



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN**

# THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

**DOCTORAT EN SCIENCES**

Spécialité: *Probabilités Statistiques*

Par :

**Mme BERHOUNE Kamila**

Sur le thème

---

## **Problèmes d'Estimation et de Prédiction d'un Processus AR à Noyau de Convolution**

---

Soutenue publiquement à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr Dib Hacem	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr LABBAS Ahmed	Maître de Conférences A	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mme BENSMAIN Nawel	Maître de Conférences B	Université de Tlemcen	Co-Directeur de thèse
Mr MOURID Tahar	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur
Mr MADANI Fethi	Maître de Conférences A	Université de Saida	Examineur
Mr ATTAOUI Said	Maître de Conférences A	Université d'Oran	Examineur

*Laboratoire de statistiques et modélisations aléatoires, UABB,  
13000 Tlemcen - Algérie*

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Monsieur Ahmed LABBES, qui a bien voulu guider et juger cette thèse pour ses efforts fournis dans l'élaboration de ce travail et pour m'avoir guidé, encouragé, conseillé, je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance.

Je voudrais remercier tout particulièrement Mme Nawel BENSMAIN avec qui j'ai eu la chance de pouvoir travailler de m'avoir suivi pas à pas dans l'évolution de mon travail. Elle a toujours été disponible, à l'écoute de mes nombreuses questions, et s'est toujours intéressée à l'avancée de mes travaux. Sa capacité d'analyse et son enthousiasme m'ont montré que le monde de la recherche pouvait être un univers passionnant. Cette thèse lui doit beaucoup. C'est pourquoi, je lui exprime ma profonde reconnaissance et mon grand respect.

J'exprime aussi ma profonde gratitude à Monsieur DIB Hacem, de m'avoir fait l'honneur, en acceptant la présidence du jury ainsi pour sa disponibilité et son aide durant ces années de recherche.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Tahar MOURID, Sa rigueur, sa capacité d'analyse des problèmes et ses très nombreuses connaissances m'ont permis de progresser et ont répondu à plusieurs de mes préoccupations, ses nombreuses relectures et corrections de notre article ont été très appréciables. Pour tout cela merci.

Je suis très reconnaissante à Monsieur Fethi MADANI pour avoir accepté d'en être l'un des examinateurs de cette thèse.

J'exprime également mes remerciements à Monsieur Said ATTAOUI qui m'a fait l'honneur en acceptant d'examiner de ce travail.

# Je dédie ce travail à

**MES CHERS PARENTS Benameur et Latefa** : Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être. Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance. Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.

**MON TRES CHER MARI Mohammed El Amine Zaid** la personne qui a su guider mes pas égarés vers un horizon plus clair et plus joyeux. Tes sacrifices, ton soutien moral et matériel, et ta confiance envers moi m'ont permis d'accomplir ce travail. J'espère que ça soit le témoignage de mes sentiments de reconnaissance les plus sincères.

**MES CHERS BEAUX PARENTS Mansour et Amira** : Cette humble dédicace ne saurait exprimer mon grand respect et ma profonde estime, que dieu vous procure bonne santé et longue vie.

**MES CHERS ET ADORABLE SOEURS Latefa Hayat Fatema et Chahd** : En témoignage de mon affection fraternelle, de ma profonde tendresse et reconnaissance, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de succès, et que Dieu, le tout puissant, vous protège et vous garde.

**A MES CHERS BEAU FRERE ET BELLE SOEUR Younes et Wiwer** : Veuillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère.

A tous les membres de ma promotion.

A tous mes enseignants depuis mes premières années d'études.

A tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.

# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>5</b>
<b>1 PROCESSUS AUTOREGRESSIFS BANACHIQUES.</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Définition et existence d'un processus autorégressif Banachique ARB . . . . .	9
1.2.1 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	11
1.2.2 Construction d'un processus ARC(1) ( $B = C[0, 1]$ ). . . . .	13
1.2.3 Classe de processus ARB(1) dans $L^2_{[0, 1]}$ . . . . .	14
1.2.4 Processus avec saisonnalité . . . . .	15
1.3 Loi Forte des Grands Nombres (LFGN) pour les processus ARB . . . . .	15
1.4 Processus Autorégressifs Hilbertiens d'ordre un . . . . .	16
1.4.1 Définition d'un ARH(1) . . . . .	16
1.5 Entropie . . . . .	16
1.6 Estimation de paramètres fonctionnels par la méthode des "sieves" . . . . .	17
1.6.1 Exemples d'estimation par les "sieves" . . . . .	17
<b>2 ESTIMATEUR SIEVES D'UN PROCESSUS AUTOREGRESSIF HILBERTIEN</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Définitions et notations . . . . .	23
2.3 Estimation Sieves de l'opérateur d'un ARH (1) . . . . .	25
2.3.1 Le paramètre $\rho$ est un opérateur à noyau . . . . .	25
2.3.2 Le paramètre $\rho$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt . . . . .	28
2.3.3 Prédiction . . . . .	36
<b>3 SIMULATIONS ET EXEMPLES</b>	<b>38</b>
3.1 Simulations . . . . .	38
3.1.1 Introduction . . . . .	38
3.1.2 Calcul des Prédicteur sieves . . . . .	39
3.1.3 Exemples de simulations . . . . .	41
3.2 Exemples . . . . .	55

3.2.1	Série climatologique ENSO. . . . .	55
3.2.2	Prévision de la température à Nottingham . . . . .	61
3.2.3	Prévision de la température à Alger . . . . .	63

# INTRODUCTION

Dans de nombreuses situations de la vie courante telles que la médecine, l'économie et la biologie, on cherche des informations sur l'évolution d'un processus stochastique en temps continu  $Y = (Y(t), t \in R)$  dans le futur. Étant donné une trajectoire de  $Y$  observée sur l'intervalle  $[0, T]$ , on aimerait prédire le comportement de  $Y$  sur l'intervalle entier  $[0, T + \delta]$ , Où  $\delta > 0$  plutôt qu'à des moments précis.

Une approche appropriée à ce problème consiste à diviser l'intervalle  $[0, T]$  en sous-intervalles  $[i\delta, (i+1)\delta]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  avec  $\delta = T/n$  et considérer le processus  $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$  défini par

$$X_n(t) = Y(t + n\delta) \quad (1)$$

Pour traiter le problème de prédiction, Bosq [9] a étudié les processus autorégressifs Hilbertiens d'ordre 1 ARH(1). Dans cette ligne d'étude, si  $X$  dans (1) est un processus autorégressif Hilbertien d'ordre 1, la meilleure prédiction de  $X_{n+1}$  compte tenu de son passé  $(X_n, X_{n-1}, \dots)$  est obtenue par

$$\tilde{X}_{n+1} = E(X_{n+1}/X_n, X_{n-1}, \dots) = \rho(X_n), n \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce travail, nous fournissons une théorie générale sur l'estimation sieves de  $\rho$ . Nous suivons la méthode développée par Mourid et Bensmain 2006 [22] Sieves estimator of the operator of a functional autoregressive process. *Statistics and Probability Letters* 76,93-108 et nous donnons des résultats généraux sur l'estimation sieves du paramètre l'opérateur à noyau  $\rho$  en utilisant les séries de Fourier, qui peut être considérée comme des cas particuliers de la méthode d'estimation de Grenander [15].

La méthode des sieves optimise un critère empirique sur une séquence d'espaces de paramètres approximatifs (sieves) qui est dense dans l'espace des paramètres sous-jacent. Contrairement à la méthode standard d'estimation du maximum de vraisemblance, qui peut donner lieu à des incohérences [15] et des taux de convergence lents [25], la méthode des sieves peut atteindre des taux de convergence rapides. Geman et Hwang [14] ont établi la consistance des estimateurs sieves et Shen et Wong [25] ont étudié des vitesses de convergence des estimateurs sieves.

Notre but est d'établir la consistance de l'estimateur sieves du  $\rho$  quand il s'agit d'un opérateur à noyau. Une forme explicite de l'estimateur sieves est donnée dans le cas gaussien. Étroitement liées à l'approche de Geman et Hwang [14], des conditions générales pour

l'existence et la consistance de l'estimateur sieves sont adaptées au cas d'un opérateur de Hilbert–Schmidt sans l'hypothèse gaussienne. Des simulations des trajectoires du processus et de leurs prédicteurs sieves sont effectuées et corroborent les résultats théoriques. Nous illustrons la performance de la méthode proposée dans les cas d'échantillons finis par les exemples de données réelles "la prédiction du cycle annuel de l'événement climatologique El Niño et de la température au château de Nottingham".

Nous comparons également les résultats obtenus avec celles obtenues par d'autres méthodes disponibles dans la littérature, en particulier avec l'estimation sieves de Bensmain et Mourid [5]. L'utilisation de séries de Fourier au lieu de cosinus séries de Fourier "FCS" généralise les résultats obtenus précédemment par Mourid et Bensmain [22] pour tous les opérateurs de Hilbert–Schmidt dans  $L^2[0, 1]$  et les améliore comme il apparaît dans les simulations où nous remarquons une diminution et une stabilité de l'erreur quadratique moyenne (EQ) ainsi que dans les applications pour les séries réelles d'El Niño, Bensmain et Mourid [5] ont obtenu une erreur relative absolue égale à 2,46%, tandis que dans notre cas, nous obtenons une erreur absolue moyenne relative (RMAE) de 2,07%.

La thèse comporte trois chapitres.

Dans le Chapitre 1, nous introduisons la classe des processus autorégressifs fonctionnels en suivant la monographie de D. Bosq [9]. Nous rappelons leurs principales propriétés et théorèmes limites, nous présentons aussi des exemples d'estimations de paramètres de dimension infini par la méthode des sieves.

Dans le Chapitre 2, nous abordons l'estimation du paramètre l'opérateur d'autorégression d'un processus autorégressif hilbertien d'ordre 1 par la méthode des sieves. Nous obtenons dans le cas d'un opérateur à noyau de convolution des résultats sur l'existence de l'estimateur sieves et leur convergence presque sûre ainsi qu'une forme explicite de l'estimateur sieves dans le cas Gaussien. Nous obtenons aussi sous certaines conditions l'existence et la convergence presque sûre de l'estimateur sieves dans le cas où le paramètre est un opérateur de Hilbert Schmidt.

Le Chapitre 3 est consacré à la simulation d'un processus autorégressif hilbertien d'ordre 1 où nous utiliserons le logiciel R, plus précisément, la Bibliothèque far développée par J. Damons et S. Guillas [13].

Pour simuler les trajectoires de notre processus AR et les prédicteurs sieves considérés nous devons spécifier le modèle.

Plus précisément, nous considérons un opérateur  $\rho$  à noyau de convolution  $K$  périodique de période 1 sur  $\mathbb{R}$  de norme  $L^2$  inférieure à 1.

Nous prenons comme exemples de noyaux  $K$  les noyaux suivants :

$$K(t) = \frac{1}{10^2}(t + \cos(t)), \quad K(t) = \frac{1}{10^3}(t^2 + t), \quad K(t) = \frac{1}{10^3}(t \sin(t) + t)$$

Nous simulons  $(n + 1)$  observations d'un processus ARH(1) qui seront nécessaires pour calculer les prédicteurs sieves et qui seront comparés à la  $n + 1$  ème trajectoire du processus. Nous mesurons la qualité du prédicteur sieves  $\hat{X}_{n+1}$  calculé aux points  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  pour

prévoir  $X_{n+1}$  par l'erreur quadratique

$$MSE = 1/m \sum_{i=1}^m \left| \hat{X}_{n+1}(t_j) - X_{n+1}(t_j) \right|^2$$

et l'erreur relative absolue RMAE

$$RMAE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\left| \hat{X}_{n+1}(t_j) - X_{n+1}(t_j) \right|}{|X_{n+1}(t_j)|}$$

Les résultats obtenus sont très satisfaisants et corroborent les résultats théoriques. Les erreurs quadratiques et les erreurs relatives RMAE de prédiction sont très faibles et de l'ordre de quelques pour-cents surtout dans le cas des séries réelles.

Nous appliquons par la suite la méthode des sieves à la prévision des données historiques de la température mesurée au château de Nottingham pendant 1939 sur une base mensuelle de données à partir de 1920 à 1938 disponibles dans la série nottem de la bibliothèque de MASSE de S-PLUS et aux données réelles de la série climatologique décrivant le phénomène El Ni no (ENSO) pendant la période de 1950-2006 où nous remarquons une diminution dans la valeur de l'erreur RMAE par rapport à la première méthode établie par Bensmain et Mourid2009[5].

## Publication

Berhoune K., Bensmain N., Sieves estimator of functional autoregressive process. *Statistics and Probability Letters* 135 (2018) 60-69.

# Chapitre 1

## PROCESSUS AUTOREGRESSIFS BANACHIQUES.

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous donnons les définitions et les résultats les plus importants concernant la classe des processus autorégressifs Hilbertiens et Banachique d'ordre un, noté  $ARB(1)$ , qui représente une généralisation naturelle en dimension infinie des processus autorégressifs à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$  [7].

Par la suite nous donnons deux exemples de processus réels à temps continu qui admettent une représentation autorégressive  $ARB(1)$ . Nous présentons aussi une loi forte des grands nombres ainsi que la méthode d'estimation sieves en dimension infinie de Grenander avec des exemples de la littérature.

### 1.2 Définition et existence d'un processus autorégressif Banachique ARB

Soit  $(B, \beta_B)$  un espace de Banach séparable muni de la tribu borélienne et de sa norme  $\|\cdot\|$ . Un bruit blanc Banachique, est une suite de variables aléatoires  $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  indépendantes identiquement distribuées (i.i.d) définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, A, P)$  et à valeurs dans  $B$  et telles que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$0 < \sigma^2 = E \|\varepsilon_n\|^2 < +\infty, \quad E\varepsilon_n = 0$$

où l'espérance est prise au sens de Bochner.

**Définition 1.1.** Une suite de v.a.  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  définie sur  $(\Omega, A, P)$  et à valeurs dans  $(B, \beta_B)$  est un processus autorégressif d'ordre 1 noté  $ARB(1)$ , s'il existe un bruit blanc Banachique  $(\varepsilon_n)$ , un opérateur  $\rho$  linéaire borné de  $B$  dans  $B$  et un élément  $m \in B$  tels que :

$$X_n - m = \rho(X_{n-1} - m) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

Le résultat suivant donne une condition pour l'existence de tel processus

**Lemme 1.1.** [9] Soit  $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$  un processus Autorégressif Hilbertien d'ordre 1 ( $ARH(1)$ ) d'opérateur  $\rho$ , de moyenne  $\mu$  et de bruit  $\varepsilon$ . Si il existe un entier  $j_0 \geq 1$  tel que  $\|\rho^{j_0}\| < 1$  alors l'équation (1.1) admet une unique solution stationnaire donnée par :

$$X_n = \mu + \sum_{j \geq 0} \rho^j \varepsilon_{n-j}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

où la série converge dans  $L^2(\Omega, A, \mathbb{P})$  et presque sûrement.

**Preuve 1.1.** Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_{n,m} &:= E \left\| \sum_{j=n}^m \rho^j \varepsilon_{i-j} \right\|^2 \\ &\leq E \left( \sum_{j=n}^m \|\rho^j \varepsilon_{i-j}\| \right)^2 \\ &\leq E \left( \sum_{j=n}^m \|\rho^j\| \|\varepsilon_{i-j}\| \right)^2 \\ &\leq E \left( \sum_{j=n}^m \sum_{l=n}^m \|\rho^j\| \|\varepsilon_{i-j}\| \|\rho^l\| \|\varepsilon_{i-l}\| \right) \\ &\leq \sum_{j=n}^m \sum_{l=n}^m \|\rho^j\| \|\rho^l\| E(\|\varepsilon_{i-j}\| \|\varepsilon_{i-l}\|) \\ &\leq \sigma^2 \left( \sum_{n}^m \|\rho^j\| \right)^2 \end{aligned}$$

Sous la condition du lemme 1.1 le dernier majorant tend vers 0 si  $n, m \rightarrow +\infty$  et donc la suite est de Cauchy dans  $L_B^2$ . La convergence presque sûre découle d'un résultat de Geoffroy (1959)(cf [9]).

Pour  $m \in B$  et  $(\varepsilon_i)$  est un  $B$ -bruit blanc on pose

$$X_i = m + \sum_{j \geq 0} \rho^j \varepsilon_{i-j}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

Par le lemme 1.1 la série converge presque sûrement et dans  $L_B^2$ .

Alors le processus  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  est strictement stationnaire et on a

$$X_i - m = \rho(X_{i-1} - m) + \varepsilon_i, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

et  $\varepsilon_i$  est indépendant de  $(X_j, j < i)$ , Par suite  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  est un processus autorégressif d'ordre 1 à valeurs dans  $B$  ARB(1).

### 1.2.1 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On considère le processus réel d'Ornstein-Uhlenbeck

$$\xi_t = \int_{-\infty}^t \exp(-c(t-u)) dW_u, t \in \mathbb{R}$$

où  $(W_u)$  est un processus de Wiener et  $c$  une constante strictement positive.

On choisit  $B = C[0, 1]$  et on pose

$$X_n(t) = \xi_{n+t}, \quad 0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{Z}$$

La version choisie de  $\xi_t$  étant supposée à trajectoires continues, on définit ainsi des v.a  $X_n$  à valeurs dans  $C[0, 1]$  et  $X_n(t), t \in [0, 1]$  représente le morceau de trajectoire du processus  $\xi_t$  sur l'intervalle  $[n, n+1]$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned}
E(\xi_{n+t}/\xi_s, s \leq n) &= E\left(\int_{-\infty}^{n+t} e^{-c(n+t-u)} dW(u) / \xi_s, s \leq n\right) \\
&= E\left(\int_{-\infty}^n e^{-c(n+t-u)} dW(u) + \int_n^{n+t} e^{-c(n+t-u)} dW(u) / \xi_s, s \leq n\right) \\
&= E\left(\int_{-\infty}^n e^{-c(n+t-u)} dW(u) / \xi_s, s \leq n\right) \\
&= \int_{-\infty}^n e^{-c(n+t-u)} dW(u) \\
&= e^{-c(n+t)} \xi_n, \quad 0 \leq t \leq 1
\end{aligned}$$

Ce qui amène à poser :

$$\rho f(t) = e^{-c(n+t)} f(1)$$

et

$$\varepsilon_n(t) = \int_n^{n+t} e^{-c(n+t-u)} dW(u) = \int_0^t e^{-c(t+v)} dW(n+v)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n(t) &= \int_{-\infty}^{n+t} e^{-c(n+t-u)} dW(u) - e^{-ct} \int_{-\infty}^n e^{-c(n-u)} dW(u) \\
&= \xi_{n+t} - (\rho X_{n-1})(t) \quad 0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Enfin comme le processus de Wiener ( $W_u$ ) est à accroissements indépendants, alors la suite  $(\varepsilon_n)$  est un bruit blanc.

D'autre part

$$\|\rho^n\| = \sup_{\|f\|=1} \|\rho^n f\| = e^{-c(n-1)}$$

Donc

$$\sum_{n \geq 0} \|\rho^n\| < \infty$$

et par suite par le lemme 1.1 nous déduisons que le processus  $(X_n)$  est un ARB(1) .

### 1.2.2 Construction d'un processus ARC(1) ( $B = C[0, 1]$ ).

Nous donnons le théorème de Karhunen-Loève et une application pour construire un processus de Wiener.

Soit pour tout  $t \in T$  et  $(\zeta_u, a \leq u \leq b)$  un processus stochastique de 2eme ordre de moyenne nulle et de fonction de covariance  $K$  continu tel que  $a$  et  $b$  sont finis. Soit  $(\varphi_j, j = 1, 2, \dots)$  une base orthonormale de l'espace engendré par les fonctions propres correspondantes aux valeurs propres non nulles de l'opérateur intégral associé à  $K$ .

$$(Af)(s) = \int_a^b K(s, t)f(t)dt$$

Dans ces conditions le théorème de Karhunen-Loève donne :

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \varphi_j(t), t \in [a, b]$$

où  $\xi_j = \int_a^b \zeta(t)\varphi_j(t)dt$  sont des variables aléatoires orthogonales de moyenne nulle et  $E[|\xi_j|^2] = \lambda_j$ . Cette série converge dans  $L^2$ , et uniformément sur  $[a, b]$ .

Si le processus est Gaussien alors le vecteur aléatoire  $(\xi_1, \dots, \xi_r)$  est gaussien dans  $\mathbb{R}^r$ . Dans le cas d'un processus de Wiener ( $W(t), t \geq 0$ ) on a :

$$K(s, t) = \min(s, t), \quad s, t \in [0, 1]$$

Les vecteurs et les valeurs propres de l'opérateur de covariance  $A$  sont :

$$\varphi_j(t) = \sqrt{2} \sin \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) \pi t \right]$$

$$\mu_i = \frac{1}{\left( i - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2}$$

En prenant  $\varphi_j^* = \frac{\varphi_j}{\sqrt{\mu_j}}$  où  $\varphi_j$  sont donnés par le développement en série de Karhunen-Loève, et on a :

$$W(t) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j^* \frac{\sin(j - \frac{1}{2})\pi t}{(j - \frac{1}{2})\pi}$$

Pour un processus de Wiener sur un intervalle  $[0, A]$ , nous trouvons,

$$\varphi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{A}} \sin \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) \pi \frac{t}{A} \right], \quad v_i = \frac{1}{\left( i - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2}$$

et donc

$$W(t) = \sqrt{\frac{2}{A}} \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j^* \frac{\sin(j - \frac{1}{2})\pi \frac{t}{A}}{(j - \frac{1}{2})\frac{\pi}{A}}$$

Si  $A = n + 1$  on aura une version du processus de Wiener sur  $[0, n + 1]$  donnée par :

$$W(u) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^{+\infty} Y_j \frac{\sin(j - \frac{1}{2})\pi \frac{u}{n+1}}{(j - \frac{1}{2})\frac{\pi}{n+1}}, \quad u \in [0, n + 1]$$

où les  $(Y_j)$  sont des variables aléatoires i.i.d normales réduites.

Posons pour tout  $\omega \in \Omega$  et  $i \in \mathbb{N}$  :

$$\varepsilon_i : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$$

$$s \mapsto \varepsilon_i(s) := W_{i+s} - W_i$$

alors  $(\varepsilon_n)$  est un bruit blanc.

Maintenant nous définissons l'opérateur  $\rho$ . en posant

$$\rho(\varphi_i)(s) = \beta_i \varphi_i(s)$$

où  $(\beta_i)$  est une suite de réels.

Et posons

$$X_i = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{i-j}$$

Ainsi  $(X_n)$  est un ARC(1).

### 1.2.3 Classe de processus ARB(1) dans $L^2_{[0,1]}$

Soit  $(Z_t, t \in \mathbb{R})$  un processus réel du second ordre, centré à accroissements indépendants et strictement stationnaires. On suppose que nous avons une version de  $(Z_t)$  à trajectoires localement de carrés intégrables. Alors en posant :

$$\varepsilon_n(t) = Z_{n+t} - Z_n, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

on définit un bruit blanc dans  $L^2_{[0,1]} = H$ . Soit  $\rho$  un opérateur linéaire sur  $H$ , intégral de noyau  $K$  défini par

$$(\rho f)(t) = \int_0^1 K(s, t) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad f \in L^2_{[0,1]}$$

où

$$0 \leq \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t) dt ds < 1$$

Alors  $\|\rho\| < 1$  et on définit un ARH(1) en posant :

$$X_n(t) = \sum_{j \geq 0} \rho^j(\varepsilon_{n-j})(t), 0 \leq t \leq 1$$

$(Z_t)$  peut être un processus de Wiener ou un processus de Poisson centré.

### 1.2.4 Processus avec saisonnalité

Considérons un processus réel de la forme

$$\eta_t = m(t) + \xi_t, \quad t \in \mathbb{R}$$

où  $(\xi_t)$  est un processus centré, à trajectoires continues et admettant une représentation ARB(1) où  $B = C[0, 1]$ .

On suppose que  $m$  est une fonction continue, non aléatoire, de période  $h$  et non constante. Dans ces conditions  $\eta_t$  admet une représentation ARB(1) avec

$$X_n(t) = \xi_{n+t}, \quad 0 \leq t \leq h, \quad n \in Z$$

et

$$EX_n = m$$

$X_n$  est donc stationnaire alors que  $(\eta_t)$  ne l'est pas.

### Conclusion.

Ces exemples montrent l'intérêt de cette classe de processus où des processus réels usuels admettant une représentation autorégressive dans des espaces fonctionnels bien choisis voir[9].

## 1.3 Loi Forte des Grands Nombres (LFGN) pour les processus ARB

Posons,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}, \quad \bar{\varepsilon}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}{n} \quad \text{et} \quad R = \sum_{j \geq 0} \|\rho^j\| < \infty$$

Le résultat suivant établit la loi forte de grands nombres pour  $(X_n) \sim ARB(1)$ .

**Théorème 1.1.** [9]

Soit  $(X_n)$  un processus ARB de moyenne  $m$ , alors

$$\bar{X}_n \rightarrow m \quad p.s \quad (1.3)$$

Pour la convergence en moyenne d'ordre  $r$  dans un espace de Banach on a le théorème suivant

**Théorème 1.2.** [9]

On suppose que la condition  $\exists j_0 \geq 1, \quad \|\rho^{j_0}\| < 1$  est vérifiée et que les variables aléatoires  $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  sont centrées iid et de second ordre.

alors pour tout  $r > 0$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \|\bar{X}_n - m\|^r = 0$$

## 1.4 Processus Autorégressifs Hilbertiens d'ordre un

### 1.4.1 Définition d'un ARH(1)

Nous donnerons ici la définition d'un ARH(1) que l'on utilisera dans cette section avec deux hypothèses supplémentaires par rapport à la définition d'un ARB(1). Considérons un espace de Hilbert réel et séparable muni de la norme  $\|\cdot\|$ . Un processus  $(X_n)$  est un ARH(1) centré à valeurs dans  $H$  si

$$X_i = \rho X_{i-1} + \varepsilon_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

où  $(\varepsilon_i)$  est un  $H$ -bruit blanc et  $\rho$  est un opérateur compact et sur  $H$  tel que  $\exists j_0 \geq 1 / \|\rho^{j_0}\|_L < 1$ .

## 1.5 Entropie

**Définition 1.2.** La quantité  $\varepsilon$ -entropie métrique d'un espace métrique  $(\Theta, d)$  est le logarithme du nombre minimal de  $\varepsilon$ -boules qui recouvrent  $\Theta$ . Si la métrique utilisée est celle de  $L^2$ , on obtient  $L^2$ -entropie métrique.

## 1.6 Estimation de paramètres fonctionnels par la méthode des "sieves"

Quand le paramètre à estimer prend ses valeurs dans un espace de paramètre  $\Theta$  de dimension infinie, les méthodes classiques d'inférence statistique ne s'appliquent pas directement sans des modifications substantielles. Grenander [15] a introduit la méthode des "sieves" pour remédier à l'estimation dans ce type de problèmes.

Une "sieve" notée par  $\Theta(\mu)$  est une famille de sous ensembles paramétrique de  $\Theta$  indexés par  $\mu$  appelée dimension de la "sieve". L'approche de Grenander est basée sur la maximisation de la vraisemblance sur les sous ensembles  $\Theta(\mu)$  qui sont de dimension finie de telle sorte que le maximum de vraisemblance local existe.

D'autre part, quand la dimension de  $\Theta(\mu)$  croît avec la taille de l'échantillon le but étant d'obtenir la convergence de l'estimateur du maximum de vraisemblance local sur  $\Theta(\mu)$  vers la vraie valeur du paramètre. Plus précisément on a

**Définition 1.3.** Soit  $(\Theta, d)$  un espace paramétrique muni d'une distance  $d$ . Soit  $(\Theta(\mu))_\mu$  une famille de sous ensembles de  $\Theta$ . La famille  $(\Theta(\mu))_\mu$  est appelée "sieve" si

- 1)  $\Theta(\mu)$  est compact.
- 2)  $(\Theta(\mu))_\mu$  est une suite croissante.
- 3)  $\bigcup_{\mu} \Theta(\mu)$  est dense dans  $\Theta$ .

### 1.6.1 Exemples d'estimation par les "sieves"

L'exemple traité par la suite est dans [15].

Soit  $\Theta$  un sous ensemble de  $L^2$  et nous considérons l'estimation du paramètre la moyenne d'un processus gaussien. Soit le processus  $(X(t), t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$  vérifiant :

$$X(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^t \alpha(s) ds + W(t), \quad t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

où  $\alpha \in L_2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $W$  est le processus de Wiener de variance 1.

On suppose que les coefficients de Fourier de  $\alpha$  par rapport au sinus sont nuls.

On observe  $(X(t), t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$  et on veut estimer  $\alpha$ .

Nous avons

$$x_k = \sqrt{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi kt X(dt) = \alpha_k + w_k$$

$$\alpha_k = \sqrt{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi kt \alpha(t)(dt)$$

$$w_k = \sqrt{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi kt W(dt)$$

Le processus  $(X(t), t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$  induit une loi de probabilité  $P_\alpha$  sur  $C([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ . La dérivée de Radon Nicodym de  $P_\alpha$  par rapport à  $P_0$  est (cf [15]) :

$$\frac{P_\alpha(dx)}{P_0(dx)} = \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x_k - \frac{1}{2} \alpha_k^2\right) \quad (1.4)$$

Puisque  $\alpha_k \in l^2$ ,  $P_\alpha$  et  $P_0$  sont équivalentes. Pour maximiser (1.4), on maximise chaque terme de la série.

Alors le maximum de vraisemblance  $\alpha_k^* = x_k$ .

Mais

$$x_k = \alpha_k + w_k \text{ et } \alpha_k \in l^2$$

or

$$w_k \notin l^2 \text{ car } \sum_{k=0}^{+\infty} \text{var}^2(w_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty \quad \text{presque surement}$$

donc  $x_k \notin l^2$ . D'où le maximum de la vraisemblance n'existe pas dans  $l^2$ .

On peut choisir une "sieve"  $\Theta_m$  définie par

$$\Theta_m = \left\{ \alpha, \alpha \in \Theta; \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \alpha_k^2 \leq m \right\}$$

$\Theta_m$  est compact,  $\Theta_m \subset \Theta_{m+1}$  et  $\overline{\cup \Theta_m} = \Theta$ .

Soit  $\lambda$  le multiplicateur de Lagrange. Pour obtenir le maximum de vraisemblance, on a à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \max_{\alpha_k} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^n (\alpha_k x_k^i - \frac{1}{2} \alpha_k^2) - \lambda k^2 \alpha_k^2 \\ \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \alpha_k^2 \leq m \end{cases}$$

On obtient alors

$$\widehat{\alpha}_{m_n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{\alpha}_k \cos(2\pi kt)$$

où

$$\widehat{\alpha}_k = \frac{\sum_{i=1}^n x_k^i}{n + \lambda k^2}; \quad m = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_k^i \right)^2}{(n + \lambda k^2)^2}$$

Et par [15] cet estimateur est consistant.

L'exemple suivant est traité par Mourid et Bensmain dans [22].

Soit  $(X_n)_n = (X_n(t), t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])_n$  un processus satisfaisant

$$X_n = \rho X_{n-1} + \varepsilon_n \tag{1.5}$$

dans l'espace des fonctions de carré intégrable  $L^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , et  $(\varepsilon_n)$  est un bruit blanc gaussien. La relation (1.5) s'écrit alors dans  $L^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  comme :

$$X_n(t) = \rho X_{n-1}(t) + \varepsilon_n(t), \quad t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \tag{1.6}$$

où on suppose que l'opérateur  $\rho$  est un opérateur de Hilbert Schmidt à noyau de convolution défini par

$$\rho(f(x))(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(t-x) f(x) dx$$

avec  $K \in L^2([\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}])$ ,  $\|K\|_2 < 1$ , et  $K$  périodique de période 1.

L'équation (1.6) devient

$$X_n(t) = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(t-s)X_{n-1}(s)ds + \varepsilon_n(t), \quad t \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$$

ou

$$X_n(t) = (K * X_{n-1})(t) + \varepsilon_n(t) \quad (1.7)$$

L'estimation de l'opérateur  $\rho$  passe par l'estimation de son noyau  $K$ . Dans ce cas, l'espace  $\Theta$  sera l'espace des fonctions  $L^2[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

Nous considérons la base trigonométrique de sinus et cosinus dans  $L^2[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$  :

$$\begin{cases} \phi_0(t) = 1_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]} \\ \phi_{2k}(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi kt) \\ \phi_{2k+1}(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi kt) \end{cases}$$

avec  $k \geq 1$ .

Nous notons respectivement, par  $a_k(X_n)$ ,  $a_k(X_{n-1})$ ,  $a_k(\varepsilon_n)$ ,  $a_k(K)$  les coefficients de Fourier par rapport à la fonction cosinus et par  $b_k(X_n)$ ,  $b_k(X_{n-1})$ ,  $b_k(\varepsilon_n)$ ,  $b_k(K)$  les coefficients de Fourier par rapport à la fonction sinus, des fonctions  $X_n$ ,  $X_{n-1}$ ,  $\varepsilon_n$ ,  $K$ . Les variables aléatoires  $a_k(\varepsilon_n)$  and  $b_k(\varepsilon_n)$  sont gaussiennes indépendantes et supposées de même variance.

D'après (1.7), nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_k(X_n) &= (a_k(K)a_k(X_{n-1}) - b_k(K)b_k(X_{n-1}))/2 + a_k(\varepsilon_n) \\ b_k(X_n) &= (a_k(K)b_k(X_{n-1}) + b_k(K)a_k(X_{n-1}))/2 + b_k(\varepsilon_n) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Pour  $k = 0$ , on a  $a_0(X_n) = a_0(K)a_0(X_{n-1}) + a_0(\varepsilon_n)$ .

Dans cette partie, nous considérons l'hypothèse suivante :  $H : K \in L^2[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $\|K\|_2 < 1$ , et  $K$  paire périodique de période 1. D'où,  $b_k(K) = 0$

En notant

$$x_{n,k} = a_k(X_n), \quad x_{n-1,k} = a_k(X_{n-1}), \quad c_k = a_k(K) \text{ et } \varepsilon_{n,k} = a_k(\varepsilon_n)$$

Par conséquent, la première relation dans (1.8) mène à :

$$\begin{aligned} x_{n,0} &= c_0 x_{n-1,0} + \varepsilon_{n,0} \\ x_{n,k} &= \frac{1}{2} c_k x_{n-1,k} + \varepsilon_{n,k} \end{aligned} \quad (1.9)$$

on obtient deux processus autorégressifs réels de premier ordre.

L'estimation du noyau  $K$  passe par l'estimation de ses coefficients de Fourier. On choisit une sieve  $\Theta_{m_n}$  définie par

$$\Theta_{m_n} = \left\{ K \in L^2\left(\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) / K(t) = c_0 1_{\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(t) + \sum_{k=1}^{m_n} c_k \sqrt{2} \cos 2\pi kt; \right. \\ \left. \sum_{k=1}^{m_n} k^2 c_k^2 \leq m_n \right\} \quad (1.10)$$

où  $K$  est périodique de période 1 et  $m_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Le résultat suivant donne l'estimateur sieves  $\hat{K}$  du noyau  $K$  pour des observations  $(X_1, \dots, X_n)$  satisfaisant (2.3).

**Théorème 1.3.** [22] *Sous l'hypothèse  $H$ , l'estimateur sieve  $\hat{K}_n$  du noyau  $K$  est donné par*

$$\hat{K}_n(t) = \hat{c}_0 1_{\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(t) + \sum_{k=1}^{m_n} \hat{c}_k \sqrt{2} \cos 2\pi kt \quad t \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

où

$$\hat{c}_0 = \frac{\sum_{i=2}^n x_{i,0} x_{i-1,0}}{\sum_{i=1}^n x_{i-1,0}^2}, \quad \hat{c}_k = \frac{\sum_{i=2}^n x_{i,k} x_{i-1,k}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} x_{i-1,k}^2 + 2\lambda k}, \quad k = 1, \dots, m_n$$

où  $m_n$  une suite croissante vers l'infini et  $\lambda > 0$  tel que  $\sum_{k=1}^{m_n} k^2 \hat{c}_k^2 \leq m_n$

**Preuve 1.2.** *Puisque les variables aléatoires réelles  $(\varepsilon_n)$  sont gaussiennes et indépendantes de moyenne nulle et de variance  $\sigma_k^2$ , La densité de transition stationnaire du processus  $(X_n)$  défini par (1.6) par rapport à la loi gaussienne  $P_0$  de  $\varepsilon_0$  est donnée par*

$$g(X_n, X_{n-1}, K) = \exp \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sigma_k^2} \left[ x_{n,k} c_k x_{n-1,k} - \frac{1}{4} c_k^2 x_{n-1,k}^2 \right] \right) \quad (1.11)$$

la dernière série converge puisque les coefficients de Fourier sont dans  $l^2$ . D'où la vraisemblance conditionnelle  $L(X_1, X_2, \dots, X_n; K)$  par rapport à  $P_0$  la loi de  $\varepsilon_0$  est donnée par

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n; K) = \exp \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sigma_k^2} \left[ x_{i,k} c_k x_{i-1,k} - \frac{1}{4} c_k^2 x_{i-1,k}^2 \right] \right) \quad (1.12)$$

On doit maximiser l'expression (1.12) sur la sieve  $\Theta_{m_n}$  donnée par 1.10.

Soit  $\lambda$  le multiplicateur de Lagrange, nous aurons à résoudre le problème suivant :

$$\max_{\Theta_{m_n}} \sum_k \sum_{i=1}^n x_{i,k} c_k x_{i-1,k} - \frac{1}{4} c_k^2 x_{i-1,k}^2 - \lambda k^2 c_k^2$$

En dérivant par rapport à  $c_k$ ,  $k > 0$ , on obtient les formules annoncées au théorème. Pour  $k = 0$ , nous utilisons la relation

$$x_{n,0} = c_0 x_{n-1,0} + \varepsilon_{n,0}$$

et l'expression de l'estimateur  $\hat{c}_0$  est obtenu par des calculs simples.

# Chapitre 2

## ESTIMATEUR SIEVES D'UN PROCESSUS AUTOREGRESSIF HILBERTIEN

### 2.1 Introduction

Considérons un espace de Hilbert séparable  $(H, B_H)$  muni de la norme des opérateurs. Un processus autorégressif hilbertien d'ordre 1 ARH(1) est une suite  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, A, P)$  à valeur dans l'espace de Hilbert  $H$  tels que

$$X_n = \rho X_{n-1} + \varepsilon_n \quad (2.1)$$

où  $(\varepsilon_n)$  est un  $H$ -bruit blanc et  $\rho$  est un opérateur linéaire borné, sous la condition  $\exists j_0 \geq 1 / \|\rho^{j_0}\|_L < 1$ , où  $\|\cdot\|_L$  est la norme des opérateurs linéaires bornés.

L'estimateur du maximum de vraisemblance n'est pas consistant quand le paramètre à estimer  $\rho$  appartient à un espace de dimension infinie.

Comme nous l'avons introduit, la méthode des "sieves" consiste à maximiser la fonction de vraisemblance sur des sous espaces de l'espace paramétrique appelés "sieves" de dimension finie qui croit avec la taille de l'échantillon. Pour cela nous appliquons cette méthode pour estimer le paramètre  $\rho$ .

### 2.2 Définitions et notations

Soit  $(H, B)$  l'espace de Hilbert muni d'une mesure  $\lambda$   $\sigma$ -finie,  $\Theta$  l'espace des opérateurs linéaires bornés de norme inférieure à 1, muni d'une métrique  $d$ . Rappelant qu'une famille  $\{\Theta_m\}$  de sous

ensembles de  $\Theta$  qui vérifie  $\Theta_m$  est compact,  $\Theta_m \subseteq \Theta_{m+1}$  et  $\bigcup \Theta_m$  est dense dans  $\Theta$  est dite sieve pour  $\Theta$ .

Soit  $X_n$  une variable aléatoire satisfaisant la relation (2.1), nous notons par  $P_0$  la loi de  $\varepsilon_0$  qui sera la mesure de probabilité définie sur  $(H, B_H)$  par rapport à laquelle les dérivées de Radon Nikodym sont évaluées et par  $P_\rho$  la loi stationnaire induite par la variable aléatoire  $X_n$ . Selon (Bosq D; Mourid T. 1997[10], proposition 4) les mesures de probabilité  $P_\rho$  et  $P_0$  sont équivalentes chaque fois que  $\rho$  est de Hilbert Schmidt et commute avec l'opérateur de covariance de la variable aléatoire  $X_0$ , dorénavant, cette condition sera assurée. Dans le sens où  $\Theta$  est l'espace paramétrique des opérateurs de Hilbert-Schmidt et la famille des loi de probabilité  $P_\rho, \rho \in \Theta$  est telle que  $P_\rho \neq P_\beta$  si  $\rho \neq \beta$ , le modèle (2.1) est identifiable.

Nous donnons la notation et les définitions suivantes.

- (i) On note par  $g(x, y, \rho) = P_\rho(dx/X_0 = y)/P_0(dx)$  la densité de probabilité stationnaire de transition du processus  $(X_n)$  satisfaisant (2.1) où  $x, y \in H$  et  $\rho \in \Theta$ , et on définit l'entropie conditionnelle par

$$H(\rho, \beta) = E_\rho \ln g(X_0, y, \beta) = \int g(x, y, \beta)g(x, y, \rho)P_\rho(dx).$$

- (ii) Pour  $\rho \in \Theta_m$ ,  $B_m(\rho, \varepsilon) = \{\beta/\beta \in \Theta_m; d(\rho, \beta) < \varepsilon\}$ .
- (iii) Nous définissons l'ensemble des estimateurs du maximum de vraisemblance sur  $\Theta_m$  pour un échantillon de taille  $n$  par

$$M_m^n = \left\{ \rho \in \Theta_m / L_n(\omega, \rho) = L_n(\omega, \Theta_m) = \sup_{\beta \in \Theta_m} L_n(\omega, \beta) \right\}.$$

et l'ensemble du maximum de l'entropie conditionnelle par

$$A_m = \{\rho \in \Theta_m / H(\rho_0, \rho) = H(\rho_0, \Theta_m)\},$$

où  $L_n(\omega, \rho)$  est la fonction de vraisemblance conditionnelle évaluée au point  $\omega = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\rho_0$  est la vraie valeur du paramètre.

- (iv) Quand  $C_m \subseteq A$ , la notation  $C_m \rightarrow \rho$  signifie  $\sup_{\beta \in C_m} d(\rho, \beta) \rightarrow 0$  quand  $m$  croit. par la suite,  $m = m_n$  et  $m_n$  est une suite croissante vers l'infini avec  $n$ .
- (v) Pour toute extension de fonction à valeurs réelles  $g$  sur  $A \subset \Theta$ , et tout  $B \subseteq A$  on pose :

$$g(B) = \sup_{\beta \in B} g(\beta).$$

## 2.3 Estimation Sieves de l'opérateur d'un ARH (1)

Dans ce chapitre nous donnons les résultats concernant l'existence et la convergence de l'estimateur sieves de l'opérateur  $\rho$ . Nous considérons d'abord un opérateur à noyau et on montre que le maximum de vraisemblance est atteint pour une sieve particulière (2.6) et nous donnons une forme explicite de l'estimateur sieves dans le cas Gaussien puis nous donnons une condition générale pour l'existence et la convergence presque sûre de l'estimateur sieves dans le cas d'un opérateur de Hilbert-Schmidt, et nous donnons un résultat qui fournit une vitesse de croissance de  $m_n$  la taille de la sieve  $\Theta_{m_n}$  pour l'opérateur à noyau.

### 2.3.1 Le paramètre $\rho$ est un opérateur à noyau

Dans l'espace des fonctions de carré intégrable  $L^2[0, 1]$  on prend un processus  $(X_n)_n = (X_n(t), t \in [0, 1])_n$  satisfaisant (2.1) et un bruit blanc gaussien  $(\varepsilon_n)$ .

La relation (2.1) s'écrit donc dans  $L^2[0, 1]$  comme :

$$X_n(t) = \rho X_{n-1}(t) + \varepsilon_n(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.2)$$

Dans cette partie nous supposons que l'opérateur  $\rho$  est un opérateur de Hilbert Schmidt à noyau de convolution  $K$  périodique de période 1 tel que  $K \in L^2([0, 1])$ ,  $\|K\|_2 < 1$ , d'où l'équation (2.2) devient

$$X_n(t) = (K * X_{n-1})(t) + \varepsilon_n(t) \quad (2.3)$$

Dans ce cas, l'espace  $\Theta$  sera l'espace des fonctions  $L^2[0, 1]$ , nous estimons l'opérateur  $\rho$  en estimant son noyau  $K$ . Pour cette raison nous considérons la base trigonométrique de sinus et cosinus dans  $L^2[0, 1]$  :

$$(\phi_0 = 1_{[0,1]}, \phi_{2k}(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi kt), \phi_{2k+1}(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi kt), k \geq 1)$$

Si on note respectivement, par

$$a_k(X_n), a_k(X_{n-1}), a_k(\varepsilon_n), a_k(K)$$

les coefficient de Fourier par rapport à la fonction cosinus et par

$$b_k(X_{n-1}), b_k(K), b_k(\varepsilon_n)$$

les coefficient de Fourier par rapport à la fonction sinus, des fonctions  $X_n, X_{n-1}, \varepsilon_n, K$ .

Alors la relation (2.3), nous donne :

$$a_k(X_n) = (a_k(K)a_k(X_{n-1}) - b_k(K)b_k(X_{n-1}))/2 + a_k(\varepsilon_n) \quad (2.4)$$

Pour le cas :  $k = 0$ , on a

$$a_0(X_n) = a_0(K)a_0(X_{n-1}) + a_0(\varepsilon_n)$$

Les variables aléatoires  $a_k(\varepsilon_n)$  et  $b_k(\varepsilon_n)$  sont gaussiennes indépendantes et supposées de même variance.

Dans ce qui suit, nous considérons l'hypothèse suivante :

$H : K \in L^2[0, 1], \|K\|_2 < 1$ , et  $K$  périodique de période 1.

Et nous notons par

$$x_{n,k} = a_k(X_n), \quad x_{n-1,k} = a_k(X_{n-1}), \quad y_{n-1,k} = b_k(X_{n-1}),$$

$$c_k = a_k(K), \quad d_k = b_k(K), \quad \varepsilon_{n,k} = a_k(\varepsilon_n)$$

Par suite la relation (2.4) devient :

$$x_{n,k} = (c_k x_{n-1,k} - d_k y_{n-1,k})/2 + \varepsilon_{n,k}. \quad (2.5)$$

Pour  $k = 0$  on obtient

$$x_{n,0} = c_0 x_{n-1,0} + \varepsilon_{n,0}.$$

L'estimation du noyau  $K$  s'effectue par l'estimation de ses coefficients de Fourier. Soit la sieve  $\Theta_{m_n}$  définie par

$$\Theta_{m_n} = \left\{ K \in L^2([0, 1]) / K(t) = c_0 1_{[0,1]}(t) + \sum_{k=1}^{m_n} (c_k \cos 2\pi kt + d_k \sin 2\pi kt); \right. \\ \left. \sum_{k=1}^{m_n} k^2 (c_k^2 + d_k^2) \leq m_n \right\} \quad (2.6)$$

où  $K$  est périodique de période 1 et  $m_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

où  $K$  est périodique de période 1 et  $m_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

L'estimateur sieves  $\hat{K}$  du noyau  $K$  pour des observations  $(X_1, \dots, X_n)$  satisfaisant (2.3) est donné dans le résultat suivant

**Théorème 2.1.** [6] L'estimateur sieve  $\hat{K}$  du noyau  $K$  associé à la sieve (2.6) est donné par

$$\hat{K}_n(t) = \hat{c}_0 1_{[0,1]}(t) + \sum_{k=1}^{m_n} (\hat{c}_k \cos 2\pi kt + \hat{d}_k \sin 2\pi kt) \quad t \in [0, 1]$$

où

$$\hat{c}_0 = \frac{\sum_{i=0}^n x_{i,0} x_{i-1,0}}{\sum_{i=1}^n x_{i-1,0}^2}, \quad \hat{c}_k = -\frac{\alpha_3 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2^2}, \quad \hat{d}_k = \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2^2}, \quad k = 1, \dots, m_n$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{i-1,k}^2 - 2\lambda k^2, & \alpha_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{i-1,k} y_{i-1,k}, & \alpha_3 &= \sum_{i=1}^n x_{i,k} x_{i-1,k} \\ \beta_1 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_{i-1,k}^2 - 2\lambda k^2, & \beta_2 &= \sum_{i=1}^n x_{i,k} y_{i-1,k} \end{aligned}$$

où  $m_n$  une suite croissante vers l'infini et  $\lambda > 0$  tel que  $\sum_{k=1}^{m_n} k^2 (\hat{c}_k^2 + \hat{d}_k^2) = m_n$

**Preuve.** Puisque les variables aléatoires réelles  $(\varepsilon_n)$  sont gaussiennes et indépendantes de moyenne nulle et de variance  $\sigma_k^2$ , la densité de transition stationnaire du processus  $(X_n)$  défini par (2.2) par rapport à la loi gaussienne  $P_0$  de  $\varepsilon_0$  est donnée par

$$\begin{aligned} g(X_n, X_{n-1}, K) &= \exp \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sigma_k^2} \left[ -\frac{1}{4} c_k^2 x_{n-1,k}^2 - \frac{1}{4} d_k^2 y_{n-1,k}^2 + \frac{1}{2} c_k d_k x_{n-1,k} y_{n-1,k} + c_k x_{n,k} x_{n-1,k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - d_k x_{i,k} y_{i-1,k} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

la dernière série converge puisque les coefficients de Fourier sont dans  $l^2$ .

D'où la vraisemblance conditionnelle  $L(X_1, X_2, \dots, X_n; K)$  par rapport à  $P_0$  (la loi de  $\varepsilon_0$ ) est donnée par

$$\begin{aligned} L(X_1, X_2, \dots, X_n; K) &= \exp \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sigma_k^2} \left[ -\frac{1}{4} c_k^2 x_{i-1,k}^2 - \frac{1}{4} d_k^2 y_{i-1,k}^2 + \frac{1}{2} c_k d_k x_{i-1,k} y_{i-1,k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_k x_{i,k} x_{i-1,k} - d_k x_{i,k} y_{i-1,k} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

En utilisant le multiplicateur de Lagrange, et en maximisant l'expression (2.8) sur la sieve  $\Theta_{m_n}$  donnée par (2.6) on obtient les formules annoncées au théorème.

Pour  $k = 0$ , nous utilisons la relation

$$x_{n,0} = c_0 x_{n-1,0} + \varepsilon_{n,0}$$

et l'expression de l'estimateur  $\hat{c}_0$  est obtenue par des calculs simples  $\square$

### 2.3.2 Le paramètre $\rho$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt

Soit  $\Theta$  un espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt et soit  $d$  la métrique induite par la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$  en posant  $d(\rho, \beta) = \|\rho - \beta\|_{\mathcal{S}}$ . Nous suivons Geman et Hwang[14] et Mourid et Bensmain [22] pour étudier la convergence presque sûre de l'estimateur sieves de l'opérateur  $\rho$ .

Nous considérons la relation (2.1) avec  $(\varepsilon_n)$  un bruit blanc.  $\rho_0$  est la vraie valeur du paramètre et nous suivons Geman and Hwang[14] et Bahadur[3].

En gardant les notations du paragraphe précédent. Le théorème suivant établit une convergence presque sûre de l'estimateur sieves  $\hat{\rho}_n$  de  $\rho_0$  dans la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ . Dans cette partie, le processus n'est pas nécessairement Gaussien.

**Théorème 2.2.** [22] *Supposons que la sieve  $\Theta_{m_n}$  est choisie telle que :*

(1) *Pour tout  $n$  et tout  $\rho \in \Theta_{m_n}$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que*

$$E_{\rho_0} \ln g(X_0, y, B_{m_n}(\rho, \varepsilon)) < \infty$$

(2)  *$A_m \rightarrow \rho_0$  quand  $m \rightarrow +\infty$  Si  $m, n \rightarrow +\infty$  alors*

$$M_m^n \rightarrow \rho_0 \text{ p.s d'où } \sup_{\hat{\rho}_n \in M_m^n} \|\hat{\rho}_n - \rho_0\| \rightarrow 0 \text{ p.s}$$

**Preuve.** Rappelons que la densité de probabilité de transition du processus  $(X_n)$  est notée par  $g(x, y, \rho)$ . d'où la vraisemblance conditionnelle est

$$L(\omega, \rho) = L(X_1, \dots, X_n; \rho) = \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \rho)$$

à cause de la continuité de  $g(x, y, \cdot)$  sur l'espace métrique  $(\Theta_{m_n}, d)$ , la vraisemblance  $L(X_1, \dots, X_n; \cdot)$  et l'entropie  $H(\rho_0, \cdot)$  sont continues sur  $\Theta_m$ . alors de l'hypothèse (1) :  $E_{\rho_0} \ln g(X_0, y, B_{m_n}(\rho, \varepsilon)) < \infty$ , les ensembles  $M_{m_n}^n$  et  $A_m$  définis précédemment sont compacts et presque sûrement non vides.

Notons par  $B_m(A_m, \frac{1}{m})$  un  $\frac{1}{m}$  voisinage de  $A_m$  dans le sens de la distance  $d$ . Il suffit de montrer que  $M_m^n \subset B_m(A_m, \frac{1}{m})$  presque sûrement pour  $n$  assez grand et par l'hypothèse (2) on a le théorème. Puisque l'ensemble

$$C_m = \Theta_m - B_m(A_m, \frac{1}{m})$$

est compact, on peut trouver un nombre fini de boules  $B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k)$  qui recouvre  $C_m$  où  $\rho_m^k \in C_m$ , et  $\varepsilon_m^k > 0$  pour  $k = 1, \dots, l_m$ . Pour  $\beta_m$  fixé,  $\beta_m \in A_m$ , on a.

$$\begin{aligned} P(M_m^n \not\subset B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k)) &\leq P \left\{ \sup_{\rho \in \Theta_m - B_m(A_m, 1/m)} L_n(\omega, \rho) \geq L_n(\omega, \beta_m) \right\} \\ &\leq P \left\{ \sup_{k=1, \dots, l_m} \frac{L_n(\omega, B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k))}{L_n(\omega, \beta_m)} \geq 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Soit  $\rho_m^k \in C_m$ , et  $a_{\rho_m^k} > 0$  tel que  $H(\rho_0, \rho_m^k) - H(\rho_0, \Theta_m) < -a_{\rho_m^k}$ .

De la définition de  $A_m$  et pour  $\beta_m \in A_m$ , on a

$$E_{\rho_0}(\ln(g(X_i, X_{i-1}, B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k)))) - E_{\rho_0}(\ln(g(X_i, X_{i-1}, \beta_m))) = E_{\rho_0} \ln \frac{g(X_i, X_{i-1}, B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k))}{g(X_i, X_{i-1}, \beta_m)}$$

et

$$E_{\rho_0} \ln \frac{g(X_i, X_{i-1}, B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k))}{g(X_i, X_{i-1}, \beta_m)} < -a_{\rho_m^k} \quad \text{pour } \varepsilon_m^k \text{ suffisamment petit.} \quad (2.10)$$

D'autre part

$$\ln L(\omega, B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k)) - \ln L(\omega, \beta_m) = \ln \sup_{\beta \in B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k)} \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \beta) - \ln \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \beta_m)$$

et

$$\begin{aligned} \ln \sup_{\beta \in B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k)} \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \beta) - \ln \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \beta_m) \\ \leq \ln \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k)) - \ln \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \beta_m) \end{aligned} \quad (2.11)$$

qui est égale à  $\sum_{i=1}^n (\ln\{g(X_i, X_{i-1}, B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k))/g(X_i, X_{i-1}, \beta_m)\})$ .

Conditionné par  $X_{i-1}$ , les lois des variables aléatoires  $g(X_i, X_{i-1}, B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k))$  et  $g(X_i, X_{i-1}, \beta_m)$  sont les images de  $g$  par translation des lois de  $\varepsilon_i$  qui sont i.i.d. Donc par la loi forte des grands nombres des variables aléatoires i.i.d et par (2.10) nous obtenons pour  $n$  assez grand.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \left\{ \frac{g(X_i, X_{i-1}, B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k))}{g(X_i, X_{i-1}, \beta_m)} \right\} \right\} \approx E_{\rho_0} \ln \left\{ \frac{g(X_i, X_{i-1}, B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k))}{g(X_i, X_{i-1}, \beta_m)} \right\} < -a_{\rho_m^k}$$

Donc, pour  $m$  grand :

$$\frac{L_n(\omega; B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k))}{L_n(\omega; \beta_m)} < \exp(-na_{\rho_m^k}) \text{ presque sûrement.}$$

En choisissant  $a = \min_{k=1, \dots, l_m} a_{\rho_m^k}$  nous déduisons presque sûrement

$$\sup_{k=1, \dots, l_m} \frac{L_n(\omega; B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k))}{L_n(\omega; \beta_m)} < \exp(-na) \text{ pour } m \text{ grand.}$$

Il existe  $Z_m$  tel que pour tout  $m \geq Z_m$  :

$$P \left\{ \sup_{k=1, \dots, l_m} \frac{L_n(\omega; B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k))}{L_n(\omega; \beta_m)} \geq 1 \right\} \leq \frac{1}{m^2}$$

En fin, de (2.9) on a

$$P(M_m^n \notin B_m(\rho_m^k, \varepsilon_m^k)) \leq \frac{1}{m^2}$$

la démonstration s'achève par l'application du lemme de Borel-Cantelli □

Nous considérons les notations suivantes avec les notations et les définitions considérées au paragraphe précédent.

**C1(a)** Si  $(\rho_m)$  est une suite telle que

$$\forall m, \rho_m \in \Theta_m \quad \text{et} \quad H(\rho_0, \rho_m) \rightarrow H(\rho_0, \rho_0) \quad \text{alors} \quad \rho_m \rightarrow \rho_0.$$

**(b)** Il existe une suite  $\rho_m \in \Theta_m$  telle que  $H(\rho_0, \rho_m) \rightarrow H(\rho_0, \rho_0)$ .

Pour tout  $\delta > 0$  et tout  $m$ , nous définissons l'ensemble

$$D_m = \{\rho \in \Theta_m \mid H(\rho_0, \rho) \leq H(\rho_0, \rho_m) - \delta\}$$

où  $\rho_m$  est la suite dans C1(b).

Étant donné  $l$  ensembles  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$  dans  $\Theta_m$ , nous posons

$$\varphi_m := \sup_k \inf_{t \geq 0} E_{\rho_0} \exp \left[ t \ln \left\{ \frac{g(X_n, X_{n-1}, \Gamma_k)}{g(X_n, X_{n-1}, \rho_m)} \right\} \right].$$

Le corollaire suivant assure sous d'autres conditions la convergence presque sûre de l'estimateur sieve de l'opérateur  $\rho$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ .

**Corollaire 2.1.** [22] *Supposons que  $\{\Theta_m\}$  est choisie telle que la condition C 1 est vérifiée, et que pour tout  $\delta > 0$ , on peut trouver  $\Gamma_1^m, \dots, \Gamma_{l_m}^m$  dans  $\Theta_m$   $n = 1, 2, \dots$  tels que*

(i)  $D_m \subseteq \cup_{k=1}^{l_m} \Gamma_k^m$ .

(ii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} l_{m_n} (\varphi_{m_n})^n < +\infty$

Alors

$$M_{m_n}^n \rightarrow \rho_0 \quad p.s \quad \text{où} \quad \sup_{\hat{\rho}_n \in M_{m_n}^n} \|\hat{\rho}_n - \rho_0\| \rightarrow 0 \quad p.s$$

**Preuve.** Fixons  $\delta$ , on veut monter que

$$P(D_{m_n} \cap M_{m_n}^n \neq \emptyset) = 0 \tag{2.12}$$

Si (2.12) est vérifié, alors avec une probabilité égale à 1

$$\inf_{\varphi \in M_{m_n}^n} H(\rho_0, \varphi) \geq H(\rho_0, \rho_{m_n}) - \delta$$

pour  $n$  suffisamment grand.

Puisque  $\delta$  est arbitraire et

$$H(\rho_0, \rho_m) \rightarrow H(\rho_0, \rho_0)$$

Par la condition C1(b)

$$\liminf \inf_{\rho \in M_{m_n}^n} H(\rho_0, \rho) \geq H(\rho_0, \rho_0) \quad \mathbf{ps}$$

Sachant que

$$\begin{aligned} H(\rho_0, \rho) &\leq H(\rho_0, \rho_0) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\rho \in M_{m_n}^n} |H(\rho_0, \rho) - H(\rho_0, \rho_0)| &= 0 \quad ps \end{aligned} \tag{2.13}$$

et si on fixe  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $n$  on choisit  $\beta_n \in M_{m_n}^n$  tel que

$$\frac{d(\rho_0, \beta_n)}{1 + d(\rho_0, \beta_n)} > \sup_{\rho \in M_{m_n}^n} \frac{d(\rho_0, \rho)}{1 + d(\rho_0, \rho)} - \varepsilon$$

la condition C1(a) combinée avec (2.13) impliquent

$$d(\rho_0, \beta_n) \rightarrow 0 \text{ ps}$$

Donc

$$\limsup \sup_{\rho \in M_{m_n}^n} \frac{d(\rho_0, \rho)}{1 + d(\rho_0, \rho)} \leq \varepsilon \text{ ps}$$

puisque  $\varepsilon$  est arbitraire, on a donc  $M_{m_n}^n \rightarrow \rho_0$  ps.

Il nous reste à démontrer (2.12). Fixons  $m, n$ . Alors

$$\begin{aligned} (D_{m_n} \cap M_{m_n}^n \neq \emptyset) &\subseteq \left\{ \sup_{\rho \in D_m} L_n((x_1, \dots, x_n), \rho) \geq L_n((x_1, \dots, x_n), \rho_{m_n}) \right\} \\ &\subseteq \bigcup_{k=1}^{l_m} \left\{ \sup_{\rho \in \Gamma_k^n} \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \rho) \geq \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \rho_{m_n}) \right\} \\ &\subseteq \bigcup_{k=1}^{l_m} \left\{ \left( \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \Gamma_k^n) \right) \geq \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \rho_{m_n}) \right\}. \end{aligned}$$

notons

$$P(D_{m_n} \cap M_{m_n}^n \neq \emptyset) = \pi$$

On a

$$\begin{aligned} \pi &\leq \sum_{k=1}^{l_m} P\left(\prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \Gamma_k^n) \geq \prod_{i=1}^n g(X_i, X_{i-1}, \rho_{m_n})\right) \\ &= \sum_{k=1}^{l_m} P\left(\exp \sum_{i=1}^n \left[ t_k \ln \left\{ \frac{g(X_i, X_{i-1}, \Gamma_k^n)}{g(X_i, X_{i-1}, \rho_{m_n})} \right\} \right] \geq 1\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{l_m} \left( E_{\rho_0}^n \left( \exp \left[ t_k \ln \left\{ \frac{g(X_i, X_{i-1}, \Gamma_k^n)}{g(X_i, X_{i-1}, \rho_{m_n})} \right\} \right] \right)^n \right). \end{aligned}$$

pour  $t_1, \dots, t_k$  arbitraire, positifs.

D'où

$$\pi \leq l_m(\varphi_m)^n$$

Donc par le lemme de Borel Cantelli, on obtient (2.12). □

Une application du Corollaire 2.1 donne la convergence presque sûre de l'estimateur sieves du noyau  $K_0$  de  $\rho_0$  considéré dans le Théorème 2.1 et fournit une forme polynomiale de la taille de croissance  $m_n$  de la sieve (2.6).

**Théorème 2.3.** [6] *Soient les hypothèses suivantes*

(1) *Pour  $K_{m_n} \in \Theta_{m_n}$  si  $H(K_0, K_{m_n}) \rightarrow H(K_0, K_0)$  alors  $K_{m_n} \rightarrow K_0$*

(2)  *$m_n \rightarrow +\infty$  telle que  $m_n = O(n^{1/3-\varepsilon})$  pour  $\varepsilon > 0$*

*alors*

$$\left\| \hat{K}_n - K \right\|_2 \rightarrow 0 \quad p.s$$

*quand  $n \rightarrow +\infty$  et  $\|\cdot\|_2$  est la norme dans  $(L^2_{[0,1]}, dx)$*

**Preuve.** La démonstration consiste à vérifier les conditions du Corollaire 2.1 Notons que les constantes dans la suite peuvent changer d'une ligne à autre. La sieve considérée  $\Theta_m$  est donnée par (2.6) et l'existence de l'estimateur sieves  $\hat{K}$  associé est explicitement obtenu par le théorème 2.1 D'où l'ensemble  $M_{m_n}$  est non vide pour tout  $n$ .  $K_0$  est Le noyau du vrai paramètre  $\rho_0$ .

Pour la condition C1(b), nous utilisons la densité de  $\bigcup \Theta_{m_n}$  dans l'espace des fonctions paires, périodiques de période 1 de  $L^2$  pour déduire que  $\exists K_{m_n} \in \Theta_{m_n}$  tel que  $K_{m_n} \rightarrow K_0$  la norme de  $L^2$ .

D'où

$$c_{k,m_n} \rightarrow c_{k,0} \text{ et } d_{k,m_n} \rightarrow d_{k,0}.$$

Par suite nous obtenons  $H(K_0, K_{m_n}) - H(K_0, K_0) \rightarrow 0$ , d'où la condition C 1 (b) vérifiée.

Montrons maintenant que la condition (i) du corollaire 2.1 est vérifiée. Soit  $K \in \Theta_{m_n}$  la sieve définie dans(2.6). par la contrainte dans  $\Theta_{m_n}$ , les coefficients de Fourier sont tels que  $k^2(c_k^2 + d_k^2) \leq m_n$ , par conséquent  $|c_k| \leq \frac{\sqrt{m_n}}{k}$  et  $|d_k| \leq \frac{\sqrt{m_n}}{k}$  pour  $k \neq 0$  et  $|c_0| \leq \sqrt{m_n}$ .

Pour  $k \neq 0$ , on subdivise l'intervalle  $[-\frac{\sqrt{m_n}}{k}, \frac{\sqrt{m_n}}{k}]$  en  $[m_n^2/k + 1]$  intervalles de même longueur, où  $[x]$  est le plus petit entier inférieur ou égal à  $x$ .

Soit  $I_k$  l'ensemble des points qui sont les extrémités de ces intervalles. Pour  $k = 0$ ,  $I_0$  s'obtient de la subdivision de l'intervalle  $[-\sqrt{m_n}, \sqrt{m_n}]$  en  $[m_n^2 + 1]$  intervalles de même longueur. Notons que ces intervalles sont tous de longueur  $l$  inférieure ou égale à  $2/m_n^{3/2}$ .

Pour  $\varepsilon > 0$ , nous associons à chaque collection

$$\{(b_k, b'_k) \mid b_k, b'_k \in I_k, k = 1, \dots, [m_n^{1+\varepsilon}]\}$$

un ensemble

$$\hat{\Gamma}^{m_n}(\{b_k, b'_k\}) = \{K \in \Theta_{m_n} / |c_k - b_k| \leq 2m_n^{-3/2} \text{ and } |d_k - b'_k| \leq 2m_n^{-3/2}, k = 1, \dots, [m_n^{1+\varepsilon}]\}$$

Puisque  $|c_k| \leq \sqrt{m_n}/k$  et  $|d_k| \leq \sqrt{m_n}/k$  choisissons

$$c_k = -\frac{\sqrt{m_n}}{k} + \frac{m_n}{k^2}p, \quad d_k = -\frac{\sqrt{m_n}}{k} + \frac{m_n}{k^2}p' \quad p = 0, 1, \dots \quad p' = 0, 1, \dots \quad (2.14)$$

Alors

$$\begin{aligned} |c_k| \leq \frac{\sqrt{m_n}}{k} &\Rightarrow p \leq \frac{2k\sqrt{m_n}}{m_n} \leq 2\left(\frac{m_n + 1}{m_n}\right) \\ &\Rightarrow p \leq cm_n \\ &\Rightarrow p^{(1+m_n^{1+\varepsilon})} \leq (cm_n)^{cm_n^{1+\varepsilon}} \end{aligned}$$

où  $c$  une constante positive. De la même manière nous obtenons la borne liée à  $d_k$ .

Le nombre de fonctions  $K$  dont les  $c_k$  et  $d_k$  sont de la forme (2.14) est inférieur à  $p^{(1+m_n^{1+\varepsilon})} \leq (cm_n)^{cm_n^{1+\varepsilon}}$ .

D'où,  $\bigcup_{k=1}^{l_{m_n}} \hat{\Gamma}_k^{m_n}$  recouvre  $\Theta_{m_n}$ , où

$$l_{m_n} \leq (cm_n)^{cm_n^{1+\varepsilon}} \quad (2.15)$$

Nous définissons

$$\Gamma_k^{m_n} = \hat{\Gamma}_k^{m_n} \cap D_{m_n}, \quad k = 1, \dots, l_{m_n}$$

Par suite  $\{\Gamma_k^{m_n}\}_k$  recouvre  $D_{m_n}$  d'où la condition(i) du corollaire 2.1 et vérifiée.

Vérifions maintenant la condition (ii) du corollaire 2.1. Fixons  $k \in \mathbb{N}$ , et posons

$$\varphi(t) := E_{K_0} \left( \exp \left[ t \ln \left\{ \frac{g(X_n, X_{n-1}, \Gamma_k^{m_n})}{g(X_n, X_{n-1}, K_{m_n})} \right\} \right] \right).$$

Alors  $\varphi(0) = 1$ ,

$$\varphi'(0) := E_{K_0} \ln \left\{ \frac{g(X_n, X_{n-1}, \Gamma_k^{m_n})}{g(X_n, X_{n-1}, K_{m_n})} \right\}$$

où

$$g(X_n, X_{n-1}, \Gamma_k^{m_n}) = \sup_{\beta \in \Gamma_k^{m_n}} g(X_n, X_{n-1}, \beta)$$

Fixons  $K \in \Gamma_k^{m_n}$ . Soit

$$A = E_{K_0} \ln g(X_n, X_{n-1}, \Gamma_k^{m_n}) - E \ln g(X_n, X_{n-1}, K)$$

et par un calcul direct nous obtenons

$$\begin{aligned} A = E_{K_0} \sup_{\Gamma_k} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\sigma_k^2} & \left( \frac{1}{4}(u_k x_{n-1,k} - v_k y_{n-1,k})^2 - \frac{1}{4}(c_k x_{n-1,k} - d_k y_{n-1,k})^2 \right. \\ & \left. + (c_k - d_k)x_{n,k}x_{n-1,k} + (v_k - d_k)x_{n,k}y_{n-1,k} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

où  $(u_k)$ ,  $(v_k)$  sont les coefficients de Fourier par rapport à la fonction cosinus et sinus de la fonction  $\beta \in \Gamma_k^{m_n}$  respectivement.

Mais  $(\hat{\Gamma}_k^{m_n})_k$  recouvre  $\Theta m_n$ . Par conséquent, si  $K, \beta \in \hat{\Gamma}_k^{m_n}$ , alors on a

$$\begin{aligned} \sup_{\Gamma_k^{m_n}} |K(x) - \beta(x)| & \leq \sum_{k=0}^{m_n} |c_k - u_k| + |d_k - v_k| \\ & \leq \frac{4}{m^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donc,

$$A \leq \frac{c}{m_n^2} + \frac{c}{m_n^{3/2}} \leq \frac{c}{m_n^{3/2}}$$

où  $c$  est une constante. Donc de la définition de  $D_{m_n}$  et de la condition(i) du corollaire 2.1, nous avons pour  $\delta > 0$  :

$$\varphi'(0) \leq H(K_0, K) - H(K_0, K_{m_n}) + \frac{c}{m_n^{3/2}} \leq cm_n^{-3/2} - \delta$$

A l'aide d'un résultat de Hwang [14] :  $\varphi''(t) \leq cm_n^2$  for  $t \in [0, 1/cm_n^2]$ . Donc le développement de Taylor implique

$$\varphi(t) \leq 1 + t(cm_n^{-3/2} - \delta) + t^2 cm_n^2$$

Par suite,

$$\varphi\left(\frac{1}{m_n^2}\right) \leq 1 + \frac{c}{m_n^{7/2}} - \frac{\delta}{m_n^2} + \frac{c}{m_n^2} \leq 1 + \frac{c}{m_n^2} - \frac{\delta}{m_n^2}$$

donc

$$\varphi\left(\frac{1}{m_n^2}\right) \leq 1 - \frac{\delta}{cm_n^2} \quad (2.18)$$

De la définition de  $\varphi_{m_n}$  :

$$\varphi_m := \sup_k \inf_{t \geq 0} E_{K_0} \exp \left[ t \ln \left\{ \frac{g(X_n, X_{n-1}, \Gamma_k^{m_n})}{g(X_n, X_{n-1}, K_m^n)} \right\} \right]$$

et des inégalités (2.15) et (2.18), nous pouvons déduire pour  $m_n$  suffisamment grand que :

$$l_{m_n}(\varphi_{m_n})^n \leq cm_n^{cm_n^{1+\varepsilon}} \left(1 - \frac{\delta}{cm_n^2}\right)^n$$

□

### 2.3.3 Prédiction

Le résultat de la convergence presque sûre de l'estimateur sieve assure la convergence du prédicteur en norme de  $H = L_2([0, 1])$ . Nous avons le théorème suivant :

**Théorème 2.4.** [6] *Sous les conditions du théorème 2.3, nous avons quand  $n \rightarrow \infty$*

$$\|\hat{\rho}_n(X_n) - \rho(X_n)\| \rightarrow 0 \quad \text{en probabilité}$$

**Preuve 2.1.** *Pour  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , l'inégalité de Markov et la finitude de  $E\|X_0\|^2$  impliquent :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\|\hat{\rho}_n(X_n) - \rho(X_n)\| \geq \alpha) &\leq \mathbb{P}(\|X_n\| \|\hat{\rho}_n - \rho\|_{\mathcal{S}} \geq \alpha) \\
&\leq \mathbb{P}(\|\hat{\rho}_n - \rho\|_{\mathcal{S}} \geq \frac{\alpha}{\beta}) + \mathbb{P}(\|X_n\| \geq \beta) \\
&\leq \mathbb{P}(\|\hat{\rho}_n - \rho\|_{\mathcal{S}} \geq \frac{\alpha}{\beta}) + \frac{\mathbb{E}\|X_0\|^2}{\beta^2}.
\end{aligned}$$

Choisissant  $\beta = (2\mathbb{E}\|X_0\|^2/\zeta)^{1/2}$  nous déduisons que

$$\mathbb{P}(\|\hat{\rho}_n(X_n) - \rho(X_n)\| \geq \alpha) \leq \mathbb{P}(\|\hat{\rho}_n - \rho\|_{\mathcal{S}} \geq \frac{\alpha}{\beta}) + \frac{\zeta}{2}.$$

Mais de théorème 2.3 on a :  $\|\hat{\rho}_n - \rho_0\|_{\mathcal{S}} \rightarrow 0$  p.s. Donc, la dernière probabilité est inférieure ou égale à  $\zeta$  quand  $n$  est suffisamment grand.

Puisque  $\zeta$  est arbitraire nous arrivons au résultat.

# Chapitre 3

## SIMULATIONS ET EXEMPLES

### 3.1 Simulations

#### 3.1.1 Introduction

Pour la simulation des trajectoires de processus autoregressif fonctionnel et le calcul des prédicteurs sieves  $\hat{K}$  du Théorème 2.1, nous utilisons la bibliothèque "far" développée par J. Damons et S. Guillas [13]

Plus précisément on simule notre processus en utilisant les étapes suivantes dont la première est la simulation du mouvement Brownien sur  $[0, n + 1]$ . Ainsi on peut construire  $n$  observations d'un processus ARH(1) qui seront nécessaires pour calculer les prédicteurs sieves et qui seront comparés à la  $n + 1$  ème observation à partir des définitions suivantes :

#### • *Simulation de bruit blanc*

Nous utiliserons le développement de Karhunen- Loève sur  $[0, T]$  du mouvement Brownien suivant :

$$W_u = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_j^* \frac{\sin [(j - 1/2)\pi u]}{\pi(j - 1/2)}$$

où les v.a.  $Y_j^*$  sont i.i.d de loi  $N(0, 1)$ , qui va nous permettre de définir un bruit blanc  $(\varepsilon_n(t), n = 0, 1, \dots, t \in [0, \delta])$  par :

$$\varepsilon_n(\omega) = W_{n+s}(\omega) - W_n(\omega), \quad s \in [0, \delta]$$

défini sur l'intervalle  $[0, \delta]$ . Pour la simulation, on aura une approximation de la somme infinie par une somme finie comme dans [24].

• *L'opérateur  $\rho$*

Nous considérons le cas d'un opérateur  $\rho$  à noyau  $K$  périodique de période 1 et de norme  $L^2$  inférieure à 1 défini par :

$$\rho(f)(t) = \int_0^1 K(t-s)f(s)ds$$

Nous prenons comme exemples les noyaux suivants :  $K(t) = \frac{1}{10^5}(t - [t])$ ,  $K(t) = \frac{1}{10^2}(t + \cos(t))$ , et  $K(t) = \frac{1}{10^5}(t^2 + t)$ .

Pour le calcul de l'intégrale de convolution, nous utilisons la fonction "convolve" du logiciel R version 2.4.1.

• *Valeur initiale de  $X_0 = 0$*

• *Simulation de l' ARH(1)*

Pour la simulation d'un ARH(1) on prend comme valeur initiale la valeur  $X_0 = 0$  et  $(\varepsilon_n)$  est le bruit blanc dans la base de Karhunen Loève ensuite, nous effectuons un changement de base pour ce bruit blanc en utilisant la fonction BaseK2BaseC (du Package far) pour avoir l'écriture de  $(\varepsilon_n)$  dans la base canonique et nous posons  $X_1 = \varepsilon_1$ .

Soient  $(X_i^j)$ ,  $j = 1, \dots, m$  les coordonnées de  $X_i$  dans la base canonique  $i = 1, \dots, n$  ( $m$  étant le nombre de point de discrétisation et il est différent de  $m_n$  qui est la dimension de la sieves).

Soient  $(X_i^j)$ ,  $j = 1, \dots, m$  ( $m$  étant le nombre de point de discrétisation ) les coordonnées de  $X_i$  dans la base canonique  $i = 1, \dots, n$ . On a :

$$X_{i+1}^j = \text{convolve}(10^{-3}K, X_i^j) + \varepsilon_{i+1}^j, \quad j = 1, \dots, m$$

Cette formule nous permet de produire un échantillon d'observations de taille  $n$  du processus.

### 3.1.2 Calcul des Prédicteur sieves

La fonction predicteur.sieve

Nous utilisons les  $n$  observations du processus pour prédire la  $(n+1)^{ieme}$  trajectoire.

A partir des observations  $X_i(t_j)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ), nous calculons le prédicteur sieves  $\hat{X}_{n+1}(t_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , aux points discrets  $t_j$ .

$$\hat{X}_{n+1}(t_j) = \int_0^1 \hat{K}(t_j - s)X_n(s)ds$$

La fonction "predicteur.sieve" calcule le prédicteur sieves  $\hat{X}_{n+1}$ , en utilisant la formule du Théorème 2.1 chap .2 sur les coefficients de Fourier associés à la fonction  $\hat{K}$  :

$$\hat{K}_n(t) = \hat{c}_0 1_{[0,1]}(t) + \sum_{k=1}^{m_n} (\hat{c}_k \cos 2\pi kt + \hat{d}_k \sin 2\pi kt) \quad t \in [0, 1]$$

$$\text{où } \hat{c}_0 = \frac{\sum_{i=0}^n x_{i,0} x_{i-1,0}}{\sum_{i=1}^n x_{i-1,0}^2}, \quad \hat{c}_k = -\frac{\alpha_3 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2^2}, \quad \hat{d}_k = \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2^2}, \quad k = 1, \dots, m_n$$

et

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{i-1,k}^2 - 2\lambda k^2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{i-1,k} y_{i-1,k}, \quad \alpha_3 = \sum_{i=1}^n x_{i,k} x_{i-1,k}$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_{i-1,k}^2 - 2\lambda k^2, \quad \beta_2 = \sum_{i=1}^n x_{i,k} y_{i-1,k}$$

où  $m_n$  est la taille de la sieve et  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange qui vérifie  $\lambda > 0$  tel que

$$\sum_{k=1}^{m_n} k^2 (\hat{c}_k^2 + \hat{d}_k^2) = m_n \quad (3.1)$$

Nous vérifions l'effet de  $\lambda$  sur les erreurs quadratiques et les erreurs relatives RMAE en prenant différentes valeurs de cette dernière dans des exemples de simulation suivants.

Nous présentons ci dessous les simulations d'un processus ARH(1) sur des intervalles successifs et le prédicteur sieves de la dernière trajectoire du processus simulé. La qualité d'un prédicteur  $\hat{X}_{n+1}$  calculé aux points  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  pour prévoir  $X_{n+1}$  est mesurée par l'erreur quadratique

$$MSE = 1/m \sum_{i=1}^m \left| \hat{X}_{n+1}(t_j) - X_{n+1}(t_j) \right|^2$$

et l'erreur relative absolue RMAE définie par

$$RMAE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\left| \hat{X}_{n+1}(t_j) - X_{n+1}(t_j) \right|}{|X_{n+1}(t_j)|}$$

### 3.1.3 Exemples de simulations

**Exemple 3.1.** Nous prenons un opérateur à noyau  $\rho(f)(t) = \int_0^1 K(t-x)f(x)dx$  de noyau  $K$  une fonction continue, périodique sur  $\mathbb{R}$  de période 1.

Le vrai noyau est défini sur  $[0, 1]$  par

$$K(t) = \frac{1}{10^2}(t + \cos(t))$$

$K$  est bien de norme inférieure à 1.

La figure (3.1) présente la simulation de  $n = 120$  trajectoires successifs d'un processus ARH(1), chaque trajectoire est calculé en  $m = 20$  points de discrétisation de l'intervalle  $[0, 1]$ .

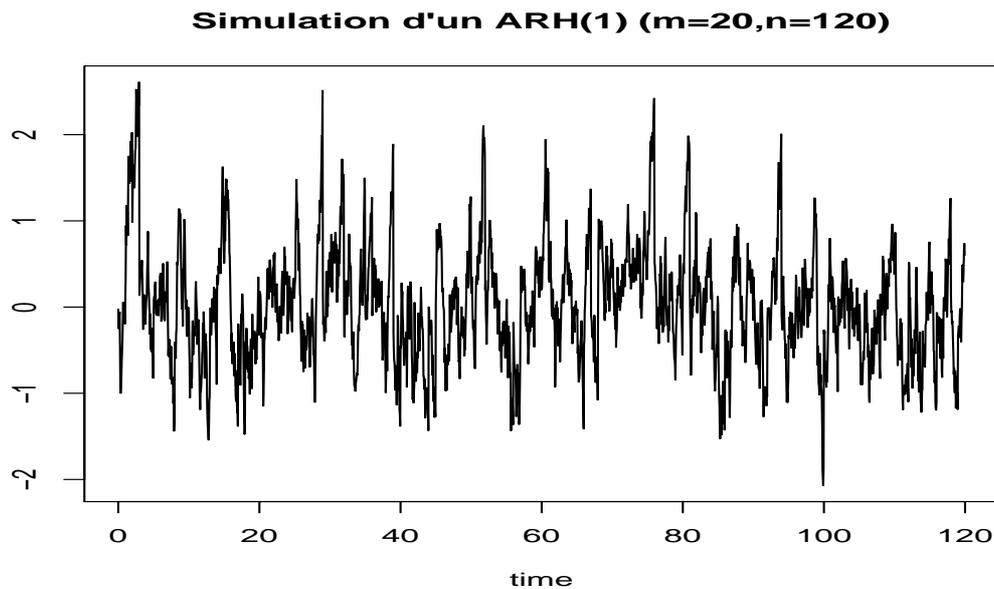


FIGURE 3.1

Pour mesurer l'effet de la variation de  $m$  et  $n$  sur le prédicteur sieve on effectue les simulations suivantes en fixant  $\lambda = 2$ .

Les figures (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) représentent le prédicteur sieves (trait pointillé rouge) de la 120<sup>ème</sup> trajectoire (trait noir) pour  $m = 20, 18, 16, 15$  points de discrétisation et  $\lambda = 2$ .

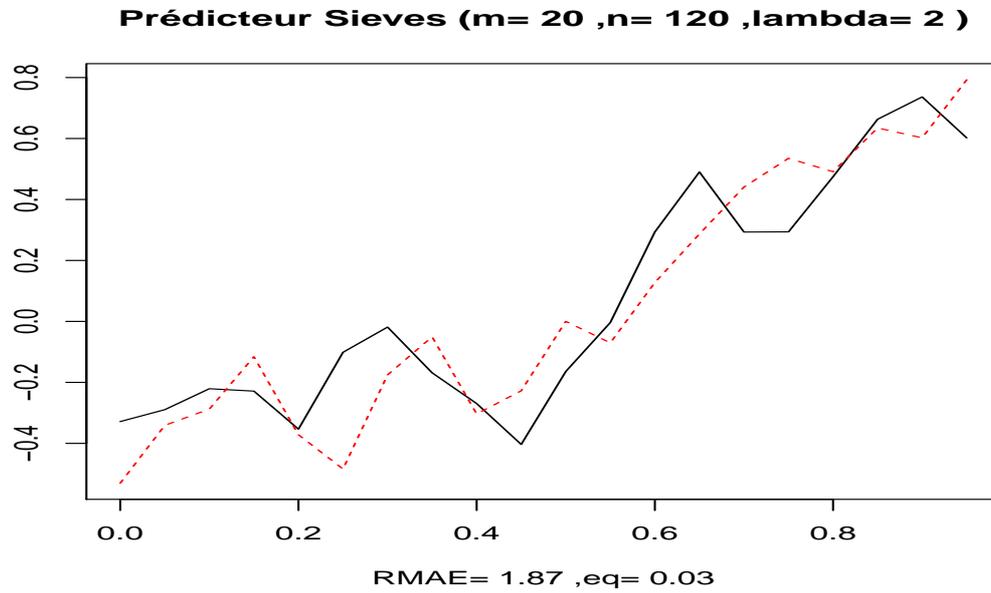


FIGURE 3.2

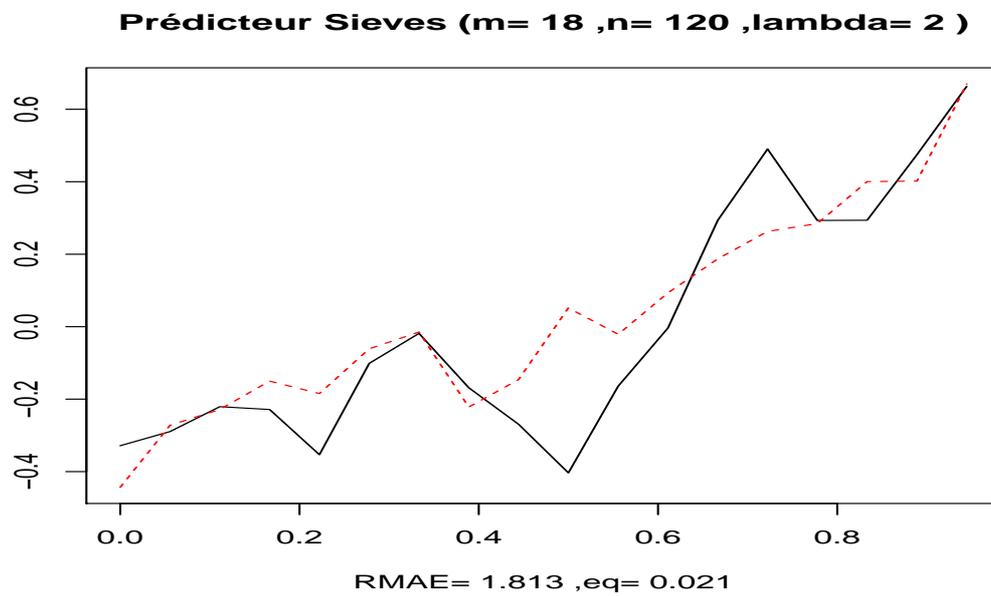


FIGURE 3.3

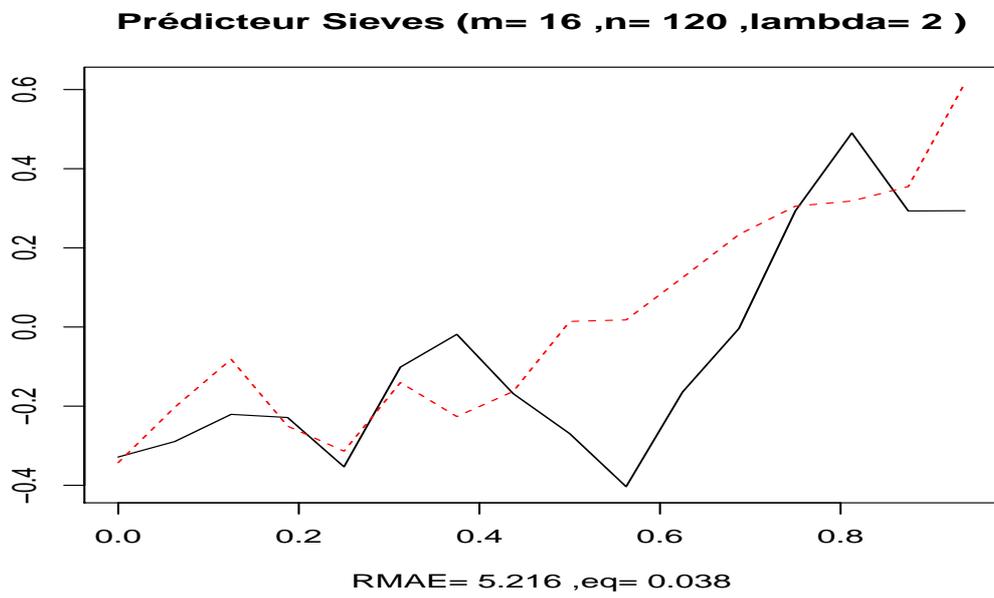


FIGURE 3.4

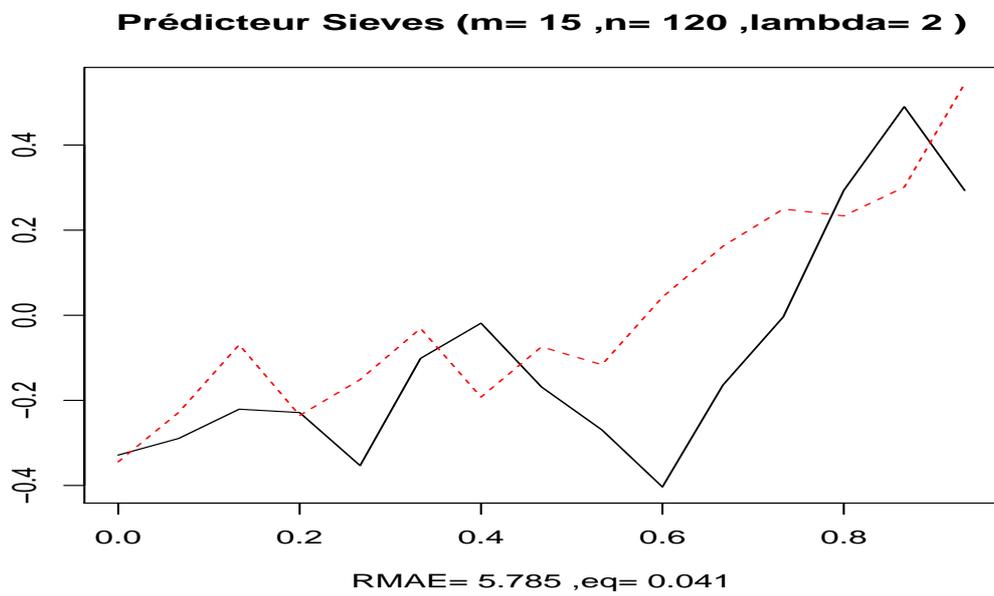


FIGURE 3.5

Nous présentons dans les figures (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) l'observation  $X_{80}$  et son prédicteur sieves  $\hat{X}_{80}$  qui est basé sur la simulation d'un processus fonctionnel avec  $m$  et  $n$  fixés ( $m = 15, n = 80$ ) et  $\lambda$  variable  $\lambda = 7, 15, 30, 1, 1e^{-04}$ .

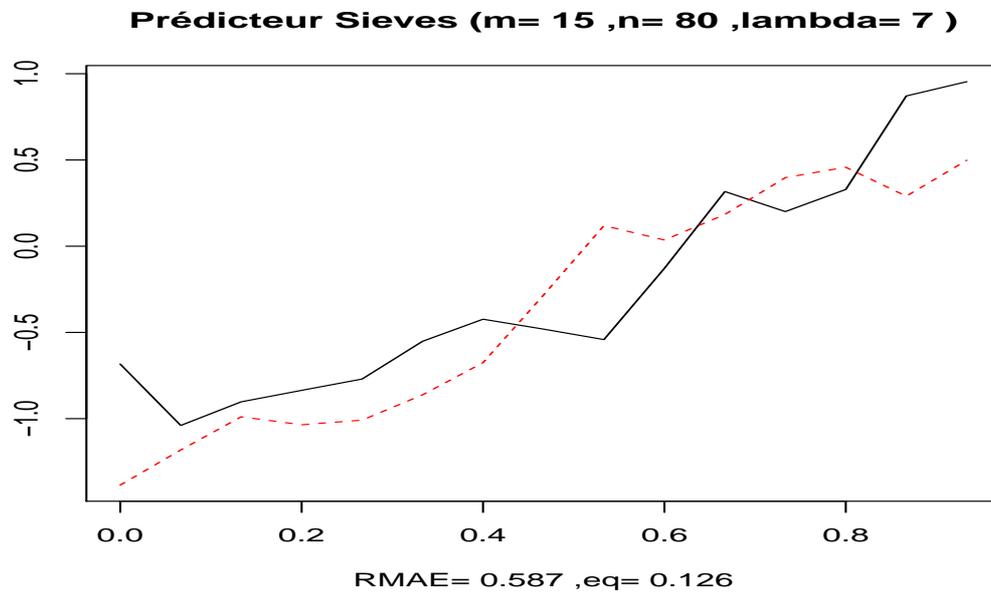


FIGURE 3.6

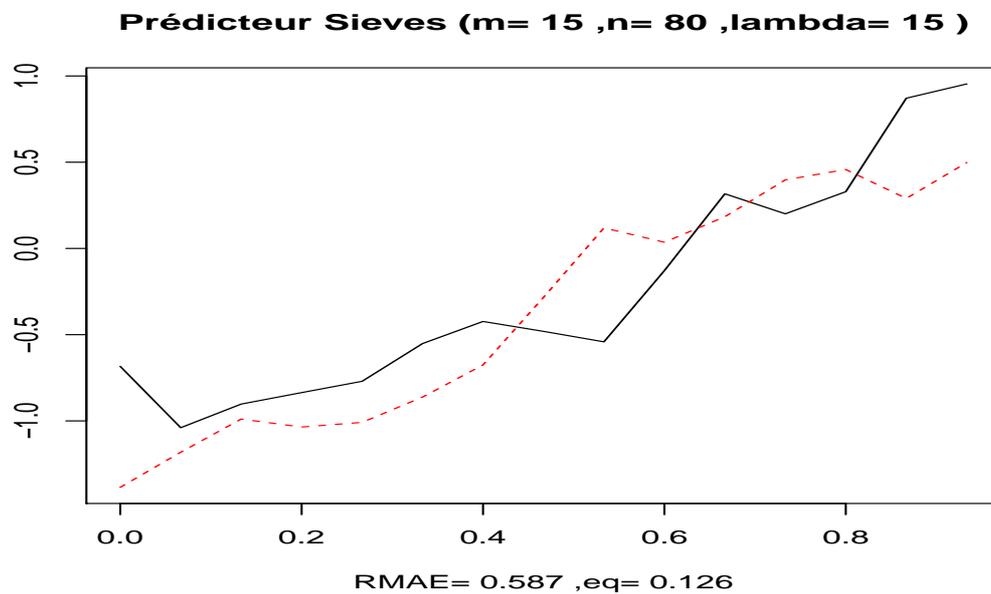


FIGURE 3.7

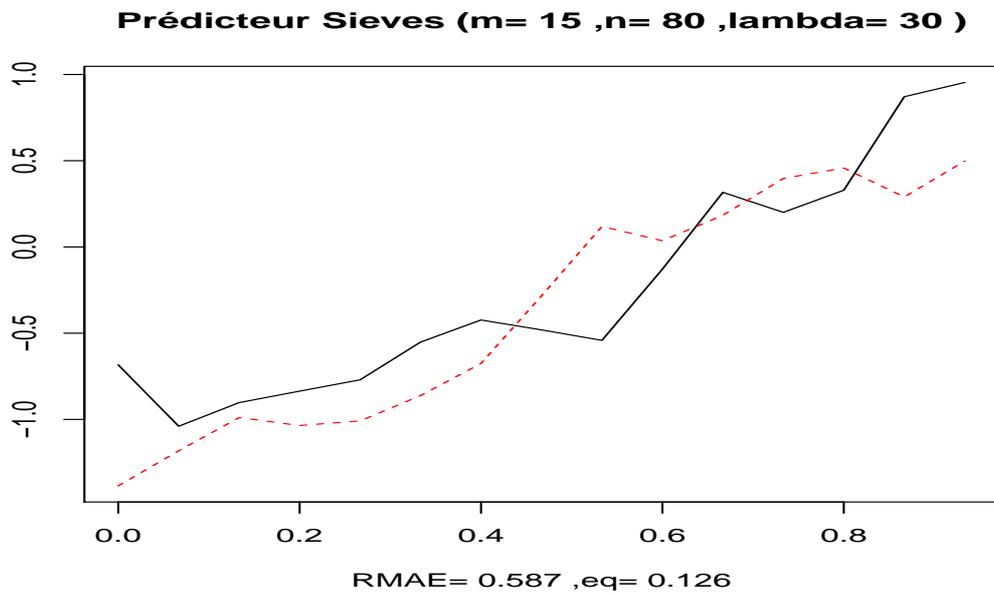


FIGURE 3.8

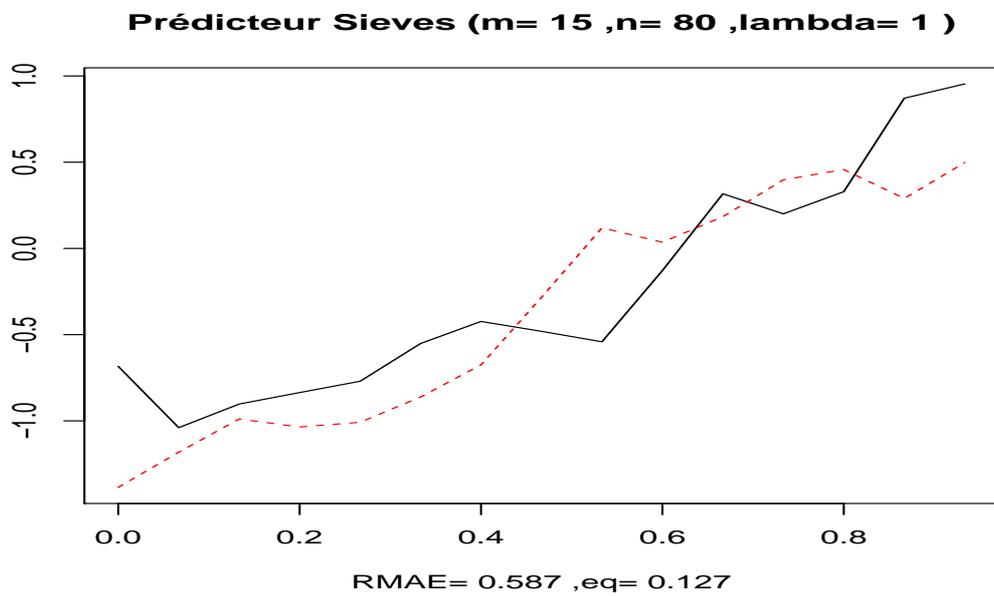


FIGURE 3.9

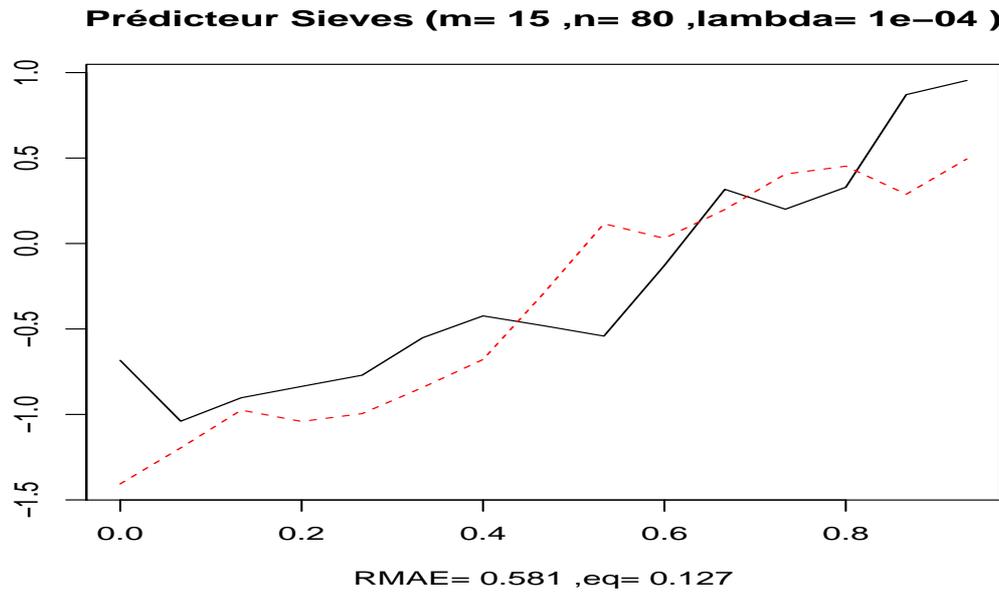


FIGURE 3.10

Pour mesurer l'effet de discrétisation des observations  $m$  et le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  sur le calcul du prédicteur sieves, nous calculons dans la Table 1 l'erreur quadratique moyenne pour 200 réplifications du processus avec  $n = 120$  (fixé), et différentes valeurs de  $m$  et  $\lambda$ .

Table 1

$m \setminus \lambda$	5	10	15	20	25	35	50
10	0.320	0.319	0.304	0.315	0.318	0.314	0.307
12	0.329	0.322	0.317	0.312	0.328	0.322	0.306
15	0.341	0.314	0.311	0.291	0.329	0.325	0.310
25	0.348	0.343	0.346	0.348	0.323	0.295	0.340

Nous remarquons une diminution dans la valeur des erreurs quadratiques moyennes par rapport à [5], ainsi qu'une stabilité de cette valeur en variant  $m$  et  $\lambda$ .

La Table2 donne l'erreur quadratique moyenne pour 200 réplifications du processus pour différentes valeurs de  $n$  et pour  $\lambda$  et  $m$  fixés

**Table 2**

$n$	15	35	70	120	130
Erreur Quadratique moyenne	0.369	0.363	0.354	0.337	0.347

Nous remarquons la aussi une diminution de la valeur de l'erreur quadratique moyenne et aussi une stabilité de cette dernière par rapport à  $n$ .

**Exemple 3.2.** Nous considérons dans cet exemple le noyau suivant

$$K(t) = \frac{1}{10^3}(t^2 + t)$$

La figure (3.11) représente la simulation d'un ARH(1) ( $m = 50, n = 70$ ).

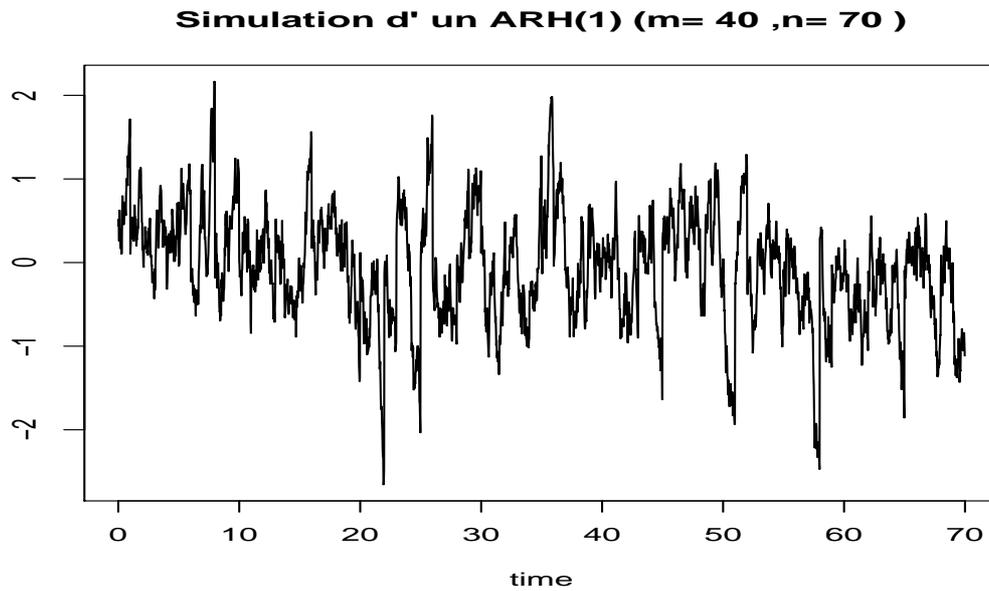


FIGURE 3.11

fixons maintenant  $n$  et  $\lambda$ . Pour mesurer l'effet de  $m$  sur la prédiction des ARH(1), nous représentons dans les figures (3.12) et (3.13) et (3.14) le prédicteur sieves pour  $m = 50, 40, 30$  et  $n = 70$  et  $\lambda = 6$  fixés.

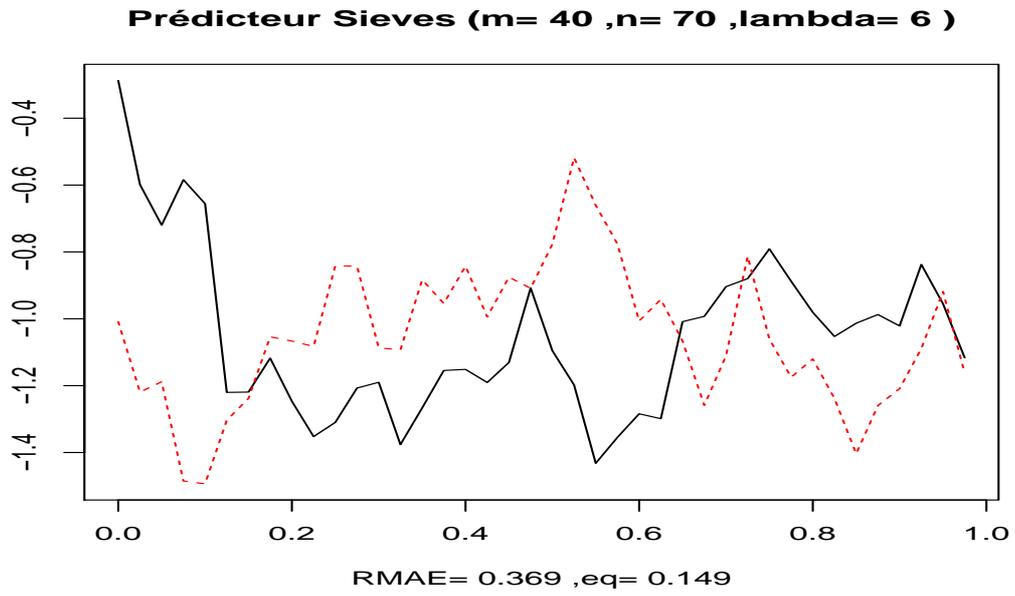


FIGURE 3.12

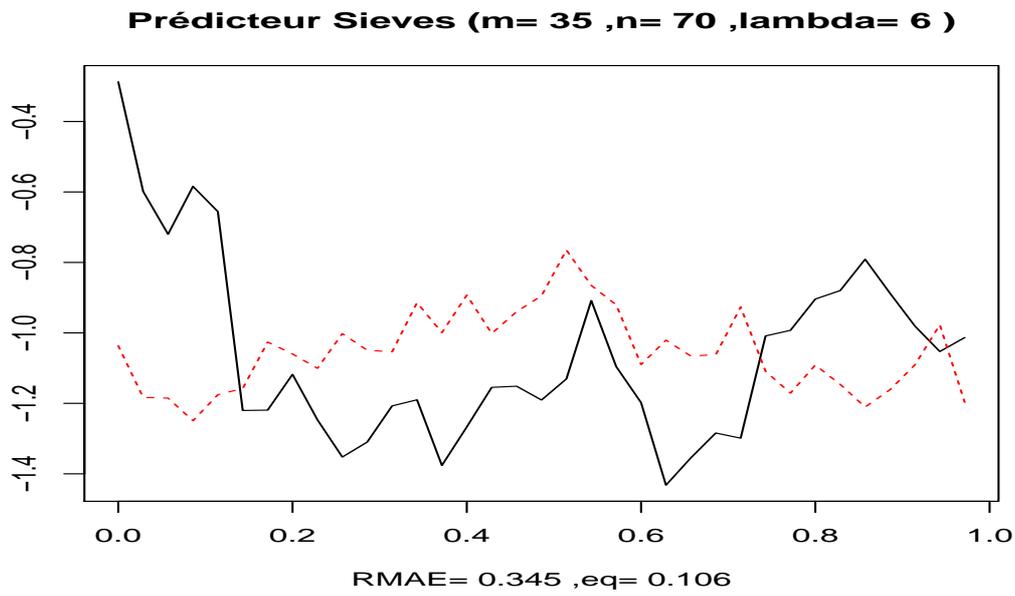


FIGURE 3.13

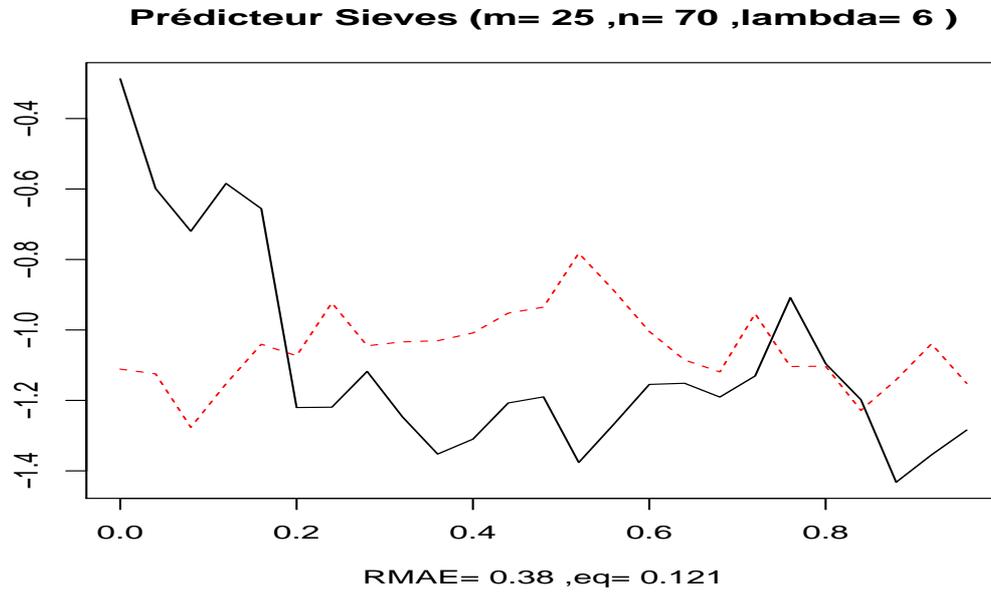


FIGURE 3.14

Pour mesurer l'effet de la variation de  $m$ ,  $n$  et  $\lambda$  sur la prédiction d'un ARH(1) par la méthode des sieves nous construisons les tables 3 et 4.

Nous présentons dans le Tableau 3 la moyenne des erreurs quadratiques pour 1000 répliques du processus avec  $n = 120$  ( fixé) et pour différentes valeurs de  $m = 10, 12, 15, 25$ , (points de discrétisation) et  $\lambda = 5, 10, 15, 20, 25, 35$ .

**Table 3**

$m \setminus \lambda$	5	10	15	20	25	30	35
10	0.319	0.310	0.310	0.309	0.322	0.308	0.322
12	0.325	0.321	0.311	0.312	0.320	0.316	0.327
15	0.318	0.312	0.319	0.336	0.321	0.322	0.331
25	0.321	0.291	0.312	0.281	0.314	0.321	0.338

En comparant le tableau 3 avec les résultats de Bensmain et Mourid [5], on remarque une diminution dans la moyenne des erreurs quadratiques. Dans Bensmain et Mourid [5], les valeurs

de la moyenne des erreurs quadratiques sont supérieur à 2,09, alors que dans notre cas elles ne dépassent pas le 0,34 et nous notons également que cett moyenne reste presque stable par rapport à  $m$  et  $\lambda$  tandis que dans [5] elle décroît avec  $\lambda$ , et croît avec  $m$ .

Nous représentons dans la Table 4 la moyenne des erreurs quadratiques pour 200 réplifications du processus pour différentes valeurs de  $n = 15, 35, 70, 120, 130$  pour  $m = 25$  et  $\lambda = 5$  fixés.

**Table 4**

$n$	15	35	70	120	130
Erreur Quadratique Moyen	0.369	0.363	0.354	0.337	0.347

Nous remarquons la aussi une diminution dans la valeur de l'erreur quadratique moyen par rapport à celle de [5] ainsi qu'une stabilité de cette dernière par rapport  $n$  pour  $m$  et  $\lambda$  fixés.

**Exemple 3.3.** *Nous considérons le noyau*

$$K(t) = \frac{1}{10^5} (t - [t])$$

où  $[t]$  est la partie entière de  $t$ .

La figure (3.15) représente la simulation d'un ARH(1). Les figures (3.16), (3.17) et (3.18) (3.19) présentent les prédicteurs sieves pour la dernière observation  $\hat{X}_{100}$ , et  $m = 25, 22, 20, 18$  et  $\lambda = 5$  fixé.

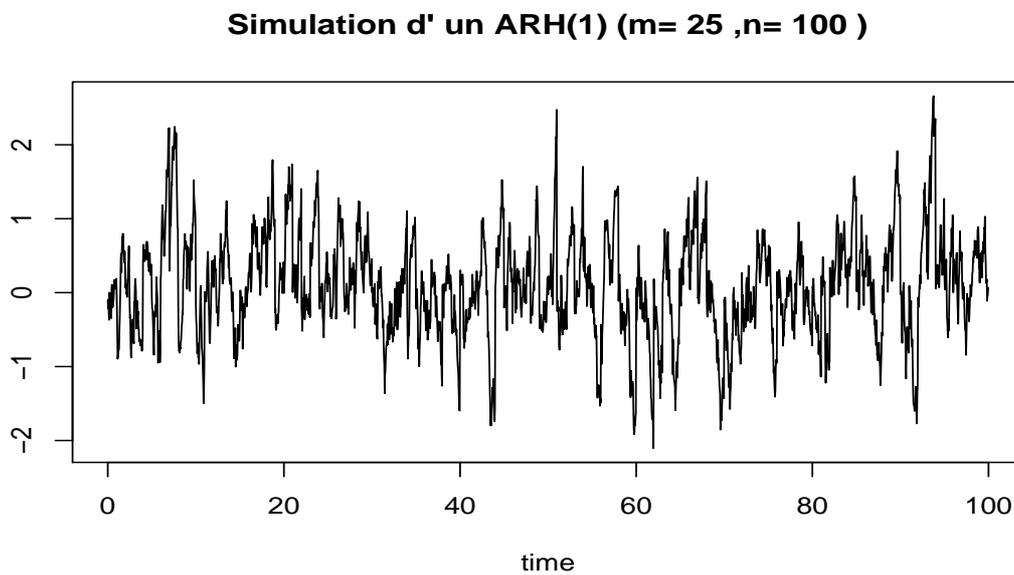


FIGURE 3.15

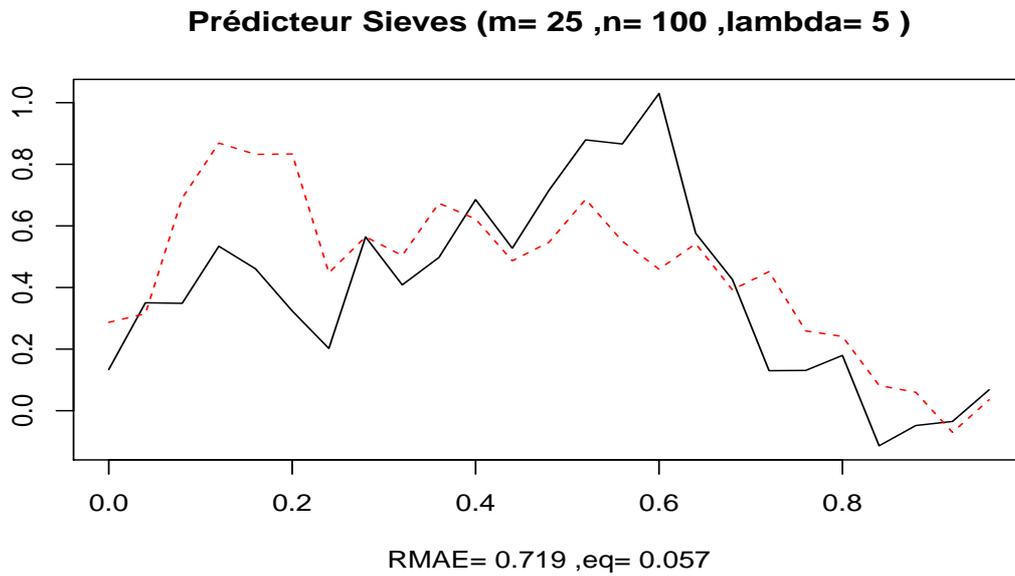


FIGURE 3.16

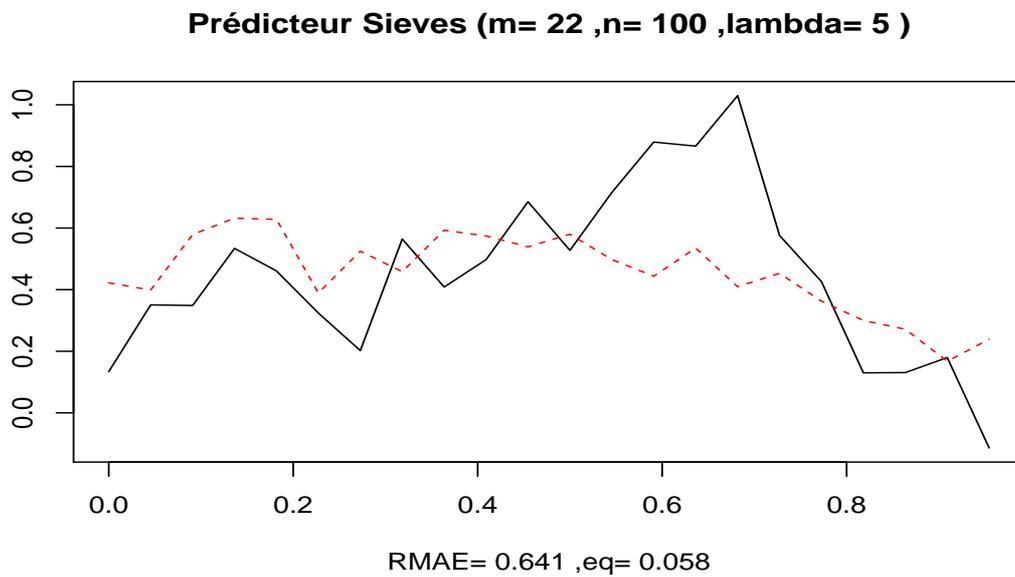


FIGURE 3.17

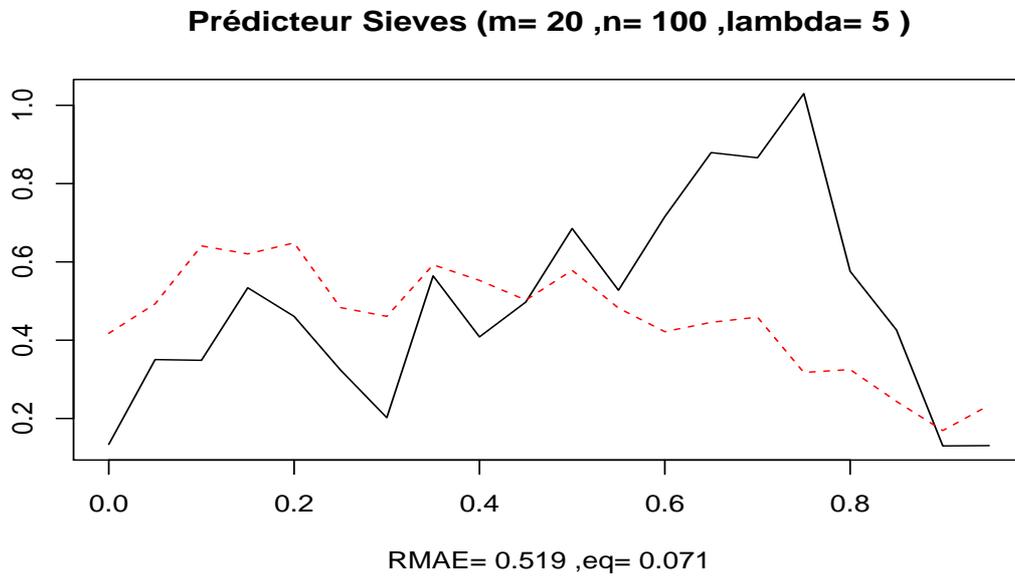


FIGURE 3.18

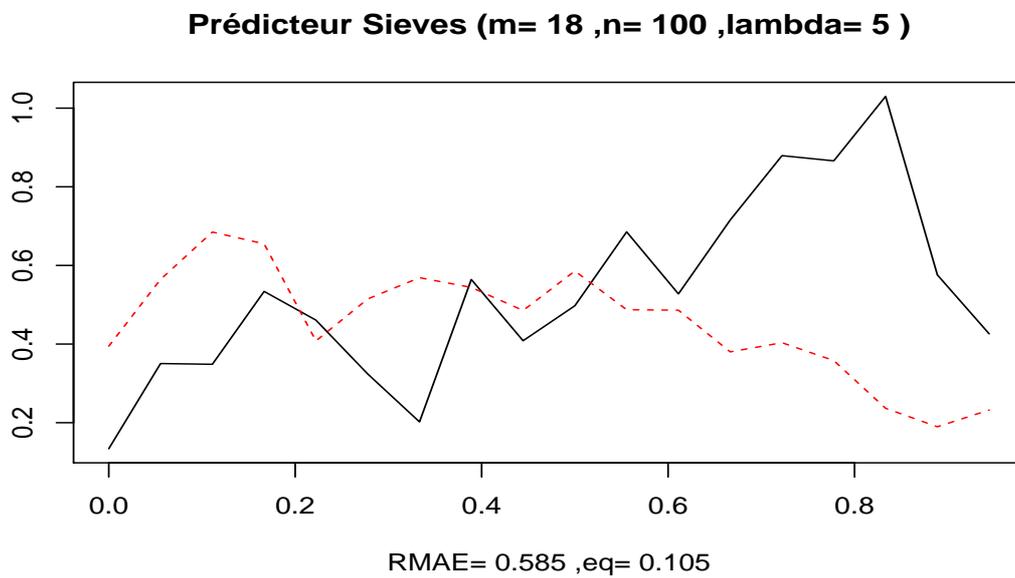


FIGURE 3.19

## 3.2 Exemples

### 3.2.1 Série climatologique ENSO.

Nous considérons la série chronologique décrivant le phénomène climatologique ENSO qui résulte des interactions entre l'atmosphère et l'océan au dessus de l'océan Pacifique tropical. Le phénomène EL Niño (EN) est la composante océan dans ENSO tandis que Southern Oscillation (SO) est la composante atmosphère . Un index mesurant la variabilité d'EL Niño est fourni par les températures à la surface de l'océan ramenées à une moyenne observée dans le domaine Niño-1(5oS - 5oN, 15oW - 9oW). Des valeurs moyennes mensuelles sont enregistrées depuis le mois de Janvier 1950 à Juin 2007 par des centres nationaux de la prévision environnementale aux États-Unis (<http://www.cpc.ncep.noaa.gov/data/indices/ersst4.nino.mth.81-10.ascii>). La série chronologique de cet index montre des variations inter-annuelles marquées et superposées à une composante saisonnière forte. Cette série a été analysée par beaucoup d'auteurs (voir, par exemple [2] [16]). Pour pouvoir comparer avec leurs résultats nous utilisons des observations mensuelles durant la période 1950-2006 pour la prédiction de la température durant l'année 2006.

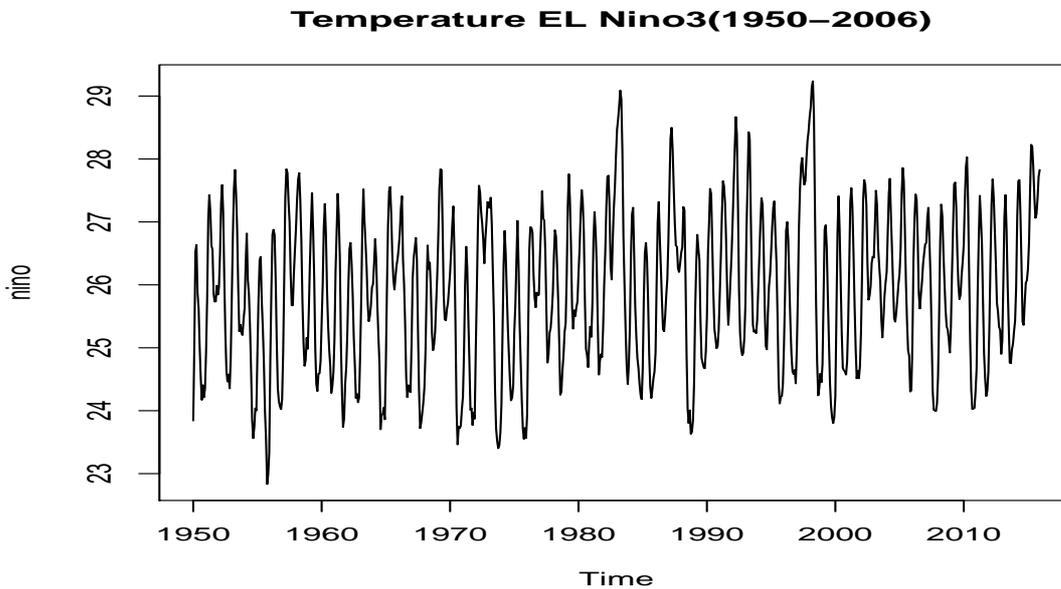


FIGURE 3.20

La figure 3.20 représente la variation de la température (EL Nino3) de 1950 à 2006.

Nous utilisons les observations (un intervalle =1 année) de la période (1950-2005) pour la prévision de la température à la surface de l'océan de l'année 2006. La figure 3.21 représente la température à la surface (EL Nino3 ) de l'année 2006 et sa prévision par le prédicteur sieves ainsi que l'erreur RMAE.

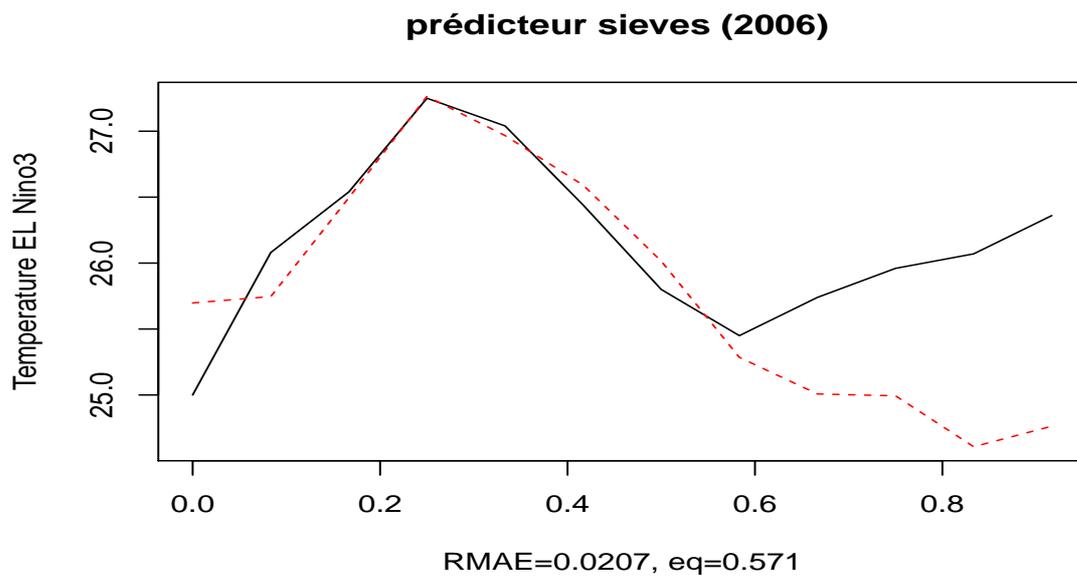


FIGURE 3.21

La table suivante représente les valeurs de l'erreur RMAE liées aux différentes méthodes de prévision de la température à la surface de l'océan 2006.

Table 5

Méthode de prévision	RMAE
BLUP discret	1.40%
Predicteur sieves 2017	2.07%
Functional kernel	2.2%
Local FAR(1)	2.2%
BLUP continuous case	2.25%
Kernel	2.3%
Smooth FAR(1)	2.3%
Smooth FAR(1) with ( $q = p = 12$ )	2.4%
Sieves (Mourid and Bensmain [5])	2.46%
Climatology	2.5%
SARIMA	3.7%

Autre que le résultat exceptionnel de la méthode BLUP discret, nous notons que le prédicteur sieve donne de bons résultats en erreur MRAE (2.07) comparables aux autres méthodes, particulièrement la méthode des sieves (Mourid et Bensmain [22]), qui démontre l'avantage de notre méthode.

**Remarque 3.1.** *Les tables 5 et 6 montrent les valeurs du RMAE liées aux différentes méthodes de prévision BLUP (Mokhtari et Mourid, 2008)[19] functional kernel, kernel, local FAR(1) et smooth FAR (Besse et al., 2000)[8], SARIMA (Brockwell et Davis, 1987)[11], wavelet (Antoniadis et Sapatinas, 2003)[2], sieves (Bensmain et Mourid, 2009)[5] et spline smoothing (Besse et Cardot, 1996)[7]. La méthode climatologie utilise le cycle de temps moyen annuel pour prévoir le cycle annuel de l'année suivante et elle représente un simple repère de prévision. Pour plus de détails sur ces résultats, voir également (Mas et Pumo 2005)[18].*

Les Figures 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26, représentent la température à la surface (EL Nino3 ) des années 1962, 1971, 1985,1996,2004 ainsi que leurs prévision par la méthode des sieves.

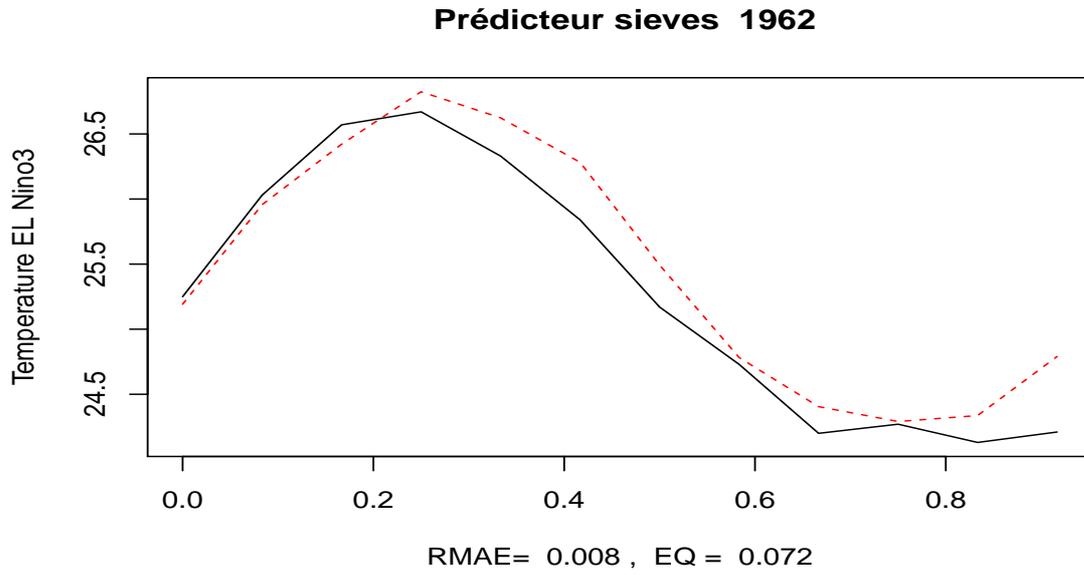


FIGURE 3.22

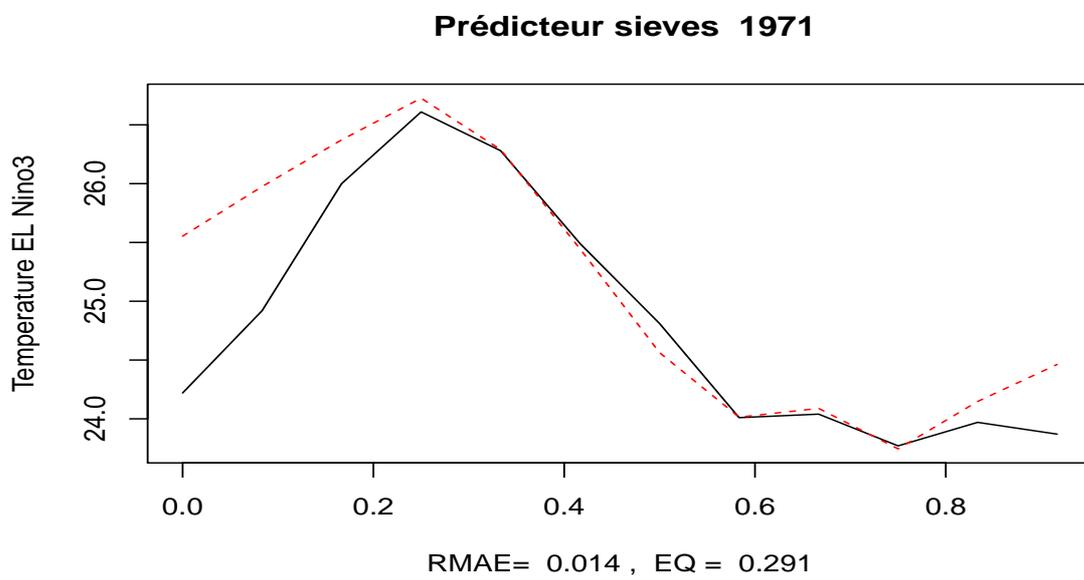


FIGURE 3.23

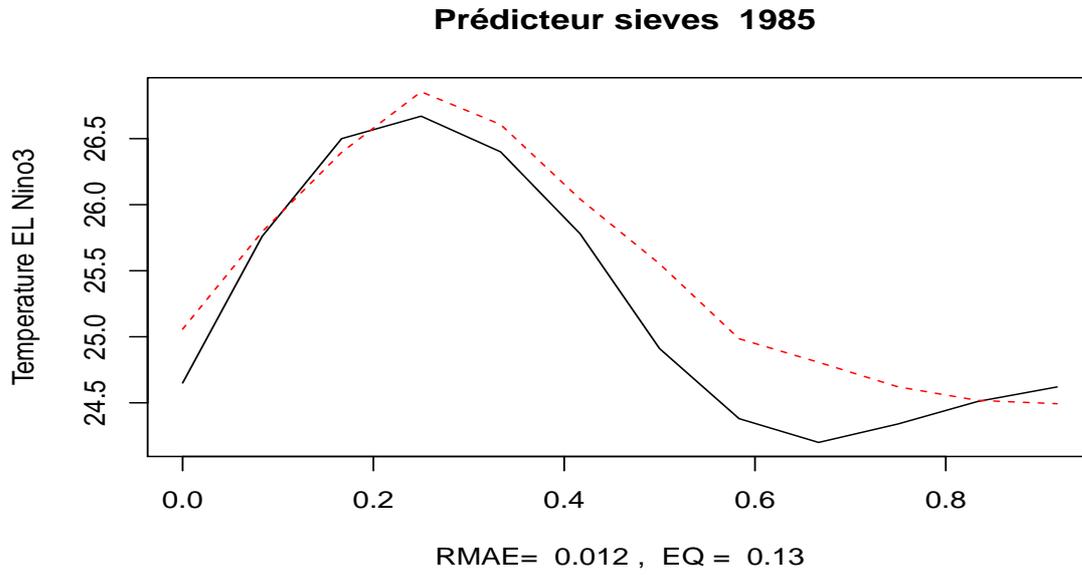


FIGURE 3.24

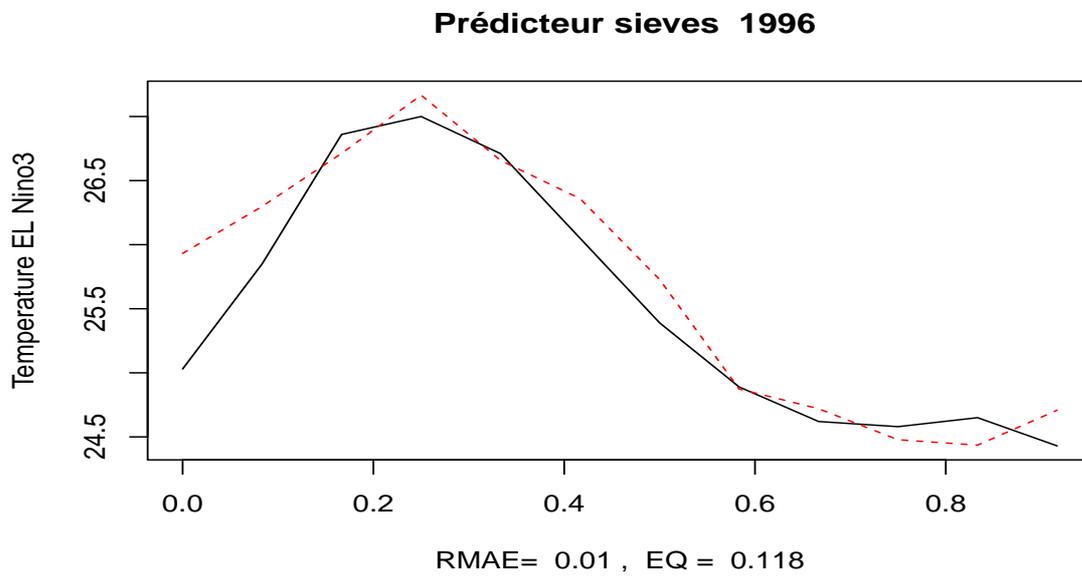


FIGURE 3.25

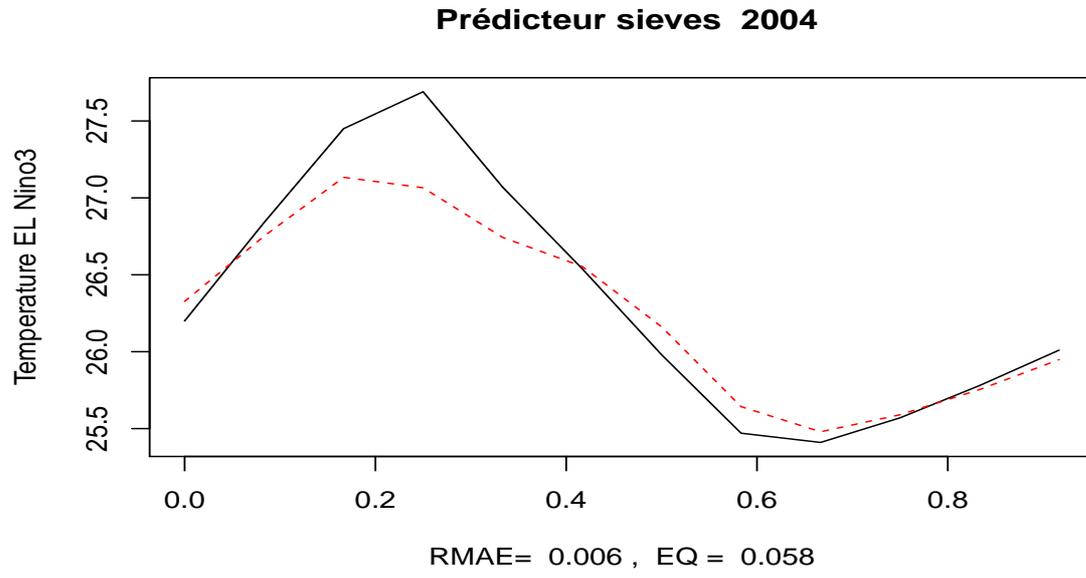


FIGURE 3.26

### 3.2.2 Prédiction de la température à Nottingham

Nous avons également appliqué la méthode des sieves dans la prédiction des données historiques de la température mesurée au château de Nottingham pendant 1939 sur une base mensuelle de données à partir de 1920 à 1938 disponibles dans la série nottem de la bibliothèque de MASS du logiciel "R".

La Figure 3.27 représente la température à Nottingham de 1920-1939.

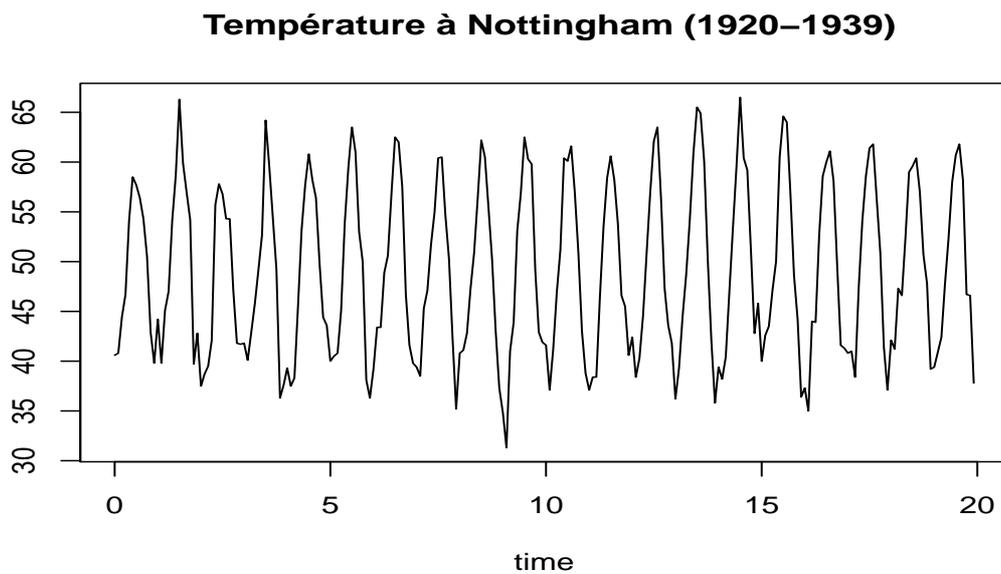


FIGURE 3.27

Figure 3.28 représente la température de l'année 1939 à Nottingham et sa prédiction sieves.

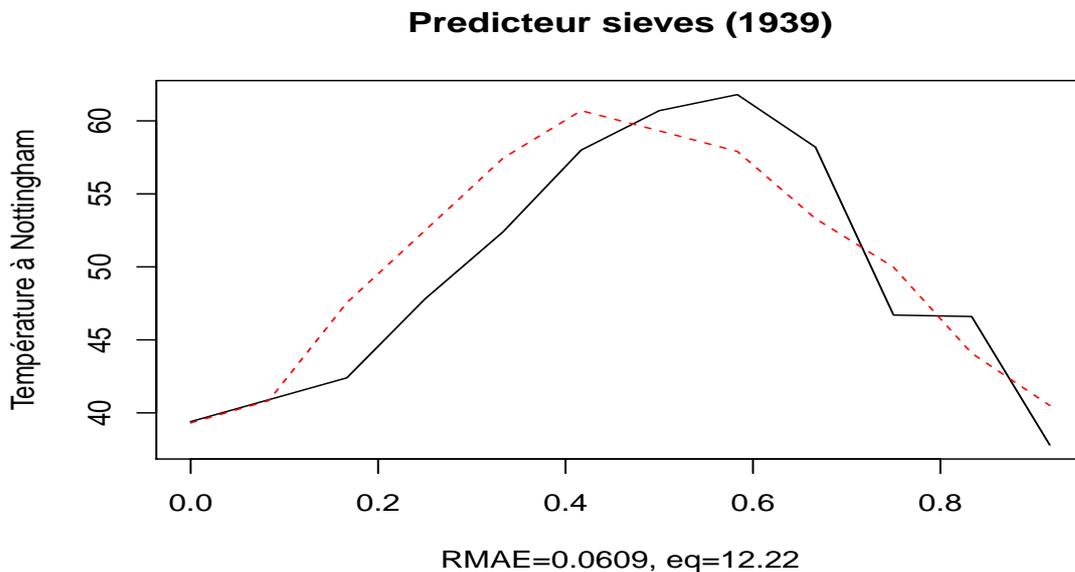


FIGURE 3.28

Nous représentons dans la table suivante l'erreur RMAE de différentes méthodes de prévision de la température à Nottingham en 1939.

**Table 6**

Méthodes de prévision	RMAE
Sieves (Mourid and Bensmain [5])	2.95%
BLUP cas continu	2.96%
Prédicteur sieves 2016	6.09 %
SS (spline smoothing)	28%
Wavelet-kernel	30%
SARIMA	31%

Nous notons que notre prédicteur sieves donne de bons résultats (erreur RMAE) comparés avec les trois dernières méthodes, mais les résultats dans la table 3 est plus satisfaisant et nous pensons que c'est dû à la taille de l'échantillon, qui est réduit à seulement 19 observations (années) ici.

### 3.2.3 Prédiction de la température à Alger

Dans cette partie nous présentons des résultats de prévision de la température moyenne à Alger pour l'année 2004. La Figure 3.29 représente la variation de la température à Alger durant la période 1970-2004.

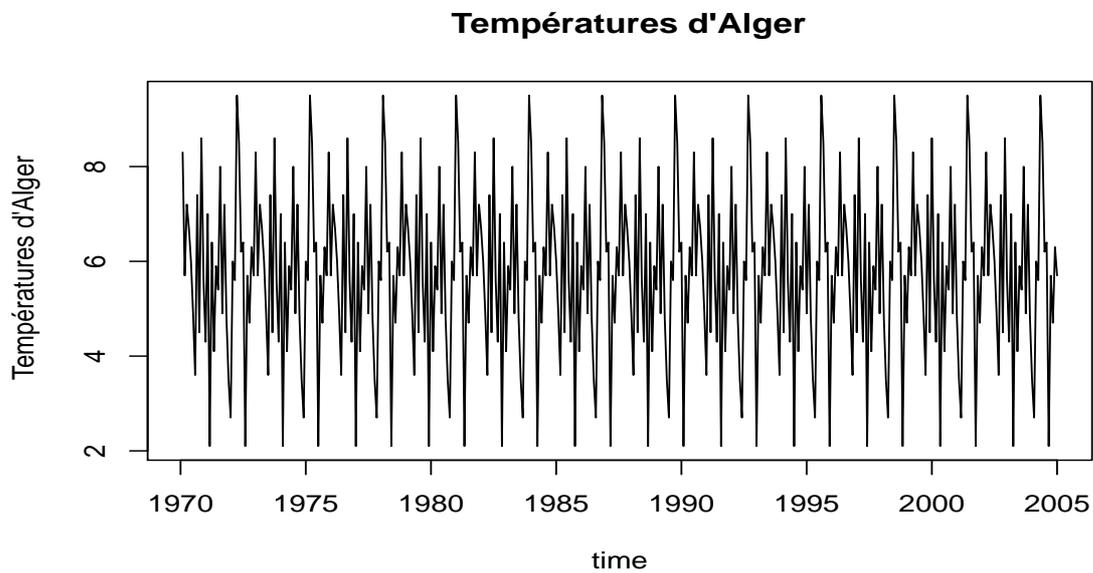


FIGURE 3.29

La Figure 3.30 représente la température moyenne de l'année 2004 à Alger et le prédicteurs sieves avec les erreurs RMAE

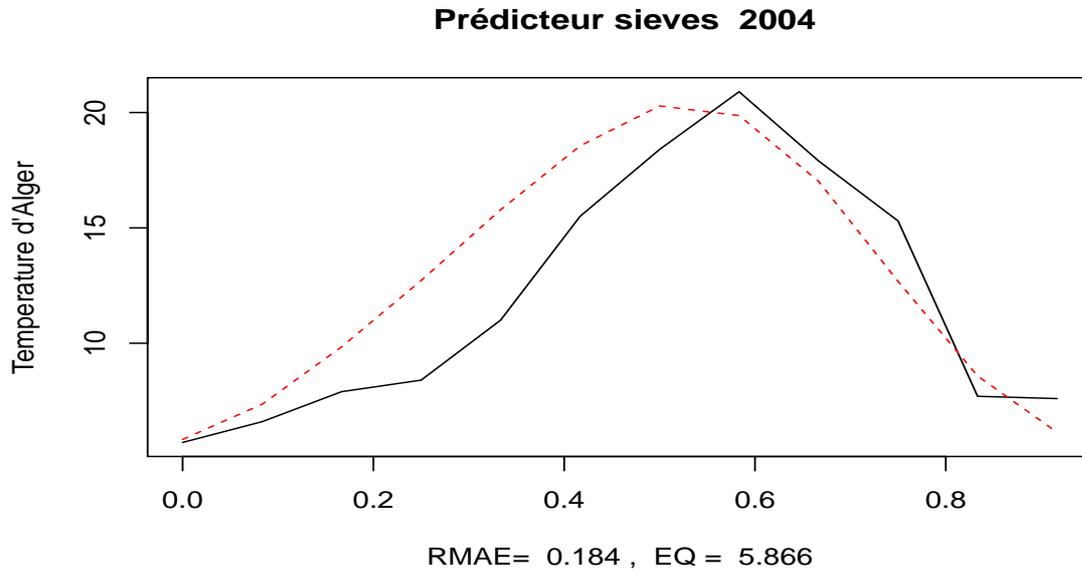


FIGURE 3.30

Nous représentons dans les Figures 3.31, 3.32, 3.33 la température moyenne des années 1984, 1995, 2000 à Alger respectivement et leurs prédicteurs sieves.

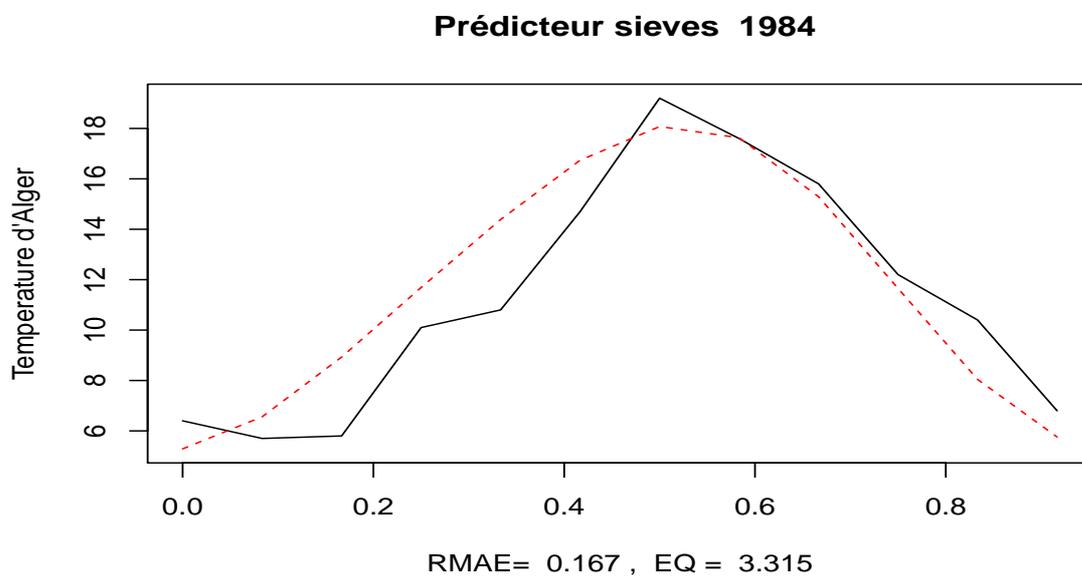


FIGURE 3.31

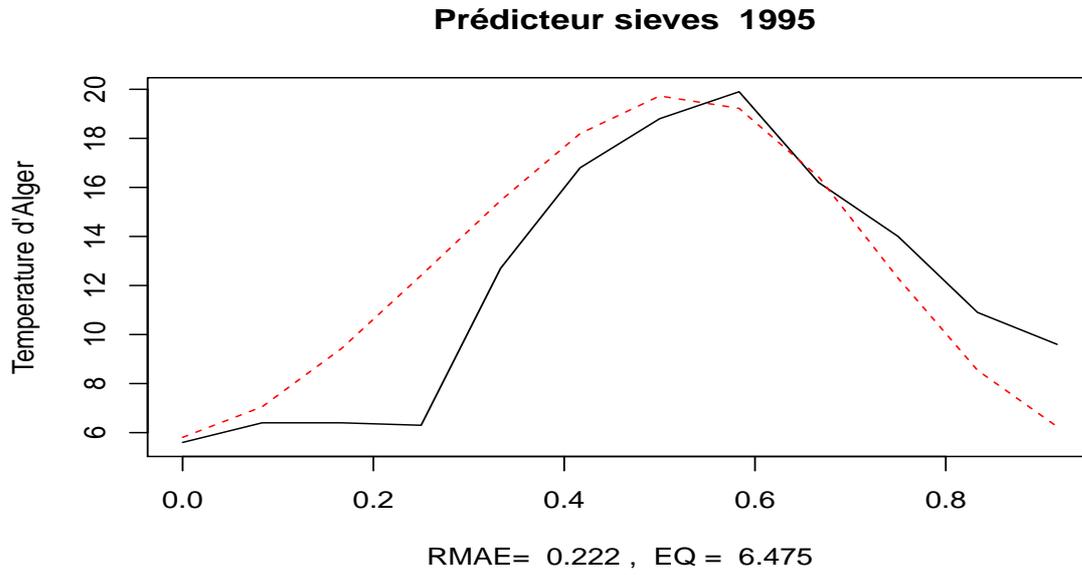


FIGURE 3.32

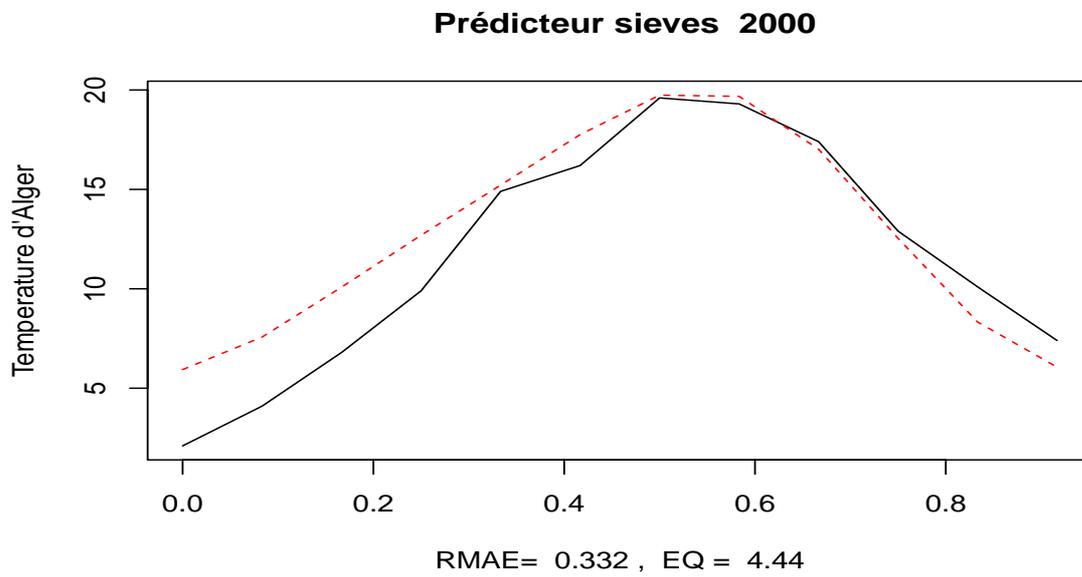


FIGURE 3.33

## Conclusion

Nous concluons d'après les simulations numériques étudiés, que notre estimateur sieves donne de bons résultats. Les erreurs quadratiques et les erreurs relatives de prédiction sont très faibles et de l'ordre de quelques pour-cents. Nous avons aussi appliqué la méthode des sieves sur des series réelles telles que le phénomène El-Nino - température à Nottingham et température à Alger, les prédicteurs sieves donnent en général des erreurs RMAE assez faibles par rapport aux d'autre méthodes de prévision disponibles dans la littérature notamment à la méthode établie par Bensmain et Mourid2009[5].

# Conclusion générale

Nous fournissons une théorie générale pour l'estimation par la méthode des sieves de l'opérateur d'un processus autoregressif Hilbertien présenté dans [22].

Nous avons résolu dans un premier temps l'estimation du paramètre l'opérateur d'un processus autoregressif Hilbertien dans le cas d'un opérateur à noyau de convolution périodique. Des résultats sur l'existence de l'estimateur sieves et leur convergence presque sûre sont obtenus ainsi qu'une forme explicite de cet estimateur dans le cas Gaussien. Nous obtenons aussi dans le cas d'un opérateur de Hilbert Schmidt l'existence et la convergence presque sûre de l'estimateur sieves en norme de Hilbert-Schmidt sous certaines conditions similaires à [14] ainsi qu'un résultat de convergence du prédicteur sieves pour la norme de  $L^2[0, 1]$ .

Les résultats théorique sur la prévision par la méthode des sieves ont été illustrés par des simulations d'un processus AR en utilisant le logiciel R, ainsi que des applications sur des séries réelles telles que la prévision de la température au château de Nottingham pendant 1939, la prévision de phénomène "El Nino" et à la température à Alger.

Les résultats obtenus sont très satisfaisants et corroborent les résultats théoriques.

# Bibliographie

- [1] Antoniadis A, 2005. *A functional Wavelet-kernel approach for continuous-time Prediction*. ccsd-00004891, version 1-10 May 2005.
- [2] Antoniadis A ; Sapatinas T, 2003. *Wavelet methods for continuous- time prediction using Hilbert-valued autoregressive processes*. J. Multivariate Anal., 87, 133-158 (2003)
- [3] Bahadur, P.R., 1967. *Rates of convergence of estimates and test statistics*. Ann. Math. Statist. 38, 303–324.
- [4] Bensmain, N., Mourid, T., 2001. *Estimateur sieve de l'opérateur d'un processus ARH(1)*. C. R. Acad. Sci. Paris t. 332 Serie I.
- [5] Bensmain, N., Mourid, T., 2009. *Prédiction des processus AR Hilbertien via la méthode des sieves. simulations et exemples*. ANNALES DE L'I.S.U.P. volume LIII- Fascicule 2-3-2009-Paris.
- [6] Berhoune, K., Bensmain, N., 2017. *Sieves estimator of functional autoregressive process*. Statistics and Probability Letters 135 (2018) 60–69.
- [7] Besse, P.C., Cardot, H., 1996. *Approximation spline de la prévision d'un processus fonctionnel autorégressif d'ordre 1*. Canad. J. Statist. 24, 467–487.
- [8] Besse, P.C., Cardot, H., Stephenson, B.,2000. *Autoregressive Forecasting of Some Functional Climatic Variations*. Scand. J. Stat. 27 (4), 673–687.
- [9] Bosq, D., 2000. *Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications*. Lecture Notes in Statistics, vol. 149., Springer, Berlin.
- [10] Bosq, D., Mourid, T., 1997. *On the equivalence of the measure induced by Banach valued Gaussian autoregressive processes*. Stochast. Anal. Appl. 17 (2), 137–144.
- [11] Brockwell, P., Davis, A., 1987. *Time Series : Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York.

- [12] Chen, X., Shen, X., 1998. *Sieve extremum estimates for weakly dependent data*. *Econometrica* (66), 289–324.
- [13] Damon J ; Gillas S. *Modelization for Functional AutoRegressive processes. the far Package Version : 0.6-2 License : LGPL-2.1 version 2.4.1 du logiciel R) (2005)*.
- [14] Geman, S., Hwang, C.R., 1982. *Nonparametric maximum likelihood estimation by the method of Sieves*. *An. Statist.* 10 (2), 400–414.
- [15] Grenander, U., 1981. *Abstract Inference*. Wiley, New York.
- [16] Guillas, S., 2001. . *Thèse de Doctorat, Université Paris 6*.
- [17] Hwang, C.R., 1980. *Gaussian measure of large balls in a Hilbert space*. *Proc. Amer. Math. Soc.* 78 (1), 107–110.
- [18] Mas, A., Pumo, B., 2005. *The ARHD Model*. arXiv :math.ST/0.502285v1.
- [19] Mokhtari F ; Mourid T. 2008. *Prévision des processus ARC(1) via le prédicteur de Parzan. Exemples et simulations*. *Les Annales de l'ISUP*.
- [20] Mourid, T., 1995. *Thèse de Doctorat Es Sciences, Université Paris 6*.
- [21] Mourid, T., 1996. *Représentation autorégressive dans un espace de Banach de processus réels à temps continu et équivalence des lois*. *C. R. Acad. Sci. Paris t. 322 (Serie I)*, 1219–1224.
- [22] Mourid, T., Bensmain, N., 2006. *Sieves estimator of the operator of a functional autoregressive process*. *Statistics and Probability Letters*, vol. 76., 93-108
- [23] Pumo, D., 1993. *Thèse de Doctorat, Université Paris 6*.
- [24] Pumo B. 1998. *Prediction of continuous time processes by  $C(0.1)$  - valued autoregressive process*. *Statist. Inf. Stoch. Proc. I* . 139-153.
- [25] Shen, X., Wong, W.H., 1994. *Convergence Rates of Sieve Estimates*. *The Annals of statistics*, 22. 580-615.
- [26] White, H., Wooldrige, J.M., 1991. *Some results on sieve estimation with dependant observations*. *University of California. Econometrica* (59), 260-275.

# Résumé

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'estimation d'un processus autoregressif Hilbertien par la méthode des sieves. Nous montrons des résultats sur l'existence et la convergence presque sûre de l'estimateur sieves du paramètre l'opérateur d'un ARH(1) dans le cas d'un opérateur à noyau de convolution périodique. Nous donnons aussi une forme explicite de cet estimateur dans le cas Gaussien.

Nous traitons le cas d'un opérateur de Hilbert Schmidt en donnant des résultats d'existence et de convergence presque sûre de l'estimateur sieves en norme de Hilbert Schmidt sous des conditions similaires à [14], ainsi qu'un résultat de convergence de prédictor sieves pour la norme  $L^2$ .

Nous illustrons la performance de cette méthode d'estimation par des simulations numériques et des applications aux séries réelles. Les résultats obtenus corroborent les résultats théorique.

**Mots clés :** Processus autorégressif fonctionnel- Estimation Sieves- Prédictor sieves- Simulations- Série "El Nino".

**Key words :** Functional autoregressive process- Sieves estimation- Sieves predictor- Simulations- "El Niño" series.

**Résumé :** Dans cette thèse nous nous intéressons à l'estimation d'un processus autorégressif fonctionnel sur  $[0,1]$  par la méthode des sieves. Nous montrons des résultats sur l'existence et la convergence presque sûre de l'estimateur sieves du paramètre l'opérateur d'un ARH(1) dans un cas particulier puis nous les généralisons. Nous donnons aussi une forme explicite de cet estimateur dans le cas Gaussien.

Nous illustrons la performance de cette méthode d'estimation par des études des simulations numériques et des applications aux séries réelles. Les résultats obtenus corroborent les résultats théoriques.

**Mots clés :** Processus autorégressif fonctionnel- Estimation Sieves- Prédicteur sieves- Simulations- Série "El Nino".

---

**Abstract:** In this thesis we are interested in the estimation of a functional autoregressive process on  $[0,1]$  by the sieves method . We show results on the existence and the almost sure convergence of sieves estimate of the parameter operator of a first order Hilbertian autoregressive process in a particular case and then we generalize them. We also give an explicit form of this estimate in the Gaussian case.

We illustrate the performance of this method by simulations studies and real-life applications. The results obtained corroborate the theoretical results.

**Keywords:** Functional autoregressive process- Sieves estimation- Sieves predictor- Simulations- "El Niño" series.

**ملخص** في هذه الأطروحة ، نهتم بالتنبؤ لعمليّة ذات وقت مستمر تقبل تمثيل انحدار ذاتي في فضاء الدوال المستمرة على المجال  $[0,1]$  بطريقة المناخل. نعرض نتائج حول الوجود و التقارب الأكيد تقريبا لهذا التقدير الذي يتمثل في مؤثر انحدار ذاتي بطريقة المناخل في حالة خاصة ثم نعمم هذه النتائج. كما نقدم شكلاً صريحاً له في الحالة الغوسية.

نوضح أداء طريقة التقدير هذه من خلال تقديم دراسات محاكاة لمسارات عملية انحدار ذاتي و متنبئاتها بطريقة المناخل اضافة الى تطبيقات واقعية. النتائج التي تم الحصول عليها تؤكد و تدعم النتائج النظرية.

**الكلمات المفتاحية :** انحدار ذاتي في فضاء الدوال المستمرة ، تقدير المناخل، تنبؤ المنخل، سلسلة المحاكاة ، "النينيو".