الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÈMOIRE DE MASTER
EN MATHEMATIQUES

Option : Perturbations, Moyennisation et Applications aux Biomathématiques (PeMAB)

Sujet :

Sur la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard

Candidate : **KASSER Kheira**

Date : 10/07/2017

Membres du Jury :

Président :	Mr. Mustapha YEBDRI
Examinateur :	Mr. Benmiloud MEBKHOUT
Examinatrice :	Mde. Naima MERZAGUI
Encadreur :	Mr. Mohammed DERHAB

Année Universitaire 2016/2017

Dédicaces

A la mémoire de mon Père
A ma Mère
A mon cher frère Abdel Kader, qui m'est le père
A mes chers frères, sœurs et leurs enfants
A mes proches amis et toute ma grande famille
A ma promotion 2016-2017 (spécialité PeMAB).

Remerciements

Avant toute personne, je tiens à remercier Dieu le tout puissant, qui j'ai donné la force et la patience d'accomplir ce mémoire.
En second lieu, je voudrais tout d'abord remercier mon encadreur Mr. DERHAB Mohammed pour sa précieuse aide, ses orientations et conseils ainsi le temps qu'il m'a accordé pour mon encadrement.
Je remercie également tous les membres du jury pour l'intérêt qu ?ils ont porté à mon recherche en acceptant d'examiner mon travail Et de l'enrichir par leurs propositions.
Je voudrais remercier le responsable de l'option Mr. YADI Karim.
Enfin, Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribuées de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Tlemcen, le 10 juillet 2017.

Table des matières

Introduction

L'objet de ce mémoire est de donner quelques résultats concernant les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires de type Hadamard et au sens de Hadamard. On donne aussi des résultats d'existence et d'unicité pour des problèmes de Cauchy avec une dérivée fractionnaire au sens de Hadamard. Notre mémoire est divisée en trois chapitre.

Dans le 1^{er} chapitre on donne quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire de type Hadamard et au sens de Hadamard. On donne aussi quelques exemples d'applications. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [5], [6], [7] et [8].

Dans le $2^{ème}$ chapitre on donne quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de type Hadamard et au sens de Hadamard. On donne aussi quelques exemples d'applications. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [1], [2], [3], [4], [5], [6] et [7].

Dans le $3^{ème}$ chapitre on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des solutions pour les problèmes de Cauchy dont la dérivée fractionnaire est au sens de Hadamard. On donne aussi quelques exemples d'applications. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [7].

1 Intégrale Fractionnaire de Type Hadamard et au sens de Hadamard

Dans ce chapitre on donne quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire de type Hadamard et au sens de Hadamard. On donne aussi quelques exemples d'applications. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [5], [6], [7] et [8].

1.1 Quelques définitions

1.1.1 Espace $L^p(a,b)$ [7]

soit (a,b) $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 *l'espace $L^p(a,b)$ $(1 < p \leq +\infty)$ est l'espace des fonctions f mesurables intégrables au sens de Lebesgue à valeurs réelles telle que la norme $\|f\|_p < +\infty$, où*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dt\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < +\infty), \tag{1.1.1}$$

et pour $p = +\infty$, on a

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \tag{1.1.2}$$

et $L^\infty(a,b)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur (a,b).

1.1.2 Espaces des fonctions intégrables avec poids $X_c^p(a,b)$ [7]

Définition 1.1.2 *L'espace $X_c^p(a,b)$ $(c \in \mathbb{R}, 1 < p \leq +\infty)$ est l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs complexes f sur (a,b) telles que $\|f\|_{X_c^p(a,b)} < \infty$, avec*

$$\|f\|_{X_c^p(a,b)} = \left(\int_a^b |x^c f(x)|^p \frac{dx}{x})\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < +\infty), \tag{1.1.3}$$

et

$$\|f\|_{X_c^\infty(a,b)} = ess \sup_{a \leq x \leq b} [x^c |f(x)|]. \tag{1.1.4}$$

Cas particulier : si $c = 1/p$, l'espace $X_c^p(a,b)$ coïncide avec l'espace $L^p(a,b)$ et on a $X_{1/p}^p(a,b) = L^p(a,b)$.

1.1.3 Espaces $AC^n_{\delta,\mu}[a,b]$

soit $[a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.3 *[8] Une fonction f est dite absolument continue sur un intervalle $[a,b]$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts disjoints deux a deux $[a_k, b_k] \subset [a,b]$, $k = 1, 2, \cdots, n$, tel que*

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \eta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon .$$

Notation : On note par $AC[a,b]$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.

Théorème 1.1.1 *[8] L'espace $AC[a,b]$ coïncide avec l'espace des primitives de fonctions sommables de Lebesgue , c'est á dire*

$$f \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, \qquad (\varphi \in L^1(a,b)). \tag{1.1.5}$$

Ainsi une fonction absolument continue f a une dérivée sommable $f'(x) = \varphi(x)$ dans $[a,b]$. Alors (1.1.5) signifie que

$$\varphi(t) = f'(t) \quad et \quad c = f(a). \tag{1.1.6}$$

Définition 1.1.4 *[7] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note par $AC^n[a,b]$ l'espace des fonctions à valeurs complexes f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ continues sur $[a,b]$ telles que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a,b]$, c'est à dire*

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \; et \; (D^{n-1}f)(x) \in AC[a,b] \left(D = \frac{d}{dx} \right) \right\}. \tag{1.1.7}$$

En particulier, on a $AC^1[a,b] = AC[a,b]$.

Définition 1.1.5 *[7] L'espace noté $AC^n_{\delta,\mu}[a,b]$ $(n \in \mathbb{N}^*, \mu \in \mathbb{R})$ défini par*

$$AC^n_{\delta,\mu}[a,b] = \left\{ g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} : \delta^{n-1}[x^\mu g(x)] \in AC[a,b],\, \mu \in \mathbb{R},\, \delta = x\frac{d}{dx} \right\}, \tag{1.1.8}$$

est appelé espace des fonctions absolument continues avec poids.
En particulier, quand $\mu = 0$ l'espace $AC^n_\delta[a,b] := AC^n_{\delta,0}[a,b]$ et on a

$$AC^n_\delta[a,b] = \left\{ g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} : \delta^{n-1}[g(x)] \in AC[a,b],\, \delta = x\frac{d}{dx} \right\}. \tag{1.1.9}$$

Quand $\mu = 0$ et $n = 1$, l'espace $AC^1_\delta[a,b]$ coïncide avec $AC[a,b]$.

1.2 La fonction Gamma d'Euler et la fonction Béta d'Euler

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler [7] :

Définition 1.2.1 *La fonction Gamma d'Euler notée* Γ *est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \qquad (\Re(z) > 0)\,. \tag{1.2.1}$$

Remarque 1.2.1 *[7] La fonction Gamma d'Euler possède la propriété suivante*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,, \tag{1.2.2}$$

et pour n *entier naturel , on a*

$$\Gamma(n+1) = n!\,, \tag{1.2.3}$$

avec $0! = 1$.

1.2.2 Fonction Gamma Incomplète [7] :

Définition 1.2.2 *La fonction Gamma incomplète est définie par*

$$\gamma(\nu, x) = \int_0^x t^{\nu-1} e^{-t} dt\,, \qquad (x > 0, \nu > 0). \tag{1.2.4}$$

1.2.3 Fonction Béta d'Euler [7] :

Définition 1.2.3 *La fonction Béta d'Euler notée par* B *est définie par*

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1}(1-t)^{z_2-1} dt \qquad (\Re(z_1) > 0 \, et \, \Re(z_2) > 0). \tag{1.2.5}$$

Cette fonction est reliée à la fonction Gamma d'Euler par la relation suivante

$$B(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}\,, \qquad (\Re(z_1) > 0 \, et \, \Re(z_2) > 0). \tag{1.2.6}$$

1.2.4 Intégrale fractionnaire de type Hadamard et au sens de Hadamard

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$, on pose par définition

$$\left(\mathfrak{I}^n_{a+,\mu} f\right)(x) = x^{-\mu} \int_a^x \frac{dt_1}{t_1} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \int_a^{t_{n-1}} t_n^{\mu} f(t_n) \frac{dt_n}{t_n}\,.$$

Lemme 1.2.1 *[6] Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $a \geq 0$, *on a*

$$\left(\mathfrak{I}^n_{a+,\mu} f\right)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-1} f(t) \frac{dt}{t}\,, \quad (x > a)\,. \tag{1.2.7}$$

Preuve : Pour la preuve on utilise un raisonnement par récurrence.
Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{I}^1_{a+,\mu} f\right)(x) &= x^{-\mu}\int_a^x t_1^{\mu} f(t_1)\frac{dt_1}{t_1}\\ &= \frac{1}{0!}\int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{1-1} f(t)\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Donc (1.2.7) est vérifié pour $n = 1$.
Supposons que (1.2.7) est vraie pour n un entier naturel non nul fixé et montrons qu'elle reste vraie pour $n+1$.

On a

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{I}^{n+1}_{a+,\mu} f\right)(x) &= x^{-\mu}\int_a^x \frac{dt_1}{t_1}\left[\int_a^{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\cdots\int_a^{t_{n-1}}\frac{dt_n}{t_n}\int_a^{t_n} t_{n+1}^{\mu} f(t_{n+1})\frac{dt_{n+1}}{t_{n+1}}\right]\\ &= x^{-\mu}\int_a^x \frac{t_1^{-\mu}}{(n-1)!}\int_a^{t_1}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t_1}{t}\right)^{n-1} f(t)\frac{dt}{t}\frac{dt_1}{t_1}\\ &= \frac{x^{-\mu}}{(n-1)!}\int_a^x t^{\mu-1} f(t)\left(\int_t^x\left(\log\frac{t_1}{t}\right)^{n-1}\frac{dt_1}{t_1}\right)dt\end{aligned}$$

On pose $v = \dfrac{t_1}{t}$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{I}^{n+1}_{a+,\mu} f\right)(x) &= \frac{x^{-\mu}}{(n-1)!}\int_a^x t^{\mu-1} f(t)\left(\int_1^{x/t}(\log v)^{n-1}\frac{tdv}{tv}\right)dt\\ &= \frac{x^{-\mu}}{(n-1)!}\int_a^x t^{\mu-1} f(t)\left[\frac{(\log v)^n}{n}\right]_1^{x/t} dt\\ &= \frac{1}{n!}\int_a^x\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n} f(t)\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

En conclusion
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\left(\mathfrak{I}^n_{a+,\mu} f\right)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1} f(t)\frac{dt}{t}$$

À partir du lemme 1.2.1, on donne la généralisation suivante :

Définition 1.2.4 *(Intégrale Fractionnaire de Type Hadamard) [6]*
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\alpha) > 0$, μ un nombre réel et $a \geq 0$.
L'intégrale fractionnaire de type Hadamard pour une fonction f est définie par

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \quad (x > a). \tag{1.2.8}$$

Remarque 1.2.2 *Pour $\alpha = 0$, on pose par définition*

$$\left(\mathfrak{I}^{0}_{a+,\mu}f\right)(x) = f(x)\,. \tag{1.2.9}$$

Remarque 1.2.3 *Pour $\mu = 0$, on obtient l'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard définie par*

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \qquad (\alpha > 0; x > a)\,. \tag{1.2.10}$$

Exemple 1.2.1 *[7] Pour $f(x) = x^{\beta}$, où β est un nombre complexe , on a*

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}t^{\beta}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} t^{\beta-1}dt,$$

on pose $v = \dfrac{t}{x}$, on obtient

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}t^{\beta}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 v^{\mu}\left(\log\frac{1}{v}\right)^{\alpha-1} x^{\beta}v^{\beta-1}dv,$$

on pose $\tau = -\log v$, on obtient

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}t^{\beta}\right)(x) = \frac{x^{\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} \tau^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\beta+\mu)\tau}d\tau,$$

on pose $s = (\beta+\mu)\tau$, $\Re(\beta+\mu) > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}t^{\beta}\right)(x) &= \frac{x^{\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{s}{\beta+\mu}\right)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-s}\frac{ds}{\beta+\mu}\\ &= \frac{(\beta+\mu)^{-\alpha}x^{\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}s^{\alpha-1}ds\\ &= (\beta+\mu)^{-\alpha}x^{\beta}\,.\end{aligned}$$

En particulier , pour $\mu = 0$, on a

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}t^{\beta}\right)(x) = \beta^{-\alpha}x^{\beta}\,.$$

Exemple 1.2.2 *[7] Pour $f(x) = \left(\log\dfrac{x}{a}\right)^{\beta-1}$, où β est un nombre complexe , on a*

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{dt}{t},$$

on pose $\quad \tau = \dfrac{(\log \frac{t}{a})}{(\log \frac{x}{a})}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\tau^{\beta-1}\left(\log\frac{x}{a}\right)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

1.3 L'intégrale Fractionnaire de Type Hadamard dans l'espace $X^p_c(a,b)$

Théorème 1.3.1 *[6] soit $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq +\infty$, $0 < a < b < \infty$ et soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mu \geq c$. Alors l'opérateur $\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}$ est bornée dans $X^p_c(a,b)$ et*

$$\left\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right\|_{X^p_c(a,b)} \leq K\left\|f\right\|_{X^p_c(a,b)}, \tag{1.3.1}$$

où pour $\mu = c$

$$K = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\log\frac{b}{a}\right)^{\alpha}, \tag{1.3.2}$$

et pour $\mu > c$

$$K = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\mu-c)^{-\alpha}\,\gamma\left[\alpha,(\mu-c)\log\left(\frac{b}{a}\right)\right]. \tag{1.3.3}$$

Preuve :
On distingue deux cas.
$1^{ère}$ Cas : $\quad (1 \leq p < +\infty)$
On a,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right\|_{X^p_c(a,b)} &= \left(\int_a^b \left|x^c\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f(x)\right|^p\frac{dx}{x}\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_a^b \left|x^c\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}f(t)\frac{dt}{t}\right|^p\frac{dx}{x}\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

on pose $u = \dfrac{x}{t}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\mathfrak{J}^{\alpha}_{a+,\mu} f\right\|_{X^p_c(a,b)} &= \left(\int_a^b \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{x/a} x^{c-1/p} u^{-\mu} \left(\log u\right)^{\alpha-1} f(\frac{x}{u})\frac{du}{u}\right|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_1^{b/a} \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} u^{-\mu-1} \left(\log u\right)^{\alpha-1} \left(\int_{au}^b x^c f\left(\frac{x}{u}\right)\frac{dx}{x}\right)\right|^p du\right)^{1/p} \\
&\leq \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u^{\mu-1} \left(\log u\right)^{\alpha-1} \left(\int_{au}^b \left|x^c f\left(\frac{x}{u}\right)\right|^p \frac{dx}{x}\right)^{1/p} du,
\end{aligned}$$

on pose $t = \dfrac{x}{u}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\mathfrak{J}^{\alpha}_{a+,\mu} f\right\|_{X^p_c(a,b)} &\leq \int_1^{b/a} u^{-\mu-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\log u\right)^{\alpha-1} \left(\int_a^{b/u} \left|t^c u^c f(t)\right|^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} du \\
&= \int_1^{b/a} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u^{c-\mu-1} \left(\log u\right)^{\alpha-1} \left(\int_a^{b/u} \left|t^c f(t)\right|^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} du \\
&\leq \left(\int_1^{b/a} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u^{c-\mu-1} \left(\log u\right)^{\alpha-1} du\right) \|f\|_{X^p_c(a,b)},
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\left\|\mathfrak{J}^{\alpha}_{a+,\mu} f\right\|_{X^p_c(a,b)} \leq K \|f\|_{X^p_c(a,b)} ,$$

avec

$$K = \int_1^{b/a} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u^{c-\mu-1} \left(\log u\right)^{\alpha-1} du \,.$$

Calculons la constante K :

Pour $\mu = c$, on a

$$\begin{aligned}
K &= \int_1^{b/a} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\log u\right)^{\alpha-1} \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(\log u)^{\alpha}}{\alpha}\right]_1^{b/a} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log\frac{b}{a}\right)^{\alpha},
\end{aligned}$$

et pour $\mu > c$, on a

$$K = \int_1^{b/a} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u^{-(\mu-c)} \left(\log u\right)^{\alpha-1} \frac{du}{u},$$

on pose $t = \log u$, on obtient

$$K = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\log(b/a)} e^{-t(\mu-c)} t^{\alpha-1} dt,$$

maintenant on pose $s = t(\mu - c)$, on obtient

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(\mu-c)\log(b/a)} e^{-s} \left(\frac{s}{\mu-c}\right)^{\alpha-1} \frac{ds}{\mu-c} \\ &= \frac{(\mu-c)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(\mu-c)\log(b/a)} s^{\alpha-1} e^{-s} ds \\ &= \frac{(\mu-c)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \gamma\left(\alpha, (\mu-c)\log\left(\frac{b}{a}\right)\right). \end{aligned}$$

$2^{ème}$ Cas : Si $p = +\infty$

Pour ce cas on a,

$$\left\| \mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu} f \right\|_{X_c^{\infty}(a,b)} = ess \sup_{a \le x \le b} \left[x^c |\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu} f(x)| \right] .$$

Comme

$$\begin{aligned} \left| x^c \mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu} f(x) \right| &= \left| x^c \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu-c} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} t^c f(t) \frac{dt}{t} \right| \\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu-c} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} |t^c f(t)| \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

$$\le M(x) \left\| f \right\|_{X_c^{\infty}(a,b)} , \tag{1.3.4}$$

où

$$M(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu-c} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t} .$$

Calculons $M(x)$:

On pose $u = \dfrac{x}{t}$, on a

$$M(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{x/a} u^{-(\mu-c)} (\log u)^{\alpha-1} \frac{du}{u}.$$

Pour $\mu = c$, on a

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{x/a} (\log u)^{\alpha-1} \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(\log u)^{\alpha}}{\alpha} \right]_1^{x/a} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log \frac{b}{a} \right)^{\alpha}, \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

et pour $\mu > c$, on a

$$M(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{x/a} u^{-(\mu-c)} (\log u)^{\alpha-1} \frac{du}{u},$$

on pose $t = \log u$, on obtient

$$M(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\log(x/a)} e^{-(\mu-c)} t^{\alpha-1} dt,$$

maintenant on pose $s = t(\mu - c)$, on obtient

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(\mu-c)\log(x/a)} e^{-s} \left(\frac{s}{\mu-c} \right)^{\alpha-1} \frac{ds}{\mu-c} \\ &= \frac{(\mu-c)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(\mu-c)\log(x/a)} e^{-s} s^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{(\mu-c)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \gamma \left(\alpha, (\mu-c) \log \left(\frac{x}{a} \right) \right). \end{aligned}$$

Comme γ est une fonction croissante, il resulte que

$$M(x) \leq \frac{(\mu-c)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \gamma \left(\alpha, (\mu-c) \log \left(\frac{b}{a} \right) \right). \tag{1.3.6}$$

Alors d'après (1.3.4), (1.3.5) , (1.3.6) , on a

$$\left| x^c \mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu} f(x) \right| \leq K \|f\|_{X^{\infty}_c(a,b)},$$

où K est donné par (1.3.2) pour $\mu = c$ et par (1.3.3) pour $\mu > c$.

Corollaire 1.3.1 *[6] soit $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq +\infty$, $0 < a < b < \infty$ et soit $c \leq 0$. Alors l'opérateur $\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}$ est bornée dans $X^p_c(a,b)$ et*

$$\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}f\|_{X^p_c(a,b)} \leq K_1 \|f\|_{X^p_c(a,b)} , \tag{1.3.7}$$

où pour $c = 0$

$$K_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log \frac{b}{a}\right)^{\alpha} , \tag{1.3.8}$$

et pour $c < 0$

$$K_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (-c)^{-\alpha} \gamma \left[\alpha, -c \log \left(\frac{b}{a}\right)\right] . \tag{1.3.9}$$

Théorème 1.3.2 *[6] soit $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq +\infty$, $0 < a < b < \infty$ et soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mu \geq 1/p$. Alors l'opérateur $\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}$ est bornée dans $L^p(a,b)$ et*

$$\left\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right\|_p \leq K_2 \|f\|_p , \tag{1.3.10}$$

où K_2 est donnée par (1.3.2) *pour $\mu = 1/p$,*

et pour $\mu > 1/p$, on a

$$K_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\mu - \frac{1}{p}\right)^{-\alpha} \gamma \left[\alpha, \left(\mu - \frac{1}{p}\right) \log \left(\frac{b}{a}\right)\right] . \tag{1.3.11}$$

Preuve :

On a

$$\begin{aligned}
\left\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right\|_p &= \left(\int_a^b \left|\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_a^b \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}\right|^p dx\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

on pose $u = \frac{x}{t}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right\|_p &= \left(\int_a^b \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{x/a} u^{-\mu} (\log u)^{\alpha-1} f(\frac{x}{u})\frac{du}{u}\right|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq \int_1^{b/a} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u^{-\mu-1} (\log u)^{\alpha-1} \left(\int_{au}^b \left|f\left(\frac{x}{u}\right)\right|^p dx\right)^{1/p} du,
\end{aligned}$$

on pose $t = \dfrac{x}{u}$, on a

$$\begin{aligned}\left\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right\|_p &\leq \int_1^{b/a} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u^{-\mu-1} (\log u)^{\alpha-1} \left(\int_a^{b/u} |f(t)|^p \, udt\right)^{1/p} du \\ &= \int_1^{b/a} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u^{1/p-\mu-1} (\log u)^{\alpha-1} \left(\int_a^{b/u} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} du,\end{aligned}$$

par suite,

$$\left\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}\right\|_p \leq K_2 \|f\|_p \,,$$

avec

$$K_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{b/a} u^{1/p-\mu-1} (\log u)^{\alpha-1} \, du \,.$$

Calculons la constante K_2 :

Pour $\mu = 1/p$, on a

$$\begin{aligned}K_2 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{b/a} (\log u)^{\alpha-1} \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(\log u)^{\alpha}}{\alpha}\right]_1^{b/a} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log \frac{b}{a}\right)^{\alpha},\end{aligned}$$

et pour $\mu > 1/p$, on a

$$K_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{b/a} u^{-(\mu-1/p)} (\log u)^{\alpha-1} \frac{du}{u} \,.$$

On pose $t = \log u$, on a

$$K_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\log(b/a)} e^{-t(\mu-1/p)} t^{\alpha-1} dt \,,$$

On pose $s = t(\mu - 1/p)$, on a

$$\begin{aligned}K_2 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(\mu-1/p)\log(b/a)} e^{-s} \left(\frac{s}{\mu-1/p}\right)^{\alpha-1} \frac{ds}{\mu-1/p} \\ &= \frac{(\mu-1/p)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(\mu-1/p)\log(b/a)} s^{\alpha-1} e^{-s} ds \\ &= \frac{(\mu-1/p)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \gamma\left(\alpha, (\mu-1/p)\log\left(\frac{b}{a}\right)\right) \,.\end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 *Soit $c \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$*
Si $\mu > c$, alors l'opérateur $\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}$ est borné dans $X^p_c(\mathbb{R}_+)$ et

$$\left\| \mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu} \right\|_{X^p_c} \leq K_3 \left\| f \right\|_{X^p_c(\mathbb{R}_+)}, \quad \text{avec} \quad K_3 = (\mu - c)^{-\alpha}.$$

Un tel résultat est obtenu de (1.3.1) *et* (1.3.3) *si on mit $a = 0$ et $b = \infty$ et on considère la relation $\gamma(\nu, \infty) = \Gamma(\nu)$.*

1.4 Propriété de semi groupe d'intégrale fractionnaire de type Hadamard

Théorème 1.4.1 *([6], [7]) Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < a < b < \infty$ et soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mu \geq c$. Alors pour $f \in X^p_c(a,b)$ la propriété de semi groupe est vérifiée*

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\beta}_{a+,\mu} f = \mathfrak{I}^{\alpha+\beta}_{a+,\mu} f. \tag{1.4.1}$$

Preuve :
Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.

On a

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\beta}_{a+,\mu} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{u}{x}\right)^{\mu} \left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1} \left(\mathfrak{I}^{\beta}_{a+,\mu} f\right)(u) \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{u}{x}\right)^{\mu} \left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^u \left(\frac{t}{u}\right)^{\mu} \left(\log\frac{u}{t}\right)^{\beta-1} f(t)\frac{dt}{t}\right] \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) x^{-\mu} t^{\mu-1} \left[\int_t^x \left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{u}{t}\right)^{\beta-1} \frac{du}{u}\right] dt,
\end{aligned}$$

On pose $\tau = \dfrac{(\log \frac{u}{t})}{(\log \frac{x}{t})}$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\beta}_{a+,\mu} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) x^{-\mu} t^{\mu-1} \\
&\quad \times \left[\int_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\beta-1} \tau^{\beta-1} \left(\log\frac{x}{t}\right) d\tau\right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) x^{-\mu} t^{\mu-1} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1} \left[\int_0^1 \tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\alpha-1} d\tau\right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) x^{-\mu} t^{\mu-1} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) x^{-\mu} t^{\mu-1} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1} f(t)\frac{dt}{t} \\
&= \left(\mathfrak{I}^{\alpha+\beta}_{a+,\mu} f\right)(x).
\end{aligned}$$

Corollaire 1.4.1 *Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < a < b < \infty$ et $c \leq 0$. Alors pour $f \in X_c^p(a,b)$ la propriété de semi groupe est vérifiée*

$$\mathfrak{J}_{a+}^{\alpha}\mathfrak{J}_{a+}^{\beta}f = \mathfrak{J}_{a+}^{\alpha+\beta}f\,. \tag{1.4.2}$$

Preuve :
La preuve est un conséquence immédiate du théorème précédent.

Dérivée fractionnaire de type Hadamard et au sens de Hadamard 2

Dans ce chapitre on donne quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de type Hadamard et au sens de Hadamard. On donne aussi quelques exemples d'applications. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [1], [2], [3], [4], [5], [6] et [7].

2.1 Définitions et exemples

Pour μ un nombre réel, $a > 0$ on pose par définition

$$\left(\mathfrak{D}^{1}_{a+,\mu} f\right)(x) = ((\delta + \mu) f)(x) = x f'(x) + \mu f(x), \quad \delta = x \frac{d}{dx},$$

et pour n un entier naturel supérieur à 1 , on pose par définition

$$\left(\mathfrak{D}^{n}_{a+,\mu} f\right)(x) = \mathfrak{D}^{1}_{a+,\mu} \left(\mathfrak{D}^{n-1}_{a+,\mu} f\right)(x).$$

À partir de cette définition on donne la généralisation suivante :

Définition 2.1.1 *([6], [7]) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\alpha) > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $x > a$, on définit l'opérateur $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+,\mu}$ par*

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+,\mu} f\right)(x) = x^{-\mu} \delta^{n} \left(x^{\mu} \mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+,\mu} f\right)(x), \tag{2.1.1}$$

où $n = [\Re(\alpha)] + 1$.

Remarque 2.1.1 *Pour $\alpha = 0$, on pose par définition*

$$\left(\mathfrak{D}^{0}_{a+,\mu} f\right)(x) = f(x).$$

Remarque 2.1.2 *Si $\mu = 0$, $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+,0}$ est noté par $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}$ et on a*

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = \delta^{n} \left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+} f\right)(x).$$

Exemple 2.1.1 *[7] Pour $f(x) = x^{\beta}$, où β est un nombre complexe , on a*

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu}t^{\beta}\right)(x) &= x^{-\mu}\delta^{n}\left(x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+,\mu}t^{\beta}\right)(x) \\
&= x^{-\mu}\delta^{n}\left(x^{\mu}(\beta+\mu)^{\alpha-n}x^{\beta}\right) \\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left(x\frac{d}{dx}(\beta+\mu)^{\alpha-n}x^{\beta+\mu}\right)(x) \\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left(x(\beta+\mu)^{\alpha-n+1}x^{\beta+\mu-1}\right) \\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left((\beta+\mu)^{\alpha-n+1}x^{\beta+\mu}\right) \\
&= x^{-\mu}\delta^{n-2}\left((\beta+\mu)^{\alpha-n+2}x^{\beta+\mu}\right) .
\end{aligned}$$

Par récurrence , on a

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu}t^{\beta}\right)(x) = (\mu+\beta)^{\alpha}x^{\beta} .$$

En particulier , pour $\mu = 0$, on a

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+}t^{\beta}\right) = (\beta)^{\alpha}x^{\beta} .$$

Exemple 2.1.2 *[7] Pour $f(x) = \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}$, où β est un nombre complexe, avec $\Re(\beta) > 0$, on a*

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) &= \delta^{n}\left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) \\
&= \delta^{n}\left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\delta^{n-1}\left[x\frac{d}{dx}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\delta^{n-1}\left[x(n-\alpha+\beta-1)\frac{1}{x}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-2}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-1)}\delta^{n-1}\left[\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-2}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-2)}\delta^{n-2}\left[\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-3}\right] ,
\end{aligned}$$

par récurrence on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-n)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-(n+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1} .
\end{aligned}$$

En particulier, si $\beta = 1$ et $\Re(\alpha) \geq 0$, alors la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'une constante, en général, n'est pas nulle.

c'est à dire

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}1\right)(x) &= \delta^{n}\left(\mathfrak{J}_{a+}^{n-\alpha}1\right)(x) \\
&= \delta^{n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}1\frac{dt}{t}\right),
\end{aligned}$$

on pose $v = \dfrac{x}{t}$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}1\right)(x) &= \delta^{n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{1}^{x/a}(\log v)^{n-\alpha-1}\frac{dv}{v}\right) \\
&= \delta^{n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left[\frac{(\log v)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right]_{1}^{x/a}\right) \\
&= \delta^{n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha}\right) \\
&= \delta^{n-1}\left(x\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha}\right) \\
&= \delta^{n-1}\left(x\frac{n-\alpha}{\Gamma(n-\alpha+1)}\frac{1}{x}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha-1}\right) \\
&= \delta^{n-1}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha-1}\right) \\
&= \delta^{n-2}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha-1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha-2}\right),
\end{aligned}$$

par récurrence, on obtient

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}1\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1-n)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha-n},$$

pour $(0 < \Re(\alpha) < 1)$, on a

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}1\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}.$$

Exemple 2.1.3 *[7] Pour $f(x) = \left(\log\dfrac{x}{a}\right)^{\alpha-j}$, avec $j = [\Re(\alpha)] + 1$, on a*

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x) &= \left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-n}\right)(x) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha-n+1-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-n+1-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(-n+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-n+1}
\end{aligned}$$

comme $(-n+1) \in \mathbb{Z}_*^-$ *donc* $\Gamma(-n+1) = \infty$ *, on obtient*

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x) = 0\,.$$

Proposition 2.1.1 *[7] Soit* $\Re(\alpha) > 0, n = [\Re(\alpha)] + 1$ *et* $0 < a < b < \infty$*.*
l'égalité $(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = 0$ *est vérifiée si et seulement si*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j},$$

où $c_j \in \mathbb{R}\,(j = 1, \ldots, n)$ *sont des constantes arbitraires.*
En particulier, si $0 < \Re(\alpha) \leq 1$*, la relation* $(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = 0$ *est satisfaite si et seulement si ,* $f(x) = C\left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}$ *pour tout* $c \in \mathbb{R}$*.*

Pour montrer la proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.1 *Soit* $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $n \in \mathbb{N}^*$*.*
Alors $\delta^n g(x) = 0$*, si et seulement si* $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \left(\log \frac{x}{a}\right)^k$*, où les* d_k *sont des constantes réelles pour tout* $k = 0, \cdots, n$*.*

Preuve du proposition 2.1.1 :
supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.

on a,

$$(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = 0\,,$$

signifie que

$$\delta^n \left(\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f\right)(x) = 0\,.$$

Alors d'après le lemme précédent, on a

$$\left(\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\log \frac{x}{a}\right)^k,$$

où $c_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k = 1, 2, \cdots, n$.
On applique l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre α aux deux membres de l'équation précédente , on obtient

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{I}_{a+}^{n} f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}\left(\log \frac{t}{a}\right)^k\right)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k+1-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k},
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \delta^n \left(\mathfrak{I}^n_{a+} f\right)(x) \\
&= \delta^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \delta^n \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1-n)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k-n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1-n)} c_k \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k-n} .
\end{aligned}$$

Si on pose $j = n - k$, on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(n-j)!}{\Gamma(\alpha+k-j)} c_{n-j} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} C_j \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j},
\end{aligned}$$

où

$$C_j = \frac{(n-j)!}{\Gamma(\alpha+k-j)} c_{n-j} .$$

Réciproquement, si

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j},$$

on applique la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard aux deux membres de l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}^\alpha_{a+} f\right)(x) &= \left(\mathfrak{D}^\alpha_{a+} \sum_{j=1}^{n} C_j \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} C_j \left(\mathfrak{D}^\alpha_{a+} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.2 Dérivée Fractionnaire de Type Hadamard dans l'espace $AC^n_{\delta,\mu}[a,b]$

Dans cette section on donne des conditions suffisants pour l'existence de la dérivée fractionnaire de type Hadamard $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+,\mu}$.
On a la caractérisation suivante :

Théorème 2.2.1 *[6] On a , $g \in AC^n_{\delta,\mu}([a,b])$ si et seulement si*

$$g(x) = x^{-\mu}\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\log\frac{x}{a}\right)^k\right], \tag{2.2.1}$$

où $\varphi \in L^1(a,b)$ et c_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ sont des constantes arbitraires.

Preuve :
Soit $g \in AC^n_{\delta,\mu}[a,b]$, alors $\delta^{n-1}[x^\mu g(x)] \in AC[a,b]$ et par suite

$$\delta^{n-1}[x^\mu g(x)] = \int_a^x \varphi(t)dt + c_{n-1}, \tag{2.2.2}$$

où $\varphi \in L^1(a,b)$ et c_{n-1} est un constante arbitraire.
Comme $\delta^{n-1} = x\dfrac{d}{dx}\delta^{n-2}$, alors

$$x\frac{d}{dx}\delta^{n-2}[x^\mu g(x)] = \int_a^x \varphi(t)dt + c_{n-1}.$$

Par suite, on a

$$\frac{d}{dx}\delta^{n-2}[x^\mu g(x)] = \frac{1}{x}\int_a^x \varphi(t)dt + \frac{c_{n-1}}{x}$$

Changeant x à t et t à u et on intègre les deux cotés on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta^{n-2}[x^\mu g(x)] &= \int_a^x \frac{1}{t}\left(\int_a^t \varphi(u)du\right)dt + \int_a^x \frac{c_{n-1}}{t}dt + c_{n-2}\\
&= \int_a^x \varphi(u)\left(\int_u^t \frac{1}{t}dt\right)du + c_{n-1}[\log t]_a^x + c_{n-2}\\
&= \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)\varphi(t)dt + c_{n-1}\left(\log\frac{x}{a}\right) + c_{n-2}\\
&= \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)\varphi(t)dt + c_{n-1}\left(\log\frac{x}{a}\right) + c_{n-2}.
\end{aligned}$$

De même , on a

$$\frac{d}{dx}\delta^{n-3}[x^\mu g(x)] = \frac{1}{x}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)\varphi(t)dt + \frac{c_{n-1}}{x}\left(\log\frac{x}{a}\right) + \frac{c_{n-2}}{x},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\delta^{n-3}\left[x^{\mu}g(x)\right] &= \int_a^x \frac{1}{t}\left(\int_a^t \left(\log\frac{t}{u}\right)\varphi(u)du\right)dt + \int_a^x \frac{c_{n-1}}{t}\left(\log\frac{t}{a}\right)dt + \int_a^x \frac{c_{n-2}}{t}dt + c_{n-3} \\
&= \int_a^x \varphi(u)\left(\int_u^t \left(\log\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}\right)du + \frac{c_{n-1}}{2}\left(\log\frac{x}{a}\right)^2 + c_{n-2}\left(\log\frac{x}{a}\right) + c_{n-3} \\
&= \frac{1}{2}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^2\varphi(t)dt + \frac{c_{n-1}}{2}\left(\log\frac{x}{a}\right)^2 + c_{n-2}\left(\log\frac{x}{a}\right) + c_{n-3}.
\end{aligned}$$

On répète cette procédure m fois avec $(1 \leq m \leq n-1)$, on obtient

$$\delta^{n-m}\left[x^{\mu}g(x)\right] = \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{m-1}\frac{\varphi(t)}{(m-1)!}dt + \sum_{k=0}^{m}\frac{c_{n-m+k}}{k!}\left(\log\frac{x}{a}\right)^k$$

où $c_{n-m}, \ldots, c_{n-1}$ sont des constantes arbitraires.
Pour $m = n$, on obtient

$$x^{\mu}g(x) = \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\frac{\varphi(t)}{(n-1)!}dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{k!}\left(\log\frac{x}{a}\right)^k,$$

c'est à dire

$$g(x) = x^{-\mu}\left[\frac{1}{(n-1)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}c_k\left(\log\frac{x}{a}\right)^k\right].$$

Réciproquement, supposons que g est représentée sous la forme

$$g(x) = x^{-\mu}\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}c_k\left(\log\frac{x}{a}\right)^k\right].$$

C'est à dire

$$x^{\mu}g(x) = \left[\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}c_k\left(\log\frac{x}{a}\right)^k\right].$$

En appliquant la dérivée $\delta^m \quad (1 \leq m \leq n-1)$, on a

$$\begin{aligned}
\delta^m\left(x^{\mu}g(x)\right) &= \delta^m\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}c_k\left(\log\frac{x}{a}\right)^k\right] \\
&= \delta^{m-1}\left[x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}c_k\left(\log\frac{x}{a}\right)^k\right)\right] \\
&= \delta^{m-1}\left[\frac{(n-1)}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-2}\varphi(t)dt + \sum_{k=1}^{n-1}c_k k\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-1}\right] \\
&= \delta^{m-1}\left[\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-2}\varphi(t)dt + \sum_{k=1}^{n-1}c_k k\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-1}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^m\left(x^\mu g(x)\right) &= \delta^{m-2}\left[x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-2}\varphi(t)dt+\sum_{k=1}^{n-1}c_k k\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-1}\right)\right]\\
&= \delta^{m-2}\left[\frac{(n-2)}{(n-2)!}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-3}\varphi(t)dt+\sum_{k=1}^{n-1}c_k k(k-1)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-2}\right]\\
&= \delta^{m-2}\left[\frac{1}{(n-3)!}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-3}\varphi(t)dt+\sum_{k=2}^{n-1}c_k k(k-1)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-2}\right].
\end{aligned}$$

Par récurrence, on a

$$\begin{aligned}
\delta^m\left(x^\mu g(x)\right) &= \frac{1}{(n-m-1)!}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-m-1}\varphi(t)dt\\
&\quad+\sum_{k=m}^{n-1}k(k-1)\dots(k-m+1)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-m}\\
&= \frac{1}{(n-m-1)!}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-m-1}\varphi(t)dt\\
&\quad+\sum_{k=m}^{n-1}\frac{c_k k!}{(k-m)!}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-m},
\end{aligned}$$

Pour $m=n-1$, on a :

$$\delta^{n-1}\left(x^\mu g(x)\right)=\int_a^x\varphi(t)dt+(n-1)!c_{n-1}.$$

Remarque 2.2.1

Soit

$$\varphi(t)=g'_{n-1}(t),\ c_k=\frac{g_k(a)}{k!}\quad(k=0,1,\dots,n-1), \tag{2.2.3}$$

Où

$$g_k(x)=\delta^k\left[x^\mu g(x)\right]\quad(k=0,1,\dots,n-1),\ g_0(x)=x^\mu g(x). \tag{2.2.4}$$

alors

$$g(x)=x^\mu\left[\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\frac{g'_{n-1}(t)}{(n-1)!}dt+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{k!}\left(\log\frac{x}{a}\right)^k\right]. \tag{2.2.5}$$

Théorème 2.2.2 *[6] Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $g \in AC^n_{\delta,\mu}[a,b]$. Alors la dérivée fractionnaire de type Hadamard $\mathfrak{D}^\alpha_{a+,\mu}g$ existe presque partout sur $[a,b]$ et elle est représentée sous la forme*

$$\left(\mathfrak{D}^\alpha_{a+,\mu}g\right)(x) = x^\mu \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} g'_{n-1}(t)dt \right. \tag{2.2.6}$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}\right],$$

où $g_k(a)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ sont donnés par (2.2.4)

Preuve :
Comme $g \in AC^n_{\delta,\mu}[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^\alpha_{a+,\mu}g\right)(x) &= x^{-\mu}\delta^n \left(x^\mu \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^\mu \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\right. \\ &\left.\times \left[t^{-\mu}\left(\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t \left(\log\frac{t}{u}\right)^{n-1} g'_{n-1}(u)du + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{k!}\left(\log\frac{t}{a}\right)^k\right)\right]\frac{dt}{t}\right) \\ &= x^{-\mu}\delta^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\left(\int_a^t \frac{g'_{n-1}(u)}{(n-1)!}\left(\log\frac{t}{u}\right)^{n-1} du\right)\frac{dt}{t}\right. \\ &\left. + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{k!}\left(\log\frac{t}{a}\right)^k \frac{dt}{t}\right].\end{aligned}$$

Interchangeant l'ordre d'intégration , on obtient

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^\alpha_{a+,\mu}g\right)(x) &= x^{-\mu}\delta^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{g'_{n-1}(u)}{(n-1)!}\left(\int_u^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\left(\log\frac{t}{u}\right)^{n-1}\frac{dt}{t}\right)du\right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{k!\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\left(\log\frac{t}{a}\right)^k \frac{dt}{t}\right],\end{aligned}$$

On pose

$$\tau = \frac{(\log\frac{t}{u})}{(\log\frac{x}{u})},$$

et en suite on pose

$$s = \frac{(\log\frac{t}{a})}{(\log\frac{x}{a})},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+,\mu} g\right)(x) &= x^{-\mu}\delta^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{g'_{n-1}(u)}{(n-1)!}\right.\\
&\left(\int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{n-\alpha-1}\tau^{n-1}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{n-1}\left(\log\frac{x}{u}\right)d\tau\right)du\\
&\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{k!\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha-1}s^k\left(\log\frac{x}{a}\right)^k\left(\log\frac{x}{a}\right)ds\right]\\
&= x^{-\mu}\delta^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{g'_{n-1}(u)}{(n-1)!}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-1}\left(\int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{n-1}d\tau\right)du\right.\\
&\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{k!\Gamma(n-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^k ds\right]\\
&= x^{-\mu}\delta^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{g'_{n-1}(u)}{(n-1)!}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-1}B\left(n-\alpha,n\right)du\right.\\
&\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{k!\Gamma(n-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k}B\left(n-\alpha,k+1\right)\right]\\
&= x^{-\mu}\delta^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{g'_{n-1}(u)}{(n-1)!}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-1}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n)}{\Gamma(2n-\alpha)}du\right.\\
&\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{k!\Gamma(n-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}\right]\\
&= x^{-\mu}\delta^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)}\int_a^x g'_{n-1}(u)\left(\log\frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-1}du\right.\\
&\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k}\right]\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left[x\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)}\int_a^x g'_{n-1}(u)\left(\log\frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-1}du\right.\\
&\left.+x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k}\right]\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left[\frac{1}{\Gamma(2n-\alpha-1)}\int_a^x g'_{n-1}(u)\left(\log\frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-2}du\right.\\
&\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{\Gamma(n-\alpha+k)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k-1}\right].
\end{aligned}$$

Par réccurence on obtient

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+,\mu}g\right)(x) = x^{-\mu}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x g'_{n-1}(t)\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}\right].$$

Corollaire 2.2.1 *[6] Si $0<\alpha<1$, $\mu\in\mathbb{R}$ et $g\in AC^1_{\delta,\mu}[a,b]$, alors $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+,\mu}g$ existe presque partout sur $[a,b]$ et*

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+,\mu}g\right)(x) = \frac{x^{-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{-\mu}[t^{\mu}g(t)]'\frac{dt}{t} + \lim_{t\to a+}[t^{\mu}g(t)]\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}\right] \tag{2.2.7}$$

Théorème 2.2.3 *[6] Soit $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$ et $g\in AC^n_{\delta,0}[a,b]$. Alors la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}g$ existe presque partout sur $[a,b]$ et elle est représentée sous la forme*

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}g\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}(\delta^n g)(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^k g\right)(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}. \tag{2.2.8}$$

Preuve :

Comme $g\in AC^n_{\delta,\mu}[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}g\right)(x) &= \delta^n\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\right.\\ &\quad\left.\times\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t\left(\log\frac{t}{u}\right)^{n-1}g'_{n-1}(u)du + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{k!}\left(\log\frac{t}{a}\right)^k\right]\frac{dt}{t}\right)\\ &= \delta^n\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\left(\int_a^t\frac{g'_{n-1}(u)}{(n-1)!}\left(\log\frac{t}{u}\right)^{n-1}du\right)\frac{dt}{t}\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{k!}\left(\log\frac{t}{a}\right)^k\frac{dt}{t}\right],\end{aligned}$$

interchangeant l'ordre d'intégration , on obtient

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}g\right)(x) &= \delta^n\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\frac{g'_{n-1}(u)}{(n-1)!}\left(\int_u^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\left(\log\frac{t}{u}\right)^{n-1}\frac{dt}{t}\right)du\right.\\ &\quad\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{k!\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\left(\log\frac{t}{a}\right)^k\frac{dt}{t}\right],\end{aligned}$$

On pose

$$\tau = \frac{(\log \frac{t}{u})}{(\log \frac{x}{u})},$$

et en suite on pose

$$s = \frac{(\log \frac{t}{a})}{(\log \frac{x}{a})},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} g\right)(x) &= \delta^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{g_{n-1}'(u)}{(n-1)!} \right. \\
&\left(\int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1} \left(\log \frac{x}{u}\right)^{n-\alpha-1} \tau^{n-1} \left(\log \frac{x}{u}\right)^{n-1} \left(\log \frac{x}{u}\right) d\tau \right) du \\
&\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k(a)}{k!\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{n-\alpha-1} s^k \left(\log \frac{x}{a}\right)^k \left(\log \frac{x}{a}\right) ds \right] \\
&= \delta^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{g_{n-1}'(u)}{(n-1)!} \left(\log \frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-1} \left(\int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{n-1} d\tau \right) du \right. \\
&\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k(a)}{k!\Gamma(n-\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^k ds \right] \\
&= \delta^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{g_{n-1}'(u)}{(n-1)!} \left(\log \frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-1} B(n-\alpha, n)\, du \right. \\
&\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k(a)}{k!\Gamma(n-\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k} B(n-\alpha, k+1) \right] \\
&= \delta^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{g_{n-1}'(u)}{(n-1)!} \left(\log \frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-1} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n)}{\Gamma(2n-\alpha)} du \right. \\
&\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k(a)}{k!\Gamma(n-\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \right] \\
&= \delta^n \left[\frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x g_{n-1}'(u) \left(\log \frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-1} du \right. \\
&\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k(a)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} g\right)(x) &= \delta^{n-1}\left[x\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)}\int_a^x g'_{n-1}(u)\left(\log\frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-1}du\right.\\ &\left.+x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k}\right]\\ &= \delta^{n-1}\left[\frac{1}{\Gamma(2n-\alpha-1)}\int_a^x g'_{n-1}(u)\left(\log\frac{x}{u}\right)^{2n-\alpha-2}du\right.\\ &\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{\Gamma(n-\alpha+k)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+k-1}\right],\end{aligned}$$

par réccurence , on obtient

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x g'_{n-1}(t)\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_k(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}\right].$$

D'après (2.2.4) , on obtient

$$g'_{n-1}(x) = \left(\delta^n g(x)\right),$$

et

$$g_k(x) = \left(\delta^k g\right)(x).$$

Donc

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\left(\delta^n g(t)\right)dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^k g\right)(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}.$$

Corollaire 2.2.2 *Si $0<\alpha<1$ et $g \in AC^1_{\delta,0}[a,b]$, alors $\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} g$ existe presque partout sur $[a,b]$ et*

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{-\alpha} g'(t)dt + \frac{g(a)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}. \qquad (2.2.9)$$

2.3 Propriété de la composition de la dérivée fractionnaire et l'intégrale fractionnaire de Hadamard

Théorème 2.3.1 *([6] , [7]) Soit $\alpha>0$, $\beta>0$, $1\le p\le\infty$, $0<a<b<\infty$ et soit $\mu\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ tel que $\mu\ge c$. Alors pour $f\in X^p_c(a,b)$ on a*

$$\mathfrak{D}_{a+,\mu}^{\beta}\mathfrak{J}_{a+,\mu}^{\alpha} f = \mathfrak{J}_{a+,\mu}^{\alpha-\beta} f. \qquad (2.3.1)$$

En particulier, si $\beta = m\in\mathbb{N}^*$, alors

$$\mathfrak{D}_{a+,\mu}^{m}\mathfrak{J}_{a+,\mu}^{\alpha} f = \mathfrak{J}_{a+,\mu}^{\alpha-m} f. \qquad (2.3.2)$$

Preuve :
Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.

On a,

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}^{\beta}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right)(x) &= x^{-\mu}\delta^{n}\left[x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-\beta}_{a+,\mu}\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right)\right](x)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n}\left(x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-\beta+\alpha}_{a+,\mu}f\right)(x)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left[x\frac{d}{dx}\left(x^{\mu}\frac{1}{\Gamma(n-\beta+\alpha)}\int_a^x\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\beta+\alpha-1}f(t)\frac{dt}{t}\right)\right]\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left[x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\beta+\alpha)}\int_a^x t^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\beta+\alpha-1}f(t)\frac{dt}{t}\right)\right]\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left(\frac{x(n-\beta+\alpha-1)}{\Gamma(n-\beta+\alpha)}\frac{1}{x}\int_a^x t^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\beta+\alpha-2}f(t)\frac{dt}{t}\right)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\beta+\alpha-1)}\int_a^x t^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\beta+\alpha-2}f(t)\frac{dt}{t}\right)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-2}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\beta+\alpha-2)}\int_a^x t^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\beta+\alpha-3}f(t)\frac{dt}{t}\right)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-2}\left(x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-\beta+\alpha-2}_{a+,\mu}f\right)(x)\,,
\end{aligned}$$

par récurrence, on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}^{\beta}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right)(x) &= x^{-\mu}\left(x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-\beta+\alpha-n}_{a+,\mu}f\right)(x)\\
&= \mathfrak{I}^{\alpha-\beta}_{a+,\mu}f(x)\,.
\end{aligned}$$

En particulier, pour $\beta = m$, on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^{m}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f &= \mathfrak{D}^{\beta}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\beta-m}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\\
&= \mathfrak{D}^{\beta}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\beta-m+\alpha}_{a+,\mu}f\\
&= \mathfrak{I}^{\beta-m+\alpha-\beta}_{a+,\mu}f\\
&= \mathfrak{I}^{\alpha-m}_{a+,\mu}f\,.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.3.1 *Soit $\alpha > \beta > 0, 1 \leq p \leq \infty, 0 < a < b < \infty$ et $c \leq 0$. Alors pour $f \in X^p_c(a,b)$ on a*

$$\mathfrak{D}^{\beta}_{a+}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}f = \mathfrak{I}^{\alpha-\beta}_{a+}f\,. \tag{2.3.3}$$

En particulier, Si $\beta = m \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\mathfrak{D}^{m}_{a+}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}f = \mathfrak{I}^{\alpha-m}_{a+}f\,. \tag{2.3.4}$$

Théorème 2.3.2 *([6] , [7]) Soit $\alpha > 0, 1 \leq p \leq \infty, 0 < a < b < \infty$ et soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mu \geq c$. Alors pour $f \in X_c^p(a,b)$ on a*

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f = f\,. \tag{2.3.5}$$

Preuve :
Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.

On a,

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right)(x) &= x^{-\mu}\delta^{n}\left[x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+,\mu}\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right)\right](x)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n}\left(x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-\alpha+\alpha}_{a+,\mu}f\right)(x)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left[x\frac{d}{dx}\left(x^{\mu}\mathfrak{I}^{n}_{a+,\mu}f\right)\right](x)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left[x\frac{d}{dx}\left(x^{\mu}\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}f(t)\frac{dt}{t}\right)\right]\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left(x\frac{d}{dx}\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x t^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-2}f(t)\frac{dt}{t}\right)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left(\frac{x(n-1)}{(n-1)!}\frac{1}{x}\int_a^x t^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-2}f(t)\frac{dt}{t}\right)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-1}\left(\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x t^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-2}f(t)\frac{dt}{t}\right)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-2}\left(\frac{1}{(n-3)!}\int_a^x t^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-3}f(t)\frac{dt}{t}\right)\\
&= x^{-\mu}\delta^{n-2}\left(x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-2}_{a+,\mu}f\right)(x)\,,
\end{aligned}$$

par récurrence, on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+,\mu}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}f\right)(x) &= x^{-\mu}\left(x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-n}_{a+,\mu}f\right)(x)\\
&= f(x)\,.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.3.2 *Soit $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < a < b < \infty$ et soit $c \leq 0$. Alors pour $f \in X_c^p(a,b)$, on a*

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}f = f\,. \tag{2.3.6}$$

Théorème 2.3.3 *([4] , [6] , [7]) Soit $\Re(\alpha) > 0$, $n = -[-\Re(\alpha)]$ et $0 < a < b < +\infty$. Si $f \in L(a,b)$ et $\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}f \in AC^n_{\delta}[a,b]$, alors*

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\delta^{n-k}\left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}f\right)\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}. \tag{2.3.7}$$

En particulier, Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in AC^n_{\delta}[a,b]$, alors

$$\left(\mathfrak{I}^{n}_{a+}\mathfrak{D}^{n}_{a+}f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\delta^{k}f\right)(a)}{k!}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k}. \tag{2.3.8}$$

Preuve :
Supposons que tout les hypothèses du théorème sont satisfaites.

On sait que

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}g = g.$$

Ce qui donne

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}f\right) = \mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}f.$$

C'est-à-dire

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}f - f\right) = 0.$$

Par suite d'aprés la Proposition 2.1.1, on a

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}, \tag{2.3.9}$$

où $c_j \in \mathbb{C}$.
Maintenant on va déterminer c_j pour tout $j = 1, ..., n$.
En appliquant l'opérateur $\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}$ aux deux membres de l'égalité (2.3.9), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}^{n}_{a+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}f(x) &= \mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}f(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} \\
&= \mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}f(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{(n-j)!}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-j} \\
&= \mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} c_{n-j} \frac{\Gamma(\alpha+j-n+1)}{j!}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{j}.
\end{aligned}$$

Comme pour tout $0 \leq j \leq n-1$, on a

$$\lim_{x\to a+}\mathfrak{D}^{j}_{a+}\mathfrak{I}^{n}_{a+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = \lim_{x\to a+}\mathfrak{I}^{n-j}_{a+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = 0,$$

et

$$\lim_{x\to a+}\mathfrak{D}^{j}_{a+}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k} = \begin{cases} j! \text{ si } k=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

on obtient

$$c_{n-j}\frac{\Gamma(\alpha+j-n+1)}{j!}j! = -\lim_{x\to a+}\mathfrak{D}^{j}_{a+}\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}f(x).$$

Ce qui donne

$$c_{n-j} = -\frac{\lim\limits_{x\to a+} \mathfrak{D}^{j}_{a+}\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+} f(x)}{\Gamma(\alpha+j-n+1)},$$

On remplace dans (2.3.9) , on obtient

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\lim\limits_{x\to a+} \delta^{n-j}_{a+}\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+} f(x)}{\Gamma(\alpha-n+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}.$$

2.4 Applications des fonctions de Stirling d'ordre complexe aux intégrale et dérivée fractionnaire de Hadamard

2.4.1 L'opérateur différentiel de Mellin

Définition 2.4.1 *[1] L'opérateur différentiel de Mellin Θ_μ d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ pour $\mu \in \mathbb{R}$ est défini par*

$$\Theta_\mu f(x) := xf'(x) + \mu f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{2.4.1}$$

à condition que f' existe presque partout sur $\mathbb{R}_+$.
L'opérateur différentiel de Mellin d'ordre $r \in \mathbb{N}$ est défini par récurrence comme suit

$$\Theta^1_\mu := \Theta_\mu\,, \quad \Theta^r_\mu := \Theta_\mu\left(\Theta^{r-1}_\mu\right), \quad (r \geq 2).$$

pour $\mu = 0$, Θ^r_0 est noté Θ^r .

Remarque 2.4.1 *Pour $r = 0$, on pose par définition $\Theta^0_\mu := I$, où I est l'identité.*

Exemple 2.4.1 *[1]*

1) Calculons $\Theta^2_\mu f$.

On a,

$$\begin{aligned}
\Theta^2_\mu f(x) &= \Theta_\mu\left(\Theta_\mu f\right)(x) \\
&= \Theta_\mu\left(xf'(x) + \mu f(x)\right) \\
&= x\left[xf'(x) + \mu f(x)\right]' + \mu\left[xf'(x) + \mu f(x)\right] \\
&= x\left[xf^{(2)}(x) + (\mu+1)f'(x)\right] + \mu x f'(x) + \mu^2 f(x) \\
&= x^2 f^{(2)}(x) + (2\mu+1)xf'(x) + \mu^2 f(x).
\end{aligned}$$

2) Calculons $\Theta_{\mu}^{3} f$.

On a,

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mu}^{3} f(x) &= \Theta_{\mu}\left(\Theta_{\mu}^{2} f\right)(x) \\
&= \Theta_{\mu}\left[x^{2} f^{(2)}(x) + (2\mu+1) x f'(x) + \mu^{2} f(x)\right] \\
&= x\left[x^{2} f^{(2)}(x) + (2\mu+1) x f'(x) + \mu^{2} f(x)\right]' \\
&+ \mu\left[x^{2} f^{(2)}(x) + (2\mu+1) x f'(x) + \mu^{2} f(x)\right] \\
&= 2x^{2} f^{(2)}(x) + x^{3} f^{(3)}(x) + (2\mu+1) x f'(x) + (2\mu+1) x^{2} f^{(2)}(x) + \mu^{2} x f'(x) \\
&+ \mu x^{2} f^{(2)}(x) + \mu(2\mu+1) x f'(x) + \mu^{3} f(x) \\
&= x^{3} f^{(3)}(x) + (3\mu+3) x^{2} f^{(2)}(x) + (3\mu^{2}+3\mu+1) x f'(x) + \mu^{3} f(x).
\end{aligned}$$

Définition 2.4.2 *(Fonction de Stirling de deuxième espèce) ([2] , [3])*
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors la fonction de Stirling de deuxième espèce notée par $S(\alpha, k)$ est définie par

$$S(\alpha, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0; k \in \mathbb{N}), \tag{2.4.2}$$

avec les propriétés

$$\begin{aligned}
S(0,0) &= 1, && (2.4.3)\\
S(0,k) &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}), && (2.4.4)\\
S(n,k) &= 0 \quad (n,k \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq k-1), && (2.4.5)\\
S(\alpha,0) &= 0 \quad (\Re(\alpha) > 0), && (2.4.6)\\
S(\alpha,-1) &= 0. && (2.4.7)
\end{aligned}$$

Lemme 2.4.1 *[2] Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\alpha \neq -1)$ et $k \in \{2, 3, \cdots\}$, on a la relation suivante*

$$S(\alpha+1, k) = kS(\alpha, k) + S(\alpha, k-1). \tag{2.4.8}$$

Preuve :
Supposons que les hypothèses du lemme sont satisfaites.

On a

$$\begin{aligned}\binom{k}{j} &= \frac{k!}{j!(k-j)!} \\ &= k\frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{1}{j} \\ &= k\binom{k-1}{j-1}\frac{1}{j}\,.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}S(\alpha+1,k) &= \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^{\alpha+1} \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^{\alpha+1}+\frac{k^{\alpha+1}}{k!} \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\left[k\binom{k-1}{j-1}\frac{1}{j}\right]j^{\alpha+1}+\frac{k^{\alpha+1}}{k!} \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k-1}{j-1}j^{\alpha}+\frac{k^{\alpha+1}}{k!}.\end{aligned}$$

Comme

$$\binom{k}{j} = \binom{k-1}{j}+\binom{k-1}{j-1} \qquad (k\,,\, j\in\mathbb{N},\, 1\leq j<k)\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}S(\alpha+1,k) &= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^{\alpha}-\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k-1}{j}j^{\alpha}+\frac{k^{\alpha+1}}{k!} \\ &= k\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^{\alpha}+k\frac{k^{\alpha}}{k!}+\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-1-j}\binom{k-1}{j}j^{\alpha} \\ &= k\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^{\alpha}+\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-1-j}\binom{k-1}{j}j^{\alpha} \\ &= kS(\alpha,k)+S(\alpha,k-1)\,.\end{aligned}$$

Définition 2.4.3 *(Fonction de Stirling généralisée de deuxième espèce) [2]*
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
La fonction de Stirling généralisée notée $S_\mu(\alpha, k)$ est donnée par :

$$S_\mu(\alpha,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(\mu+j)^\alpha, \tag{2.4.9}$$

$$\lim_{\mu\to 0} S_\mu(\alpha,k) = S(\alpha,k). \tag{2.4.10}$$

On peut aussi définir la fonction de Stirling $S_\mu(\alpha, k)$ par

$$S_\mu(\alpha,0) = \mu^\alpha,\; S_\mu(\alpha+1,k) = S_\mu(\alpha,k-1) + (\mu+k)S_\mu(\alpha,k). \tag{2.4.11}$$

Lemme 2.4.2 *[1] La dérivée de Mellin d'ordre $r \in \mathbb{N}$ a pour $\mu \in \mathbb{R}$ la représentation suivante*

$$\Theta_\mu^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} S_\mu(r,k)x^k f^{(k)}(x). \tag{2.4.12}$$

Preuve :
Supposons que les hypothèses du lemme sont satisfaites.
On utilise un raisonnement par récurrence.

Pour $r = 1$, on a

$$\begin{aligned}\Theta_\mu f(x) &= \sum_{k=0}^{1} S_\mu(1,k)x^k f^{(k)}(x)\\ &= S_\mu(1,0)f(x) + S_\mu(1,1)xf'(x)\\ &= xf'(x) + \mu f(x).\end{aligned}$$

Donc la propriété est vérifie pour $r = 1$.
Supposons que la propriété est vraie pour r un entier naturel non nul fixé et montrons qu'elle reste vraie pour $r + 1$.

On a,

$$\Theta_\mu^{r+1} f(x) = x\frac{d}{dx}\Theta_\mu^r f(x) + \mu\Theta_\mu^r f(x). \tag{2.4.13}$$

Comme

$$\begin{aligned}x\frac{d}{dx}\Theta_\mu^r f(x) &= x\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{r} S_\mu(r,k)x^k f^{(k)}(x)\right)\\ &= x\left[\sum_{k=0}^{r} S_\mu(r,k)\frac{d}{dx}\left(x^k f^{(k)}(x)\right)\right]\\ &= x\left[\sum_{k=0}^{r} S_\mu(r,k)\left(kx^{k-1}f^{(k)}(x) + x^k f^{(k+1)}(x)\right)\right]\\ &= \sum_{k=0}^{r} S_\mu(r,k)\left(kx^k f^{(k)}(x) + x^{k+1} f^{(k+1)}(x)\right).\end{aligned}$$

Par suite d'après (2.4.13), on obtient

$$\begin{aligned}
\Theta_\mu^{r+1} f(x) &= \sum_{k=0}^{r} S_\mu(r,k)\left(kx^k f^{(k)}(x) + x^{k+1} f^{(k+1)}(x)\right) + \mu \sum_{k=0}^{r} S_\mu(r,k) x^k f^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{r} S_\mu(r,k)\left((k+\mu) x^k f^{(k)}(x) + x^{k+1} f^{(k+1)}(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{r} (k+\mu) S_\mu(r,k) x^k f^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{r} S_\mu(r,k) x^{k+1} f^{(k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{r} (k+\mu) S_\mu(r,k) x^k f^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{r+1} S_\mu(r,j-1) x^j f^{(j)}(x).
\end{aligned}$$

Comme $S_\mu(r,r+1) = 0$ et $S_\mu(r,-1) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Theta_\mu^{r+1} f(x) &= \sum_{k=0}^{r+1} \left(S_\mu(r,k)(k+\mu) + S_\mu(r,k-1)\right) x^k f^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{r+1} S_\mu(r+1,k) x^k f^{(k)}(x).
\end{aligned}$$

Inversement, on a le résultat suivant

Proposition 2.4.1 *[1] Soit r un entier naturel non nul et $\mu \in \mathbb{R}$ et f une fonction alors*

$$f^{(r)}(x) = x^{-r} \sum_{k=0}^{r} S_\mu(r,k) \Theta_\mu^k f(x).$$

Preuve :

Supposons que les hypothèses du proposition sont satisfaites.

Comme

$$\sum_{j=k}^{r} S_\mu(r,j) S_\mu(j,k) = \delta_{r,k},$$

alors

$$\begin{aligned}
x^r f^{(r)}(x) &= \sum_{k=0}^{r} \delta_{r,k} x^k f^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{j=k}^{r} S_\mu(r,j) S_\mu(j,k) x^k f^{(k)}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{r} S_\mu(r,j) \sum_{k=0}^{j} S_\mu(j,k) x^k f^{(k)}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{r} S_\mu(r,j) \Theta_\mu^j f(x),
\end{aligned}$$

par suite, on a

$$f^{(r)}(x) = x^{-r} \sum_{j=0}^{r} S_{\mu}(r,j)\Theta_{\mu}^{j} f(x)\,.$$

2.4.2 Quelques résultats

Lemme 2.4.3 *[2] Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mu > 0$, $l > 0$ et soit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$, $f_k(x) \in C([0,l])$.*

(i) Si $\Re(\alpha) > 0$ et la série $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ est uniformément convergente sur $[0,l]$, alors on a

$$\left(\mathfrak{I}_{0+,\mu}^{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathfrak{I}_{0+,\mu}^{\alpha} f_k\right)(x),\ (0 < x < l), \tag{2.4.14}$$

et la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathfrak{I}_{0+,\mu}^{\alpha} f_k\right)(x)$ est aussi uniformément convergente sur $[0,l]$.

(ii) Si $\Re(\alpha) \geq 0$ et les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathfrak{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f_k\right)(x)$ sont uniformément convergentes sur $[\epsilon,l]$, $(\epsilon > 0)$, alors le premier série admet la dérivée fractionnaire de type Hadamard terme à terme et on a

$$\left(\mathfrak{D}_{0+,\mu}^{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathfrak{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f_k\right)(x),\ (0 < x < l). \tag{2.4.15}$$

Preuve :
Supposons que les hypothèses du lemme sont satisfaites.

(i) Soit $\Re(\alpha) > 0$. Pour $m \in \mathbb{N}$ on note $S_m(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m} f_k(x)$.
Soit $\epsilon > 0$, d'après la convergence uniforme de la série alors $\exists \eta \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \in \mathbb{N}$, $(m \geq \eta \Rightarrow |S_m(x)| \leq \epsilon,\ \forall x \in [0,l])$.
Donc on a :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\mathfrak{I}_{0+,\mu}^{\alpha} f\right)(x) - \left(\mathfrak{I}_{0+,\mu}^{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)(x)\right| &= \left|\mathfrak{I}_{0+,\mu}^{\alpha}\left(f - \sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)(x)\right| \\
&\leq |S_m(t)| \left(\mathfrak{I}_{0+,\mu}^{\Re(\alpha)} 1\right)(x) \\
&\leq \epsilon \left(\mathfrak{I}_{0+,\mu}^{\Re(\alpha)} 1\right)(x) = \epsilon \mu^{-\Re(\alpha)}.
\end{aligned}$$

En conclusion, pour $\Re(\alpha) > 0$ on a,

$$\left(\mathfrak{I}_{0+,\mu}^{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathfrak{I}_{0+,\mu}^{\alpha} f_k\right)(x),\ (0 < x < l).$$

(ii) Pour $\alpha = 0$, la propriété est évidente.
Pour $\alpha \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) &= x^{-\mu}\delta^{n} x^{\mu}\left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+,\mu}\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)(x) \\
&= x^{-\mu}\delta^{n} x^{\mu}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+,\mu} f_k)(x)\right) \\
&= x^{-\mu}\delta^{n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+,\mu} f_k\right)(x).
\end{aligned}$$

Si la série à droite est dérivable terme à terme, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{-\mu}\delta^{n} x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+,\mu} f_k\right)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f_k\right)(x).
\end{aligned}$$

En conclusion, pour $\Re(\alpha) \geq 0$ on a,

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu}\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f_k\right)(x),\ (0 < x < l).$$

Lemme 2.4.4 *[2] Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mu > 0$ et soit f la fonction définie par la série entière suivante*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \qquad (a_k \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}). \tag{2.4.16}$$

(i) Si $Re(\alpha) > 0$, alors l'intégrale de type de Hadamard $\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu} f$ est représentée par la série entière suivante

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\mu + k)^{-\alpha} a_k x^k. \tag{2.4.17}$$

(ii) Si $Re(\alpha) \geq 0$, alors la dérivée de type Hadamard $\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f$ est représentée par la série entière suivante

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\mu + k)^{\alpha} a_k x^k. \tag{2.4.18}$$

Preuve :
Supposons que les hypothèses du lemme sont satisfaites.

(i) On a ,

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu} f(x) = \mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right),$$

d'après le lemme précédent , on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu} f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu} a_k x^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu} x^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\mu + k)^{-\alpha} x^k.
\end{aligned}$$

(ii) On a ,

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f(x) = \mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right),$$

d'après le lemme précédent , on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} a_k x^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} x^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\mu + k)^{-\alpha} x^k.
\end{aligned}$$

2.4.3 Applications des fonctions de Stirling d'ordre complexe aux intégrale et dérivée fractionnaire de Hadamard

Dans cette section on montre que l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire de type Hadamard sont exprimées en fonction de $S_\mu(\alpha, k)$ et la dérivée classique.

Théorème 2.4.1 *[2] Soit f une fonction différentiable définie pour $x > 0$, telle que sa série de Taylor converge, et soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mu > 0$.*

(i) Si Re$(\alpha) \geq 0$*, la dérivée fractionnaire de type Hadamard* $\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu}f$ *est donnée par*

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu}f\right)(x) = x^{-\mu}\delta\left(x^{\mu}\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+,\mu}f\right)(x)\,, \tag{2.4.19}$$

si et seulement si pour $x > 0$ *, on a*

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu}f\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_{\mu}(\alpha,k)x^{k}f^{(k)}(x)\,. \tag{2.4.20}$$

(ii) Si $\Re(\alpha) > 0$*, l'intégrale fractionnaire de type Hadamard* $\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}f$ *est donné par*

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}\,,$$

si et seulement si pour $x > 0$*, on a*

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}f\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_{\mu}(-\alpha,k)x^{k}f^{(k)}(x)\,. \tag{2.4.21}$$

Preuve :
Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.

(i) Pour $\alpha = 0$, on a :

$$\left(\mathfrak{D}^{0}_{0+,\mu}f\right)(x) = f(x),$$

et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} S_{\mu}(0,k)x^{k}f^{(k)}(x) = S_{\mu}(0,0)f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} S_{\mu}(0,k)x^{k}f^{(k)}(x),$$

Comme

$$S_{\mu}(0,0) = \frac{1}{0!}(-1)^{0}\binom{0}{0} = 1,$$

et

$$\begin{aligned} S_{\mu}(0,k) &= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} \\ &= \frac{1}{k!}(1-1)^{k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On obtient,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} S_{\mu}(0,k)x^{k}f^{(k)}(x) = f(x),$$

alors,

$$\left(\mathfrak{D}^0_{0+,\mu}f\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_\mu(0,k)x^k f^{(k)}(x).$$

Pour $\alpha \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^\alpha_{0+,\mu}f\right)(x) &= x^{-\mu}\delta^n x^\mu \left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+,\mu}f\right)(x)\\ &= x^{-\mu}\delta^n x^\mu \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^\mu \left(\log\frac{x}{u}\right)^{n-\alpha-1} f(u)\frac{du}{u}.\end{aligned}$$

Pour $x > 0$ fixé , comme f admet un développement en série de Taylor alors pour tout $u \in [0,x]$ et tout $y > 0$, on a

$$f(u) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(u-y)^k,$$

par suite d'après la formule du binôme de Newton , on a

$$\begin{aligned}f(u) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}y^{k-j}u^j\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}u^j\left(\sum_{k=j}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}y^{k-j}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}a_j(y)u^j,\end{aligned}$$

avec

$$a_j(y) = \sum_{k=j}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}y^{k-j}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^\alpha_{0+,\mu}f\right)(x) &= x^{-\mu}\delta^n x^\mu \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^\mu \left(\log\frac{x}{u}\right)^{n-\alpha-1}\\ &\times\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}y^{k-j}u^j\right)\frac{du}{u}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}y^{k-j}\left(\mathfrak{D}^\alpha_{0+,\mu}u^j\right)(x)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}y^{k-j}(\mu+j)^\alpha x^j,\end{aligned}$$

Si on pose $y = x$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x^{k-j} (\mu + j)^{\alpha} x^{j} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k} f^{(k)}(x) \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (\mu + j)^{\alpha} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} S_{\mu}(\alpha, k) x^{k} f^{(k)}(x).\end{aligned}$$

Réciproquement, on a

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} S_{\mu}(\alpha, k) x^{k} f^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k} f^{(k)}(x) \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (\mu + j)^{\alpha} \right),\end{aligned}$$

prenant tout $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k} f^{(k)}(x) y^{-j} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} y^{j} (\mu + j)^{\alpha} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} x^{k} y^{-j} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} u^{j}\right)(x) \\ &= x^{-\mu} \delta^{n} x^{\mu} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{x} \left(\frac{u}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{u}\right)^{n-\alpha-1} \\ &\times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} x^{k} y^{-j} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} u^{j} \right) \frac{du}{u},\end{aligned}$$

si on pose $y = x$, on a

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) &= x^{-\mu} \delta^{n} x^{\mu} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{x} \left(\frac{u}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{u}\right)^{n-\alpha-1} \\ &\times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x^{k-j} u^{j} \right) \frac{du}{u} \\ &= x^{-\mu} \delta^{n} x^{\mu} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{x} \left(\frac{u}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{u}\right)^{n-\alpha-1} f(u) \frac{du}{u}.\end{aligned}$$

En conclusion, pour $\Re(\alpha) \geq 0$, on a

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) = x^{-\mu} \delta \left(x^{\mu} \mathfrak{J}^{n-\alpha}_{0+,\mu} f \right)(x),$$

si et seulement si pour $x > 0$, on a

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_{\mu}(\alpha, k) x^{k} f^{(k)}(x).$$

(ii) pour $\Re(\alpha) > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}y^{k-j}u^j\right)\frac{du}{u} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}y^{k-j}\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}u^j\right)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}y^{k-j}(\mu+j)^{-\alpha}x^j ,
\end{aligned}$$

si on pose $y = x$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}f\right)(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(\mu+j)^{-\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} f^{(k)}(x)x^k\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(\mu+j)^{-\alpha}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} S_{\mu}(-\alpha,k)x^k f^{(k)}(x) .
\end{aligned}$$

Contrairement, on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}f\right)(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} S_{\mu}(-\alpha,k)x^k f^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} x^k f^{(k)}(x)\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(\mu+j)^{-\alpha}\right),
\end{aligned}$$

prenant tout $y > 0$,on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}f\right)(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^k f^{(k)}(x)y^{-j}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(\mu+j)^{-\alpha}y^j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{x^k}x^k\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}u^j\right)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k y^{-j}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}u^j\right)\frac{du}{u},
\end{aligned}$$

si on pose $y = x$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}x^{k-j}u^j\right)\frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{u} .
\end{aligned}$$

En conclusion, pour $\Re(\alpha) > 0$, on a

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t},$$

si et seulement si pour $x > 0$, on a

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_{\mu}(-\alpha, k) x^k f^{(k)}(x).$$

Corollaire 2.4.1 *Soit f une fonction différentiable définie pour $x > 0$, tel que sa série de Taylor converge, et soit $\alpha \in \mathbb{C}$.*

(i) Si $Re(\alpha) \geq 0$, la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard $\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+} f$ est donnée par

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+} f\right)(x) = \delta^n \left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{0+} f\right)(x), \tag{2.4.22}$$

si et seulement si pour $x > 0$, on a

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} S(\alpha, k) x^k f^{(k)}(x). \tag{2.4.23}$$

(ii) Si $\Re(\alpha) > 0$, l'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard $\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+} f$ est donné par

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t},$$

si et seulement si pour $x > 0$, on a

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} S(-\alpha, k) x^k f^{(k)}(x). \tag{2.4.24}$$

Preuve :
La preuve est un conséquence immédiate du théorème précédent.

Équations différentielles fractionnaires. Théorèmes d'existence et d'unicité

3

Dans ce chapitre on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des solutions pour les problème de Cauchy dont la dérivée fractionnaire est au sens de Hadamard. On donne aussi quelques exemples d'applications. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [7].

3.1 Équivalence du problème de Cauchy et l'équation intégrale de Volterra

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{array}{l} \left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)] \quad (x > a;\ \alpha > 0) \\ \left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k \in \mathbb{R} \quad (k = 1, \ldots, n;\ n = -[-\alpha]) \end{array} \tag{3.1.1}$$

où $\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard pour $k = 1, \ldots, n-1$ et $\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-n} := \mathfrak{J}_{a+}^{n-\alpha}$, $n = -[-\alpha]$ et $f : (a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On note par

$$C_{\delta, n-\alpha, \gamma}[a, b] = \left\{ y(x) \in C_{n-\alpha, \log}[a, b] : \left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}\right)(x) \in C_{\gamma, \log}[a, b] \right\},$$

où

$$C_{\gamma, \log}[a, b] = \left\{ g : (a, b] \to \mathbb{R} : \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\gamma} g(x) \in C[a, b] \right\}, \tag{3.1.2}$$

On définie une norme sur l'espace $C_{\gamma,\log}[a, b]$ par

$$\begin{aligned} \|.\|_{C_{\gamma,\log}} &: (a, b] \to \mathbb{R}^{+} \\ & g \to \|g\|_{C_{\gamma,\log}} = \left\| \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\gamma} g(x) \right\|_{C[a,b]}, \end{aligned}$$

où

$$\|.\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [0,1]} |g(x)|.$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard , on va montrer que le problème de Cauchy (3.1.1) est équivalent à l'equation intégrale suivante

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(n-j+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y(t)] \frac{dt}{t} \qquad (3.1.3)$$

Théorème 3.1.1 *Soit $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ et $0 \leq \gamma < 1$. Soit G un sous ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction tel que $f[x,y] \in C_{\gamma,\log}[a,b]$ pour tout $y \in G$. Si $y \in C_{n-\alpha,\log}[a,b]$, alors y est solution du problème de Cauchy si et seulement si y satisfait l'équation intégrale suivante*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(n-j+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y(t)] \frac{dt}{t}, x > a.$$

Preuve :
Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.
Soit $y \in C_{n-\alpha,\log}[a,b]$ une solution du problème de Cauchy (3.1.1), alors on a

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} y\right)(x) = f[x, y(x)]. \qquad (3.1.4)$$

Comme $f[x,y] \in C_{\gamma,\log}[a,b]$, alors d'après (3.1.4) , on a $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} y \in C_{\gamma,\log}[a,b]$ D'autre part , comme

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} y\right)(x) = \delta^n \left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+} y\right)(x), \quad n = -[-\alpha],$$

Par suite , on a

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} y\right)(x) = y(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\delta^{n-k} \left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+} y\right)\right)(a+)}{\Gamma(\alpha-k+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}, \qquad (3.1.5)$$

on a aussi ,

$$\begin{aligned} \delta^{n-k} \left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+} y\right)(x) &= \left(\mathfrak{I}^{(n-\alpha)-(n-k)}_{a+} y\right)(x) \\ &= \left(\mathfrak{I}^{k-\alpha}_{a+} y\right)(x) \\ &= \left(\mathfrak{D}^{\alpha-k}_{a+} y\right)(x), \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\delta^{n-k} \left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+} y\right)(x) = \left(\mathfrak{D}^{\alpha-k}_{a+} y\right)(x). \qquad (3.1.6)$$

Alors d'après (3.1.5) et (3.1.6) , on obtient

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y\right)(x) &= y(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\mathfrak{D}^{\alpha-k}_{a+}y\right)(a+)}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} \\ &= y(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k},\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = y(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}, \tag{3.1.7}$$

maintenant si on applique l'opérateur $\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}$ aux deux membres de l'equation (3.1.1), on obtient

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}f[t,y(t)]\right)(x),$$

c'est à dire

$$y(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t,y(t)]\frac{dt}{t}$$

c'est à dire

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t,y(t)]\frac{dt}{t}.$$

Donc on obtient l'équation intégrale de Volterra à partir du problème de Cauchy.

Inversement, supposons que y satisfait l'équation intégrale suivante

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} + \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}f[t,y(t)]\right)(x). \tag{3.1.8}$$

Appliquons l'opérateur $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}$ aux deux membres de cette équation , on obtient

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left[\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-k}\right](x) + \left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}f[t,y(t)]\right)(x),$$

comme,

$$\left[\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-k}\right](x)=0,$$

c'est à dire,

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=0+f[x,y(x)],$$

c'est à dire,

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=f[x,y(x)].$$

Maintenant, on va vérifier les conditions initiales.
Appliquons l'opérateur $\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k}\quad(k=1,\ldots,n)$ aux deux membres de l'équation intégrale (3.1.8).
On distingue deux cas.
$1^{ère}$ Cas : Si $1\leq k\leq n-1$

Pour ce cas , on a

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k}y\right)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left[\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right](x)$$
$$+\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k}\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}f[t,y(t)]\right)(x).$$

Comme

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x)=\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(k-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-j},$$

et

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k}\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}f[t,y(t)]\right)(x)=\left(\mathfrak{I}_{a+}^{k}f[t,y(t)]\right)(x),$$

on obtient,

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k}y\right)(x)&=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(k-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-j}+\left(\mathfrak{I}_{a+}^{k}f[t,y(t)]\right)(x)\\&=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_j}{(k-j)!}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-j}+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1}f[t,y(t)]\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Si on fait tendre $x\to a$, on obtient

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)=b_k.$$

$2^{ème}$ Cas : Si $k=n$

Pour ce cas, on a

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-n}y\right)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{(n-j)!}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-j}+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}f[t,y(t)]\frac{dt}{t},$$

si on fait tendre $x \to a$, on obtient

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-n}y\right)(a+) = b_n.$$

En conclusion, on a y est solution du problème de Cauchy (3.1.1).

Corollaire 3.1.1 *Soit $0 < \alpha < 1$, soit G un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ et soit f : $(a,b] \times \mathbb{R}$ une fonction tel que $f[x,y] \in C_{\gamma,\log}[a,b]$ pour tout $y \in G$.*
Si $y \in C_{1-\alpha,\log}[a,b]$, alors y est solution du problème suivant

$$\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = f[x,y(x)], \quad \left(\mathfrak{J}_{a+}^{1-\alpha}y\right)(a+) = b \in \mathbb{R}, \tag{3.1.9}$$

si et seulement si, y est solution de l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t,y(t)]\frac{dt}{t} \quad , (x > a)\,. \tag{3.1.10}$$

3.2 Existence et unicité de la solution du problème du Cauchy dont la dérivée fractionnaire est au sens de Hadamard

Théorème 3.2.1 *(Théorème du point fixe de Banach (voir Théorème 1.9 dans [7]).)*
Soit (U,d) un espace métrique complet, soit $0 \leq \omega < 1$, et soit $T : U \to U$ une application tel que $\forall u,v \in U, \quad$ on a $\quad d(Tu,Tv) \leq \omega d(u,v)$
Alors l'opérateur T admet un unique point fixe $u^* \in U$.
De plus si, $(T^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est la suite d'opérateurs définie par ,

$$\begin{cases} T^1 = T, \\ T^k = T.T^{k-1}\,, \, k \geq 2, \end{cases}$$

alors pour chaque $u_0 \in U$, la suite numérique $(T^k u_0)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'unique point fixe u^* .

Maintenant, revenons à notre problème de Cauchy

$$\begin{array}{l} \left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = f[x,y(x)] \quad (x > a; \, \alpha > 0) \\ \left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+) = b_k \in \mathbb{R} \quad (k = 1,\ldots,n; \, n = -[-\alpha]) \end{array}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.2.2 *Soit $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ et $0 \leq \gamma < 1$ tel que $\gamma \geq n - \alpha$. Soit G un sous ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et soit $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les hypothèses suivantes :*

H1) $x \longmapsto f(x,y) \in C_{\gamma,\log}[a,b]$ pour tout $y \in G$,

H2) $\exists A > 0, \forall x \in (a,b], \forall y_1, y_2 \in G$ *, on a* $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq A\,|y_1 - y_2|$ *.*
Alors le problème de Cauchy (3.1.1) *admet une unique solution dans l'espace* $C^{\alpha}_{\delta,n-\alpha,\gamma}[a,b]$.

Preuve :
On sait que $y \in C_{n-\alpha,\log}[a,b]$ est solution du problème de Cauchy (3.1.1) si et seulement si y vérifie l'équation intégrale de Volterra suivante

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y(t)] \frac{dt}{t},$$

pour presque tout $x \in (a,b]$.
Soit x_1 un élément de (a,b) .
La preuve du théorème se fait en étapes.

1ère **étape :** Existence et unicité du problème de Cauchy (3.1.1) dans $[a, x_1]$.
Pour cela , on pose par définition

$$C_{n-\alpha,\log}[a,x_1] = \left\{ g : (a,x_1] \to \mathbb{R} : \left(\log \frac{x}{a}\right)^{n-\alpha} g(x) \in C[a,x_1] \right\},$$

et considérons la distance suivante :

$$d : C_{n-\alpha,\log}[a,x_1] \times C_{n-\alpha,\log}[a,x_1] \to \mathbb{R}^+,$$

tel que

$$d(y_1,y_2) = \|y_2 - y_1\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]} = \max_{x \in [a,x_1]} \left| \left(\log \frac{x}{a}\right)^{n-\alpha} [y_1(x) - y_2(x)] \right|.$$

Écrivons l'équation intégrale de Volterra sous la forme

$$y(x) = (Ty)(x),$$

où

$$(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y(t)] \frac{dt}{t},$$

avec

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j}.$$

On va appliquer le théorème du point fixe de Banach.
Pour cela il faut vérifier les deux points suivants :

i) $T(C_{n-\alpha,\log}(a,x_1)) \subset C_{n-\alpha,\log}(a,x_1)$.

ii) $\forall y_1, y_2 \in C_{n-\alpha,\log}(a,x_1)$, on a

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]} \leq \omega \|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha,\log}(a,x_1)} \quad \text{avec}\, 0 \leq \omega < 1.$$

Pour le point i) ,
Comme $y_0 \in C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]$ et $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} f[t,y(t)]\frac{dt}{t} \in C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]$.
(car $t \to f[t,y(t)] \in C_{n-\alpha,\log}[a,b]$, alors $t \to f[t,y(t)] \in C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]$)
Alors $Ty \in C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]$.
Pour le point ii),
Soient y_1 et y_2 deux éléments quelconques de $C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]$.
On a,

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{\alpha-1} \left(f[t,y_1(t)] - f[t,y_2(t)]\right) \frac{dt}{t} \\
&\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{\alpha-1} |y_1(t) - y_2(t)| \frac{dt}{t} \\
&\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\alpha-n} |y_1(t) - y_2(t)| \frac{dt}{t} \\
&\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]} \int_a^{x_1} \left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-n} \frac{dt}{t} \\
&\leq A\frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(2\alpha-n+1)} \left(\log \frac{x_1}{a}\right)^{2\alpha-n} \|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]}.
\end{aligned}$$

Si on pose par définition $\omega = A\frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(2\alpha-n+1)} \left(\log \frac{x_1}{a}\right)^{2\alpha-n}$ et si on choisit x_1 tel que $0 < A\frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(2\alpha-n+1)} \left(\log \frac{x_1}{a}\right)^{2\alpha-n} < 1$, on obtient T est contractante et par suite suite d'après le Théorème du point fixe de Banach, il existe une unique solution $y^* \in C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]$ de l'équation

$$y(x) = (Ty)(x) \quad \text{dans } [a,x_1].$$

De plus d'après le théorème du point fixe y^* est obtenue comme limite de la suite d'opérateurs $(T^m y_0^*)_{m\in\mathbb{N}^*}$ dans le sens suivant

$$\lim_{m\to+\infty} \|T^m y_0^* - y^*\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]} = 0\,,$$

où y_0^* est une fonction quelconque de $C_{n-\alpha,\log}[a,b]$.
Si au moins l'un des $b_k \neq 0$ dans la condition initiale de Cauchy, on peut prendre

$$y_0^*(x) = y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j},$$

et

$$(T^m y_0^*)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, \left(T^{m-1} y_0^*\right)(t)]\frac{dt}{t}, \quad m \geq 2$$

si on note par,

$$y_m(x) = (T^m y_0^*)(x),$$

alors on a ,

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y_{m-1}(t)] \frac{dt}{t},$$

et on a ,

$$\lim_{m \to +\infty} \|y_m - y^*\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]} = 0.$$

$2^{ème}$**étape :** Construction de la solution dans $[x_1, x_2]$,
avec $x_2 = x_1 + h_1, h_1 > 0$ et $x_2 < b$.
On sait qu'on a l'équivalence entre l'existence de la solution du problème de Cauchy (3.1.1) et l'équation intégrale de Volterra suivante

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y(t)] \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y(t)] \frac{dt}{t} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y(t)] \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

Comme y est définie d'une manière unique sur l'intervalle $[a, x_1]$, alors on peut écrire la dernière égalité sous la forme

$$y(x) = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y(t)] \frac{dt}{t},$$

où

$$y_{01}(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y(t)] \frac{dt}{t}.$$

En utilisant une preuve similaire à celle qui a été donnée dans la première étape , on montre que l'équation intégrale

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y(t)] \frac{dt}{t},$$

admet une unique solution $y^* \in C_{n-\alpha,\log}[x_1, x_2]$ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.

$3^{ème}$ **étape :** Construction de la solution dans $[x_2, x_3]$,
avec $x_3 = x_2 + h$, $h > 0$ et $x_3 < b$.
En utilisant un raisonnement similaire à celle qu'a été donnée dans la $2^{ème}$ étape , on montre que l'équation intégrale admet une unique solution $y^* \in C_{n-\alpha,\log}[x_2, x_3]$

dans $[x_2, x_3]$.
On continue ce processus, on montre que l'équation intégrale admet une unique solution $y^* \in C_{n-\alpha,\log}[a,b]$ dans $[a,b]$ et par suite le problème de Cauchy (3.1.1) admet une unique solution dans $[a,b]$.
Afin de compléter la preuve du théorème, il faut montrer que l'unique solution du problème de Cauchy (3.1.1) $y \in C_{n-\alpha,\log}[a,b]$ appartient à l'espace $C^{\alpha}_{\delta,n-\alpha,\gamma}[a,b]$.
Pour cela il faut montrer que $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y \in C_{n-\alpha,\log}[a,b]$.
D'après ce qui précède , on sait que la solution y est la limite au sens de la norme $C_{n-\alpha,\log}$ d'une suite de fonctions (y_m) , où $y_m \in C_{n-\alpha,\log}[a,b]$.

$$\lim_{m\to+\infty} \|y_m - y\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,b]} = 0,$$

avec le choix de certains y_m dans chaque $[a,x_1],\ldots,[x_{l-1},b]$.

On a,

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y_m - \mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,b]} &= \|f(x,y_m) - f(x,y)\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,b]}\\ &\leq A\,\|y_m - y\|_{C_{n-\alpha,\log}(a,b)} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Alors,

$$\lim_{m\to+\infty} \|\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y_m - \mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,b]} = 0.$$

Donc,

$$(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y) \in C_{n-\alpha,\log}[a,b].$$

et par suite,

$$y \in C^{\alpha}_{\delta,n-\alpha,\gamma}[a,b].$$

La preuve du théorème est terminée.

3.3 Quelques exemples

Exemple 3.3.1 *Considérons le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y)(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad (a < x \leq b; \alpha > 0; \lambda \in \mathbb{R}),\\ &\left(\mathfrak{D}^{\alpha-k}_{a+}y\right)(a+) = b_k, \quad (b_k \in \mathbb{R};\ k = 1,\ldots,n;\ n = -[-\alpha]).\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Tout d'abord, le problème (3.3.1) *admet une unique solution.*
Déteminons cette solution en utilisant la méthode des approximations successives de Picard.
Le problème de Cauchy (3.3.1) *est équivalent à l'équation intégrale suivante*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} y(t)\frac{dt}{t}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}.$$

On définit la suite de fonctions $(y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j},$$
$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} y_{m-1}(x)\frac{dt}{t} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t},$$

Pour $m = 1$, on a

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= y_0(x) + \lambda \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} y_0\right)(x) + \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} f\right)(x)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}\\
&+ \lambda \left[\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x)\right] + \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} f\right)(x)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x)\\
&+ \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} f\right)(x).
\end{aligned}$$

Comme

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x) = \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(2\alpha-j+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{2\alpha-j},$$

on a

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}\\
&+ \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(2\alpha-j+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{2\alpha-j} + \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} f\right)(x)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(2\alpha-j+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{2\alpha-j}\\
&+ \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} f\right)(x)\\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{l=1}^{2} \frac{\lambda^{l-1}}{\Gamma(\alpha l-j+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha l-j} + \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} f\right)(x).
\end{aligned}$$

Pour $m = 2$, on a

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_0(x) + \lambda \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} y_1\right)(x) + \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} f\right)(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j} \\
&+ \lambda \left[\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{l=1}^{2} \frac{\lambda^{l-1}}{\Gamma(\alpha l - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha l - j} + \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} f\right)(t)\right)\right](x) \\
&+ \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} f\right)(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j} \\
&+ \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{l=1}^{2} \frac{\lambda^{l}}{\Gamma(\alpha l - j + 1)} \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha l - j}\right)(x) \\
&+ \lambda \left(\mathfrak{I}^{2\alpha}_{a+} f\right)(x) + \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} f\right)(x).
\end{aligned}$$

Comme

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha l - j}\right)(x) = \frac{\Gamma(\alpha l - j + 1)}{\Gamma(\alpha(l+1) - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha(l+1) - j},$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j} \\
&+ \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{l=1}^{2} \frac{\lambda^{l}}{\Gamma(\alpha l - j + 1)} \frac{\Gamma(\alpha l - j + 1)}{\Gamma(\alpha(l+1) - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha(l+1) - j} \\
&+ \frac{\lambda}{\Gamma(2\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{2\alpha - 1} f(t) \frac{dt}{t} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha - 1} f(t) \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=2}^{3} \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha k - j} \\
&+ \int_a^x \sum_{l=1}^{2} \frac{\lambda^{l-1}}{\Gamma(\alpha l)} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha l - 1} f(t) \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{l=1}^{3} \frac{\lambda^{l-1}}{\Gamma(\alpha l - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha l - j} \\
&+ \int_a^x \sum_{l=1}^{2} \frac{\lambda^{l-1}}{\Gamma(\alpha l)} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha l - 1} f(t) \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Par réccurence, on obtient

$$\begin{aligned} y_m(x) &= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{l=1}^{m+1} \frac{\lambda^{l-1}}{\Gamma(\alpha l - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha l - j} \\ &+ \int_a^x \sum_{l=1}^{m} \frac{\lambda^{l-1}}{\Gamma(\alpha l)} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha l - 1} f(t) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{m\to+\infty} y_m(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{l-1}}{\Gamma(\alpha l - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha l - j} \\ &+ \int_a^x \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{l-1}}{\Gamma(\alpha l)} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha l - 1} f(t) \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha k + \alpha - j} \\ &+ \int_a^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha k + \alpha - 1} f(t) \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left[\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right]^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha - j + 1)} \\ &+ \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha - 1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left[\lambda \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right]^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} f(t) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Comme la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}$ (voir chapitre 1 page 42 dans [7]) est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z, \beta \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0),$$

on obtient

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j} E_{\alpha,\alpha-j+1} \left[\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right] \\ &+ \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha - 1} E_{\alpha,\alpha} \left[\lambda \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right] f(t) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Exemple 3.3.2 *Considérons le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{aligned} &\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x)-\lambda y(x)=0\,, \quad (a<x\leq b;\alpha>0;\lambda\in\mathbb{R})\,,\\ &\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)=b_k, \quad (b_k\in\mathbb{R};\,k=1,\ldots,n;\,n=-[-\alpha])\,. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Tout d'abord, le problème (3.3.2) *admet une unique solution et d'àprés l'exemple précédent cette solution est donnée par*

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}b_j\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right]\,.$$

Exemple 3.3.3 *Pour* $0<\alpha<1$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$.
Le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} &\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x)-\lambda y(x)=f(x)\,,\\ &\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-1}y\right)(a+)=b, \quad (b\in\mathbb{R})\,, \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

admet une unique solution donnée par

$$y(x)=b\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right]+\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right]f(t)\frac{dt}{t},$$

tandis que, le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} &\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x)-\lambda y(x)=0\,,\\ &\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-1}y\right)(a+)=b, \quad (b\in\mathbb{R})\,, \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

admet une unique solution donnée par

$$y(x)=b\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right].$$

Exemple 3.3.4 *Soit* $1<\alpha<2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$.
Le problème de Cauchy suivant

$$\begin{aligned} &\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x)-\lambda y(x)=f(x)\,,\\ &\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-1}y\right)(a+)=b,\ \left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-2}y\right)(a+)=d\,, \quad (b,d\in\mathbb{R})\,, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

admet une unique solution donnée par

$$\begin{aligned} y(x)&=\sum_{j=1}^{2}\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-j}y\right)(a+)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right]\\ &+\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right]f(t)\frac{dt}{t}\\ &=\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-1}y\right)(a+)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right]+\left(\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-2}y\right)(a+)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-2}\\ &E_{\alpha,\alpha-1}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right]+\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right]f(t)\frac{dt}{t} \end{aligned}$$

$$= b\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right] + d\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right]$$
$$+\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right] f(t)\frac{dt}{t}.$$

En particulier, la solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y)(x) - \lambda y(x) = 0\,, \\ &\left(\mathfrak{D}^{\alpha-1}_{a+}y\right)(a+) = b,\ \left(\mathfrak{D}^{\alpha-2}_{a+}y\right)(a+) = d\,, \quad (b,d\in\mathbb{R})\,, \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

est donnée par

$$y(x) = b\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right] + d\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}\left[\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right].$$

Exemple 3.3.5 *On considère le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}y)(x) - \lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta} y(x) = 0\,, \\ &\left(\mathfrak{D}^{\alpha-k}_{a+}y\right)(a+) = b_k, \quad (b_k\in\mathbb{R})\,. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Tout d'abord, le problème (3.3.7) admet une unique solution y.
Le problème de Cauchy (3.3.7) est équivalent à l'équation intégrale suivante

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta} y(t)\frac{dt}{t}.$$

Pour construire la solution y, on considère la suite de fonctions $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j},$$

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta} y_{m-1}(t)\frac{dt}{t}.$$

Pour $m=1$, on a

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta} y_0(t)\frac{dt}{t} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta} \\ &\times\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)\frac{dt}{t} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \lambda\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-j}\right)(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \lambda\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta-j+1)}{\Gamma(2\alpha+\beta-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{2\alpha+\beta-j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}\left[1+\lambda\frac{\Gamma(\alpha+\beta-j+1)}{\Gamma(2\alpha+\beta-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta}\right]. \end{aligned}$$

Pour $m = 2$, on a

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= y_0(x) + \lambda \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta} y_1(t) \right)(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha - j} + \lambda \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta} \right. \\
&\left. \times \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha - j} \left[1 + \lambda \frac{\Gamma(\alpha + \beta - j + 1)}{\Gamma(2\alpha + \beta - j + 1)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha + \beta} \right] \right\} \right)(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha - j} + \lambda \mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha + \beta - j} \right. \\
&\left. + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - j + 1)}{\Gamma(2\alpha + \beta - j + 1)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{2\alpha + 2\beta - j} \right)(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha - j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha + \beta - j} \right)(x) \\
&+ \lambda^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - j + 1)}{\Gamma(2\alpha + \beta - j + 1)} \left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{2\alpha + 2\beta - j} \right)(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha - j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - j + 1)}{\Gamma(2\alpha + \beta - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{2\alpha + \beta - j} \\
&+ \lambda^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - j + 1)}{\Gamma(2\alpha + \beta - j + 1)} \frac{\Gamma(2\alpha + 2\beta - j + 1)}{\Gamma(3\alpha + 2\beta - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{3\alpha + 2\beta - j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha - j} \left[1 + \lambda \frac{\Gamma(\alpha + \beta - j + 1)}{\Gamma(2\alpha + \beta - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha + \beta} \right. \\
&\left. + \lambda^2 \frac{\Gamma(\alpha + \beta - j + 1)}{\Gamma(2\alpha + \beta - j + 1)} \frac{\Gamma(2\alpha + 2\beta - j + 1)}{\Gamma(3\alpha + 2\beta - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{2(\alpha + \beta)} \right]
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha - j} \left[1 + c_1 \lambda \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha + \beta} + c_2 \lambda^2 \left(\log \frac{x}{a} \right)^{2(\alpha + \beta)} \right],
$$

avec

$$
c_1 = \frac{\Gamma(\alpha + \beta - j + 1)}{\Gamma(2\alpha + \beta - j + 1)}, \quad c_2 = \frac{\Gamma(\alpha + \beta - j + 1)}{\Gamma(2\alpha + \beta - j + 1)} \frac{\Gamma(2\alpha + 2\beta - j + 1)}{\Gamma(3\alpha + 2\beta - j + 1)}.
$$

Par suite,

$$y_2(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j} \left[1 + \sum_{k=1}^{2} c_k \left(\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta}\right)^k\right],$$

avec

$$c_k = \prod_{l=1}^{k} \frac{\Gamma(l(\alpha+\beta) - j + 1)}{\Gamma(l(\alpha+\beta) + \alpha - j + 1)}, \quad k = 1, 2.$$

Par récurrence, on obtient

$$y_m(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j} \left[1 + \sum_{k=1}^{m} c_k \left(\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta}\right)^k\right],$$

avec

$$c_k = \prod_{l=1}^{k} \frac{\Gamma(l(\alpha+\beta) - j + 1)}{\Gamma(l(\alpha+\beta) + \alpha - j + 1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Alors,

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{m \to +\infty} y_m(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j} \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \left(\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta}\right)^k\right]. \end{aligned}$$

Comme la fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,m,l}$ (voir chapitre 1 page 48 dans [7]) est définie par

$$E_{\alpha,m,l}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k z^k \quad \text{avec} \quad d_0 = 1 \quad \text{et} \quad d_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha(jm+l)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+l+1)+1)},$$

et comme,

$$\begin{aligned} c_k &= \prod_{l=1}^{k} \frac{\Gamma(l(\alpha+\beta) - j + 1)}{\Gamma(l(\alpha+\beta) + \alpha - j + 1)} \\ &= \prod_{r=0}^{k-1} \frac{\Gamma((r+1)(\alpha+\beta) - j + 1)}{\Gamma((r+1)(\alpha+\beta) + \alpha - j + 1)} \\ &= \prod_{r=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha(r+1+(r+1)\beta/\alpha - j/\alpha) + 1)}{\Gamma(\alpha(r+1+(r+1)\beta/\alpha - j/\alpha + 1) + 1)} \\ &= \prod_{r=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha(r+1+r\beta/\alpha + \beta/\alpha - j/\alpha) + 1)}{\Gamma(\alpha(r+1+r\beta/\alpha + \beta/\alpha - j/\alpha + 1) + 1)} \\ &= \prod_{r=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha(r(1+\beta/\alpha) + 1 + \beta/\alpha - j/\alpha) + 1)}{\Gamma(\alpha(r(1+\beta/\alpha) + 1 + \beta/\alpha - j/\alpha + 1) + 1)}. \end{aligned}$$

on obtient,

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j} E_{\alpha, 1+\beta/\alpha, 1+(\beta-j)/\alpha} \left[\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta}\right].$$

Exemple 3.3.6 *Soit* $0 < \alpha < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
Le problème de Cauchy suivant

$$\begin{aligned} &\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} y\right)(x) - \lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta} y(x) = 0\,, \\ &\left(\mathfrak{D}^{\alpha-1}_{a+} y\right)(a+) = b, \quad (b \in \mathbb{R})\,. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

admet une unique solution donnée par

$$y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha, 1+\beta/\alpha, 1+(\beta-1)/\alpha} \left[\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta}\right].$$

Exemple 3.3.7 *soit* $1 < \alpha < 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
La solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{aligned} &\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} y\right)(x) - \lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta} y(x) = 0\,, \\ &\left(\mathfrak{D}^{\alpha-1}_{a+} y\right)(a+) = b, \; \left(\mathfrak{D}^{\alpha-2}_{a+} y\right)(a+) = d\,, \quad (b, d \in \mathbb{R})\,. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

est donnée par

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=1}^{2} \frac{\left(\mathfrak{D}^{\alpha-k}_{a+}(a+)\right)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} E_{\alpha, 1+\beta/\alpha, 1+(\beta-j)/\alpha} \left[\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta}\right] \\ &= \frac{\left(\mathfrak{D}^{\alpha-1}_{a+}(a+)\right)}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha, 1+\beta/\alpha, 1+(\beta-1)/\alpha} \left[\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta}\right] \\ &+ \frac{\left(\mathfrak{D}^{\alpha-2}_{a+}(a+)\right)}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-2} E_{\alpha, 1+\beta/\alpha, 1+(\beta-2)/\alpha} \left[\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta}\right] \\ &= \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha, 1+\beta/\alpha, 1+(\beta-1)/\alpha} \left[\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta}\right] \\ &+ \frac{d}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-2} E_{\alpha, 1+\beta/\alpha, 1+(\beta-2)/\alpha} \left[\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta}\right]. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] P.L. Butzer, S. Jansche, A direct approach to the Mellin transform, J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), 325-376.

[2] P.L. Butzer, A.A. Kilbas and J.J. Trujillo, Stirling functions of the second kind in the setting of difference and fractional calculus, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 4 (2003), 673-711.

[3] P.L. Butzer, A.A. Kilbas and J.J. Trujillo, Generalized Stirling functions of second type and representation of fractional order difference via derivatives, J. Diff. Equ.Appl. 9 (2003), 503-533.

[4] H. Dib, Equations Différentielles fractionnaires, 4ème Ecole EDA-EDO Tlemcen 23-27 mai 2009, 1-29.

[5] J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, J. Math. Pures et Appl., Sér 4, 8(1892), 101-186.

[6] A.A. Kilbas, Hadamard-type fractional calculus, J. Korean Math. Soc., 38 (2001), 1191-1204.

[7] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[8] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives.Theory and Applications, Yverdon : Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.

Résumé :

L'objet de ce mémoire est de donner quelques résultats concernant les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires de type Hadamard et au sens de Hadamard. On donne aussi quelques résultats d'existence et d'unicité pour certaines quelques problèmes de Cauchy avec une dérivée fractionnaire au sens de Hadamard.

Mots clés :
Intégrale fractionnaire, dérivée fractionnaire, Hadamard, problèmes de Cauchy.

ABSTRACT :

The object of this memory is to give some results concerning the fractional integral and fractional derivative of Hadamard type and in the sense of Hadamard. We give also some existence and uniqueness results for some Cauchy problems with fractional derivative in the sense of Hadamard.

Key words :
Fractional integral, fractional derivative, Hadamard, Cauchy problems.