.9) avec condition initiale $\bar{E}_0(0) = E_0$. Soit $E_1 = G(E_0)$ et $t_1 > 0$ l'instant tel que $\bar{E}_0(t_1) = E_1$. Soit $\bar{E}_1(t)$ la solution de (2.10) avec condition initiale $\bar{E}_1(0) = E_0$. Soit E_2 défini par (2.27) et soit l'instant $t_2 > t_1$ tel que $\bar{E}_1(t_2) = E_2$. Soit $\bar{E}_2(t)$ la solution de (2.11) avec condition initiale $\bar{E}_2(t_2) = E_2$. Soit

$$\bar{E}(t) = \begin{cases} \bar{E}_0(t) & \text{pour } t \in [0, t_1], \\ \bar{E}_1(t) & \text{pour } t \in [t_1, t_2], \\ \bar{E}_2(t) & \text{pour } t \in [t_2, +\infty[, \end{cases} \quad (2.33)$$

et

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in]0, t_2[, \\ \xi(\bar{E}(t)) & \text{pour } t \in]t_2, +\infty[, \end{cases}$$

et

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in]0, t_1[, \\ \eta(\bar{E}(t)) & \text{pour } t \in]t_1, +\infty[. \end{cases}$$

Alors, pour tout $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t)),$$

uniformément pour $t \in [\delta, t_1 - \delta] \cup [t_1 + \delta, t_2 - \delta] \cup [t_2 + \delta, +\infty[$ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(t, \varepsilon) = \bar{E}(t),$$

uniformément pour $t \in [0, +\infty[$.

Proposition 4

Soit $E_0 > a_*$. Nous supposons que $P(\xi(0), 0) < 0$ et $H(E_0) > G(E_0)$. Soit $\bar{E}_0(t)$ la solution de (2.9) avec condition initiale $\bar{E}_0(0) = E_0$. Soit $E_1 = H(E_0)$ et soit l'instant $t_1 > 0$ tel que $\bar{E}_0(t_1) = E_1$. Soit $\bar{E}_1(t)$ la solution de (2.12) avec condition initiale $\bar{E}_1(0) = E_0$. Soit E_2 défini par (2.30) et soit l'instant $t_2 > t_1$ tel que $\bar{E}_1(t_2) = E_2$. Soit $\bar{E}_2(t)$ la solution de (2.11) avec condition initiale $\bar{E}_2(t_2) = E_2$. Soit $\bar{E}(t)$ défini par (2.33) et soit

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in]0, t_1[, \\ \xi(\bar{E}(t)) & \text{pour } t \in]t_1, +\infty[, \end{cases}$$

et

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in]0, t_2[, \\ \eta(\bar{E}(t)) & \text{pour } t \in]t_2, +\infty[. \end{cases}$$

Alors, pour tout $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t)),$$

uniformément pour $t \in [\delta, t_1 - \delta] \cup [t_1 + \delta, t_2 - \delta] \cup [t_2 + \delta, +\infty[$ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(t, \varepsilon) = \bar{E}(t),$$

uniformément pour $t \in [0, +\infty[$.

2.4.1 Résultat de stabilité pratique

Nous faisons l'hypothèse suivante :

H3 : Supposons que $P(0, \eta(0)) < 0$ et $P(\xi(0), 0) < 0$. Le théorème suivant nous donne un résultat de stabilité pratique.

Théorème 8 ([1])

Si les hypothèses *H0* à *H3* sont satisfaites, alors l'équilibre $S = (\xi(E_\infty), \eta(E_\infty), E_\infty)$ est SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e. pour toute solution $\gamma(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), E(t, \varepsilon))$ de (2.4), nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} \gamma(t, \varepsilon) = S,$$

uniformément par rapport à la condition initiale dans tout sous ensemble compact dans le cône strictement positif.

Preuve

Soit $t \mapsto e(t, E_0) = \bar{E}(t)$ où $\bar{E}(t)$ est la fonction définie par la proposition 1 quand $E_0 < a$, la proposition 2 quand $a < E_0 < b$ et par les propositions 3 et 4 quand $E_0 > b$. Pour tout $E_0 > 0$, nous avons $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t, E_0) = E_\infty$. Soient $r > 0$ et $T(E_0) = \inf\{t > 0 : |e(t, E_0) - E_\infty| \leq r/2\}$. Soit K un sous-ensemble compact arbitraire dans le cône strictement positif et soit $(x_0, y_0, E_0) \in K$. Soit $T = \max\{T(E_0) : (x_0, y_0, E_0) \in K\}$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $t > T$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, nous avons $\|\gamma(t, \varepsilon) - S\| \leq r$. Ainsi, S est SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$ pour le système (2.4).

Faisons à présent l'hypothèse suivante en place de l'hypothèse *H3*.

H3' : Supposons que $P(0, \eta(0)) < 0$ et que pour tout $E > a_*$, $H(E) < G(E)$.

Sous l'hypothèse *H3'*, la condition $H(E_0) < G(E_0)$ est toujours vérifiée et la proposition 3 donne le comportement asymptotique des solutions pour $E_0 > a_*$. La condition $P(\xi(0), 0) < 0$ n'est plus nécessaire. Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 9 ([1])

Si les hypothèses *H0* à *H3'* sont satisfaites, alors l'équilibre $S = (\xi(E_\infty), \eta(E_\infty), E_\infty)$ est SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e. pour toute solution $\gamma(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), E(t, \varepsilon))$ de (2.4), nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} \gamma(t, \varepsilon) = S,$$

uniformément par rapport à la condition initiale dans tout sous ensemble compact dans le cône strictement positif.

2.5 Application au modèle de Clark étendu

Le modèle en question est donné par

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = rx(1 - x/K) - q_1 Ex =: xM(x, E), \\ \varepsilon \dot{y} = sy(1 - y/L) - q_2 Ey =: yN(y, E), \\ \dot{E} = E(p_1 q_1 x + p_2 q_2 y - c) =: EP(x, y). \end{cases} \quad (2.34)$$

Nous rappelons que tous les paramètres de (2.34) sont strictement positifs et que les variables sont positives ou nulles. L'équation rapide est alors donnée par

$$\begin{cases} x' = rx(1 - x/K) - q_1 Ex, \\ y' = sy(1 - y/L) - q_2 Ey, \end{cases}$$

et la variété lente par

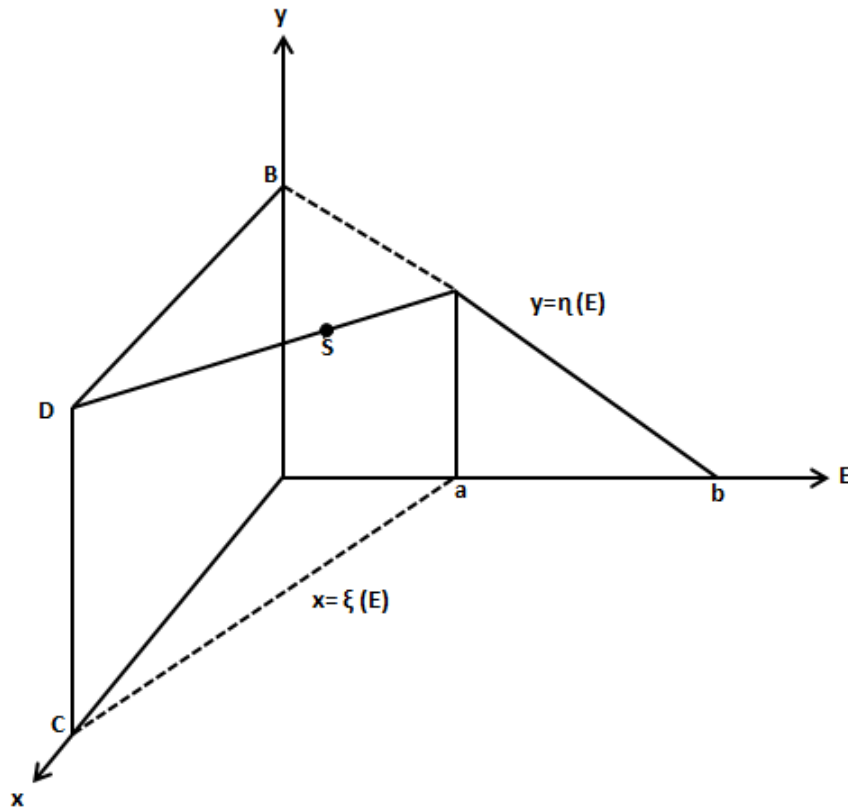


FIGURE 2.10 – Variété lente du système (2.34), les parties attractives sont en traits pleins et les parties répulsives en traits discontinus.

$$S = \{(x, y, E) \in C : xM(x, E) = yN(y, E) = 0\},$$

où

$$C = \{(x, y, E) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, E \geq 0\}.$$

La solution $\xi(E)$ de $M(x, E) = 0$ est donnée par $\xi(E) = K(1 - \frac{q_1}{r}E)$ est s'annule pour $E = a := \frac{r}{q_1}$. La solution $\eta(E)$ de $N(y, E) = 0$ est donnée par $\eta(E) = L(1 - \frac{q_2}{s}E)$ est s'annule pour $E = b := \frac{s}{q_2}$ (voir figure 2.10).

L'aspect en termes d'équilibres et de stabilité est le même que pour le modèle général. Pour que l'hypothèse $H1$ soit complètement vérifiée, il faudrait que $a < b$, i.e.

$$sq_1 > rq_2.$$

L'hypothèse $H2$ est vérifiée si

$$\frac{sq_1 - rq_2}{sq_1} p_2 q_2 L < c < p_1 q_1 K + p_2 q_2 L.$$

L'équilibre $S = (x_\infty, y_\infty, E_\infty)$ est donné par

$$E_\infty = (p_1 q_1 K + p_2 q_2 L - c) \frac{rs}{\Delta},$$

$$x_\infty = \xi(E_\infty) = (sq_1 c - (sq_1 - rq_2) p_2 q_2 L) \frac{K}{\Delta},$$

$$y_\infty = \eta(E_\infty) = (rq_2 c + (sq_1 - rq_2) p_1 q_1 K) \frac{L}{\Delta},$$

où $\Delta = sp_1 q_1^2 K + rp_2 q_2^2 L$.

La proposition $H3$ est satisfaite si

$$p_2 q_2 L < c, \quad p_1 q_1 K < c$$

D'après le théorème 8, nous pouvons affirmer que :

Proposition 5

On suppose que $\max(p_1 q_1 K, p_2 q_2 L) < c < p_1 q_1 K + p_2 q_2 L$ et $sq_1 > rq_2$, alors l'équilibre $S = (x_\infty, y_\infty, E_\infty)$ est SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

D'autre part, notons que les conditions précédentes pour obtenir la stabilité semi-globale pratique quand $\varepsilon \rightarrow 0$ peuvent être relaxées car $H(E) < G(E)$ pour tout $E > b$, (voir lemme 5.2 [1]). Dans ce cas, l'hypothèse $H3'$ est vérifiée si et seulement si $p_2 q_2 L < c$, ce qui est moins restrictif que l'hypothèse $p_2 q_2 L < c$ et $p_1 q_1 K < c$. D'où le résultat suivant, conséquence du théorème 9.

Proposition 6

On suppose que $p_2 q_2 L < c < p_1 q_1 K + p_2 q_2 L$ et $sq_1 > rq_2$, alors l'équilibre $S = (x_\infty, y_\infty, E_\infty)$ est SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.5.1 Simulation numérique

La figure (2.11) est une simulation numérique du modèle étendu de Clark, menée à l'aide du logiciel Matlab, avec les valeurs suivantes des paramètres $K = L = 3$, $r = q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 1$, $c = 4$ et $\varepsilon = 0.01$. Ainsi $a = r/q_1 = 1 < b = s/q_2 = 2$. La figure (2.11) est une projection de la trajectoire γ de condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 3)$, pour laquelle $E_0 < a_*$, sur le plan

(E, y) . On peut y voir que la composante y s'approche très vite de 0, longe l'axe des E en décroissant le long de la partie $E > b = 2$ de la variété lente triviale $\{(0, 0, E)\}$ mais quelle longe la partie répulsive $E < b = 2$ jusqu'à une valeur E_1 dans $]a, b[=]1, 2[$ conformément à l'étude théorique. La trajectoire γ saute ensuite verticalement sur la 'droite' lente $\{(0, y = \eta(E), E)\}$ qu'elle longe au-delà de sa partie attractive jusqu'à un point d'abscisse $E < a$. En fait, y s'approche d'une valeur limite y_∞ .

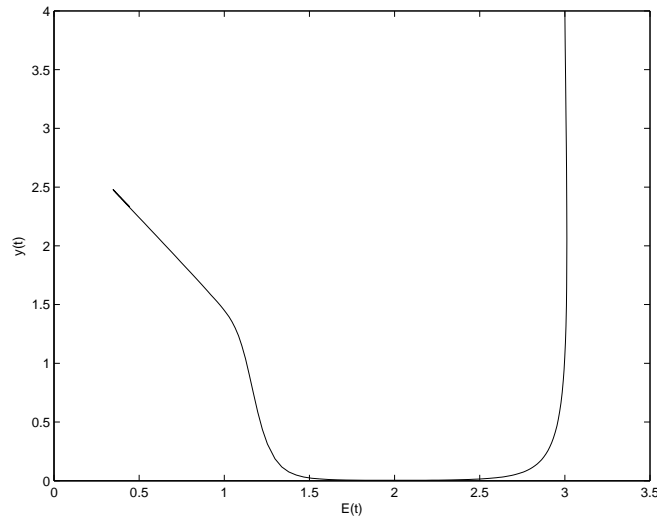


FIGURE 2.11 – la solution numérique dans le plan (E, y) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 3)$.

La figure (2.12), qui est une projection de la même trajectoire sur le plan (E, x) , montre bien qu'avant que y ne converge vers y_∞ , la trajectoire γ augmente brutalement en x avant de décroître lentement en semblant converger vers une valeur $(x_\infty, y_\infty, E_\infty)$, cette dernière phase se faisant près de la variété non triviale $\{(x = \xi(E), y = \eta(E), E)\}$.

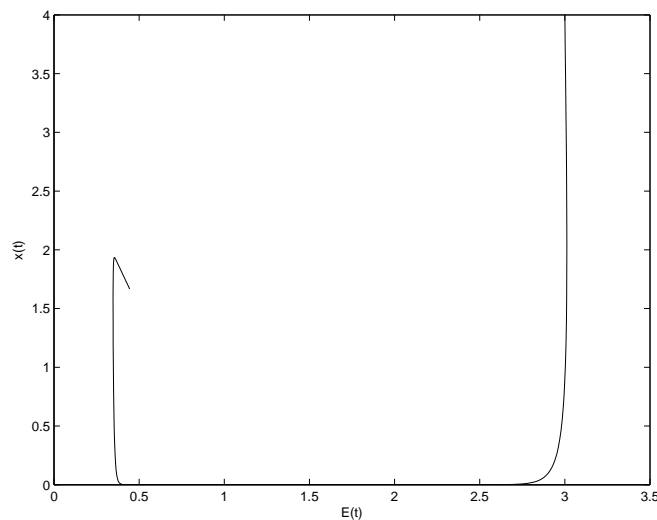


FIGURE 2.12 – la solution numérique dans le plan (E, x) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 3)$.

La figure (2.13), qui est une projection de la même trajectoire sur le plan (x, y) , montre que le couple (x, y) semble converger vers (x_∞, y_∞) après avoir perdu un certain temps au voisinage de l'origine.

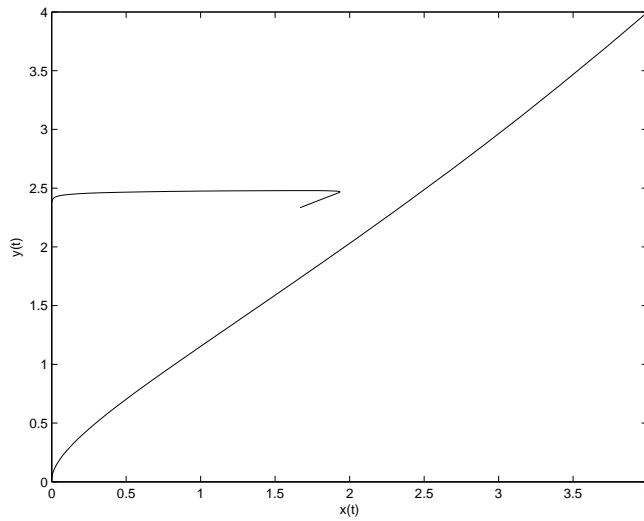


FIGURE 2.13 – la solution numérique dans le plan (x, y) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 3)$.

Pour les simulations des figures (2.14) et (2.15), on a choisi $E_0 = 7 > a_*$. On a le même type d'interprétation, conforme à la théorie, avec cette différence que le point de sortie est E_1 inférieur à celui du cas $E_0 = 3 < a_*$.

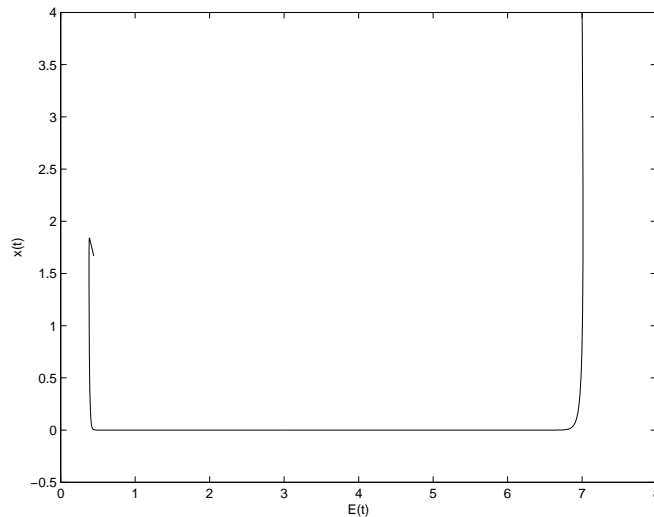


FIGURE 2.14 – la solution numérique dans le plan (E, x) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 7)$.

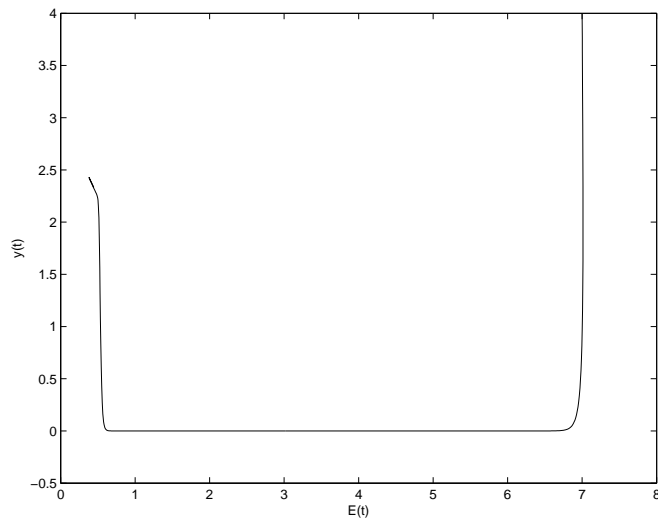


FIGURE 2.15 – la solution numérique dans le plan (E, y) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 7)$.

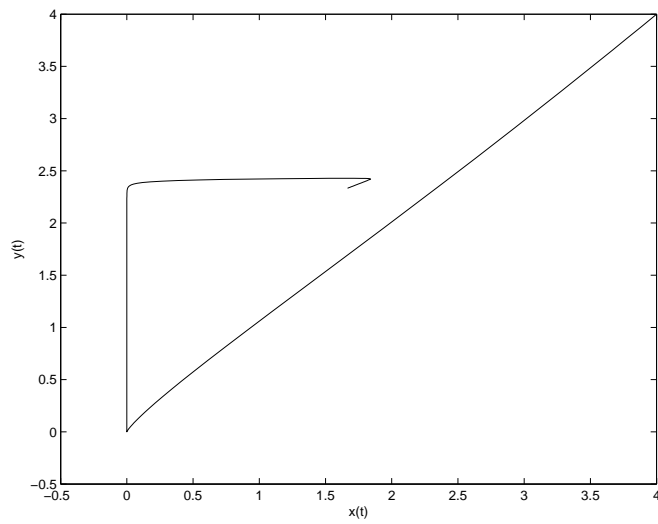


FIGURE 2.16 – la solution numérique dans le plan (x, y) avec la condition initiale $(x_0, y_0, E_0) = (4, 4, 7)$.

Bibliographie

- [1] H. Boudjellaba and T. Sari. Stability loss delay in a class of slow and fast ecological models. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00163654/>, 2007.
- [2] H. Boudjellaba and T. Sari. Dynamic saddle-node bifurcation in a class of slow and fast predator-prey models. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00270315/>, 2008.
- [3] C. W . Clark. Mathematical bioeconomics. *The Optimal Management of Renewable Resources*, Wiley-Intersciences, New York, 1976.
- [4] F. Diener and M. Diener. Sept formules relatives aux canards. *Comptes Rendus Acad.Sci. Paris*, 297 :577–580, 1983.
- [5] C. Lobry, T. Sari, and S. Touhami. On Tykhonov’s theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. *Electronic J . Differential Equat*, 19 :1–22, 1998.
- [6] S. Muratori and S. Rinaldi. Remarks on competitive coexistence. *SIAM J. Appl. Math*, 49 :1462–1472, 1989a.
- [7] S. Rinaldi and S. Muratori. Slow-fast limit cycles in predator-prey models. *Ecol.Modelling. Elsevier Science Publishers B.V, Amsterdam*, 61 :287–308, 1992.
- [8] K. Yadi. Singular perturbations on the infinite time interval. *Revue Arima*, 9 :37–56, 2008.