

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –
Faculté des Sciences



THESE

Présentée pour l'obtention du **grade** de **DOCTORAT 3^{ème} Cycle**

Département des Mathématiques

Spécialité : Perturbations, Moyennisation
et Applications aux Biomathématiques [PeMAB]

Par : BAR Bachir

Sujet

- Sur les perturbations singulières dans les inclusions différentielles
- Sur la compétition dans le chémostat avec inhibiteur externe

Soutenue publiquement, le 27/ 02 /2019, devant le jury composé de :

M. Karim YADI	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
M. Mustapha LAKRIB	Professeur	Univ. Sidi Bel Abbès	Directeur de thèse
M. Tewfik SARI	Professeur	Irstea. Montpellier	Co- Directeur de thèse
M. Abderrahmane YOUSFATE	Professeur	Univ. Sidi Bel Abbès	Examineur 1
M. Ali MOUSSAOUI	Professeur	Univ. Tlemcen	Examineur 2
M. Boumedienne BENYAHIA	MCA	Univ. Tlemcen	Examineur 3

Année Universitaire 2018-2019

DÉDICACES

Je dédie ce travail :

A mes très chers parents pour leur amour,
sacrifice et encouragement.

A la mémoire de ma sœur Kheira.

A toute ma famille Jalol, Mohamed, Nadia et Hayat.

A tous mes amis Lokman, Yacine,
Mohamed, Mourad et Abdenour.

REMERCIEMENTS

JE remercie **ALLAH** qui m'a donné la volonté, la force et le courage pour achever ce travail.

Ensuite, je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Mustapha Lakkrib, Professeur à l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour ses qualités scientifiques et humaines, et notamment sa patience dans la direction de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-directeur de thèse en France, Monsieur Tewfik Sari, Professeur à l'Université de Haute Alsace de Mulhouse, et Directeur de Recherche à l'Irstea de Montpellier, pour ses conseils avisés et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

Je remercie Monsieur Karim Yadi, Professeur à l'université de Tlemcen, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie aussi Monsieur Abderrahmane Yousfate, Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbès et Messieurs Ali Moussaoui et Boumedienne Benyahia, respectivement, Professeur et Maître de Conférence, classe A, à l'université de Tlemcen, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Enfin, merci à ma famille, et à mes parents en particulier, qui m'ont toujours encouragé et soutenu sous toutes les formes et ont toujours cru en ma volonté de réussir.

La thèse a été soutenue financièrement par le Partenariat Hubert Curien projet Tassili 15MDU949.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACES	iii
REMERCIEMENTS	v
TABLE DES FIGURES	viii
LISTE DES TABLEAUX	x
INTRODUCTION	1
PREMIÈRE PARTIE : SUR LES PERTURBATIONS SINGULIÈRES DANS LES INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES	3
1 GÉNÉRALITÉS	5
1.1 ANALYSE MULTIVOQUE	5
1.1.1 Distance de Hausdorff-Pompeiu	5
1.1.2 Applications multivoques	6
1.2 NOTIONS DE CONTINUITÉ	7
1.2.1 Semi-continuité supérieure	7
1.2.2 Semi-continuité inférieure	9
1.2.3 Sélection continue	10
1.2.4 Continuité	10
1.3 MESURABILITÉ	10
1.3.1 Sélection mesurable	11
1.3.2 Applications multivoques à deux variables	12
1.3.3 Intégrale d'une application multivoque	12
1.4 CÔNES TANGENTS	13
1.5 INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES, PROBLÈME DE CAUCHY	13
1.5.1 Notion de solution, existence	14
1.5.2 Lipschitz unilatérale	16
2 SUR LA THÉORIE DE TIKHONOV POUR LES INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES	19
2.1 SUR LA THÉORIE DE TIKHONOV POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES	19
2.1.1 Théorème de Tikhonov	20
2.2 PERTURBATIONS SINGULIÈRES D'INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES	22

2.2.1	Introduction	22
2.2.2	Lemmes préliminaires	26
2.2.3	Cas $F = F_1 \times F_2$	31
2.3	APPLICATION : MODÈLE DE RESSOURCE-CONSOMMATEUR	34
2.3.1	Le modèle	34
2.3.2	Théorie des ensembles flous	35
2.3.3	Inclusion différentielle floue vs équation stochastique	35
2.3.4	Modèle de ressource-consommateur (suite)	37
3	MOYENNISATION POUR LES INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC MAXIMUM	39
3.1	MÉTHODE DE MOYENNISATION POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES : RAPPEL	39
3.2	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC MAXIMUM	40
3.2.1	Introduction	40
3.2.2	Méthode de moyennisation pour les équations différentielles avec maximum	41
3.3	CAS DES INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC MAXIMUM	41
3.3.1	Lemmes préliminaires	46
3.3.2	Preuves des résultats	51
3.3.3	Exemples	55
	DEUXIÈME PARTIE : SUR LA COMPÉTITION DANS LE CHÉMOSTAT AVEC INHIBITEUR EXTERNE	58
4	COMPÉTITION DANS LE CHÉMOSTAT AVEC INHIBITEUR LÉTAL EX- TERNE	61
4.1	INTRODUCTION	61
4.2	CHÉMOSTAT	61
4.3	MODÈLE DU CHÉMOSTAT AVEC INHIBITEUR LÉTAL EXTERNE	63
4.4	EXISTENCE ET STABILITÉ LOCALE DES ÉQUILIBRES	64
4.4.1	Existence des points d'équilibre	65
4.4.2	Stabilité locale	67
4.5	DIAGRAMME OPÉRATOIRE	69
4.5.1	Existence et stabilité des équilibres	69
4.5.2	Étude de la stabilité de E_c	73
4.5.3	Diagramme opératoire	74
4.6	SIMULATIONS NUMÉRIQUES	76
4.6.1	Les valeurs des paramètres de Hsu, Li et Waltman	76
4.6.2	Cas où la tangente à Γ_1 en (p_c, λ_2) est au dessus de Γ_4	78
4.6.3	Intersection des courbes Γ_5 et Γ_1	78
	BIBLIOGRAPHIE	83
	RÉSUMÉ	89

TABLE DES FIGURES

3.1	Trajectoires des systèmes originale et moyennisé pour quelques valeurs de ε	57
4.1	Chémostat en mode continu. Le nutriment entre à un taux D et une concentration S^0 , les organismes x et le substrat S effluent au même taux D	62
4.2	(a) Graphes des fonctions de croissance f_1 et f_2 et les définitions des seuils de rentabilité λ_1 , λ^+ , λ_p et λ_2 ; (b) : Représentation du graphe de la fonction W avec la solution unique positif p^* de l'équation $W(p) = 1 - \lambda_2$, quand $\lambda_2 < 1$	65
4.3	Graphes des fonctions de croissance f_1 et f_2 lorsque l'équation $f_1(S) = f_2(S)$ admet une solution $S = \bar{S}$ en distinguant les deux cas pour I_c (a) : $I_c = [\bar{D}, f_2(+\infty)[$. (b) : $I_c =]0, \bar{D}]$ où $\bar{D} = f_1(\bar{S}) = f_2(\bar{S})$	70
4.4	Caractéristiques de $F_3 = 0$. Chaque courbe colorait la même couleur de son équation. Y_i pour $i = 0..2$ représente la région dans laquelle $F_3 = 0$ admet i solutions positives. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas a.	77
4.5	Caractéristiques de $F_3 = 0$. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas a.	77
4.6	(a) : Diagramme opératoire pour $D_5 = 2.2$. (b) : Zoom près de l'origine. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas a.	78
4.7	Diagramme opératoire pour (a) : $D = 0.7$. (b) : $D = 3.59$. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table, Cas a.	79
4.8	(a) : Diagramme opératoire pour $D = 1$, (b) : Zoom près de l'origine.. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas a.	79
4.9	Diagramme opératoire pour (a) : $D = 0.5$. (b) : $D = 3.9$, montrant que \mathcal{J}_6^U et \mathcal{J}_5^U sont vides. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas a.	80
4.10	(a) : Caractéristiques de $F_3 = 0$. (b) : Zoom près $D_2 = 1.26$. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas b.	80
4.11	(a) : Diagramme opératoire pour $D = 1.26$. (b) : Zoom près de l'origin. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas b.	80
4.12	(a) : Caractéristiques de $F_3 = 0$, (b) : Zoom près de l'origine. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas c.	81

4.13 Diagramme opératoire pour (a) : $D = 0.01$. (b) : $D = D_1 = 0.013$. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas c. 81

LISTE DES TABLEAUX

4.1	Existence et stabilité asymptotique locale des équilibres du système (4.5).	69
4.2	Frontières des régions dans le diagramme opératoire.	76
4.3	Valeurs des paramètres.	76
4.4	Existence et stabilité des équilibres dans les régions du diagramme opératoire.	78

INTRODUCTION

CETTE thèse est constituée de deux parties, le tout étant réparti en quatre chapitres :

- La première partie revisite la théorie de Tikhonov, d'une part, et propose un résultat de la théorie de moyennisation, d'autre part, dans le cadre des perturbations singulières d'inclusions différentielles ordinaires.
- La deuxième partie se consacre à l'étude d'un modèle de chémostat avec inhibiteur létal externe.

LES quatre chapitres sont répartis comme suit :

Le premier chapitre est un rappel de quelques notions de base de l'analyse multivoque et de la théorie des inclusions différentielles ordinaires.

Dans le chapitre deux, on commence par une présentation de la Théorie des perturbations singulières pour les inclusions différentielles qui concerne la limite de l'ensemble des solutions Z^ε du système de la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \varepsilon \dot{y}(t) \end{pmatrix} \in F(t, x, y), \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, et l'objectif est d'appliquer la théorie de Tikhonov qui consiste à considérer le problème réduit suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \in F(t, x, y), \quad x(0) = x_0.$$

Plusieurs résultats sont obtenus pour ce problème dans le cadre de la théorie de Tikhonov. Nous prouvons le résultat obtenu par V. Veliov sur la semi-continuité supérieure de Z^ε en $\varepsilon = 0$ avec des conditions moins restrictives. Nous donnons une application sur un système de ressource-consommateur singulièrement perturbé

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} = - \left[y - r \left(1 - \frac{x}{M} \right) \right] \end{cases}$$

avec perturbation environnemental, dans le cadre de la théorie des inclusions différentielles flous développée par V. Křivan.

Dans le chapitre trois, nous traitons des inclusions différentielles ordinaires avec maximum, perturbées par un petit paramètre ε , du type

$$\begin{cases} \dot{x} \in \varepsilon F \left(t, x(t), \max_{s \in S(t)} x(s) \right), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Nous démontrons deux résultats de la théorie de moyennisation pour ce type de problème, qui consiste à considérer le problème moyennisé

$$\begin{cases} \dot{y} \in \varepsilon \bar{F} \left(y(t), \max_{s \in S(t)} y(s) \right), & t \geq 0 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $\bar{F}(x, z) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x, z) dt$, et démontrer que les solutions de l'une des inclusions peuvent être approximées par des solutions de l'autre, ce qui généralisent les résultats de O. Kicsuhmarenko dans le cas où F est univoque.

Au chapitre quatre, un modèle de chémostat avec inhibiteur létal externe qui est donné par

$$\begin{cases} S' &= (S^0 - S)D - f_1(S) \frac{x}{\beta_1} - f_2(S) \frac{y}{\beta_2} \\ x' &= [f_1(S) - D - \gamma p]x \\ y' &= [f_2(S) - D]y \\ p' &= (p^0 - p)D - g(p)y \end{cases}$$

est considéré. Ce modèle a été proposé et étudié par Hsu, Li, et Waltman. Notre contribution principale porte sur la construction du diagramme opératoire, accompagné de son interprétation. Des simulations numériques nombreuses illustrent et étayent les résultats obtenus.

PREMIÈRE PARTIE :

**SUR LES PERTURBATIONS SINGULIÈRES DANS LES
INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES**

GÉNÉRALITÉS



Dans ce premier chapitre nous rappelons quelques notions et propriétés concernant les inclusions différentielles. Les principales références sur lesquelles nous nous sommes basés sont [1, 22, 86] (voir aussi [2, 18, 32, 45, 69, 83]).

1.1 Analyse multivoque

1.1.1 Distance de Hausdorff-Pompeiu

Soit (X, d) un espace métrique. Pour $A \subset X$ on note \bar{A} , $\overset{\circ}{A}$, ∂A l'adhérence, l'intérieur, la frontière de A , respectivement. Pour $x_0 \in X$ et $r > 0$, on pose $B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$.

On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties non vides de X . Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ et $b \in X$. On définit

$$\rho(b, A_2) = \inf_{a \in A_2} d(b, a) \quad \text{et} \quad e(A_1, A_2) = \sup_{a \in A_1} \rho(a, A_2).$$

$\rho(b, A_2)$ est la distance de b à A_2 , et $e(A_1, A_2)$ est l'excès de Hausdorff-Pompeiu de A_1 sur A_2 . On peut vérifier que :

$$e(A_1, A_2) = \inf_{r > 0} \{A_1 \subset A_2 + B_r(0)\}.$$

La distance de Hausdorff-Pompeiu entre $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ est défini par :

$$H(A_1, A_2) := \max\{e(A_1, A_2), e(A_2, A_1)\}.$$

On note par $\mathcal{P}_{cl}(X)$ (respectivement, $\mathcal{P}_{cp}(X)$) l'ensemble des parties fermées non vides (respectivement, compactes non vides) de X .

Proposition 1.1 ([44])

- 1) L'espace $(\mathcal{P}_{cl}(X), H)$ est un espace métrique T_2 -séparé.
- 2) Si (X, d) est complet, alors $(\mathcal{P}_{cl}(X), H)$ est complet.

L'enveloppe convexe de $A \subset Y$, notée $co(A)$, où Y est un espace vectoriel normé, est la plus petite partie convexe (au sens de l'inclusion) contenant A . En d'autres termes,

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, m \in \mathbb{N}, \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, x_i \in A \right\}.$$

On note par $\overline{co}(A)$ la fermeture de l'enveloppe convexe de A , i.e. $\overline{co(A)}$. On note aussi $vect(A)$ le sous-espace vectoriel engendré par A . On note par $\mathcal{P}_{cv}(X)$ l'ensemble des parties convexes de X .

Définition 1.1 ([32, page. 71]) Soit $S \subset \mathbb{R}^n$. On appelle fonction d'appui de S , et on note $\sigma(S, \cdot)$, la fonction $\sigma(S, \cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie de la manière suivante :

$$d \in \mathbb{R}^n \mapsto \sigma(S, d) = \sup_{s \in S} \langle s, d \rangle.$$

On a le lemme suivant qui caractérise une partie convexe par sa fonction d'appui.

Lemme 1.1 ([32, page. 71]) Une partie $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe est définie par sa fonction d'appui. Un point $s \in S$ si et seulement si $\langle s, d \rangle \leq \sigma(S, d)$ pour tout $d \in \mathbb{R}^n$.

Maintenant, nous dérivons une formule pour la distance de Hausdorff-Pompeiu, connue sous le nom de "formule de Härmondar".

Lemme 1.2 ([18, page. 49]) Soit $A, B \in \mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R}^n)$ bornées. On a

$$e(A, B) = \sup\{\sigma(A, d) - \sigma(B, d), \|d\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1\}$$

et

$$H(A, B) = \sup\{|\sigma(A, d) - \sigma(B, d)|, \|d\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1\}.$$

1.1.2 Applications multivoques

Définition 1.2 Soit X et Y deux ensembles. On note $\mathcal{P}(Y)$ l'ensemble des parties de Y . Soit $\Omega \subset X$ avec $\Omega \neq \emptyset$. Une **application multivoque** est une application sur Ω :

$$F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(Y).$$

Remarque 1.1 On dit aussi multifonction ou multiapplication.

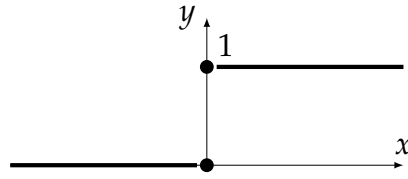
Les ensembles $F(x)$ sont les valeurs de F . Une fonction $f : \Omega \longrightarrow Y$ qui vérifiée $x \in \Omega \implies f(x) \in F(x)$ est dite une **sélection** de F . Si $F(x) = \{f(x)\}, \forall x \in \Omega$, F est dite **univoque**. On pose

$$F(\Omega) = \bigcup_{x \in \Omega} F(x) \quad \text{et} \quad \text{graphe}(F) = \{(x, y) \in \Omega \times Y, y \in F(x)\}.$$

Pour $A \subset Y$, on définit

$$F^{-1}(A) = \{x \in \Omega : F(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

Définition 1.3 (Convexité) Une Application multivoque F est convexe (respectivement, fermée, compacte, bornée) si son image l'est.



1.2 Notions de continuité

Soient X et Y deux espaces métriques, et $\Omega \subset X$ non vide.

1.2.1 Semi-continuité supérieure

Définition 1.4 Une application multivoque $F : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite semi-continue supérieurement (scs en abrégé) si pour tout fermé $A \subset Y$, l'ensemble $F^{-1}(A)$ est fermé dans Ω .

Remarque 1.2

1. La condition de semi-continuité supérieure dans le cas univoque est exactement celle de la continuité [22].
2. On peut traduire la condition de semi-continuité supérieur en terme de suite : soit $\{x_n\}_{n \geq 1}$ une suite convergente vers $x_0 \in \Omega$ et $A \subset Y$ un ensemble fermé avec $F(x_n) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $n \geq 1$, alors, on a $F(x_0) \cap A \neq \emptyset$.

Intuitivement $F(x_0)$ doit être au moins aussi grand en terme d'inclusion que la limite des $F(x_n)$. En d'autres termes, F peut seulement sauter vers le haut (par rapport à l'inclusion).

Exemple 1.1 Un exemple typique des applications multivoques scs est l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$F(t) = \begin{cases} \{0\}, & t < 0 \\ \{0, 1\}, & t = 0 \\ \{1\}, & t > 0. \end{cases}$$

Dans la suite, nous utiliserons plus particulièrement les applications multivoques à valeurs fermées convexes. Ici F est scs à valeurs fermées convexes si on remplace $F(0) = \{0, 1\}$ par $F(0) = [0, 1]$.

On peut généraliser cet exemple en posant, pour $f : \Omega \rightarrow Y$:

$$F(x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}f}(B_\delta(x) \cap \Omega), \quad \text{pour } x \in \Omega$$

où $\overline{\text{co}n\bar{v}A}$ est la fermeture de l'enveloppe convexe de A . L'application ainsi définie est à valeurs convexes fermées et si f est continue au point x alors $F(x) = \{f(x)\}$. Si la fonction f est localement compacte, c'est-à-dire, si pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $f(B_r(x) \cap \Omega)$ est relativement compacte, alors F est scs (voir [22]).

On rappelle qu'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite semi-continue inférieurement au point x dans l'espace X si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ qui converge vers x , on a

$$f(x) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

La fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite semi-continue supérieurement si

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq f(x)$$

Exemple 1.2 *Un exemple très général d'application multivoque $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R})$ semi-continue supérieurement est définie par $F(x) = [\varphi(x), \psi(x)]$, où $\varphi(x) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement et $\psi(x) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement.*

Maintenant on va définir la semi-continuité au sens métrique :

Définition 1.5 ([22]) *Soit $\Omega \subset X$ non vide. Une application multivoque $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ est dite $\varepsilon - \delta$ scs si pour tout $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tel que $F(x) \subset F(x_0) + B_\varepsilon(0)$ sur $B_\delta(x_0) \cap \Omega$.*

On peut traduire la définition précédente par

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} e(F(x_i), F(x_0)) = 0,$$

pour chaque suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ convergente vers x_0 .

Proposition 1.2 ([22, p. 8]) *Soit X, Y deux espaces métriques et soit $\Omega \subset X$ non vide. On a*

- i) *Si $F : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est scs alors elle est $\varepsilon - \delta$ scs. La réciproque est vraie si F est compacte.*
- ii) *Soit $F_1, F_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ des applications multivoques $\varepsilon - \delta$ scs et fermées. Si on a $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset$ sur Ω , alors $F_1 \cap F_2$ est scs si l'une des F_i est compacte.*
- iii) *Si $F : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est $\varepsilon - \delta$ scs, alors la fonction $f(x) = \rho(y, F(x))$ est semi-continue inférieurement pour tout $y \in Y$.*

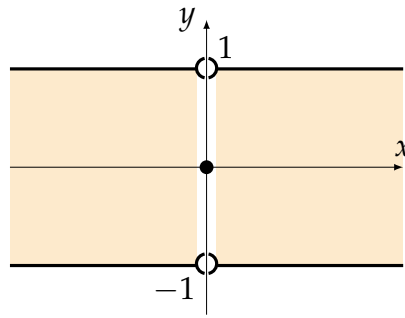
Exemple 1.3

1. *Un contre exemple du i) de la Proposition 1.2, est donné par l'application multivoque suivante : Soit $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par*

$$F(t) = \begin{cases} \{0\} & , t \neq 0 \\]0, 1] & , t = 0. \end{cases}$$

F est clairement $\varepsilon - \delta$ scs, mais $F^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. *Un autre exemple où F est fermée est le suivant : Soit $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, où $\Omega = [0, 1]$ définie par $F(x) = \{x\} \times \mathbb{R}_+$. $A = \{(t, 1/t); t > 0\}$ est une partie fermée de \mathbb{R}^2 (voir [80, page. 156]), mais on a $F^{-1}(A) =]0, 1]$.*



1.2.2 Semi-continuité inférieure

Définition 1.6 ([22]) Une application multivoque $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite *semi-continue inférieurement* (**sci** en abrégé) si pour tout ouvert $A \subset Y$, l'ensemble $F^{-1}(A)$ est ouvert dans Ω . Elle dite $\varepsilon - \delta$ **sci** si pour tout $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tel que $F(x_0) \subset F(x) + B_\varepsilon(0)$ sur $B_\delta(x_0) \cap \Omega$.

Remarque 1.3

1. en termes des suites on peut formuler la définition de **sci** par : soient $\{x_n\}_{n \geq 1}$ une suite, $x_0 \in \Omega$ et $A \subset Y$ une partie ouverte avec $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ et $F(x_0) \cap A \neq \emptyset$, alors $F(x_n) \cap A \neq \emptyset$ pour n très grand. Intuitivement la limite des $F(x_n)$ doit être au moins aussi grand en terme d'inclusion que $F(x_0)$, en d'autres termes, F peut seulement sauter vers l'intérieur.
2. de même façon on peut traduire la définition de $\varepsilon - \delta$ **sci** par

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} e(F(x_0), F(x_i)) = 0,$$

pour chaque suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ convergente vers x_0 .

Exemple 1.4

1. Un exemple d'application multivoque **sci** est l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$F(t) = \begin{cases} [-1, 1] & , \quad t \neq 0 \\ \{0\} & , \quad t = 0. \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que cette application multivoque n'es pas **scs**.

2. Un exemple très général d'application multivoque $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ semi-continue inférieurement, est définie par $F(x) = [\varphi(x), \psi(x)]$, où $\varphi(x) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement, et $\psi(x) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement.

Proposition 1.3 ([22, p. 13]) Soit X, Y deux espaces métriques et $\Omega \subset X$ non vide. Alors on a

- i) Si $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ est $\varepsilon - \delta$ **sci** alors elle est **sci**. La réciproque est vraie si F est compacte.
- ii) Si $F_1, F_2 : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ sont $\varepsilon - \delta$ **sci** convexes fermées telles que $F = F_1 \cap F_2$ est bornée avec $\mathring{F}(x) \neq \emptyset$ sur Ω , alors F est $\varepsilon - \delta$ **sci**.
- iii) $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ est **sci** si et seulement si, la fonction $f(x) = \rho(y, F(x))$ est semi-continue supérieurement pour tout $y \in Y$.

1.2.3 Sélection continue

On termine cette partie par deux théorèmes. Le premier est le fameux théorème sur les sélections due à E. Michael.

Théorème 1.3 (Michael [22, p. 14]) *Soit X, Y deux espaces de Banach et $\Omega \subset X$ non vide, et soit $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque fermée convexe, sci. Alors F admet une sélection continue, i.e. il existe $f : \Omega \mapsto Y$ continue tel que $f(x) \in F(x), \forall x \in \Omega$.*

Théorème 1.4 ([22, p. 14]) *Sous les hypothèses du Théorème 1.3, avec Y séparable, F admet une suite de sélections f_n continues telles que $F(x) = \overline{\{f_n(x) : n \geq 1\}}$ sur Ω .*

1.2.4 Continuité

Définition 1.7 *Une application multivoque $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ est dite continue si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement.*

La définition précédente est fréquemment utilisée dans la littérature, mais la continuité au sens métrique (ou au sens de Hausdorff) est la plus utilisée.

Définition 1.8 *Une application multivoque $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ est dite continue **au sens de Hausdorff** ou **H-continue** si elle est $\varepsilon - \delta$ semi-continue inférieurement et supérieurement.*

La définition précédente est équivalente à ce qui suit :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} H(F(x_i), F(x_0)) = 0,$$

pour chaque suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ convergente vers x_0 .

Définition 1.9 *Une application multivoque $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ est dite lipschitzienne s'il existe $\lambda > 0$ tel que :*

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega : H(F(x_2), F(x_1)) \leq \lambda \|x_2 - x_1\|.$$

1.3 Mesurabilité

Rappelons qu'un espace mesurable est un couple (Ω, \mathcal{A}) , où Ω est un ensemble et $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un σ -algèbre (ou tribu), i.e. une famille de parties de Ω qui vérifie

- i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- ii) Stabilité par passage au complémentaire, i.e. Si $B \in \mathcal{A}$, alors $B^c = \Omega/B \in \mathcal{A}$.
- iii) Stabilité par union dénombrable, i.e. si $B_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{A}$.

Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ deux espaces mesurables. On considère l'espace produit $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, où $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ est la plus petite σ -algèbre qui contient $B_1 \times B_2$ pour tout $B_1 \in \mathcal{A}_1$ et $B_2 \in \mathcal{A}_2$.

Une application multivoque $F : \Omega_1 \mapsto \mathcal{P}(\Omega_2)$ est dite $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -mesurable si $F^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}_1$ pour tout $B_2 \in \mathcal{A}_2$.

Un espace mesuré est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ tels que (Ω, \mathcal{A}) est un espace mesurable, et $\nu : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est une mesure, i.e. , $\nu(\emptyset) = 0$ et $\nu(\bigcup_{i \geq 1} B_i) = \sum_{i \geq 1} \nu(B_i)$ pour toute famille $(B_i)_{i \geq 1} \subset \mathcal{A}$, à parties disjointes deux à deux.

Exemples Les exemples les plus importants sont :

1. (M, \mathcal{B}) où M est une partie d'un espace de Banach Y et \mathcal{B} est la σ -algèbre de Borel, i.e σ -algèbre engendrée par l'ensemble des ouverts de M .
2. (J, \mathcal{L}) , où J est une partie de \mathbb{R}^n Lebesgue-mesurable, et \mathcal{L} la famille des parties mesurables (au sens de Lebesgue).

Définition 1.10 Soient (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable et Y un espace de Banach. Alors une application multivoque $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ est dite \mathcal{A} -mesurable si $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout B ouvert.

On peut exprimer la \mathcal{A} -mesurabilité en termes de fonctions distances.

Proposition 1.4 Soient (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable, et Y un espace de Banach séparable. Alors $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ est mesurable si et seulement si $\rho(y, F(\cdot))$ est mesurable pour chaque $y \in Y$.

1.3.1 Sélection mesurable

Maintenant, nous rappelons le théorème de Kuratowski/Ryll-Nardzewski sur les sélections mesurables.

Théorème 1.5 ([22, p. 22]) Soient (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable, Y un espace de Banach séparable, et $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ mesurable fermée. Alors F admet une sélection $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable.

Théorème de représentation de C. Castaing.

Théorème 1.6 ([22, p. 23]) Sous les hypothèses du Théorème 1.5, F admet une suite de sélections $f_n, (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurables telles que $F(x) = \overline{\{f_n(x) : n \geq 1\}}$ sur Ω .

Rappelons qu'une fonction indicatrice $\chi_A : E \mapsto \{0, 1\}$ où $A \subset E$, est définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Soit Y un espace de Banach. Une application multivoque $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ est dite étagée s'il existe une famille $(B_i) \subset \mathcal{A}$, disjointe avec $\bigcup_{i > 1} B_i = \Omega$, et une famille

$(C_i) \subset X$ fermée telles que $F(x) = \sum_{i > 1} \chi_{B_i}(x) C_i$.

Définition 1.11 ([86, p. 2]) soit $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ un espace mesuré, Y un espace de Banach séparable, et $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ fermée. F est dite fortement mesurable s'il existe une suite d'applications multivoques F_n telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} H(F(x), F_n(x)) = 0$ ν -p.p sur Ω .

Proposition 1.5 ([86, p. 2]) Soit $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$, Y un espace de Banach séparable et $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$ compacte. On a l'équivalence entre :

1. F est \mathcal{L} -mesurable.
2. F est fortement \mathcal{L} -mesurable.
3. Pour tout B fermé, $F^{-1}(B) \in \mathcal{L}$.

Théorème 1.7 ([22, p. 25]) On considère (J, \mathcal{L}, μ) avec $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$ et Y un espace de Banach. Alors

1. Supposons que Y est séparable, et $F, G : J \mapsto \mathcal{P}(Y)$ mesurables fermées telles que l'une des deux est compacte et $F(t) \cap G(t) \neq \emptyset$ sur J , alors $F \cap G$ est fortement mesurable.
2. Soit $G : J \mapsto \mathcal{P}(Y)$ fortement mesurable, compacte (ou fermée si $\dim Y < \infty$), et $z : J \mapsto Y$ fortement mesurable. Alors G admet une sélection fortement mesurable v telle que $|z(t) - v(t)| = \rho(z(t), G(t))$ p.p sur J .

1.3.2 Applications multivoques à deux variables

Définition 1.12 ([22, p. 26]) Soit $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$, Y un espace de Banach et $D \neq \emptyset$ une partie de Y . Alors $F : J \times D \mapsto \mathcal{P}(Y)$ est dite presque scs (respect. presque continue) si, pour $\varepsilon > 0$ il existe $J_\varepsilon \subset J$ fermée avec $\mu(J/J_\varepsilon) < \varepsilon$ tel que $F|_{J_\varepsilon \times D}$ est scs (respect. continue). F est dite presque sci, si pour $\varepsilon > 0$ et $\emptyset \neq C \subset D$ compact, il existe $J_\varepsilon \subset J$ fermé avec $\mu(J/J_\varepsilon) < \varepsilon$ telle que $F|_{J_\varepsilon \times D}$ est sci et $\text{vect}(F(J_\varepsilon \times D))$ est séparable. On écrit $w(\cdot) \in F(\cdot, v(\cdot))$ à la place de " w est une sélection fortement mesurable de $F(\cdot, v(\cdot))$ "

Proposition 1.6 ([22, p. 26]) Soit $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$, Y un espace de Banach, $F : J \times Y \mapsto \mathcal{P}(Y)$, et $v \in C(J, Y)$. On a,

1. Si $F(t, \cdot)$ est scs et $F(\cdot, x)$ admet une sélection fortement mesurable, alors il existe $w \in F(\cdot, v(\cdot))$
2. Si F est presque sci et $z : J \mapsto Y$ est fortement mesurable, alors il existe $w \in F(\cdot, v(\cdot))$ tel que $|z(t) - w(t)| = \rho(z(t), F(t, v(t)))$ p.p sur J .

1.3.3 Intégrale d'une application multivoque

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ un espace mesuré, et Y un espace de Banach. On note par \mathcal{F} l'ensemble des sélections intégrables de $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(Y)$, i.e

$$\mathcal{F} = \{f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \nu) | f(x) \in F(x) \nu - \text{presque partout sur } \Omega\}.$$

Définition 1.13 ([1, p. 326]) L'intégrale de l'application multivoque F sur Ω est l'ensemble des intégrales des sélections intégrables de F :

$$\int_{\Omega} F d\nu := \left\{ \int_{\Omega} f d\nu | f \in \mathcal{F} \right\}.$$

Théorème 1.8 (Convexité de l'intégral [1, p. 327-329]) Soit $F : \Omega \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ une application multivoque mesurable, fermée. Si ν est non-atomique, alors l'intégral $\int_{\Omega} F d\nu$ est convexe, et on a la propriété suivante ;

$$\overline{\int_{\Omega} F d\nu} = \int_{\Omega} \overline{F} d\nu$$

Et on a aussi pour tout $d \in \mathbb{R}^n$

$$\sigma\left(\int_{\Omega} F d\nu, d\right) = \int_{\Omega} \sigma(F, d) \mu(d\nu).$$

1.4 Cônes tangents

Soit $D \in \mathcal{P}(Y)$ fermée, et $f : D \mapsto Y$. Supposons que $x : [0, \delta] \mapsto D$ est C^1 avec $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Alors on a en particulier :

$$x(h) = x_0 + hf(x_0) + o(h) \quad 0 = \rho(x(h), D) = \rho(x_0 + hf(x_0), D) + \bar{o}(h)$$

avec $(|o(h)| + |\bar{o}(h)|)/h \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Le fait que l'on considère $D \subset Y$ impose la condition suivante : $f(x) \in \tilde{T}_D(x)$ où

$$\tilde{T}_D(x) = \left\{ y \in Y \mid \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \rho(x + hy, D) = 0 \right\} \text{ pour } x \in D.$$

Définition 1.14 ([45, p. 65]) Soit Y un espace de Banach, et $D \in \mathcal{P}(Y)$ et $x \in \bar{D}$. Le cône tangent (de Bouligand) à D pour x est défini par

$$T_D(x) = \left\{ y \in Y \mid \liminf_{h \rightarrow 0} h^{-1} \rho(x + hy, D) = 0 \right\}.$$

Proposition 1.7 ([22]) Soit Y un espace de Banach, et $D \in \mathcal{P}(Y)$ fermée. Alors

1. $0 \in \tilde{T}_D(x) \subset T_D(x)$ sur D et $\tilde{T}_D(x) = Y$ sur $\overset{\circ}{D}$, $\tilde{T}_D(x)$ et $T_D(x)$ sont fermés, $\lambda \tilde{T}_D(x) \subset \tilde{T}_D(x)$ et $\lambda T_D(x) \subset T_D(x)$ sur D pour tout $\lambda > 0$.
2. Si D est convexe alors $\tilde{T}_D(x) = T_D(x)$ sur D et $T_D(x)$ est convexe.
3. Si D est convexe alors $T_D(x) = \overline{\{\lambda(y - x) \mid \lambda \geq 0, y \in D\}}$ et $T_D(\cdot)$ est *sci*.

1.5 Inclusions différentielles, problème de Cauchy

On se place dans le cadre de la dimension finie. Soient $J = [0, T] \subset \mathbb{R}$ et $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé d'intérieur non vide et une application multivoque $F : J \times D \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t, x(t)), \\ x(0) = x_0 \in D. \end{cases} \quad (1.1)$$

1.5.1 Notion de solution, existence

Définition 1.15 ([22, p. 49]) Une solution du problème (1.1) est une fonction x absolument continue définie sur J , c'est à dire, toute fonction $x : J \mapsto D$ telle qu'il existe $\dot{x} \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$ avec

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(s) ds \text{ sur } J$$

et qui vérifient $\dot{x} \in F(t, x(t))$ presque partout sur J .

Il existe plusieurs résultats d'existence de solution pour l'inclusion différentielle (1.1). On commence par citer quelques uns dans le cas convexe, en commençant par un résultat sur les systèmes autonomes,

Lemme 1.9 ([22, p. 53]) Soient $Y = \mathbb{R}^n$ et $D \subset Y$ fermé. Supposons que $F : D \mapsto \mathcal{P}(Y)$ convexe fermée est telle que

1. F est semi-continue supérieurement,
2. $F(x) \cap T_D(x) \neq \emptyset$ sur D ,
3. $\|F(x)\| \leq c(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$ sur D avec $c > 0$,

alors pour toute donnée initiale $x_0 \in D$, le problème (1.1) admet au moins une solution absolument continue sur \mathbb{R}_+ .

Le résultat précédente permet d'établir le théorème suivant sur les systèmes non autonomes :

Théorème 1.10 ([22, p. 54]) Soient $Y = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a]$ et $D \subset Y$ fermé. Supposons que $F : J \times D \mapsto \mathcal{P}(Y)$ convexe fermée est telle que

1. $F(t, x) \cap T_D(x) \neq \emptyset$ sur $[0, a[\times D$,
2. $\|F(t, x)\| \leq c(t)(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$ sur D avec $c \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$,
3. $F(\cdot, \cdot)$ est semi-continue supérieurement,

alors pour toute donnée initiale $x_0 \in D$, le problème (1.1) admet au moins une solution absolument continue sur J .

Théorème 1.11 ([22, p. 58]) Soient $Y = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a]$ et $D \subset Y$ fermé. Supposons que $F : J \times D \mapsto \mathcal{P}(Y)$ convexe fermée est telle que

1. $F(t, x) \cap T_D(x) \neq \emptyset$ sur $J \times D$,
2. $\|F(t, x)\| \leq c(t)(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$ sur D avec $c \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$,
3. $F(\cdot, x)$ est mesurable pour tout $x \in D$,
4. $F(t, \cdot)$ est semi-continue supérieurement pour tout $t \in J$,

alors pour toute donnée initiale $x_0 \in D$, le problème (1.1) admet au moins une solution absolument continue sur J .

Exemple 1.5 Soient $n = 1$, $D = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, et

$$F(x) = \begin{cases} -1 & , x > 0 \\ \{-1, 1\} & , x = 0 \\ 1 & , x < 0. \end{cases}$$

F est semi-continue supérieurement, et le problème (1.1) n'admet pas de solution. Si on prend $F(0) = [-1, 1]$, alors il existe une solution unique ($x = 0$), qui est même de classe C^1 .

Maintenant on donne un théorème d'existence dans le cas **sci**; ce qui est une conséquence directe du Théorème 1.3.

Proposition 1.8 ([22, p. 65]) Soient $Y = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a]$ et $D \subset Y$ fermé. Supposons que $F : J \times D \mapsto \mathcal{P}(Y)$ convexe fermée est telle que

1. $F(\cdot, \cdot)$ est semi-continue inférieurement,
2. $F(t, x) \subset T_D(x)$ sur $[0, a[\times D$,
3. $\|F(t, x)\| \leq c(t)(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$ sur D avec $c(\cdot) \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$,

alors pour toute donnée initiale $x_0 \in D$, le problème (1.1) admet au moins une solution absolument continue sur J .

Malgré que le Théorème de Michael sur les sélections continues ne s'applique pas dans le cas non convexe, on a tout de même le résultat suivant :

Théorème 1.12 ([22, p. 66]) Soient $Y = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a]$ et $D \subset Y$ fermé. Supposons que $F : J \times D \mapsto \mathcal{P}(Y)$ fermée est telle que

1. $F(\cdot, \cdot)$ est semi-continue inférieurement,
2. $F(t, x) \subset T_D(x)$ sur $[0, a[\times D$,
3. $\|F(t, x)\| \leq c(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$ sur D ,

alors pour toute donnée initiale $x_0 \in D$, le problème (1.1) admet au moins une solution absolument continue sur J .

Dans le cas ou F est presque **sci** (voir Définition 1.12), on a :

Théorème 1.13 ([22, p. 69]) Soient $Y = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a]$ et $D \subset Y$ fermé, supposons que $F : J \times D \mapsto \mathcal{P}(Y)$ fermée est telle que

1. $F(\cdot, \cdot)$ est presque semi-continue inférieurement,
2. $F(t, x) \subset T_D(x)$ sur $[0, a[\times D$,
3. $\|F(t, x)\| \leq c(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$ sur D ,

alors pour toute donnée initiale $x_0 \in D$, le problème (1.1) admet au moins une solution absolument continue sur J .

Le fait d'utiliser l'hypothèse "presque **sci**" ,et non pas " $F(\cdot, x)$ mesurable + $F(t, \cdot)$ **sci**", comme dans le Théorème 1.11, se justifie par l'exemple suivant :

Exemple 1.6 ([17]) Soit $n = 2$, $D = \mathbb{R}^2$, $J = [0, 1]$ et

$$F(t, x) = \begin{cases} \{(1, \chi_B(t))\} & , x_1 = t \\ \{1\} \times [0, 1] & , \text{sinon} \end{cases}$$

où $B \subset \mathbb{R}$ est non mesurable (au sens de Lebesgue), alors F est convexe compacte, $F(\cdot, x)$ est mesurable et $F(t, \cdot)$ est sci. Mais le problème (1.1) avec $x_0 = 0$ n'admet pas de solution, sinon on aura $x_1(t) = t$ et $x_2'(t) = \chi_B(t)$ p.p.

1.5.2 Lipschitz unilatérale

Pour motiver la définition on va commencer par un Théorème de Filippov. Soit $y : [0, a] \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue donnée. Le Théorème de Filippov donne une estimation de la différence entre y et l'ensemble des solutions de (1.1).

Supposons que $F : [0, a] \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est fermée, et vérifie les hypothèses suivantes :

C1) $F(\cdot, x)$ est mesurable pour tout x .

C2) La fonction $t \mapsto \rho(y'(t), F(t, y(t)))$ est intégrable.

C3) $\exists \beta > 0, k \in L^1([0, a], \mathbb{R}^n)$ tels que pour $t \in [0, a]$, $F(t, \cdot)$ est $k(t)$ -Lipschitzienne p.p sur $y(t) + \beta B_1(0)$.

Théorème 1.14 ([1, p. 400]) *Considérons une fonction $y : [0, a] \mapsto \mathbb{R}^n$ absolument continue, et $\delta > 0$ donné et supposons que les conditions C1 – C3 sont vérifiées. Posons*

$$\gamma(t) = \rho(y'(t), F(t, y(t))), \quad m(t) = \exp\left(\int_0^t k(s) ds\right), \quad b(t) = \exp\left(\int_0^t -k(s) ds\right)$$

et

$$\eta(t) = m(t) \left(\delta + \int_0^t b(s) \gamma(s) ds \right)$$

Si $\eta(b) \leq \beta$, alors pour tout $x_0 \in B_\delta(y(0))$, il existe une solution x du problème (1.1) telle que

$$\forall t \in [0, a], |x(t) - y(t)| \leq \eta(t)$$

et

$$|x'(t) - y'(t)| \leq k(t) \eta(t) + \gamma(t), \quad \text{p.p sur } [0, a].$$

Question : Peut-on généraliser/affaiblir la condition de Lipschitz de sorte que le Théorème de Filippov reste vrai ?

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans \mathbb{R}^n .

Définition 1.16 ([25]) *L'application multivoque $F : [0, a] \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ convexe, compacte, est dite vérifier la condition Lipschitz unilatérale (par rapport à x), s'il existe une fonction intégrable k telle que pour tous $t \in [0, a]$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$, et $v \in F(t, x)$, il existe $w \in F(t, y)$ tels que*

$$\langle x - y, v - w \rangle \leq k(t) |x - y|^2.$$

Remarques

- 1) La définition 1.16 peut être exprimée de manière équivalente, à l'aide de la fonction d'appui [26] comme suit :

$$\sigma(F(t, x), x - y) - \sigma(F(t, y), x - y) \leq k(t)|x - y|^2,$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, et $t \in [0, a]$.

- 2) Toute fonction multivoque lipschitzienne vérifie, évidemment, la condition Lipschitz unilatérale.
 3) Dans le cas univoque où $f : [0, a] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la condition Lipschitz unilatérale [93] devient

$$f(t, x) - f(t, y) \leq k(t)(x - y), \text{ for } y > x$$

qui garantit l'unicité à droite de la solution du problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(0) = x_0$ (voir [53]).

Exemples

- 1) La fonction multivoque définie par

$$F(x) = -x^{\frac{1}{2}} + [-1, 1]$$

vérifie la condition de Lipschitz unilatérale.

- 2) La fonction multivoque définie par

$$F(x) = \begin{cases} [0, 1] & , \quad x < 0 \\ [-1, 1] & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

vérifie, elle aussi, la condition de Lipschitz unilatérale. On remarquera que cette fonction n'est pas continue, mais elle est scs.

Introduisons à présent la condition suivante sur F :

- C'3) F est compacte, convexe. $F(t, \cdot)$ est scs pour tout t et vérifie la condition Lipschitz unilatérale, et il existe λ mesurable telle que

$$|F(t, x)| := H(F(t, x), \{0\}) \leq \lambda(t)(1 + |x|).$$

Théorème 1.15 ([25]) *Considérons une fonction $y : [0, a] \mapsto \mathbb{R}^n$ absolument continue, et $\delta > 0$ donné et supposons que les conditions C1, C2, C'3 sont vérifiées. Alors pour tout $x_0 \in B_\delta(y(0))$, il existe une solution x du problème (1.1) telle que*

$$\forall t \in [0, a], |x(t) - y(t)| \leq \eta(t).$$

où $\eta(t)$ est définie dans le Théorème 1.14.

SUR LA THÉORIE DE TIKHONOV POUR LES INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES 2

2.1 Sur la théorie de Tikhonov pour les équations différentielles ordinaires

Un système lent-rapide est un système d'équations différentielles ordinaires sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, y), & x(0) = x_0 \\ \varepsilon \dot{y}(t) = g(x, y), & y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $t \in [0, T]$, $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, f et g sont deux fonctions suffisamment régulières. Le paramètre ε représente le rapport entre les deux échelles de temps des variables x et y , la variable x est dite rapide et la variable y lente. En remplaçant ε par 0, l'équation dégénère en un système algèbro-différentiel, et le système obtenu ne peut pas satisfaire les conditions initiales. En introduisant le temps rapide $s = \frac{t}{\varepsilon}$ dans (2.1), les dérivés x', y' de x, y par rapport à ce temps satisfont le système

$$\begin{cases} x'(s) = \varepsilon f(x, y), & x(0) = x_0 \\ y'(s) = g(x, y), & y(0) = y_0 \end{cases}$$

qui est une perturbation du système associé

$$\begin{cases} x'(s) = 0, & x(0) = x_0 \\ y'(s) = g(x, y), & y(0) = y_0. \end{cases}$$

Quelques ouvrages de référence sur l'étude du problème (2.1) sont Wasow, [94], Vasilyeva et Butuzov [87, 88], Verhulst [91], Banasiak et Lachowicz [10], Shchepakina et Sobolev et Mortell [81], Kuehn [57], Kokotovic et Khalil et O'Reilly [55], Mishchenko et al [64], Mishchenko et Rozov [65], Lomov [62].

Soit l'équation dite rapide définie par :

$$\frac{dy}{ds} = g(x, y).$$

La théorie de Tikhonov pour les systèmes lents-rapides (voir [85, 94]), concerne le système (2.1) dans le cas où l'équation rapide admet un équilibre $y = \phi(x)$ asymptotiquement stable uniformément par rapport à x .

Exemple 2.1 On considère le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t), & x(0) = 1 \\ \varepsilon \dot{y}(t) = x(t) - y(t), & y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $t \in [0, T]$, $T > 0$. La solution du problème (2.2) est :

$$\left(x^\varepsilon(t) = \exp(t), y^\varepsilon(t) = \frac{1}{1+\varepsilon} [\exp(t) - \exp(\frac{-t}{\varepsilon})] \right).$$

Si on considère le système dégénéré (obtenu pour $\varepsilon = 0$), on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}^0(t) = x^0(t), & x^0(0) = 1 \\ y^0(t) = x^0(t). \end{cases}$$

Sa solution est donnée par $(\bar{x}(t) = \exp(t), \bar{y}(t) = \exp(t))$. On voit que les solutions vérifiées, lorsque ε tend vers 0 :

$$\begin{aligned} \|x^0(t) - x^\varepsilon(t)\|_{(C([0,T]), \mathbb{R}^1)} &\rightarrow 0 \\ \forall \alpha \in]0, T[, \|y^0(t) - y^\varepsilon(t)\|_{(C[\alpha, T], \mathbb{R}^1)} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.1.1 Théorème de Tikhonov

On considère le système lent-rapide (2.1), avec $t \in [0, T]$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une application $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall (x, \phi(x)) \in \Omega \iff g(x, \phi(x)) = 0 \quad (2.3)$$

On considère le système réduit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, \phi(x)), & x(0) = x_0 \\ y(t) = \phi(x). \end{cases} \quad (2.4)$$

L'équation rapide est définie par

$$\frac{dy}{ds} = g(x, y). \quad (2.5)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

T1) L'équation originale (2.1), et l'équation réduite (2.4), possèdent la propriété d'unicité de solution.

T2) Les fonctions f et g sont continues sur l'ouvert Ω .

- T3) L'application ϕ définie en (2.3) est continue, la racine $\phi(x)$ est isolée, i.e. il existe un réel $\eta > 0$ tel que si $(x, y) \in \Omega$, $\|y - \phi(x)\| < \eta$, $y \neq \phi(x)$ implique $g(x, y) \neq 0$.
- T4) L'équilibre $y = \phi(x)$ de l'équation rapide (2.5) est asymptotiquement stable uniformément (en x).
- T5) (x_0, y_0) est dans le bassin d'attraction du point d'équilibre $y = \phi(x)$, i.e. la solution du problème.

$$\frac{dy}{ds} = g(x_0, y), y(0) = y_0$$

existe, et reste dans $P_y(\Omega)$ pour tout $s > 0$, et tend vers $\phi(x_0)$ quand $s \rightarrow \infty$.

Théorème 2.1 (Tikhonov [94, p. 253]) *Supposons vérifiées les hypothèses T1 – T5. Soient $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot))$ (respectivement $(x^0(\cdot), y^0(\cdot))$) la solution du problème (2.1) (respectivement (2.4)). Alors on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x^\varepsilon(t) - x^0(t)\|_{C([0, T], \mathbb{R}^m)} &= 0 \\ \forall \alpha \in]0, T[, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|y^\varepsilon(t) - y^0(\cdot)\|_{C([\alpha, T], \mathbb{R}^n)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Commentaire 2.1

1. Tikhonov, dans [85], a formulé son résultat en n'imposant pas la propriété d'uniformité à la stabilité asymptotique de l'équilibre de l'équation rapide. Cela a été corrigé par Hoppensteadt [47]. Pour une discussion plus profonde voir aussi [96, p. 20].
2. Le cas de la convergence des solutions sur un intervalle de temps infini (i.e. $T = \infty$) a été étudié par Hoppensteadt dans [48], (voir aussi [50, p. 434]).

On considère $E = C([0, T], \mathbb{R}^m) \times B([0, T], \mathbb{R}^n)$, le produit de l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ vers \mathbb{R}^m muni de la norme de la convergence uniforme, et l'espace des fonctions bornées de $[0, T]$ vers \mathbb{R}^n , muni de la distance suivante :

$$\tau(y_1, y_2) = \inf\{\alpha + \beta : |y_1(t) - y_2(t)| \leq \beta, \forall t \in [\alpha, T]\}.$$

Alors on peut réécrire (2.6) de la façon suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x^\varepsilon, y^\varepsilon) = (x^0, y^0) \text{ dans } E. \quad (2.7)$$

On peut vérifier que les deux formulations (2.6) et (2.7) sont équivalentes. On dit alors que $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ converge vers (x^0, y^0) pour la distance de Tikhonov (métrique de Tikhonov). Donc on peut interpréter le résultat de Tikhonov comme un théorème de continuité de la solution par rapport au paramètre ε .

2.2 Perturbations singulières d'inclusions différentielles ordinaires

2.2.1 Introduction

Soit $F : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. On considère le système singulièrement perturbé d'inclusions différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \varepsilon \dot{y}(t) \end{pmatrix} \in F(t, x, y), \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Soit Z_ε l'ensemble des solutions de (4.49) (on considère les couples de fonctions $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ absolument continues vérifiant (4.49) p.p sur $[0, T]$). Comme il s'agit de démontrer un théorème du type Tikhonov on considère le problème limite suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \in F(t, x, y), x(0) = x_0 \quad (2.9)$$

et on note Z_0 l'ensemble des solutions du problème (2.9) (on considère les couples de fonctions (x^0, y^0) avec $x^0(\cdot)$ absolument continue et $y^0(\cdot)$ mesurable vérifiant (2.9) p.p sur $[0, T]$).

Alors on peut s'intéresser à la même question que celle correspondant au cas des équations différentielles ordinaires ; c'est-à-dire, étudier les propriétés de continuité (au sens métrique) de la multifonction $\varepsilon \mapsto Z_\varepsilon$ en $\varepsilon = 0$.

Remarque 2.1 *Il existe beaucoup de travaux sur la théorie de Tikhonov pour les inclusions différentielles. On va mentionner les plus citées dans la littérature :*

1. La semi-continuité supérieure est étudiée dans

(a) A. Dontchev, Tz. Donchev et I. Slavov [30]. Il est considéré une partie $Z_\varepsilon^L \subset Z_\varepsilon$, constituée par les solutions L -lipschitz, puis est démontré que c'est non vide pour L assez grand et ε suffisamment petit. Ils démontrent la **scs** dans le métrique de Tikhonov.

(b) M. Quincampoix [75] dans la topologie de $W^{1,1}([0, T], \mathbb{R}^m) \times (C([0, T], \mathbb{R}^n), \tau)$.

(c) Tz. Donchev et I. Slavov [27], dans la topologie de $(C([0, T], \mathbb{R}^m) \times (L^1[0, T], \mathbb{R}^n) - \text{faible})$.

(d) A. Dontchev et I. Slavov [29], dans la topologie de $(C([0, T], \mathbb{R}^m) \times (L^2[0, T], \mathbb{R}^n) - \text{faible})$, (voir aussi [76]).

(e) On peut trouver aussi l'analogie de l'extension d'Hoppensteadt pour les inclusions différentielles (i.e. $T = +\infty$) dans [95] (F. Watbled).

2. La semi-continuité inférieure est étudiée dans la topologie de $(C([0, T], \mathbb{R}^m) \times (L^2[0, T], \mathbb{R}^n))$ par V. Veliov [89], et par T. Donchev et V. Angelov [24].

Nous, nous intéressons à la semi-continuité supérieur de Z_ε .

On définit les projections F_1 and F_2 de l'application multivoque $F : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ comme suit :

- $F_1 : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R}^m)$ telle que :

$$F_1(t, x, y) = \left\{ \phi \in \mathbb{R}^m / \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix} \in F(t, x, y) \right\}, (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

et

- $F_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$F_2(t, x, y) = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^n / \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix} \in F(t, x, y) \right\}, (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

Nous faisons les hypothèses suivantes.

1. F est mesurable en t , localement bornée, et $\varepsilon - \delta$ scs. F_1 est continue en y uniformément par rapport à (t, x) . F_2 est $\varepsilon - \delta$ scs.
2. Il existe un compact non vide $D \subset \mathbb{R}^m$ est une multifonction $K : [0, T] \times D \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R}^n)$ continue, Lipschitz en x , et satisfaisant pour $(t, x) \in [0, T] \times D$,

$$K(t, x) \subset K_0(t, x) = \{y \in \mathbb{R}^n / 0 \in F_2(t, x, y), \forall (t, x) \in [0, T] \times D\}.$$

3. $F_0 : [0, T] \times D \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ définie par

$$F_0(t, x) = F_1(t, x, K(t, x)) = \bigcup_{y \in K(t, x)} F_1(t, x, y), \text{ for } (t, x) \in [0, T] \times D,$$

vérifie la condition de Lipschitz unilatérale (voir Définition 1.16), fermée, presque sci (voir Définition 1.12) et, est telle que : $H : [0, T] \times D \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ définie par

$$H(t, x) = co \left(\bigcap_{\alpha > 0} F_0(t, B_\alpha(x)) \right) \text{ for } (t, x) \in [0, T] \times D,$$

est compacte et scs, et l'ensemble des solution du problème

$$\dot{x}(t) \in H(t, x), x(0) = x_0 \tag{2.10}$$

est dans \mathring{D} .

4. (Stabilité asymptotique forte de K) Pour tout $\mu > 0$ il existe $\delta = \delta(\mu) > 0$ et pour tout $\theta > 0$ il existe $\tau_0 = \tau_0(\delta, \theta)$ tel que pour tout $(t, x) \in [0, T] \times D$ et toute solution y de l'inclusion associée (i.e $\frac{dy}{d\tau} \in F_2(t, x, y)$) qui vérifie $\rho(y(0), K(t, x)) \leq \delta$, existe sur $[0, +\infty[$ et satisfait $\rho(y(\tau), K(t, x)) \leq \mu, \forall \tau \geq 0$ et $\rho(y(\tau), K(t, x)) \leq \theta, \forall \tau > \tau_0$.
5. Pour tout $\theta > 0$, il existe $\tau_0 = \tau_0(\theta)$ tel que toute solution y du problème

$$\frac{dy}{d\tau} \in F_2(0, x_0, y), y(0) = y_0, \tag{2.11}$$

est prolongeable sur $[0, +\infty[$, et satisfait

$$\rho(y(\tau), K(0, x_0)) < \theta, \forall \tau > \tau_0.$$

On considère l'inclusion différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in F_0(t, u) \\ u(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Théorème 2.2 *Supposons vérifiées les hypothèses (1)-(5). Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, toute solution $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ de (2.8) est prolongeable à $[0, T]$ et $x_\varepsilon(t) \in \mathring{D}$ pour tout $t \in [0, T]$. De plus, si*

$$\alpha_\varepsilon := \sup_{x_\varepsilon \in \mathcal{P}(Z_\varepsilon)} \rho(x_\varepsilon, Z_0)$$

et

$$\gamma_\varepsilon(t) := \sup_{(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in Z_\varepsilon} \rho(y_\varepsilon(t), K(t, x_\varepsilon(t))),$$

alors α_ε et γ_ε vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon = 0$.
- (b) $(\gamma_\varepsilon)_\varepsilon$ est uniformément bornée.
- (c) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon(t) = 0$ uniformément sur tout intervalle $[\theta, T]$, $\theta > 0$.

Les conditions (1)-(5) sont les extensions naturelles des conditions de Tikhonov pour les équations différentielles ordinaires, mais l'exemple suivant montre que Z_ε n'est pas semi-continue supérieurement.

Exemple 2.2 ([90]) *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = vy_1, & x(0) = 0 \\ \varepsilon y_1(t) = -y_1 + u, & y_1(0) = 0 \\ \varepsilon y_2(t) = -y_2 + v, & y_2(0) = 0, \quad u, v \in [-1, 1]. \end{cases}$$

On a $K(t, x) = K = \{(y_1, y_2), y_1 \in [-1, 1], y_2 \in [-1, 1]\}$. Les conditions (1)-(5) sont satisfaites, mais Z_ε n'est pas scs.

Démonstration. On note $h = \varepsilon \ln(2)$, et $t_i^\varepsilon = ih$ pour $i = 1, \dots$. Soit $u_\varepsilon(t) = (-1)^i$ pour $t \in [t_i^\varepsilon, t_{i+1}^\varepsilon[$. Soit y_1^ε la solution de la deuxième équation. Alors on peut vérifier que y_1^ε change de signe sur chaque intervalle $[t_i^\varepsilon, t_{i+1}^\varepsilon[$, car :

$$y_1^\varepsilon(t_{i+1}^\varepsilon) = \frac{y_1^\varepsilon(t_i^\varepsilon) + (-1)^i}{2}$$

Aussi que

$$\int_0^1 |y_1^\varepsilon(t)| dt \geq \delta > 0, \forall \varepsilon > 0.$$

On pose $v_\varepsilon(t) = \text{sign}(y_1^\varepsilon(t))$. Alors la solution y_2^ε associée à la troisième équation vérifie $y_2^\varepsilon(t) \leq \frac{3}{4}$. Si on a la semi-continuité supérieure dans le métrique de Tikhonov, alors il existe une solution (x^0, y_1^0, y_2^0) du problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = vy_1, & x(0) = 0 \\ y_1 = u, & u \in [-1, 1], \\ y_2 = v, & v \in [-1, 1] \end{cases}$$

telle que

$$\begin{aligned} (x^\varepsilon(\cdot) - x^0(\cdot)) &\xrightarrow{C} 0 \\ \alpha_\varepsilon(\cdot) &:= (y_1^0(\cdot) - y_1^\varepsilon(\cdot)) \xrightarrow{\tau} 0 \\ \beta_\varepsilon(\cdot) &:= (y_2^0(\cdot) - y_2^\varepsilon(\cdot)) \xrightarrow{\tau} 0. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \dot{x}^\varepsilon(t) - \dot{x}^0(t) &= v_\varepsilon(t)y_1^\varepsilon(t) - v(t)y_1^0(t) = v_\varepsilon(t)y_1^\varepsilon(t) - y_2^0(t)y_1^0(t) \\ &= v_\varepsilon(t)y_1^\varepsilon(t) - (\beta_\varepsilon(t) + y_2^\varepsilon(t))(\alpha_\varepsilon(t) + y_1^\varepsilon(t)) = (v_\varepsilon(t) - y_2^\varepsilon(t))y_1^\varepsilon(t) + \eta^\varepsilon(t) \end{aligned}$$

avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta^\varepsilon(\cdot) \xrightarrow{\tau} 0$. Mais on a aussi

$$\begin{aligned} x^\varepsilon(\cdot) - x^0(\cdot) &= \int_0^1 (v_\varepsilon(t) - y_2^\varepsilon(t))y_1^\varepsilon(t) + \eta^\varepsilon(t) dt \\ &\geq \frac{1}{4} \int_0^1 |y_1^\varepsilon(t)| dt + \int_0^1 \eta^\varepsilon(t) dt \geq \frac{\delta}{4}. \end{aligned}$$

On arrive ainsi à une contradiction, puisque $(x^\varepsilon(\cdot) - x^0(\cdot)) \xrightarrow{C} 0$. ■

Discussion 2.1

1. L'hypothèse que F_0 vérifie la condition Lipschitz unilatérale peut être déduite :
- de la condition suivante : pour tous t , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et $u_1 \in F_1(t, x_1, y_1)$, il existe $u_2 \in F_1(t, x_2, y_2)$ tel que

$$\langle x_1 - x_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \lambda_1(t) \|x_1 - x_2\|^2 + \lambda_2 \|y_1 - y_2\|^2 \quad (2.13)$$

ou encore

$$\langle x_1 - x_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \lambda_1(t) \|x_1 - x_2\|^2 + \lambda_2 \|y_1 - y_2\| \|x_1 - x_2\| \quad (2.14)$$

avec $\lambda_1 \in L^1[0, T]$,

- et de la condition $K(t, x)$ est lipschitzienne.

2. Dans [90], la condition de Lipschitz sur l'application F (et par conséquent sur ces projections) était imposée. Pour notre résultat, nous avons simplement besoin de la continuité de F_1 en y , et de la semi-continuité supérieure de F_2 .
3. Dans [90], F_2 est continue en t . Ici, nous supposons seulement qu'elle est mesurable.
4. Dans [90], la condition de Lipschitz est imposée à l'application multivoque F_0 , alors que dans ce travail on suppose seulement que F_0 vérifie la condition Lipschitz unilatérale.

Nous allons commencer par montrer quelques résultats préliminaires.

2.2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.3 Soit A un compact de \mathbb{R}^p et $G_1, G_2 : [0, T] \times A \longrightarrow \mathcal{P}_{co}(\mathbb{R}^p)$ deux multifonctions fermées, localement bornées en t , et G_1 est *scs*. Soit $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $t_k \rightarrow t^* \in [0, T[$, et supposons que toute solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} \in G_1(t_k + \varepsilon_k \tau, z) + \varepsilon_k G_2(t_k + \varepsilon_k \tau, z), \\ z(0) = z^k \in \mathring{A} \end{cases} \quad (2.15)$$

est définie au moins sur $[0, \tau_k]$. Supposons aussi que toute solution de

$$\begin{cases} \frac{d\bar{z}}{d\tau} \in G_1(t^*, \bar{z}), \\ \bar{z}(0) = z_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

est dans \mathring{A} . Alors, pour tous $\tau_0 > 0$ et $\alpha > 0$, il existe k_0 tel que si $k > k_0$, alors $\tau_k > \tau_0$ et toute solution $z(\cdot, \varepsilon_k)$ de (2.15) est prolongeable à $[0, \tau_0]$ et il existe une solution \bar{z} de (2.16) telle que : $\|z(\cdot, \varepsilon_k) - \bar{z}(\cdot)\|_{C[0, \tau_0]} < \alpha$.

Démonstration. Soit $z(\cdot, \varepsilon_k)$ une solution du problème (2.15). On a

$$\begin{aligned} \|z(\tau_k, \varepsilon_k) - z(0, \varepsilon_k)\| &\leq \int_0^{\tau_k} \left(\|F(t_k + \varepsilon_k \tau, z)\| + \varepsilon_k \|G(t_k + \varepsilon_k \tau, z)\| \right) d\tau \\ &\leq \tau_k M_1 + \varepsilon_k \tau_k M_2. \end{aligned}$$

C'est-à-dire, qu'il existe $\tau^* > 0$ avec $\tau^* < \tau_k$ pour k suffisamment grand, tel que la suite $\{z(\cdot, \varepsilon_k)\}$ est uniformément bornée et équicontinue. Alors, par le Théorème d'Arzelà-Ascoli, il existe une fonction \bar{z} absolument continue, telle que $\|z(\cdot, \varepsilon_k) - \bar{z}(\cdot)\|_{C[0, \tau^*]} \rightarrow 0$.

Maintenant on va démontrer que \bar{z} est solution de (2.16). On a

$$\begin{aligned} \bar{z}(\tau^2) - \bar{z}(\tau^1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (z(\tau^2, \varepsilon_k) - z(\tau^1, \varepsilon_k)) \\ &\in \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\tau^1}^{\tau^2} \left(G_1(t_k + \varepsilon_k \tau, z) + \varepsilon_k G_2(t_k + \varepsilon_k \tau, z) \right) d\tau. \end{aligned}$$

On note $z(\cdot, \varepsilon_k) = z_k(\cdot)$. On obtient

$$\begin{aligned} &e \left(\int_{\tau^1}^{\tau^2} G_1(t_k + \varepsilon_k \tau, z_k) + \varepsilon_k G_2(t_k + \varepsilon_k \tau, z_k) d\tau, \int_{\tau^1}^{\tau^2} G_1(t^*, \bar{z}) d\tau \right) \\ &\leq e \left(\int_{\tau^1}^{\tau^2} G_1(t_k + \varepsilon_k \tau, z_k) d\tau, \int_{\tau^1}^{\tau^2} G_1(t^*, \bar{z}) d\tau \right) + \varepsilon_k \left\| \int_{\tau^1}^{\tau^2} G_2(t_k + \varepsilon_k \tau, z_k) d\tau \right\|. \end{aligned}$$

Comme $z_k \in A$ et G_2 est localement bornée uniformément en t , il existe $M > 0$ tel que

$$\varepsilon_k \left\| \int_{\tau^1}^{\tau^2} G_2(t_k + \varepsilon_k \tau, z_k) d\tau \right\| \leq \varepsilon_k (\tau^2 - \tau^1) M \rightarrow 0.$$

D'autre part, $\forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$, $t_k + \varepsilon_k \tau \rightarrow t^*$ avec $z_k(\cdot) \rightarrow \bar{z}(\cdot)$, donc

$$n_k(\tau) = e\left(G_1(t_k + \varepsilon_k \tau, z_k(\tau)), G_1(t^*, \bar{z}(\tau))\right) \rightarrow 0.$$

De ce qui précède on déduit que

$$e\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1(t_k + \varepsilon_k \tau, z_k) d\tau, \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1(t^*, \bar{z}) d\tau\right) \rightarrow 0.$$

Donc, on obtient

$$e\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1(t_k + \varepsilon_k \tau, z_k) + \varepsilon_k G_2(t_k + \varepsilon_k \tau, z_k) d\tau, \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1(t^*, \bar{z}) d\tau\right) \rightarrow 0.$$

Ce qui implique

$$\bar{z}(\tau_2) - \bar{z}(\tau_1) \in \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1(t^*, \bar{z}) d\tau.$$

C'est-à-dire que \bar{z} est une solution généralisée de (2.16) (Lemme 1 [2, p. 99]). Alors c'est une solution de (2.16). ■

Lemme 2.4 *Supposons vérifiées les conditions (1), (2) et (4). Alors, pour tout $\mu > 0$ il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu) > 0$ tel que, pour tous $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in \mathring{D}$, y_0 satisfaisant $\rho(y_0, K(t_0, x_0)) < \delta(\frac{\mu}{2})$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, toute solution $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ de (2.8) est prolongeable et satisfait*

$$\rho\left(y_\varepsilon(t), K(t, x_\varepsilon(t))\right) < \mu \quad (2.17)$$

au moins tant que $x_\varepsilon(t) \in \mathring{D}$ et $t \leq T$.

Démonstration. Toute solution $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ de (2.8) est localement prolongeable si $x_\varepsilon(t) \in \mathring{D}$. Supposons que cette proposition n'est pas vraie. Ceci entraîne que pour toute suite (ε_k) telle que $\varepsilon_k \rightarrow 0$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $t_0^k \in [0, T]$, $x_0^k \in \mathring{D}$, $y_0^k \in K(t_0^k, x_0^k) + \delta B$. Fixons $\delta = \delta(\frac{\mu}{2})$. Supposons que $(x_{\varepsilon_k}, y_{\varepsilon_k})$ est une solution de (2.8) avec (t_0^k, x_0^k, y_0^k) comme condition initiale de telle façon que (2.17) n'est pas satisfait en t , mais $x_{\varepsilon_k}(t) \in \mathring{D}$.

K étant continue, $(x_{\varepsilon_k}, y_{\varepsilon_k})$ l'est aussi. Alors il existe $\bar{t}_k > t_0^k$ tel que

$$\rho\left(y_{\varepsilon_k}(t), K(t, x_{\varepsilon_k}(t))\right) < \mu, \quad \forall t \in [t_0^k, \bar{t}_k]. \quad (2.18)$$

On a $\delta(\frac{\mu}{2}) \leq \frac{\mu}{2} < \mu$, et donc $\bar{t}_k \geq t_0^k$ (voir (4)), et

$$\rho\left(y_{\varepsilon_k}(\bar{t}_k), K(\bar{t}_k, x_{\varepsilon_k}(\bar{t}_k))\right) < \mu \quad (2.19)$$

$x_{\varepsilon_k}(t) \in \mathring{D}$, $\forall t \in [t_0^k, \bar{t}_k]$. Par la continuité de K , x_{ε_k} et y_{ε_k} , comme $\delta < \mu$, il existe $t = t_k$ maximal dans $]t_0^k, \bar{t}_k[$ vérifiant

$$\rho\left(y_{\varepsilon_k}(t_k), K(t_k, x_{\varepsilon_k}(t_k))\right) \leq \delta. \quad (2.20)$$

Donc, pour tout $t \in]t_k, \bar{t}_k[$, on a

$$\delta < \rho(y_{\varepsilon_k}(t), K(t, x_{\varepsilon_k}(t))) < \mu \quad (2.21)$$

$t_k \in [0, T]$, $x_{\varepsilon_k}(t_k) \in D$, $y_{\varepsilon_k}(t_k) \in K(t_k, x_{\varepsilon_k}(t_k)) + \delta B$. Ce qui implique qu'il existe un point d'accumulation de l'ensemble $\{(t_k, x_{\varepsilon_k}(t_k), y_{\varepsilon_k}(t_k))\}_{k \in \mathbb{N}}$. On va le noter par (t^*, x^*, y^*) . Il existe une sous-suite (en utilisant le même indice), définissant les fonctions :

$$\begin{cases} \bar{x}_{\varepsilon_k}(\tau) = x_{\varepsilon_k}(t_k + \varepsilon_k \tau) \\ \bar{y}_{\varepsilon_k}(\tau) = y_{\varepsilon_k}(t_k + \varepsilon_k \tau) \end{cases} \quad \tau \in \left[0, \frac{\bar{t}_k - t_k}{\varepsilon_k}\right] = [0, \tau_k].$$

Le couple $(\bar{x}_{\varepsilon_k}, \bar{y}_{\varepsilon_k})$ résout l'inclusion

$$\begin{pmatrix} \bar{x}'_{\varepsilon_k}(\tau) \\ \bar{y}'_{\varepsilon_k}(\tau) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \varepsilon_k F_1(t_k + \varepsilon_k \tau, \bar{x}_{\varepsilon_k}, \bar{y}_{\varepsilon_k}) \\ F_2(t_k + \varepsilon_k \tau, \bar{x}_{\varepsilon_k}, \bar{y}_{\varepsilon_k}) \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_{\varepsilon_k}(0) = x_{\varepsilon_k}(t_k), \bar{y}_{\varepsilon_k}(0) = y_{\varepsilon_k}(t_k). \quad (2.22)$$

On considère

$$\begin{cases} x'(\tau) = 0 \\ y'(\tau) \in F_2(t^*, x, y) \end{cases} \quad x(0) = x^*, y(0) = y^* \quad (2.23)$$

sur l'intervalle $[0, \tau_0]$, où $\tau_0 = \tau(\delta, \frac{\delta}{2})$ est fixé de telle façon que $\rho(y(\tau_0), K(t^*, x^*)) < \frac{\delta}{2}$ (voir (4)). Par (2.20), $\rho(y_{\varepsilon_k}(t_k), K(t_{\varepsilon_k}, x_{\varepsilon_k}(t_k))) \leq \delta$. On obtient $\rho(y^*, K(t^*, x^*)) \leq \delta$:

$$\begin{cases} \rho(y(\tau), K(t^*, x^*)) < \frac{\mu}{2} \\ \rho(y(\tau_0), K(t^*, x^*)) < \frac{\delta}{2}. \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\rho(y(\tau_0), K(t^*, x^*)) < \frac{\delta}{2}. \quad (2.25)$$

Par le Lemme 2.3, il existe une solution (x, y) de (2.23) telle que :

$$\forall \tau \in [0, \bar{\tau}_k], |x(\tau) - \bar{x}_{\varepsilon_k}(\tau)| + |y(\tau) - \bar{y}_{\varepsilon_k}(\tau)| \rightarrow 0 \quad (2.26)$$

où $\bar{\tau}_k = \min\{\tau_0, \tau_k\}$, et cette limite est uniforme par rapport à τ . Le couple (x, y) satisfait (2.24). Pour k suffisamment grand on obtient

$$\forall \tau \in [0, \bar{\tau}_k], \rho(\bar{y}_{\varepsilon_k}(\tau), K(t^*, x^*)) < \frac{\mu}{2}.$$

De plus, $x(\cdot) \equiv x^*$. Ainsi, pour $t \in [t_k, t_k + \varepsilon_k \bar{\tau}_k]$ et $\tau = \frac{t-t_k}{\varepsilon_k}$ on trouve,

$$\rho(y_{\varepsilon_k}(t), K(t, x_{\varepsilon_k}(t))) = \rho(\bar{y}_{\varepsilon_k}(\tau), K(t_k + \varepsilon_k \tau, \bar{x}_{\varepsilon_k}(\tau))) < \frac{\mu}{2}.$$

Par le Lemme 2.3, $\tau_k = \tau_0$. Donc (2.26) appliqué à $\tau = \tau_0$ nous donne

$$\rho(\bar{y}_{\varepsilon_k}(\tau_0), K(t^*, x^*)) < \frac{\delta}{2}, \text{ pour } k \text{ suffisamment grand.}$$

Nous avons

$$\rho(y_{\varepsilon_k}(t_k + \varepsilon_k \tau_0), K(t_k + \varepsilon_k \tau_0, x_{\varepsilon_k}(t_k + \varepsilon_k \tau_0))) < \frac{\delta}{2}, \text{ pour } k \text{ suffisamment grand.}$$

Ceci contredit (2.21). ■

Démonstration du Théorème 2.2. Définissons

$$\omega(\mu) = \sup \left\{ e(F_1(t, x, y), F_1(t, x, K(t, x))), t \in [0, T], x \in D, \rho(y, K(t, x)) < \mu \right\}.$$

Par la continuité de F_1 , on a $\omega(\mu) \rightarrow 0$ quand $\mu \rightarrow 0$. Par la condition (3), l'ensemble des solutions du problème (2.10) est un compact de $C[0, T]$ (voir [22, p. 79]). Alors, il existe $S_1 \subset \overset{\circ}{D}$ compact tel que toute solution x de (2.10) vérifie $x(t) \in S_1, \forall t \in [0, T]$.

Soit $\beta_0 > 0$ tel que $S_1 + \beta_0 B \subset D$ et $B = B(0, 1)$. $K(0, x_0)$ étant compact, des conditions (1) et (5), on déduit l'existence d'un ensemble compact $S_2 \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\tilde{y}(\tau) \in S_2, \forall \tau > 0$, où \tilde{y} est une solution de (2.11).

Nous fixons $\mu \in]0, \mu_0]$ et notons $\delta = \delta(\frac{\mu}{2})$ (voir (4)). Soit $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ une solution du problème (2.8) sur $[0, T]$. Alors

$$\begin{cases} \bar{x}_\varepsilon(\tau) = x_\varepsilon(\varepsilon\tau) \\ \bar{y}_\varepsilon(\tau) = y_\varepsilon(\varepsilon\tau) \end{cases} \quad \tau \in [0, T\varepsilon^{-1}]$$

satisfait l'inclusion

$$\begin{pmatrix} \bar{x}'_\varepsilon(\tau) \\ \bar{y}'_\varepsilon(\tau) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \varepsilon F_1(\varepsilon\tau, \bar{x}_\varepsilon, \bar{y}_\varepsilon) \\ F_2(\varepsilon\tau, \bar{x}_\varepsilon, \bar{y}_\varepsilon) \end{pmatrix}, \bar{x}_\varepsilon(0) = x_0, \bar{y}_\varepsilon(0) = y_0.$$

On considère

$$\begin{cases} \tilde{x}'(\tau) = 0 \\ \tilde{y}'(\tau) \in F_2(0, \tilde{x}, \tilde{y}) \end{cases} \quad \tilde{x}(0) = x_0, \tilde{y}(0) = y_0 \quad (2.27)$$

sur l'intervalle $[0, \tau_0]$ où $\tau_0 = \tau(\frac{\delta}{3})$ (voir (5)). Notons par $\Gamma = (x_0 + B_{\mathbb{R}^m}) \times (S_2 + B_{\mathbb{R}^n})$ et supposons que $(\bar{x}_\varepsilon(\tau), \bar{y}_\varepsilon(\tau)) \in \Gamma$ avant l'instant $\bar{\tau}_\varepsilon$. Alors, par le Lemme 2.3 il existe une solution $(\tilde{x}_\varepsilon, \tilde{y}_\varepsilon)$ telle que la fonction

$$\eta_\varepsilon(\tau) = |\bar{x}_\varepsilon(\tau) - \tilde{x}_\varepsilon(\tau)| + |\bar{y}_\varepsilon(\tau) - \tilde{y}_\varepsilon(\tau)|, \quad \tau \in [0, \tau_0] \quad (2.28)$$

tend vers zéro uniformément. Comme $\tilde{x}_\varepsilon(\tau) = x_0$ et $\tilde{y}_\varepsilon(\tau) \in S_2$, pour ε suffisamment petit ($\eta_\varepsilon < 1$), on a $\bar{\tau}_\varepsilon > \tau_0$. Par la condition (5) et (2.28), on obtient

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{y}_\varepsilon(\tau_0), K(0, x_0)) &< \frac{\delta}{3} \\ \rho(\bar{y}_\varepsilon(\tau_0), K(0, x_0)) &< \frac{2\delta}{3} \end{aligned}$$

car $|\bar{y}_\varepsilon(\tau) - \tilde{y}_\varepsilon(\tau)| \rightarrow 0$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors $d(y_\varepsilon(\varepsilon\tau_0), K(\varepsilon\tau_0, x_\varepsilon(\varepsilon\tau_0))) < \delta$ pour ε suffisamment petit, tenant compte du fait que $\bar{y}_\varepsilon(\tau_0) = y_\varepsilon(\varepsilon\tau_0)$, K et x_ε sont continues. Par le Lemme 2.4, pour $\varepsilon < \varepsilon_0(\mu)$, on trouve que

$$\rho(y_\varepsilon(t), K(t, x_\varepsilon(t))) \leq \mu, \quad \forall t \in [\varepsilon\tau_0, \bar{t}_\varepsilon] \quad (2.29)$$

où $\bar{t}_\varepsilon = T$ ou bien $x_\varepsilon(\bar{t}_\varepsilon) \in \partial D$. Dans les deux cas, $x_\varepsilon(t) \in D$ pour $t \in [0, \bar{t}_\varepsilon]$. Par (2.28), sachant que $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) \in \Gamma$, pour $t \in [0, \varepsilon\tau_0]$, on obtient

$$\begin{cases} |x_\varepsilon(t) - x_0| \leq 1, & t \in [0, \varepsilon\tau_0] \\ \rho(y_\varepsilon(t), K(t, x_\varepsilon(t))) \leq C_2, & t \in [0, \varepsilon\tau_0] \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\rho(y_\varepsilon(t), K(t, x_\varepsilon(t))) \leq C_2, \quad t \in [0, \varepsilon\tau_0] \quad (2.31)$$

où C_2 est indépendant de ε et μ . Par (2.29), (2.30) et (2.31), on a

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon &= \int_0^T \rho(\dot{x}_\varepsilon(t), F_1(t, x_\varepsilon, K(t, x_\varepsilon))) dt \\ &= \int_0^T e(F_1(t, x_\varepsilon, y_\varepsilon), F_1(t, x_\varepsilon, K(t, x_\varepsilon))) dt \leq \delta_x(C_2)\tau_0\varepsilon + T\delta_x(\mu). \end{aligned}$$

On pose $p_\varepsilon(t) := \rho(\dot{x}_\varepsilon(t), F_0(t, x_\varepsilon(t)))$. Soit

$$G_\varepsilon(t, u) = \{v \in \mathbb{R}^n, \langle u - x_\varepsilon(t), v - \dot{x}_\varepsilon(t) \rangle \leq L_x(t)\|u - x_\varepsilon(t)\|^2 + p_\varepsilon(t)\|u - x_\varepsilon(t)\|\}.$$

G_ε est non vide, mesurable en t , scs en x , et compact.

Soit (t, u) fixé et $w \in F_0(t, x_\varepsilon(t))$ tel que $|w - \dot{x}_\varepsilon(t)| = \rho(\dot{x}_\varepsilon(t), F_0(t, x_\varepsilon(t))) = p_\varepsilon(t)$ et soit $v \in F_0(t, u)$ tel que

$$\langle u - x_\varepsilon(t), v - w \rangle \leq L_x(t)\|u - x_\varepsilon(t)\|^2.$$

Ce qui est possible car $F_0(t, \cdot)$ vérifie la condition Lipschitz unilatérale avec la constant $L_x(t)$. On a

$$\begin{aligned} \langle u - x_\varepsilon(t), v - \dot{x}_\varepsilon(t) \rangle &\leq L_x(t)\|u - x_\varepsilon(t)\|^2 + \langle u - x_\varepsilon(t), w - \dot{x}_\varepsilon(t) \rangle \\ &\leq L_x(t)\|u - x_\varepsilon(t)\|^2 + p_\varepsilon(t)\|u - x_\varepsilon(t)\|. \end{aligned}$$

Alors $v \in G(t, u)$ (donc $G_\varepsilon(t, u)$ est non vide). Il est clair que $v \in G_\varepsilon(t, u) \cap F_0(t, u)$ et donc

$$G_\varepsilon(t, u) \cap F_0(t, u) \neq \emptyset. \quad (2.32)$$

Maintenant, on considère le problème

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in G_\varepsilon(t, u) \cap H(t, u) \\ u(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.33)$$

On a $G_\varepsilon(t, u) \cap H(t, u) \neq \emptyset$ à cause de (3.31), et le fait que $F_0(t, u) \subset H(t, u) = \text{conv} \bigcap_{\alpha > 0} F_0(t, B_\alpha(u))$.

G_ε et H sont mesurables en t , et scs en x . H est compacte. Donc $G_\varepsilon \cap H$ est scs en x , mesurable en t , et compacte, convexe (car H est compacte et G_ε est fermée). Alors (2.33) admet une solution $x_\varepsilon^0(t)$ (voir Théorème 1.10) qui vérifie

$$\langle x_\varepsilon^0(t) - x_\varepsilon(t), \dot{x}_\varepsilon^0(t) - \dot{x}_\varepsilon(t) \rangle \leq L_x(t)\|x_\varepsilon^0(t) - x_\varepsilon(t)\|^2 + p_\varepsilon(t)\|x_\varepsilon^0(t) - x_\varepsilon(t)\|.$$

On pose $r_\varepsilon(t) = |x_\varepsilon^0(t) - x_\varepsilon(t)|$. Alors

$$\begin{cases} \dot{r}_\varepsilon(t)r_\varepsilon(t) = L_x(t)r_\varepsilon^2(t) + p_\varepsilon(t)r_\varepsilon(t) \\ r_\varepsilon(0) = 0. \end{cases}$$

Par une argumentation semblable à celle donnée dans [25], on obtient

$$\begin{cases} \dot{r}_\varepsilon(t) = L_x(t)r_\varepsilon(t) + p_\varepsilon(t) \\ r_\varepsilon(0) = 0. \end{cases}$$

Par le lemme de Gronwall on trouve $r_\varepsilon(t) \leq \exp\left(\int_0^T L_x(t)dt\right) \int_0^T p_\varepsilon(t)dt$. Donc il existe une solution de (2.10) telle que

$$\|x_\varepsilon^0(t) - x_\varepsilon(t)\| \leq C(\delta_x(C_2)\tau_0\varepsilon + T\delta_x(\mu)). \quad (2.34)$$

x_ε^0 est une solution de (2.10). L'ensemble des solutions du problème (2.12) est dense dans l'ensemble des solutions du problème (2.10) (voir [23]). Alors on peut supposer qu'il existe x_ε^1 une solution du problème (2.12) telle que

$$\|x_\varepsilon^1(t) - x_\varepsilon(t)\| \leq \underbrace{2 \cdot C(\delta_x(C_2)\tau_0\varepsilon + T\delta_x(\mu))}_{I(\mu,\varepsilon)}. \quad (2.35)$$

On définit $R(s) = \{y \in K(s, x_\varepsilon^1(s)) : f(s, y) = \inf_{\beta \in K(s, x_\varepsilon^1(s))} f(s, \beta)\}$, où

$$f(s, \beta) = \rho(x_\varepsilon^1(s), F_1(s, x_\varepsilon^1(s), \beta)).$$

Si $F_1(s, x_\varepsilon^1(s), \beta)$ est continue en β , alors $f(s, \beta)$ est continue en β aussi (voir [1, Theorem 8-2-11, p. 316]). R est mesurable et fermée, $\inf_{\beta \in K(s, x_\varepsilon^1(s))} f(s, \beta) = 0$,

car

$$x_\varepsilon^1(t) \in F_1(t, x_\varepsilon^1(t), K(t, x_\varepsilon^1(t))).$$

Par le Théorème de Kuratowski-Ryll-Nardzewski (Théorème 1.5), R admet une sélection mesurable $y_\varepsilon^1(\cdot)$. Comme K est compacte, alors $y_\varepsilon^1(s) \in K(s, x_\varepsilon^1(s))$. F_1 étant fermée,

$$x_\varepsilon^1(t) \in F_1(t, x_\varepsilon^1(t), y_\varepsilon^1(t)) \text{ et } y_\varepsilon^1(s) \in K(s, x_\varepsilon^1(s)) \Rightarrow 0 \in F_2(t, x_\varepsilon^1(t), y_\varepsilon^1(t)).$$

Ainsi, $(x_\varepsilon^1(\cdot), y_\varepsilon^1(\cdot))$ est une solution de (2.9).

Comme μ est indépendant de ε , la quantité $I(\mu, \varepsilon)$ peut être choisi très petite et les propriétés a, b, c sont alors des conséquences de (2.31), (2.29) et (2.34). ■

2.2.3 Cas $F = F_1 \times F_2$

Corollaire 2.1 *Supposons vérifiées les conditions (1)-(5) et (2.13), avec $F = F_1 \times F_2$. Alors l'application multivoque Z_ε est scs pour la distance de Tikhonov.*

Démonstration. Soit $(x_\varepsilon^0(t), y_\varepsilon^0(t))$ une solution du problème (2.8). Par le Théorème 2.2 il existe $y_\varepsilon^1 \in K(\cdot, x_\varepsilon^0(\cdot))$ mesurable tel que $|y_\varepsilon^1(t) - y_\varepsilon^0(t)| \leq \gamma_\varepsilon(t)$. Soit

$$G(t, z) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in F_1(t, z, y_\varepsilon^1(t)), \quad \langle z - x_\varepsilon^0(t), \alpha - \dot{x}_\varepsilon^0(t) \rangle \leq \\ \lambda_1(t)\|x_\varepsilon^0(t) - z\|^2 + \lambda_2\|y_\varepsilon^0(t) - y_\varepsilon^1(t)\|^2 \end{array} \right\}.$$

$G(t, z)$ est non vide (car $F_1(t, \cdot, \cdot)$ vérifie la condition Lipschitz unilatérale), mesurable en t et scs en z , localement bornée (voir Théorème 1.10). Il existe alors x_ε^1 une solution de

$$\begin{cases} \dot{z}(t) \in G(t, z) \\ z(0) = x_0. \end{cases}$$

Donc x_ε^1 vérifie

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon^1(t) \in F_1(t, x_\varepsilon^1(t), y_\varepsilon^1(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec

$$\langle x_\varepsilon^1(t) - x_\varepsilon^0(t), \dot{x}_\varepsilon^1(t) - \dot{x}_\varepsilon^0(t) \rangle \leq \lambda_1(t) \|x_\varepsilon^0(t) - x_\varepsilon^1(t)\|^2 + \lambda_2 \gamma_\varepsilon^2(t).$$

Soit $r(t) = |x_\varepsilon^0(t) - x_\varepsilon^1(t)|^2$. On a

$$\begin{cases} \dot{r}(t) \leq 2[\lambda_1(t)r(t) + \lambda_2 \gamma_\varepsilon^2(t)] \\ r(0) = 0. \end{cases}$$

D'où

$$r(t) \leq 2\lambda_2 \exp\left(2 \int_0^T \lambda_1(s) ds\right) \int_0^T \gamma_\varepsilon^2(s) ds.$$

C'est-à-dire

$$\|x_\varepsilon^1(\cdot) - x_\varepsilon^0(\cdot)\| = \beta_\varepsilon \leq \sqrt{2\lambda_2 \exp\left(2 \int_0^T \lambda_1(s) ds\right) \int_0^T \gamma_\varepsilon^2(s) ds}.$$

Alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon = 0$. On suppose que la suite $(x_\varepsilon^i(\cdot), y_\varepsilon^i(\cdot))$ est construite pour $i = k$ par

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon^k(t) \in F_1(t, x_\varepsilon^k(t), y_\varepsilon^k(t)), & |x_\varepsilon^k(t) - x_\varepsilon^{k-1}(t)| \leq a_\varepsilon^k(t) \\ y_\varepsilon^k(t) \in K(t, x_\varepsilon^{k-1}(t)) \Rightarrow 0 \in F_2(t, x_\varepsilon^{k-1}(t), y_\varepsilon^k(t)) \\ \text{tel que } |y_\varepsilon^k(t) - y_\varepsilon^{k-1}(t)| < La_\varepsilon^{k-1}(t), \text{ pour } k > 1 \end{cases} \quad (2.36)$$

avec

$$a_\varepsilon^k(t) = \left[\left(2\lambda_2 L^2 \exp\left(\int_0^T 2\lambda_1(s) ds\right) \right)^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \beta_\varepsilon,$$

où L ici est la constante de Lipschitz de $K(t, \cdot)$.

Étape $k+1$: on a $y_\varepsilon^k(t) \in K(t, x_\varepsilon^{k-1}(t))$, et $K(t, \cdot)$ est lipschitzienne donc il existe une sélection mesurable y_ε^{k+1} telle que : $y_\varepsilon^{k+1}(t) \in K(t, x_\varepsilon^k(t))$ et $\|y_\varepsilon^{k+1}(t) - y_\varepsilon^k(t)\| \leq \|x_\varepsilon^k(t) - x_\varepsilon^{k-1}(t)\| = La_\varepsilon^k(t), \forall t \in [0, T]$.

Moyennant une argumentation similaire à celle utilisée dans la construction de G , on déduit l'existence d'une solution x_ε^{k+1} du problème

$$\begin{cases} \dot{x} \in F_1(t, x, y_\varepsilon^{k+1}(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

telle que

$$\begin{aligned} \langle x_\varepsilon^{k+1}(t) - x_\varepsilon^k(t), \dot{x}_\varepsilon^{k+1}(t) - \dot{x}_\varepsilon^k(t) \rangle &\leq \lambda_1(t) \|x_\varepsilon^{k+1}(t) - x_\varepsilon^k(t)\|^2 + \lambda_2 \|y_\varepsilon^{k+1}(t) - y_\varepsilon^k(t)\|^2 \\ &\leq \lambda_1(t) \|x_\varepsilon^{k+1}(t) - x_\varepsilon^k(t)\|^2 + \lambda_2 (La_\varepsilon^k(t))^2. \end{aligned}$$

Soit $r_\varepsilon^{k+1}(t) = \|x_\varepsilon^{k+1}(t) - x_\varepsilon^k(t)\|^2$. On a

$$\begin{cases} \dot{r}_\varepsilon^{k+1}(t) \leq 2\lambda_1(t)r_\varepsilon^{k+1}(t) + 2\lambda_2(La_\varepsilon^k(t))^2 \\ r_\varepsilon^{k+1}(0) = 0. \end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$r_\varepsilon^{k+1}(t) \leq 2\lambda_2 L^2 \exp\left(2 \int_0^T \lambda_1(s) ds\right) \int_0^t (a_\varepsilon^k(s))^2 ds$$

et delà

$$\begin{aligned} r_\varepsilon^{k+1}(t) &\leq \left(2\lambda_2 L^2 \exp\left(2 \int_0^T \lambda_1(s) ds\right)\right) \cdot \left(2\lambda_2 L^2 \exp\left(2 \int_0^T \lambda_1(s) ds\right)\right)^{k-1} \\ &\quad \beta_\varepsilon^2 \int_0^t \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} ds \\ &\leq \left(2\lambda_2 L^2 \exp\left(2 \int_0^T \lambda_1(s) ds\right)\right)^k \frac{t^k}{k!} \beta_\varepsilon^2 = (a_\varepsilon^{k+1}(t))^2. \end{aligned}$$

Alors $\|x_\varepsilon^{k+1}(t) - x_\varepsilon^k(t)\| \leq a_\varepsilon^{k+1}(t)$. On a aussi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_\varepsilon^{k+1}(t) < C\beta_\varepsilon$$

où C est indépendant de t et ε , avec (2.36) $(x_\varepsilon^k, y_\varepsilon^k)$ converge uniformément vers $(\hat{x}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon)$. On choisit une sous suite L^2 -faiblement convergente de la suite \dot{x}_ε^k . Comme F_1 est scs et compacte et qu'elle est convexe, on applique le théorème de Mazur [63, page. 216], pour obtenir

$$\forall t \in [0, T], \quad \dot{x}_\varepsilon(t) \in F_1(t, \hat{x}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t)).$$

F_2 est scs et fermée, alors $0 \in F_2(t, \hat{x}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t))$. Ainsi, $(\hat{x}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon)$ est une solution du problème (2.9), avec

$$\|\hat{x}_\varepsilon(t) - x_\varepsilon^0(t)\| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} a_i(t) \leq C_1\beta_\varepsilon$$

et

$$\begin{aligned} \|\hat{y}_\varepsilon(t) - y_\varepsilon^0(t)\| &\leq \|\hat{y}_\varepsilon(t) - y_\varepsilon^1(t)\| + \|y_\varepsilon^1(t) - y_\varepsilon^0(t)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \|y_\varepsilon^{i+1}(t) - y_\varepsilon^i(t)\| + \|y_\varepsilon^1(t) - y_\varepsilon^0(t)\| \\ &\leq LC_1\beta_\varepsilon + \gamma_\varepsilon(t). \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\hat{x}_\varepsilon(t) - x_\varepsilon^0(t)\| = 0$$

et

$$\forall \alpha > 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\hat{y}_\varepsilon(t) - y_\varepsilon^0(t)\| = 0, \forall t \in [\alpha, T].$$

■

2.3 Application : Modèle de ressource-consommateur

2.3.1 Le modèle

Les variables s , x_1 et y_1 , étant, respectivement, le temps, la population et la densité de la ressource, le modèle de ressource-consommateur logistique suppose que dans l'écosystème \mathcal{L} le taux de production de la ressource y_1 est constant, et le taux de croissance de x_1 est proportionnel à y_1 . Le taux de consommation (pour x_1) de la ressource est proportionnelle à x_1 , et pour d'autres éléments de l'écosystème \mathcal{L} , proportionnel à y_1 . Le modèle s'écrit ainsi (voir [59])

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{ds} = cx_1y_1 \\ \frac{dy_1}{ds} = a - by_1 - dx_1 \end{cases} \quad (2.37)$$

où a, b, c, d sont des constantes positives.

On suppose que A et B sont les niveaux de référence de la population et ressource, respectivement. Alors la quantité $(cB)^{-1}$ a la dimension du temps. Donc on peut introduire les changements de variables suivant

$$t = cBs, \quad x(t) = x_1(s)/A, \quad y(t) = y_1(s)/B.$$

Pour $b \gg cB$, on pose

$$\varepsilon = \frac{cB}{b}$$

qui est un paramètre très petit. On introduit aussi

$$r = \frac{a}{bB}, \quad M_1 = \frac{a}{dA}.$$

Donc on arrive au problème suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} = - \left[y - r \left(1 - \frac{x}{M_1} \right) \right] \end{cases} \quad (2.38)$$

avec $0 < \varepsilon \ll 1$. La condition initiale associée est $x(0) = \beta_1 < b, y(0) = \beta_2$.

Avant d'aller plus loin dans l'étude du problème (2.38), nous rappelons quelques notions élémentaires de la théorie des ensembles flous, puis nous présentons une comparaison entre les inclusions différentielles floues et stochastiques.

2.3.2 Théorie des ensembles flous

La théorie des ensembles flous, introduite en 1965 par L.A. Zadeh, Professeur à l'université de Californie à Berkeley, est en fait un pas vers un rapprochement entre la précision des mathématiques classiques et la subtile imprécision du monde réel : un rapprochement né de l'incessante quête humaine pour une meilleure compréhension des cheminements mentaux de la connaissance (Kaufman, [49]). Elle a donc pour objet d'étude, la représentation des connaissances imprécises et le raisonnement approché.

Définition 2.1 (Sous-ensemble flou) *Soit U un ensemble de référence et soit u un élément quelconque de U . Un sous-ensemble flou A de U est caractérisé par une fonction d'appartenance qui associe, à chaque point u de U un réel dans l'intervalle $[0, 1]$*

$$\mu_A : U \mapsto [0, 1].$$

La fonction μ_A représente le degré d'appartenance de u à A . On observe les trois cas possibles

$$\begin{cases} \mu_A(u) = 0 \\ 0 < \mu_A(u) < 1 \\ \mu_A(u) = 1 \end{cases}$$

où, $\mu_A(u) = 0$ si u n'appartient pas à A , $0 < \mu_A(u) < 1$ si u appartient partiellement à A , et $\mu_A(u) = 1$ si u appartient entièrement à A .

Le sous-ensemble ordinaire A_α de U associé à A pour le seuil α est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A avec un degré au moins égal à α . On dit que A_α est la α -coupe de A . Formellement $A_\alpha = \{x \in A, \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

2.3.3 Inclusion différentielle floue vs équation stochastique

En construisant des modèles de la biologie de population on se trouve nécessairement confrontés au problème de l'incertitude. Typiquement, on commence à partir d'un modèle déterministe, qui est souvent décrit par une équation différentielle du type

$$x'(t) = h(t, x(t)).$$

L'incertitude, ou le "bruit", peut être formellement modélisée par un paramètre u apparaissant dans la dynamique

$$x'(t) = h(t, x(t), u(t)). \quad (2.39)$$

Il y a deux approches différentes en ce qui concerne l'équation (2.39). L'approche stochastique est souvent utilisée. Dans ce cadre on suppose que le bruit entre dans la dynamique de manière linéaire, c.-à-d.,

$$x'(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t))u(t) \quad (2.40)$$

où u est le bruit blanc, qui est la dérivation formelle du mouvement brownien w . Ceci nous permet d'écrire (2.40) comme équation stochastique

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t). \quad (2.41)$$

On obtient une équation de diffusion ¹ (voir [77]) décrivant l'évolution de la densité de probabilité $p(t, x)$ pour une population de taille x au temps t

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(m(t, x)p(t, x)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(n(t, x)p(t, x))$$

où

$$m(t, x) = f(t, x), n(t, x) = \rho^2 g(t, x)^2.$$

Afin d'obtenir cette équation, le bruit doit entrer dans l'équation d'une manière linéaire, qui n'est pas toujours vraie dans des modèles de dynamique de population.

Les modèles basés sur (2.41) permettent de calculer plusieurs caractéristiques biologiquement importantes ; par exemple la probabilité d'atteindre un seuil d'extinction, les périodes moyennes et médianes à la première extinction etc., qui sont importantes pour la biologie de conservation (voir [21, 38]).

Cependant, les écarts entre le bruit réel et le bruit blanc dans le modèle (2.41) auront nécessairement comme conséquence les anomalies entre les prévisions et les observations. D'ailleurs, pour donner une signification à (2.41), le calcul standard doit être remplacé par le calcul stochastique, où l'intégrale au-dessus des procédés stochastiques peut être définie de diverses manières, c.-à-d., non-uniquement. Deux interprétations utilisées généralement de (2.41), moyennant des intégrales stochastiques différentes qui sont l'intégrale dite d'Itô et celle dite de Stratonovich, mènent à des résultats essentiellement différents, qui ont également différentes interprétations biologiques, comme par exemple en ce qui concerne le temps moyen d'extinction (voir [77]).

Dans la littérature concernant la modélisation en technologie, une autre approche aux systèmes incertains est bien établie. Elle se base sur ce qu'on appelle le bruit déterministe, dans le sens où le bruit n'est pas censé avoir une structure probabiliste. Cette approche inclut le bruit inconnu, mais borné (*unknown-but-bounded noise*), qui a été développé principalement dans le cadre de la commande des systèmes incertains par G. Leitmann *et al.*. Dans le cas du bruit inconnu, mais borné, la seule hypothèse sur u en (2.39) est qu'elle appartient à un ensemble borné U . Si U est un ensemble de fonctions suffisamment régulières (par exemple, mesurable) avec des valeurs dans U , alors (2.39) devient une inclusion différentielle

$$x'(t) \in F(t, x) = \{h(t, x(t), u(t)), u \in U\}. \quad (2.42)$$

Nous supposons maintenant que, dans (2.42), $U = [-1, 1]$. Nous supposons aussi que la borne c du bruit u est connue, et que, de plus, quelques informations supplémentaires sur le bruit u sont disponibles. Par exemple, on peut supposer ou extraire à partir des données, que les points qui sont les plus proches des extrémités de l'intervalle $[-1, 1]$, se produisent moins fréquemment que ceux qui sont plus à l'intérieur ; en d'autres termes, ils sont moins probables. Alors on peut voir $U = [-1, 1]$ comme une partie floue avec une fonction d'appartenance $\rho : U = [-1, 1] \mapsto [0, 1]$. Un prototype d'une telle fonction sur l'ensemble des perturbations, qui associe une plus grande vraisemblance pour des perturbations plus petites, est

$$\rho_t(u) = 1 - |u|. \quad (2.43)$$

1. On dit aussi équation directe ou de Fokker-Plank.

D'autres exemples sont donnés par

$$\rho_q(u) = 1 - u^2, \quad \rho_c(u) = |\cos(\pi u)|.$$

Pour chaque x_u solution du problème (2.42) qui correspondent à une fonction u , on définit sa vraisemblance $\mathfrak{L}(T, x_u)$ sur l'intervalle $[0, T]$ comme étant la vraisemblance moyenne de la fonction u , ce qui représente le bruit,

$$\mathfrak{L}(T, x_u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(u(t)) dt$$

On peut voir l'ensemble des solutions du problème (2.42) comme un ensemble flou avec une fonction d'appartenance \mathfrak{L} . Alors le problème (2.42) est une inclusion différentielle floue [3]. L'ensemble des états atteignables depuis x_0 en un temps T est

$$R(x_0, T) \stackrel{\text{def}}{=} \{x_u(x_0, T), u \in \mathcal{U}\}$$

qui peut être vue comme un sous-ensemble flou avec la fonction d'appartenance définie à l'aide de \mathfrak{L} , pour $\xi \in R(x_0, t)$, de la façon suivante,

$$L(t, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \mathfrak{L}(t, x_u), u \in \mathcal{U}, x_u(t) = \xi \right\}.$$

L peut être calculé en employant le principe de Pontryagin ou l'équation de Hamilton-Jacobi, puisque c'est la valeur d'une fonction d'un problème de commande optimale.

2.3.4 Modèle de ressource-consommateur (suite)

Revenons maintenant au problème (2.38). On suppose que M_1 est sous un bruit environnemental qui est bornée par un constante $c > 0$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} = - \left[y - r \left(1 - \frac{x}{M + cu} \right) \right], u \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (2.44)$$

Ici

$$K(t, x) = \left\{ r \left(1 - \frac{x}{M + cu} \right), u \in [-1, 1] \right\}$$

En appliquant notre résultat sur la première composante de la solution du système (2.44), elle est alors approximée par la solution de l'inclusion

$$\frac{dx}{dt} \in rx \left(1 - \frac{x}{M + cu} \right), x(0) = \beta_1 \quad (2.45)$$

sur chaque intervalle $[0, T]$. Ce qui est le modèle logistique avec fluctuation de la capacité limite M (voir [19]). On suppose que $c < M$, alors l'ensemble atteignable de cette inclusion est donnée par,

$$R^x(t) = \left[\frac{(M - c)\beta_1}{(M - c - \beta_1)e^{-rt} + \beta_1}, \frac{(M + c)\beta_1}{(M + c - \beta_1)e^{-rt} + \beta_1} \right].$$

On prend ρ_t comme fonction d'appartenance (voir 2.43). Pour calculer la α -coupe de $R_x(t)$ on a besoin que $\rho_t(u) \geq \alpha$, i.e. $u \in [\alpha - 1, 1 - \alpha]$, alors R_α^x est donné par,

$$R_\alpha^x(t) = \left[\frac{(M - (1 - \alpha)c)\beta_1}{(M - (1 - \alpha)c - \beta_1)e^{-rt} + \beta_1}, \frac{(M + (1 - \alpha)c)\beta_1}{(M + (1 - \alpha)c - \beta_1)e^{-rt} + \beta_1} \right].$$

MOYENNISATION POUR LES INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC MAXIMUM

3

Dans ce chapitre nous étendons la méthode de moyennisation pour les inclusions différentielles ordinaires avec maximum [11].

3.1 Méthode de moyennisation pour les équations différentielles ordinaires : rappel

La méthode de moyennisation est une des méthodes classiques qui consiste à approximer les solutions d'un système différentiel non autonome par celles d'un système différentiel moyennisé qui lui est associé, lequel système est autonome. Elle prend ses racines dans la mécanique céleste. Quelques ouvrages de référence dans le cas des équations différentielles ordinaires sont Bogolyubov et Mitropolsky [13], Bogolyubov, Mitropolsky et Samoilenko [14], Krylov et Bogolyubov [52], Mitropolsky [66, 67]. La méthode s'étend aussi à des équations stochastiques et aléatoires, comme par exemple dans Freidlin et Wentzell [31], Samoilenko et Stanzhytskyi [78], Liu et Krstic [60]; et également aux inclusions différentielles dans Plotnikov *et al.* [71], et Perestyuk *et al.* [70].

Soient $n \in \mathbb{N}$, $L \in \mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction donnée. La théorie de moyennisation est concerné par la caractérisation de la limite de x_ε solution du problème (3.1) ci-dessous lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ sur $[0, L/\varepsilon]$.

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(t, x), t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Supposons que $\bar{f}(\cdot) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \cdot) dt$ existe. On considère alors le problème moyennisé associé à (3.1) :

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y), t > 0, \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.1 (T. Sari et M. Lakrib [58]) *On suppose que f est continue, que sa continuité en x est uniforme par rapport à t et que la limite $\bar{f}(\cdot) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \cdot) dt$ existe. On suppose que le problème moyennisé (3.2) admet une solution y unique.*

Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, toute solution x_ε du problème (3.1) est définie sur $[0, L/\varepsilon]$ et vérifie l'inégalité $|x_\varepsilon(t) - y(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0, L/\varepsilon]$.

Exemple 3.1 Soit le problème

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon[x + \sin(t+x)x^3], t > 0, \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Il est difficile de déterminer la solution de ce problème. Par contre, il est aisé de calculer la solution du problème moyennisé $\dot{y} = \varepsilon y, y(0) = 1$, qui est donnée par $y(t) = \exp(\varepsilon t)$. D'après le Théorème 3.1, celle-ci approxime la solution du problème (3.3).

3.2 Équations différentielles avec maximum

3.2.1 Introduction

Dans la théorie de contrôle automatique de divers systèmes techniques, il se produit souvent que la loi régissant le système dépend des valeurs maximums de certains des paramètres d'état pendant certains intervalles de temps. En 1966 Popov [74] a considéré le système pour contrôler la tension d'un générateur du courant constant. L'objet de l'expérience était un générateur de courant constant, et la quantité d'état était la tension du courant électrique de source. L'équation décrivant le travail du régulateur qui dépend du maximum de la fonction inconnue et est comme suit :

$$T_0 u'(t) + u(t) + q \max_{s \in [t-h, t]} u(s) = f(t)$$

où T_0 et q sont des constantes caractérisant l'objet, $u(t)$ est la tension et $f(t)$ est l'effet de perturbation, à l'instant t .

On considère le problème de Cauchy général suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(t, x(t), \max_{s \in S(t)} x(s)\right), t \geq a \\ x(a) = x_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [a, +\infty[, f : [a, +\infty[\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $S(t) : [a, +\infty[\rightarrow [a, +\infty[$ telle que

$$S(t) \subset [a, t]$$

avec

$$\max_{s \in S(t)} x(s) := \left(\max_{s \in S(t)} x_1(s), \max_{s \in S(t)} x_2(s), \dots, \max_{s \in S(t)} x_n(s) \right).$$

Alors on a le théorème d'existence suivant :

Théorème 3.2 ([51]) On suppose que $f(\cdot, x, y)$ est mesurable en t pour tout (x, y) , et

$$\|f(t, x_2, y_2) - f(t, x_1, y_1)\| \leq \lambda[\|x_2 - x_1\| + \|y_2 - y_1\|].$$

Alors, le problème de Cauchy (3.4), admet une solution unique sur un voisinage de a .

3.2.2 Méthode de moyennisation pour les équations différentielles avec maximum

L'application de la méthode de moyennisation pour les équations différentielles avec maximum a été initiée par Bainov *et al.* [5, 7, 9, 68].

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f \left(t, x(t), \max_{s \in [g_1(t), g_2(t)]} x(s) \right), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

auquel est associé le problème moyennisé suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon \bar{f} \left(y(t), \max_{s \in [g_1(t), g_2(t)]} y(s) \right), t \geq 0 \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

tel que

$$\bar{f}(x, z) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, z) dt \quad (3.7)$$

On a le théorème suivant :

Théorème 3.3 ([72]) *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Supposons vérifiées les hypothèses suivantes dans $\mathbb{R}_+ \times D \times D$:*

i) $f(t, x, y)$ est une fonction continue en t et

$$\|f(t, x, y)\| \leq M,$$

$$\|f(t, x_2, y_2) - f(t, x_1, y_1)\| \leq \lambda[\|x_2 - x_1\| + \|y_2 - y_1\|].$$

ii) g_1 et g_2 sont uniformément continues avec, $0 \leq g_1(t) \leq g_2(t) \leq t$.

iii) La limite (3.7) existe uniformément par rapport à (x, y) .

iv) Pour tout $L > 0$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $x_0 \in D' \subset D$, la solution du problème (3.6) existe pour $t \in [0, L/\varepsilon]$, et son ρ -voisinage est dans D , pour un certain $\rho > 0$.

Alors pour tout $\eta > 0$ il existe ε_0 tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on a :

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \eta, \quad \forall t \in [0, L/\varepsilon]$$

où x et y sont respectivement les solutions de (3.5) et (3.6).

3.3 Cas des inclusions différentielles avec maximum

Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$. On considère le problème

$$\begin{cases} \dot{x} \in \varepsilon F \left(t, x(t), \max_{s \in S(t)} x(s) \right), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

où $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$, avec $S(t) \subset [0, t]$ pour $t \geq 0$, une application multivoque et

$$\max_{s \in S(t)} x(s) := \left(\max_{s \in S(t)} x_1(s), \max_{s \in S(t)} x_2(s), \dots, \max_{s \in S(t)} x_p(s) \right).$$

Dans le cas où la moyenne $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x, z) dt$ existe, on la note $\bar{F} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$, i.e pour tout $x, z \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$,

$$\bar{F}(x, z) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x, z) dt \quad (3.9)$$

où l'intégral est au sens de Aumann-Hukuhara (voir [4], voir aussi Définition 1.13), et la convergence est au sens de la métrique de Hausdorff. On considère alors le problème moyennisé

$$\begin{cases} \dot{y} \in \varepsilon \bar{F} \left(y(t), \max_{s \in S(t)} y(s) \right), t \geq 0 \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Si la limite suivante existe

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon S \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) = \bar{S}(\tau),$$

on considère alors également le problème suivant

$$\begin{cases} z' \in \bar{F} \left(z(\tau), \max_{\tau \in S(\tau)} z(s) \right), \tau \geq 0 \\ z(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.11)$$

où : $z' = \frac{dz}{d\tau}$.

Définition 3.1 ([11]) On dit qu'une fonction multivoque $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ vérifie la condition de Lipschitz unilatérale (par rapport à (x, y)), s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que, pour tous $t \in \mathbb{R}_+$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}^n$ et $z_1 \in F(t, x_1, y_1)$, il existe $z_2 \in F(t, x_2, y_2)$ tel que

$$\langle z_2 - z_1, x_2 - x_1 \rangle \leq \lambda \left(|x_2 - x_1|^2 + |x_2 - x_1| |y_2 - y_1| \right)$$

ou, de façon équivalente en utilisant la fonction d'appui :

$$\sigma(x_2 - x_1, F(t, x_1, y_1)) - \sigma(x_2 - x_1, F(t, x_2, y_2)) \leq \lambda \left(|x_2 - x_1|^2 + |x_2 - x_1| |y_2 - y_1| \right)$$

pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}^n$.

Lemme 3.4 ([11]) Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On suppose que f est uniformément bornée par une fonction localement Lebesgue intégrable. Soit $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R})$ une multifonction continue, avec $S(t) \subset [0, t]$ pour $t \geq 0$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $L > 0$. Le problème à valeur initiale, associé à une équation différentielle ordinaire avec maximum

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(t, x(t), \max_{s \in S(t)} x(s)\right), & t \in [0, L] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

admet au moins une solution définie sur $[0, L]$.

Démonstration. Application du théorème du point fixe de Schauder [97, Chap 2] ■

En utilisant le théorème de sélection de Michael (Théorème 1.3), il n'est pas difficile de prouver le résultat suivant sur l'existence de solutions d'inclusions différentielles avec maximum.

Lemme 3.5 ([11]) Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ une multifonction continue. On suppose que F est uniformément bornée par une fonction localement Lebesgue intégrable. Soit $S : \mathbb{R}_+ \mapsto \text{Comp}(\mathbb{R})$ une multifonction continue, avec $S(t) \subset [0, t]$ pour $t \geq 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $L > 0$. Le problème à valeur initiale, associé à une inclusion différentielle avec maximum

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F\left(t, x(t), \max_{s \in S(t)} x(s)\right), & t \in [0, L] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.13)$$

admet au moins une solution définie sur $[0, L]$.

Lemme 3.6 ([11]) Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ et $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R})$ des multifonctions qui satisfont les conditions suivantes :

- F est continue.
- F est uniformément bornée par une fonction localement Lebesgue intégrable, i.e., il existe $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$H(F(t, x, y), 0) \leq m(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

- F vérifie la condition de Lipschitz unilatérale avec la constante $\lambda \in \mathbb{R}$.
- S est continue et $S(t) \subset [0, t]$ pour $t \geq 0$.

Soit $L > 0$ et $\delta \in L^1([0, L], \mathbb{R}_+)$. Si $x_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction absolument continue satisfaisant

$$d\left(x_1(t), F\left(t, x_1(t), \max_{s \in S(t)} x_1(s)\right)\right) \leq \delta(t), \quad t \in [0, L]$$

alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une solution x du problème (3.13) telle que, pour $t \in [0, L]$

$$|x_1(t) - x(t)| \leq \xi(t) = \left(|x_1(0) - x_0| + \int_0^L \delta(t) dt\right) \exp(2\lambda^+ t) \quad (3.14)$$

où $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}$.

Démonstration. Nous définissons, pour $t \in [0, L]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble :

$$G(t, \alpha, \beta) = \left\{ x \in F(t, \alpha, \beta) : \langle \dot{x}_1(t) - x, x_1(t) - \alpha \rangle \leq \lambda |x_1(t) - \alpha|^2 + |x_1(t) - \alpha| \left(\lambda \left| \max_{s \in S(t)} x_1(s) - \beta \right| + \delta(t) \right) \right\}.$$

Nous prouvons d'abord que $G(t, \alpha, \beta)$ est non vide pour tout $t \in [0, L]$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$.

Soit $w \in F(t, x_1(t), \max_{s \in S(t)} x_1(s))$ tel que

$$|\dot{x}_1(t) - w| = d \left(\dot{x}_1(t), F(t, x_1(t), \max_{s \in S(t)} x_1(s)) \right) \leq \delta(t).$$

L'hypothèse (H3) nous donne l'existence de $x \in F(t, \alpha, \beta)$ tel que

$$\langle w - x, x_1(t) - \alpha \rangle \leq \lambda \left(|x_1(t) - \alpha|^2 + |x_1(t) - \alpha| \left| \max_{s \in S(t)} x_1(s) - \beta \right| \right).$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}_1(t) - x, x_1(t) - \alpha \rangle &\leq \langle w - x, x_1(t) - \alpha \rangle + |\dot{x}_1(t) - w| |x_1(t) - \alpha| \\ &\leq \lambda |x_1(t) - \alpha|^2 + |x_1(t) - \alpha| \left(\lambda \left| \max_{s \in S(t)} x_1(s) - \beta \right| + \delta(t) \right), \end{aligned}$$

i.e., $G(t, \alpha, \beta) \neq \emptyset$. Évidemment, G est compacte, convexe et continue. De plus $G(t, \alpha, \beta) \subset F(t, \alpha, \beta)$. Par conséquent, par le Lemme 3.5, il existe une solution x du problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in G \left(t, x(t), \max_{s \in S(t)} x(s) \right), & t \in [0, L] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

tel que, pour $t \in [0, L]$,

$$\begin{aligned} &\langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}(t), x_1(t) - x(t) \rangle \\ &\leq \lambda |x_1(t) - x(t)|^2 \\ &\quad + |x_1(t) - x(t)| \left(\lambda \left| \max_{s \in S(t)} x_1(s) - \max_{s \in S(t)} x(s) \right| + \delta(t) \right) \\ &\leq \lambda |x_1(t) - x(t)|^2 + |x_1(t) - x(t)| \left(\lambda \max_{s \in S(t)} |x_1(s) - x(s)| + \delta(t) \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Soit $r(t) = |x_1(t) - x(t)|$, $t \in [0, L]$. La fonction r est absolument continue. Pour tout $t \in [0, L]$ en lequel r est différentiable, par (3.16), nous avons l'inégalité

$$r(t)\dot{r}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2(t) \leq \lambda r(t) \left(r(t) + \max_{s \in S(t)} r(s) \right) + r(t)\delta(t). \quad (3.17)$$

Soit $T = \{t \in [0, L] : r(t) = 0\}$ et T_0 l'ensemble des points denses de T . on a $mes(T_0) = mes(T)$, où mes est la mesure de Lebesgue. Si $t \notin T$, alors, de (3.17) on déduit

$$\dot{r}(t) \leq \lambda^+ \left(r(t) + \max_{s \in S(t)} r(s) \right) + \delta(t). \quad (3.18)$$

Si $t \in T_0$ et si $\dot{r}(t)$ existe, alors $\dot{r}(t) = 0$. Par conséquent, (3.18) est satisfait pour presque tout $t \in [0, L]$. Par conséquent, on obtient que : $r(t) \leq \bar{r}(t)$, pour $t \in [0, L]$, où \bar{r} est la solution du problème

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}}(t) = \lambda^+ \left(\bar{r}(t) + \max_{s \in S(t)} \bar{r}(s) \right) + \delta(t), & t \in [0, L] \\ \bar{r}(0) = r(0). \end{cases}$$

Tenant compte du fait que

$$\bar{r}(t) \leq r(0) + \int_0^t \left(2\lambda^+ \bar{r}(\tau) + \delta(\tau) \right) d\tau,$$

par le Lemme de Gronwall [8, Chap.1] nous déduisons l'inégalité (3.14). ■

Définition 3.2 Soit $\alpha, A > 0$. On note $K(\alpha, A)$ la classe des applications multivoques $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R}_+)$ qui vérifie : pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $|t_1 - t_2| \leq \alpha \Rightarrow H(S(t_1), S(t_2)) \leq A$.

Remarque 3.1 Si S est une application multivoque uniformément H -continue, alors pour tout $\alpha > 0$, il existe $A_{\alpha, S} > 0$ tel que $S \in K(\alpha, A_{\alpha, S})$.

Nous faisons les hypothèses suivantes sur les applications multivoques F et S notées par la lettre H .

(H1) $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R}^p)$, où \mathbb{U} est une partie ouverte de \mathbb{R}^p , est mesurable en t , continue en (x, y) uniformément en t , et

$$H(F(t, x, y), 0) \leq m(t), \quad \forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \times \mathbb{U}$$

avec

$$\int_{t_1}^{t_2} m(t) dt \leq M(t_2 - t_1), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+.$$

(H2) Pour tous $x, y \in \mathbb{U}$, la limite

$$\bar{F}(x, y) := \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \int_0^L F(\tau, x, y) d\tau$$

existe uniformément par rapport à (x, y) , où l'intégrale est dans le sens de Aumann-Hukuhara.

(H3) Il existe une application multivoque $\bar{S} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R}^p)$ telle que, pour tout $L > 0$, la quantité

$$\zeta_\varepsilon(L) = \sup \left\{ H \left(\varepsilon S \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right), \bar{S}(\tau) \right), \tau \in [0, L] \right\}$$

vérifie :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta_\varepsilon(L) = 0.$$

(H4) F vérifie la condition de Lipschitz unilatérale avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

(H5) S est uniformément continue.

On a le résultat suivant :

Théorème 3.7 *Supposons vérifiées les conditions (H1), (H2) et (H3). Alors, pour tout $T > 0$, tout $S \in K(T, A_T)$ pour A_T fixé et mesurable, et pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon(\eta, T) > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et pour toute solution x_ε du problème (3.8) qui est définie sur $[0, T/\varepsilon]$, il existe une solution z du problème (3.11) telle que z est définie sur $[0, T]$ et satisfait*

$$|x_\varepsilon(t) - z(\varepsilon t)| \leq \eta, \quad \forall t \in [0, T/\varepsilon].$$

Dans le cas où le problème (3.11) admet une solution unique, alors on a le résultat suivant qui est un corollaire du Théorème 3.7.

Corollaire 3.1 *Supposons vérifiées les conditions (H1), (H2) et (H3). Alors, pour tout $T > 0$, tout $S \in K(T, A_T)$ (pour A_T fixé) et mesurable, le problème (3.11) admet une solution unique définie sur $[0, T]$, et pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, T) > 0$, tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et pour toute solution x_ε du problème (3.8) et toute solution y_ε du problème (3.10), on a*

$$|x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)| \leq \eta, \quad \forall t \in [0, T/\varepsilon].$$

Si on ajoute les deux hypothèses (H4) et (H5), et on enlève (H3), alors on obtient le deuxième résultat qui montre la proximité entre les solutions de problème (3.8) et (3.10).

Théorème 3.8 ([11]) *Supposons vérifiées les conditions (H1), (H2), (H4) et (H5). Alors, pour tout $T > 0$, et pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon(\eta, T) > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, on a ce qui suit :*

1- *Pour toute solution x_ε du problème (3.8) qui est définie sur $[0, T/\varepsilon]$, il existe une solution y_ε du problème (3.10) qui est définie sur $[0, T/\varepsilon]$, et satisfait*

$$|x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)| \leq \eta, \quad \forall t \in [0, T/\varepsilon]. \quad (3.19)$$

2- *Pour toute solution y_ε du problème (3.10) qui est définie sur $[0, T/\varepsilon]$, il existe une solution x_ε du problème (3.8) qui est définie sur $[0, T/\varepsilon]$, telle que l'inégalité (3.19) est satisfaite.*

3.3.1 Lemmes préliminaires

Lemme 3.9 *Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R}^p)$ une application multivoque.*

- (i) *Si F satisfait l'hypothèse (H1), alors sa moyenne $\bar{F} : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R}^p)$ est uniformément bornée par la constante M et est continue.*
- (ii) *Si F satisfait l'hypothèse (H2) et (H4), alors sa moyenne $\bar{F} : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R}^p)$ vérifie la condition de Lipschitz unilatérale avec la constant λ .*
- (iii) *Soit $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R}_+)$ dans la classe $K(T, A_T)$, alors $\bar{S} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R}^p)$ qui est définie dans (H3) est continue.*

Démonstration.

(i) On a

$$\begin{aligned}
 H(\bar{F}(x, y), 0) &\leq H\left(\bar{F}(x, y), \frac{1}{L} \int_0^L F(t, x, y) dt\right) \\
 &\quad + H\left(\frac{1}{L} \int_0^L F(t, x, y) dt, 0\right) \\
 &\leq \alpha(L) + \frac{1}{L} \int_0^L H(F(t, x, y), 0) dt \quad \text{avec} \quad \lim_{L \rightarrow +\infty} \alpha(L) = 0 \\
 &\leq \alpha(L) + \frac{1}{L} \int_0^L m(t) dt \\
 &\leq \varepsilon + M, \quad \text{avec } L \text{ assez grand, tel que } \alpha(L) \leq \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, on a

$$H(\bar{F}(x, y), 0) \leq M.$$

F étant continue en (x, y) uniformément par rapport à t , i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| < \delta$$

entraîne que $H(F(t, x_1, y_1), F(t, x_2, y_2)) \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}_+$.

On a alors

$$\begin{aligned}
 H(\bar{F}(x_1, y_1), \bar{F}(x_2, y_2)) &\leq H\left(\bar{F}(x_1, y_1), \frac{1}{L} \int_0^L F(t, x_1, y_1) dt\right) \\
 &\quad + H\left(\frac{1}{L} \int_0^L F(t, x_1, y_1) dt, \frac{1}{L} \int_0^L F(t, x_2, y_2) dt\right) \\
 &\quad + H\left(\frac{1}{L} \int_0^L F(t, x_2, y_2) dt, \bar{F}(x_2, y_2)\right) \\
 &\leq 2\mu(L) + \frac{1}{L} \int_0^L H(F(t, x_1, y_1), F(t, x_2, y_2)) dt \\
 &\leq 2\mu(L) + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \lim_{L \rightarrow +\infty} \mu(L) = 0 \\
 &\leq 2\varepsilon, \quad \text{pour } L \text{ assez grand.}
 \end{aligned}$$

(ii) Notez que, pour $d \in \mathbb{R}^p$ et $A, B \in \text{conv}(\mathbb{R}^p)$, nous avons

$$|\sigma(d, A) - \sigma(d, B)| \leq |d| \left| \sigma\left(\frac{d}{|d|}, A\right) - \sigma\left(\frac{d}{|d|}, B\right) \right| \leq |d| H(A, B). \quad (3.20)$$

Maintenant, soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^p$. En utilisant l'inégalité (3.20), par (H5), on peut facilement déduire que, pour tout $\eta > 0$, il existe $T_0 = T_0(\eta) > 0$ tel

que, pour tout $T \geq T_0$ on obtient

$$\begin{aligned}
 & \sigma(x_2 - x_1, \bar{F}(x_1, y_1)) - \sigma(x_2 - x_1, \bar{F}(x_2, y_2)) \\
 & \leq \left[\sigma(x_2 - x_1, \bar{F}(x_1, y_1)) - \sigma\left(x_2 - x_1, \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x_1, y_1) dt\right) \right] \\
 & + \left[\sigma\left(x_2 - x_1, \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x_1, y_1) dt\right) - \sigma\left(x_2 - x_1, \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x_2, y_2) dt\right) \right] \\
 & + \left[\sigma\left(x_2 - x_1, \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x_2, y_2) dt\right) - \sigma(x_2 - x_1, \bar{F}(x_2, y_2)) \right] \\
 & \leq |x_2 - x_1| H\left(\bar{F}(x_1, y_1), \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x_1, y_1) dt\right) \\
 & + \frac{1}{T} \int_0^T [\sigma(x_2 - x_1, F(t, x_1, y_1)) - \sigma(x_2 - x_1, F(t, x_2, y_2))] dt \\
 & + |x_2 - x_1| H\left(\frac{1}{T} \int_0^T F(t, x_2, y_2) dt, \bar{F}(x_2, y_2)\right) \\
 & \leq 2|x_2 - x_1|\eta + \lambda \left(|x_2 - x_1|^2 + |x_2 - x_1||y_2 - y_1|\right).
 \end{aligned}$$

Comme η est arbitraire, à la limite on obtient

$$\sigma(x_2 - x_1, \bar{F}(x_1, y_1)) - \sigma(x_2 - x_1, \bar{F}(x_2, y_2)) \leq \lambda \left(|x_2 - x_1|^2 + |x_2 - x_1||y_2 - y_1|\right).$$

(iii) Soit $\tau_1, \tau \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon > 0$, petit, tels que $\left|\frac{\tau_1}{\varepsilon} - \frac{\tau}{\varepsilon}\right| \leq T$. Cela entraîne que

$$H\left(S\left(\frac{\tau_1}{\varepsilon}\right), S\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) \leq A_T. \text{ Alors, on a}$$

$$\begin{aligned}
 H(\bar{S}(\tau_1), \bar{S}(\tau)) & \leq H\left(\bar{S}(\tau_1), \varepsilon S\left(\frac{\tau_1}{\varepsilon}\right)\right) + \varepsilon H\left(S\left(\frac{\tau_1}{\varepsilon}\right), S\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) \\
 & + H\left(\varepsilon S\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \bar{S}(\tau)\right) \\
 & \leq 2\check{\zeta}_\varepsilon(T) + \varepsilon A_T.
 \end{aligned}$$

Alors on a,

$$|\tau_1 - \tau| \leq T\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow H(\bar{S}(\tau_1), \bar{S}(\tau)) \leq 2\check{\zeta}_\varepsilon(T) + \varepsilon A_T \rightarrow 0.$$

Ceci achève la preuve du lemme. ■

Nous avons besoin du résultat suivant, qui est une généralisation du résultat du Lemme 1 [2, p. 99], et qui donne une représentation intégrale des solutions.

Lemme 3.10 (Représentation intégrale) *Soit $L > 0$ et $G : [0, L] \times \mathbb{U} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R}^p)$, où \mathbb{U} est un ouvert de \mathbb{R}^p , une application $\varepsilon - \delta$ semi-continue supérieurement, avec*

$H(G(t, x, y), 0) \leq m(t)$, $\forall (t, x, y) \in I \times \mathbb{U} \times \mathbb{U}$, où m est donnée par l'hypothèse (H1), et soit $\tilde{S} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R}^p)$ continue (au sens métrique). Alors, une fonction continue x est solution sur $I = [0, L]$ de l'inclusion

$$\dot{x}(t) \in G \left(t, x(t), \max_{s \in \tilde{S}(t)} x(s) \right)$$

si et seulement si pour tous $t_1, t_2 \in I$

$$x(t_2) - x(t_1) \in \int_{t_1}^{t_2} G \left(t, x(t), \max_{s \in \tilde{S}(t)} x(s) \right) dt.$$

Démonstration. La nécessité de la condition est claire. On démontre seulement sa suffisance.

On a $|x(t_2) - x(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} m(t) dt \leq M(t_2 - t_1)$. Donc x est différentiable p.p, alors de la continuité de \tilde{S} on déduit que la fonction $\max_{s \in \tilde{S}(\cdot)} x(s)$ est continue aussi.

Donc $\varphi(\cdot) = G \left(\cdot, x(\cdot), \max_{s \in \tilde{S}(\cdot)} x(s) \right)$ est $\varepsilon - \delta$ semi-continue supérieurement. On fixe t et soit $\delta > 0$ tel que $t' \in I$. On a $|t - t'| \leq \delta$ implique que $\varphi(t') \subset \varphi(t) + \varepsilon B_1(0)$, où $B_1(0)$ est la boule unité de \mathbb{R}^p . Alors

$$\begin{aligned} x(t_1) - x(t) &\in \int_t^{t_1} G \left(l, x(l), \max_{s \in \tilde{S}(l)} x(s) \right) dl \\ &\in \left(G \left(t, x(t), \max_{s \in \tilde{S}(t)} x(s) \right) + \varepsilon B_1(0) \right) (t_1 - t). \end{aligned}$$

La dernière inclusion donne $\dot{x}(t) \in G \left(t, x(t), \max_{s \in \tilde{S}(t)} x(s) \right) + \varepsilon B_1(0)$. Comme ε est arbitraire et que G est fermée, alors on a

$$\dot{x}(t) \in G \left(t, x(t), \max_{s \in \tilde{S}(t)} x(s) \right).$$

Ceci achève la démonstration. ■

Lemme 3.11 ([11]) *Supposons que les conditions (H1),(H4) et (H5) sont vérifiées . Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, pour toute solution x du (3.8) et $L > 0$, il existe une solution $\bar{z} : [0, L/\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ du problème*

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}(t) \in \varepsilon F \left(t, \bar{z}(t), \max_{s \in \tilde{S}(t)} \bar{z}(s) \right), & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \bar{z}(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.21)$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = L/\varepsilon$ avec $t_{i+1} = t_i + L/\varepsilon p$, $i = 0, \dots, p - 1$, telle que

$$|\bar{z}(t) - x(t)| \leq \left(L \exp(2\lambda^+ L) \right) \omega_F \left(\frac{M}{p} (L + \omega_S(L)) + \varepsilon M \omega_S(L) \right), \quad t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon} \right],$$

où $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}$ et ω_G est le module de continuité de la fonction/multifonction G .

Démonstration. La preuve se fait en deux étapes.

Étape 1. Soit $\bar{z}(0) = x_0$ et supposons que \bar{z} existe sur $[0, t_i]$. Nous prouvons inductivement qu'il existe sur $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, p-1$.

Pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ on considère

$$G(t, \alpha, \beta) = E(t, \alpha, \beta) \cap \varepsilon F \left(t, \bar{z}(t_i), \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right)$$

où

$$E(t, \alpha, \beta) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle \dot{x}(t) - z, x(t) - \alpha \rangle \leq \varepsilon \left[\lambda |x(t) - \alpha|^2 + |x(t) - \alpha| \left(\lambda \left| \max_{s \in S(t)} x(s) - \beta \right| + \delta(t) \right) \right] \right\}$$

et

$$\delta(t) = H \left(F(t, \alpha, \beta), F \left(t, \bar{z}(t_i), \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right) \right).$$

Nous obtenons l'existence d'une solution du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{\alpha} \in G \left(t, \alpha(t), \max_{s \in S(t)} \alpha(s) \right), & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \alpha(t_i) = \bar{z}(t_i). \end{cases} \quad (3.22)$$

Nous avons, $G(t, \alpha, \beta)$ est non vide pour tous t, α et β . Car, par l'hypothèse (H3), il existe $w \in \varepsilon F(t, \alpha, \beta)$ tel que

$$\langle \dot{x}(t) - w, x(t) - \alpha \rangle \leq \varepsilon \lambda \left(|x(t) - \alpha|^2 + |x(t) - \alpha| \left| \max_{s \in S(t)} x(s) - \beta \right| \right).$$

De plus, pour w on a $z \in \varepsilon F \left(t, \bar{z}(t_i), \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right)$ tel que

$$|w - z| \leq \varepsilon H \left(F(t, \alpha, \beta), F \left(t, \bar{z}(t_i), \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right) \right) = \varepsilon \delta(t).$$

Donc

$$\langle \dot{x}(t) - z, x(t) - \alpha \rangle \leq \varepsilon \left[\lambda |x(t) - \alpha|^2 + |x(t) - \alpha| \left(\lambda \left| \max_{s \in S(t)} x(s) - \beta \right| + \delta(t) \right) \right],$$

i.e, $z \in G(t, \alpha, \beta)$.

Maintenant, il est facile de voir que G est compact, convexe et continu. Par conséquent, le problème (3.22) admet une solution que nous désignons aussi par \bar{z} .

Ceci complète l'étape d'induction.

Etape 2. Pour $t \in [0, L/\varepsilon]$, on a $t \in [t_i, t_{i+1}]$ pour $i = 0, \dots, p-1$ et

- d'une part,

$$|\bar{z}(t) - \bar{z}(t_i)| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon m(s) ds \leq \varepsilon M(t_{i+1} - t_i) \leq \frac{LM}{p},$$

$$\left| \max_{s \in S(t)} \bar{z}(s) - \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right| \leq \varepsilon M \omega_S \left(\frac{L}{\varepsilon p} \right) \leq M \left(\frac{1}{p} + \varepsilon \right) \omega_S(L)$$

où ω_S est le module de continuité de la multifonction S , alors

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(t) &:= H \left(F \left(t, \bar{z}(t), \max_{s \in S(t)} \bar{z}(s) \right), F \left(t, \bar{z}(t_i), \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right) \right) \\ &\leq \omega_F \left(\frac{M}{p} (L + \omega_S(L)) + \varepsilon M \omega_S(L) \right) \end{aligned}$$

où ω_F est le module de continuité de la multifonction F qui est, par l'hypothèse (H1), indépendant de t .

- d'autre part,

$$\begin{aligned} &\langle \dot{x}(t) - \dot{\bar{z}}, x(t) - \bar{z} \rangle \leq \\ &\varepsilon \left[\lambda |x(t) - \bar{z}|^2 + |x(t) - \bar{z}| \left(\lambda \left| \max_{s \in S(t)} x(s) - \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right| + \bar{\delta}(t) \right) \right]. \end{aligned}$$

Nous répétons les arguments suivant l'inégalité (3.16) dans la preuve du Lemme 3.6 pour obtenir cela pour tout $t \in [0, L/\varepsilon]$

$$\begin{aligned} |\bar{z}(t) - x(t)| &\leq \left(\int_0^{L/\varepsilon} \varepsilon \bar{\delta}(t) dt \right) \exp(2\varepsilon \lambda^+ t) \\ &\leq \left(L \exp(2\lambda^+ L) \right) \omega_F \left(\frac{M}{p} (L + \omega_S(L)) + \varepsilon M \omega_S(L) \right), \end{aligned}$$

avec $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}$. ■

3.3.2 Preuves des résultats

Démonstration du Théorème 3.7. Du fait que F est continue en (x, y) uniformément par rapport à t , il existe une fonction ω telle que,

$$\omega(F, \gamma) = \sup \{ H(F(t, x_1, y_1), F(t, x_2, y_2)) : |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq \gamma, t \in \mathbb{R}_+, x_i, y_i \in \mathbb{U} \}$$

avec $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \omega(F, \gamma) = 0$.

On opère un changement dans l'échelle du temps en considérant le temps lent $\tau = \varepsilon t$. Soit $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante qui converge vers 0, et soit x_n une solution du problème (3.8) pour $\varepsilon = \varepsilon_n$. Donc x_n est solution de l'inclusion

$$\begin{cases} x'_n \in F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, x_n(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n S(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} x_n(s) \right), t \geq 0 \\ x_n(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Il est facile de montrer que l'ensemble $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément borné, et équicontinu. Donc en appliquant le Théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe une sous-suite qui converge vers une certaine fonction z , i.e $\lim_n \|x_n - z\|_{C[0,T]} = 0$.

Soit $\alpha, \beta \in [0, T]$. Soit la subdivision de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ en des sous-intervalles $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, tels que $\tau_i = \alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{m}$ où $i \leq m-1$. On définit la fonction étagée \bar{z} par $\bar{z}(\tau) = z(\tau_i)$, pour $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}[$ et $i \leq m-1$. Soit $n > n_0$ et $m > m_0$ tels que $\|x_n - z\| \leq \delta$, et $\|\bar{z} - z\| \leq \delta$. On a alors

$$\begin{aligned}
 & H \left(\int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, x_n(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n S(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} x_n(s) \right) d\tau, \int_{\alpha}^{\beta} \bar{F} \left(z(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} z(s) \right) d\tau \right) \leq \\
 & H \left(\int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, x_n(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n S(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} x_n(s) \right) d\tau, \int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, z(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n S(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} z(s) \right) d\tau \right) \\
 & + H \left(\int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, z(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n S(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} z(s) \right) d\tau, \int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, \bar{z}(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right) d\tau \right) \quad (3.24) \\
 & + H \left(\int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, \bar{z}(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right) d\tau, \int_{\alpha}^{\beta} \bar{F} \left(\bar{z}(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right) d\tau \right) \\
 & + H \left(\int_{\alpha}^{\beta} \bar{F} \left(\bar{z}(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right) d\tau, \int_{\alpha}^{\beta} \bar{F} \left(z(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} z(s) \right) d\tau \right).
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 & H \left(\int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, x_n(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n S(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} x_n(s) \right) d\tau, \int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, z(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n S(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} z(s) \right) d\tau \right) \\
 & \leq \int_{\alpha}^{\beta} H \left(F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, x_n(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n S(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} x_n(s) \right), F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, z(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n S(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} z(s) \right) \right) d\tau \quad (3.25) \\
 & \leq T\omega(F, 2\delta).
 \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 \left| \max_{s \in \varepsilon_n S(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} z(s) - \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right| & \leq \left| \max_{s \in \varepsilon_n S(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} z(s) - \max_{s \in \bar{S}(\tau)} z(s) \right| \\
 & + \left| \max_{s \in \bar{S}(\tau)} z(s) - \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right| \\
 & \leq M_{\varepsilon_n}^z(T) + \delta
 \end{aligned}$$

où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_{\varepsilon_n}(T) = 0$. En vertu de la dernière inégalité, nous obtenons

$$\begin{aligned} & H \left(\int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, z(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n \bar{S}(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} z(s) \right) d\tau, \int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, \bar{z}(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right) d\tau \right) \\ & \leq \int_{\alpha}^{\beta} H \left(F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, z(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n \bar{S}(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} z(s) \right), F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, \bar{z}(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right) \right) d\tau \\ & \leq T\omega(F, M\xi_{\varepsilon_n}(T) + 2\delta). \end{aligned} \quad (3.26)$$

On peut montrer (voir [54]) que pour tout $\mu > 0$ on a

$$H \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, \bar{z}(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right) d\tau, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \bar{F} \left(\bar{z}(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right) d\tau \right) \leq (\tau_{i+1} - \tau_i)\mu.$$

Donc,

$$H \left(\int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, \bar{z}(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right) d\tau, \int_{\alpha}^{\beta} \bar{F} \left(\bar{z}(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right) d\tau \right) \leq T\mu \quad (3.27)$$

et

$$H \left(\int_{\alpha}^{\beta} \bar{F} \left(\bar{z}(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} \bar{z}(s) \right) d\tau, \int_{\alpha}^{\beta} \bar{F} \left(z(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} z(s) \right) d\tau \right) \leq T\omega(F, 2\delta). \quad (3.28)$$

Par les inégalités (3.24), (3.25), 3.26, (3.27) et (3.28), on obtient

$$\begin{aligned} & H \left(\int_{\alpha}^{\beta} F \left(\frac{\tau}{\varepsilon_n}, x_n(\tau), \max_{s \in \varepsilon_n \bar{S}(\frac{\tau}{\varepsilon_n})} x_n(s) \right) d\tau, \int_{\alpha}^{\beta} \bar{F} \left(z(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} z(s) \right) d\tau \right) \\ & \leq 2T\omega(F, 2\delta) + T\omega(F, M\xi_{\varepsilon_n}(T) + 2\delta) + T\mu. \end{aligned}$$

La dernière quantité peut être choisi très petite. Donc z vérifie

$$z(\beta) - z(\alpha) \in \int_{\alpha}^{\beta} \bar{F}(z(\tau), \max_{s \in \bar{S}(\tau)} z(s)) d\tau.$$

En vertu du Lemme 3.1 (\bar{F} et \bar{S} sont continues), l'application du Lemme 3.2 entraîne que z est solution du problème (3.11). Ce qui achève la preuve du théorème. ■

Démonstration du Théorème 3.8. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et x une solution du (3.8). Soit $L > 0$. Par le Lemme 3.11 il existe $\bar{z} : [0, L/\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ solution du problème

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}(t) \in \varepsilon F \left(t, \bar{z}(t), \max_{s \in \bar{S}(t)} \bar{z}(s) \right), & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \bar{z}(0) = x_0 \end{cases}$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = L/\varepsilon$ avec $t_{i+1} = t_i + L/\varepsilon p$, $i = 0, \dots, p-1$, telle que

$$|\bar{z}(t) - x(t)| \leq \left(L \exp(2\lambda^+ L) \right) \omega_F \left(\frac{M}{p} (L + \omega_S(L)) + \varepsilon M \omega_S(L) \right), \quad (3.29)$$

pour tout $t \in [0, L/\varepsilon]$, où $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}$.

Notons que par l'hypothèse (H5), on a, pour tout $\mu > 0$ il existe $\bar{\varepsilon}$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}]$ nous avons l'inégalité suivante

$$H \left(\frac{\varepsilon p}{L} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F \left(t, \bar{z}(t_i), \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right) dt, \bar{F} \left(\bar{z}(t_i), \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right) \right) \leq \mu. \quad (3.30)$$

Soit $v_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, p-1$, une fonction continue satisfaisant, pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $v_i(t) \in F \left(t, \bar{z}(t_i), \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right)$ et $\bar{z}(t) = \bar{z}(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^t v_i(s) ds$. Il existe $v^i \in \bar{F} \left(\bar{z}(t_i), \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right)$ tel que, par (3.30)

$$\left| \frac{\varepsilon p}{L} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i(t) dt - v^i \right| = \left| \frac{\varepsilon p}{L} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (v_i(t) - v^i) dt \right| \leq \mu.$$

Ensuite, nous considérons $z^1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par : $z^1(t) = z^1(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} v^i ds$, pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Nous avons

$$|z^1(t) - z^1(t_i)| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} M \varepsilon ds \leq \frac{ML}{p}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Par la définition du z^1 et \bar{z} , nous avons

$$\begin{aligned} |z^1(t_{i+1}) - \bar{z}(t_{i+1})| &\leq |z^1(t_i) - \bar{z}(t_i)| + \varepsilon \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (v_i(t) - v^i) dt \right| \\ &\leq |z^1(t_i) - \bar{z}(t_i)| + \frac{L\mu}{p} \leq \dots \leq p \frac{L\mu}{p} = L\mu. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons, pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\begin{aligned} |z^1(t) - \bar{z}(t)| &\leq |z^1(t) - z^1(t_i)| + |z^1(t_i) - \bar{z}(t_i)| + |\bar{z}(t_i) - \bar{z}(t)| \\ &\leq L\mu + \frac{2ML}{p} \end{aligned} \quad (3.31)$$

et

$$\left| \max_{s \in S(t_i)} z^1(s) - \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right| \leq \max_{s \in S(t_i)} |z^1(s) - \bar{z}(s)| \leq L\mu + \frac{2ML}{p}$$

pour que

$$H \left(\bar{F} \left(\bar{z}(t_i), \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s) \right), \bar{F} \left(z^1(t), \max_{s \in S(t_i)} z^1(s) \right) \right) \leq \omega_{\bar{F}} \left(2L\mu + \frac{4ML}{p} \right)$$

où $\omega_{\bar{F}}$ est le module de continuité de la multifonction \bar{F} .

Par conséquent, pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, p-1$,

$$\begin{aligned} d\left(z^1(t), \varepsilon \bar{F}\left(z^1(t), \max_{s \in S(t_i)} z^1(s)\right)\right) &\leq \varepsilon d\left(v^i, \bar{F}\left(z^1(t), \max_{s \in S(t_i)} z^1(s)\right)\right) \\ &\leq \varepsilon H\left(\bar{F}\left(\bar{z}(t_i), \max_{s \in S(t_i)} \bar{z}(s)\right), \bar{F}\left(z^1(t), \max_{s \in S(t_i)} z^1(s)\right)\right) \\ &\leq \varepsilon \omega_{\bar{F}}\left(2L\mu + \frac{4ML}{p}\right). \end{aligned}$$

En prenant en compte le fait que $\varepsilon \bar{F}$ vérifie la condition de Lipschitz unilatérale avec la constante $\varepsilon \lambda$, par le Lemme 3.6 il existe une solution y du (3.10), telle que, pour $t \in [0, L/\varepsilon]$,

$$\begin{aligned} |z^1(t) - y(t)| &\leq \left(\exp(2\lambda^+L)\right) \int_0^{L/\varepsilon} \varepsilon \omega_{\bar{F}}\left(2L\mu + \frac{4ML}{p}\right) ds \\ &\leq \left(L \exp(2\lambda^+L)\right) \omega_{\bar{F}}\left(2L\mu + \frac{4ML}{p}\right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Par les inégalités (3.29), (3.31) et (3.32) il s'ensuit que, pour $t \in [0, L/\varepsilon]$,

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - \bar{z}(t)| + |\bar{z}(t) - z^1(t)| + |z^1(t) - y(t)| \\ &\leq \left(L \exp(2\lambda^+L)\right) \omega_F\left(\frac{M}{p}(L + \omega_S(L)) + \varepsilon M \omega_S(L)\right) + L\mu + \frac{2ML}{p} \\ &\quad + \left(L \exp(2\lambda^+L)\right) \omega_{\bar{F}}\left(2L\mu + \frac{4ML}{p}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $\eta > 0$, par le choix approprié de μ , pour p suffisamment grand, et ε suffisamment petit, nous obtenons l'inégalité $|x(t) - y(t)| \leq \eta$ pour $t \in [0, L/\varepsilon]$. La preuve de (i) est maintenant complète.

En adoptant la procédure utilisée en (i), on obtient de la même manière (ii). ■

3.3.3 Exemples

Exemple 3.2 Comme exemple d'application du Théorème 3.7, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in \varepsilon |\sin(t)|^2 \left([0, 1] + \left[\max_{s \in [g_1(t), g_2(t)]} x(s) \right]^{\frac{1}{2}} \right), & t \geq 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (3.33)$$

où $g_1(t) = \max\left\{0, \frac{t - \sqrt{t}}{2}\right\}$ et $g_2(t) = \min\left\{t, \frac{\lfloor t \rfloor + 1}{2}\right\}$, et où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. On remarque que $S(\cdot) \equiv [g_1(\cdot), g_2(\cdot)]$ n'est pas continue, mais $S \in K(1, 1)$ et \bar{S} existe et est donnée par $\bar{S}(\tau) = \left\{\frac{\tau}{2}\right\}$, pour $\tau \geq 0$, où $\tau = t/\varepsilon$.

Le problème moyennisé associé au problème (3.33) s'écrit

$$\begin{cases} z'(\tau) \in \frac{1}{2} \left([0, 1] + \sqrt{z\left(\frac{\tau}{2}\right)} \right) \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Du Théorème 3.7 on déduit que chaque solution du problème (3.33) peut être approximée par une solution du problème moyennisé. Notons également que d'un point de vue numérique le problème moyennisé est moins "cher", puisque l'évaluation est requise seulement en un unique point (i.e. $\tau/2$), mais dans le problème (3.33) nous devons trouver le maximum sur un intervalle.

Exemple 3.3 Cette exemple a été considéré dans [51], et auquel nous apportons quelques légères modifications :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \varepsilon \left[-2\lambda x_1 \sin \left(t + \max_{s \in [g_1(t), g_2(t)]} x_2(s) \right) \right. \\ \quad \left. + \mu x_1^3 \cos^3(t + x_2) \right] \sin(t + x_2) \\ \dot{x}_2(t) = \varepsilon \left[2\lambda \sin \left(t + \max_{s \in [g_1(t), g_2(t)]} x_2(s) \right) \right. \\ \quad \left. - \mu x_1^2 \cos^3(t + x_2) \right] \cos(t + x_2) \end{cases} \quad (3.34)$$

avec $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = \frac{\pi}{2}$, $g_1(t) = \max \left\{ 0, t - \frac{1}{2} \right\}$ et $g_2(t) = \max \left\{ 0, t - \frac{1}{4} \right\}$, $\lambda \in [1/2, 1]$, $\mu = 0.2$.

Le Théorème 3.8 permet d'affirmer l'approximation des solutions du problème (3.34) par celles du problème moyennisé suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) \in -\varepsilon \left[\frac{1}{2}, 1 \right] y_1(t), & y_1(0) = 2 \\ \dot{y}_2(t) \in \varepsilon \left(\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] - \frac{3\mu}{8} y_1^2(t) \right), & y_2(0) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Exemple 3.4 L'exemple suivant est étayé par quelques simulations numériques :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon |\sin(t)|^2 \left(x(t) + \sqrt{\max_{s \in [0, g_2(t)]} x(s)} \right) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (3.35)$$

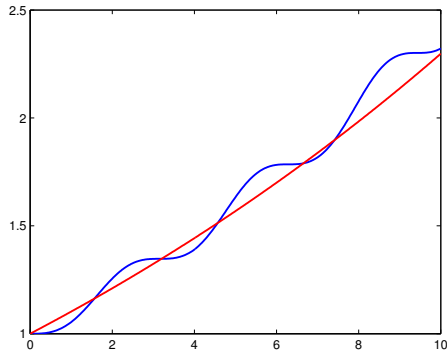
où $g_2(t) = \sqrt{t}$, $\bar{g}_2(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon g_2\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon \tau} = 0$, $\forall \tau \in [0, 1]$.

Comme pour l'Exemple 3.3, le Théorème 3.8 permet d'affirmer l'approximation des solutions du problème (3.35) par celles du problème moyennisé suivant :

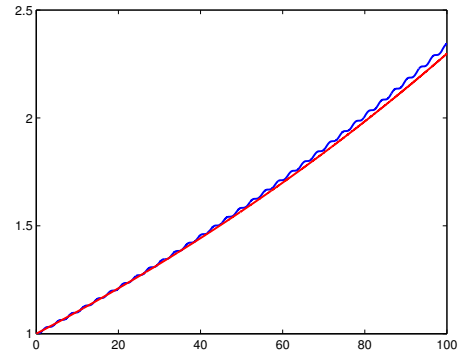
$$\begin{cases} z'(\tau) = \frac{1}{2} (z(\tau) + 1), \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Les simulations numériques qui suivent illustrent les approximations données par le Théorème 3.8.

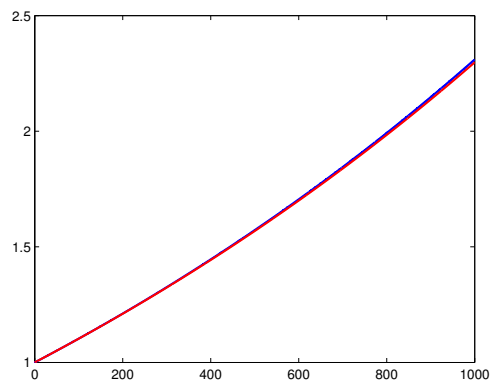
ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\max\{ x(t) - z(\varepsilon t) , t \in [0, 1/\varepsilon]\}$	0.1730	0.0469	0.0135	0.0041



(a) $\varepsilon = 0.1$



(b) $\varepsilon = 0.01$



(c) $\varepsilon = 0.001$

FIGURE 3.1 – Trajectoires des systèmes originale et moyennisé pour quelques valeurs de ε .

DEUXIÈME PARTIE :

SUR LA COMPÉTITION DANS LE CHÉMOSTAT AVEC
INHIBITEUR EXTERNE

COMPÉTITION DANS LE CHÉMOSTAT AVEC 4 INHIBITEUR LÉTAL EXTERNE

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le modèle de compétition entre deux espèces de micro-organismes dans le chémostat avec inhibiteur létal externe. Le modèle a été introduit par Hsu, Li et Waltman [41, 42] avec comme fonctions de croissance des fonctions de Monod. Dans ce travail [12] nous étudions ce modèle avec des fonctions croissantes, et nous décrivons le diagramme opératoire. Des simulations numériques sont données pour illustrer les résultats.

4.2 Chémostat

Un chémostat est un type particulier de bioréacteur qui permet de faire croître une population de micro-organismes (algues unicellulaires, bactéries, levures, phytoplancton, zooplancton,...) sur certains substrats, tout en conservant des conditions environnantes (température, luminosité, pH, aération). Il est utilisé pour la production de la masse cellulaire elle-même, pour l'extraction et la dégradation de certains polluants dans un milieu liquide, pour la production de substances organiques résultant de l'activité métabolique.

Dans un chémostat, les nutriments nécessaires à la croissance cellulaire alimentent en continu le récipient de culture par une pompe reliée au réservoir. Les micro-organismes à l'intérieur du chémostat croissent continuellement sur ces nutriments. Les nutriments résiduels et les micro-organismes sont retirés du chémostat à la même vitesse ce qui permet le maintien de la culture, dans le fermenteur, à un volume constant. Quelques ouvrages de référence [40, 84].

Trois modes de fonctionnement sont possibles dans un bioréacteur :

- En discontinu ou "batch" : L'entrée et la sortie sont nulles.
- En semi-continu ou "fed batch" : Seule la sortie est nulle. C'est le mode de fonctionnement utilisé lorsque l'objectif est le contrôle de la population du réacteur.
- En continu : Le débit de la sortie est égal au débit de l'entrée. Le volume est donc constant dans le réacteur.

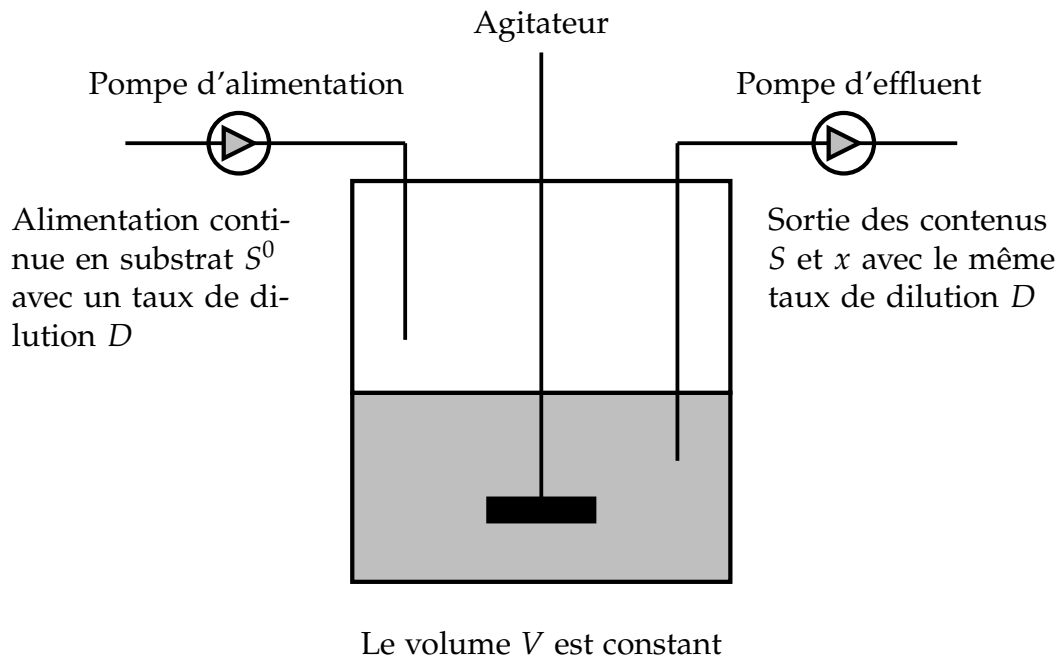


FIGURE 4.1 – Chémostat en mode continu. Le nutriment entre à un taux D et une concentration S^0 , les organismes x et le substrat S effluent au même taux D .

La réalisation effective de l'appareil du chémostat peut prendre plusieurs formes. On peut schématiser un chémostat de la façon décrite ci-après.

Le bassin (la chambre du chémostat) est chargé avec une variété de microorganismes et alimenté avec un débit constant des nutriments. La culture est bien agitée, et tous les autres paramètres importants (par exemple la température) affectant la croissance sont maintenus constants.

Pour deux micro-organismes en compétition, l'équation de chémostat prend la forme suivante

$$\begin{cases} S' = (S^0 - S)D - \frac{f_1(S)}{\beta_1}x - \frac{f_2(S)}{\beta_2}y \\ x' = [f_1(S) - D]x \\ y' = [f_2(S) - D]y \end{cases}$$

où S est la concentration du substrat, x, y sont les concentrations des compétiteurs, S^0 la concentration du substrat à l'entrée du chémostat, f_i pour $i = 1, 2$, les taux de croissance de x et y , respectivement, β_i pour $i = 1, 2$, les coefficients de rendement de x et y , respectivement, et D le taux de dilution.

4.3 Modèle du chémostat avec inhibiteur légal externe

Le modèle du chémostat en présence d'un inhibiteur légal externe s'écrit

$$\begin{cases} S' &= (S^0 - S)D - f_1(S)\frac{x}{\beta_1} - f_2(S)\frac{y}{\beta_2} \\ x' &= [f_1(S) - D - \gamma p]x \\ y' &= [f_2(S) - D]y \\ p' &= (p^0 - p)D - g(p)y \end{cases} \quad (4.1)$$

où S est la concentration du substrat, x et y les concentrations des compétiteurs, p la concentration de l'inhibiteur externe, S^0 , la concentration du substrat à l'entrée du chémostat, p^0 la concentration de l'inhibiteur à l'entrée du chémostat, D , le taux de dilution, β_i , $i = 1, 2$, les coefficients de rendement de x et y , respectivement, f_i , $i = 1, 2$, les taux de croissance de x et y , respectivement, g le taux d'absorption de l'inhibiteur externe par y , γ la constante de proportionnalité de l'interaction entre x et l'inhibiteur.

Ce modèle a été étudié par [41] dans le cas où

$$f_1(S) = \frac{m_1 S}{K_1 + S}, \quad f_2(S) = \frac{m_2 S}{K_2 + S}, \quad g(p) = \frac{\delta p}{K + p}. \quad (4.2)$$

Dans cette étude nous supposons que

(H1) Pour $i = 1, 2$, $f_i(0) = 0$ et $f'_i(S) > 0$ pour tout $S > 0$.

(H2) $g(0) = 0$ et $g'(p) > 0$ pour tout $p > 0$.

Sans perte de généralité, on peut fixer les paramètres p^0 , D et S^0 ainsi que les coefficients de rendement β_1 et β_2 égal à 1. On fait cela par le changement de variables suivant

$$\hat{S} = \frac{S}{S^0}, \quad \hat{x} = \frac{x}{S^0 \beta_1}, \quad \hat{y} = \frac{y}{S^0 \beta_2}, \quad \hat{p} = \frac{p}{p^0}, \quad \hat{t} = Dt, \quad \hat{\gamma} = \gamma \frac{p^0}{D} \quad (4.3)$$

avec les notations suivantes :

$$\hat{g}(\hat{p}) = \frac{S^0 \beta_2}{p^0 D} g(p^0 \hat{p}), \quad \hat{f}_i(\hat{S}) = \frac{1}{D} f_i(S^0 \hat{S}), \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

Notez que les fonctions \hat{g} et \hat{f}_i , $i = 1, 2$, satisfont les hypothèses (H1) et (H2). Puis, en faisant les changements (4.3) et (4.4) et en supprimant tous les chapeaux, le modèle (4.1) s'écrit sous la forme non-dimensionnelle simplifiée suivante

$$\begin{cases} S' &= 1 - S - f_1(S)x - f_2(S)y \\ x' &= [f_1(S) - 1 - \gamma p]x \\ y' &= [f_2(S) - 1]y \\ p' &= 1 - p - g(p)y \end{cases} \quad (4.5)$$

où g et f_i , $i = 1, 2$, satisfont aux hypothèses (H1) et (H2). C'est le système que nous analyserons ici.

Proposition 4.1 ([12]) *Pour les conditions initiales positives, toutes les solutions du système (4.5) sont bornées et restent positives pour tout $t > 0$. De plus, l'ensemble compact*

$$\Omega = \{(S, x, y, p) \in \mathbb{R}^4 : S \geq 0, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq p \leq 1, S + x + y \leq 1\}$$

est positivement invariant et est un attracteur global pour le système (4.5).

Démonstration. On commence par démontrer que toute solution avec condition initiale positive reste dans \mathbb{R}_+^4 .

Lorsque $S(t_0) = 0$, on a $S'(t_0) = 1 > 0$. Alors on a $S(t_0 + \varepsilon) \geq 0$, pour tout t_0 et ε assez petit. Nous aboutissons à la même conclusion pour p , puisque si $p(t_0) = 0$ pour t_0 , nous obtenons $p'(t_0) = 1 > 0$. D'autre part, pour toute condition initiale $x(0) > 0$, dès qu'il existe un premier instant t_1 tel que $x(t_1) = 0$, nous avons $x'(t) = 0$ pour tout $t > t_1$, c'est-à-dire que $x(t)$ reste identiquement nulle, ce qui prouve la positivité de x . De la même manière on montre la positivité de y .

Pour vérifier que Ω est positivement invariant, il suffit de poser $\Sigma = S + x + y$. On obtient

$$\Sigma' = S' + x' + y' = 1 - S - x - y - \gamma px = 1 - \Sigma - \gamma px.$$

Comme $p, x \geq 0$ dans Ω , alors $\Sigma' \leq 1 - \Sigma$. Par le Lemme de Gronwall on trouve

$$\Sigma(t) \leq 1 + (\Sigma(0) - 1) \exp(-t).$$

On trouve de même que pour p , $p(t) \leq 1 + (p(0) - 1) \exp(-t)$.

Finalement, si $(S(0), x(0), y(0), p(0)) \in \Omega$, alors $0 \leq p(t) \leq 1, 0 \leq \Sigma(t) \leq 1$. ■

4.4 Existence et stabilité locale des équilibres

Nous utilisons ci-après les conditions et notations suivantes : pour les fonctions $f_i, i = 1, 2$ et g dans (4.5), les conditions (H1) et (H2) sont supposées vraies. Lorsque les équations $f_1(S) = 1 + \gamma, f_2(S) = 1$ ont des solutions, elles sont uniques et nous définissons les concentrations de rentabilité comme suit :

$$\lambda_2 = f_2^{-1}(1), \quad \lambda_1 = f_1^{-1}(1), \quad \lambda^+ = f_1^{-1}(1 + \gamma), \quad (4.6)$$

sinon, on pose $\lambda^+ = +\infty$ et $\lambda_2 = +\infty$. Nous définissons la fonction W par

$$W(p) = \frac{1-p}{g(p)}, \text{ for } p \in (0, 1].$$

En utilisant (H2), pour tout $p \in]0, 1[$ nous avons $W(p) > 0, W'(p) < 0$ et $\lim_{p \rightarrow 0} W(p) = +\infty$. Donc, quand $\lambda_2 < 1$, l'équation $W(p) = 1 - \lambda_2$ admet une solution unique que nous notons p^* :

$$W(p^*) = 1 - \lambda_2. \quad (4.7)$$

Nous avons $0 < p^* < 1$, voir Fig. 4.2 (b).

Si l'équation $f_1(\lambda) = 1 + \gamma p^*$ a une solution, elle est unique, et nous posons alors

$$\lambda^- = f_1^{-1}(1 + \gamma p^*). \quad (4.8)$$

Sinon, nous prenons $\lambda_p = +\infty$. Puisque f_i est décroissante, nous avons $f_1^{-1}(1) < f_1^{-1}(1 + \gamma p^*) < f_1^{-1}(1 + \gamma)$. Par conséquent, les valeurs λ_1 , λ^- et λ^+ sont liées comme suit, voir Fig. 4.2 (a) :

$$\lambda_1 < \lambda^- < \lambda^+. \quad (4.9)$$

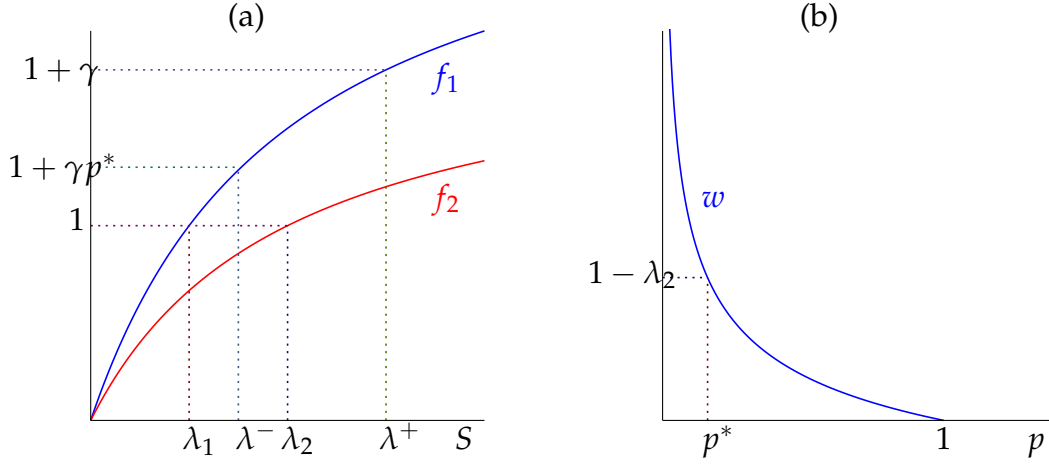


FIGURE 4.2 – (a) Graphes des fonctions de croissance f_1 et f_2 et des définitions des seuils de rentabilité λ_1 , λ^+ , λ_p et λ_2 ; (b) : Représentation du graphe de la fonction W avec la solution unique positif p^* de l'équation $W(p) = 1 - \lambda_2$, quand $\lambda_2 < 1$.

4.4.1 Existence des points d'équilibre

L'existence des points d'équilibres du système (4.5) est déterminée par le résultat suivant :

Proposition 4.2 ([12]) *Supposons que (H1) et (H2) sont satisfaites. Le système (4.5) admet les équilibres suivants :*

- L'équilibre de lessivage $E_0 = (1, 0, 0, 1)$, qui existe toujours.
- L'équilibre $E_1 = (\lambda^+, \hat{x}, 0, 1)$ d'extinction de y , où $\hat{x} = \frac{1 - \lambda^+}{1 + \gamma}$ et λ^+ donné par (4.6), qui existe si et seulement si $\lambda^+ < 1$.
- L'équilibre $E_2 = (\lambda_2, 0, 1 - \lambda_2, p^*)$ d'extinction de x , où λ_2 et p^* sont donnés par (4.6) et (4.7), respectivement, qui existe si et seulement si $\lambda_2 < 1$.
- L'équilibre strictement positif $E_c = (\lambda_2, x_c, y_c, p_c)$, où λ_2 donné par (4.6) et p_c , y_c et x_c sont donnés par

$$p_c = \frac{1}{\gamma} (f_1(\lambda_2) - 1), \quad y_c = W(p_c), \quad x_c = \frac{1 - \lambda_2 - y_c}{1 + \gamma p_c}, \quad (4.10)$$

qui existe si et seulement si $\lambda_2 < 1$ et $\lambda^- < \lambda_2 < \lambda^+$.

Démonstration. Les équilibres de (4.5) sont les solutions de

$$\begin{cases} 0 = 1 - S - f_1(S)x - f_2(S)y \\ 0 = [f_1(S) - 1 - \gamma p]x \\ 0 = [f_2(S) - 1]y \\ 0 = 1 - p - g(p)y. \end{cases} \quad (4.11)$$

Par conséquent, avec l'équilibre de lessivage $E_0 = (1, 0, 0, 1)$, où on a extinction des deux populations, et qui existe toujours, (4.5) admet les équilibres suivants :

- $E_1 = (S_1, x_1, 0, p_1)$, extinction de la population y et $x_1 > 0$.
- $E_2 = (S_2, 0, y_2, p_2)$, extinction de la population x et $y_2 > 0$.
- $E_c = (S_c, x_c, y_c, p_c)$, où les deux populations survivent : $x_c > 0, y_c > 0$.

Les composantes $S = S_1, x = x_1$ et $p = p_1$ de l'équilibre E_1 sont les solutions de (4.11) avec $x > 0$ et $y = 0$. On a alors $p_1 = 1$ et

$$1 - S_1 = f_1(S_1)x_1, \quad (4.12)$$

$$f_1(S_1) = 1 + \gamma. \quad (4.13)$$

Donc, à partir de (4.13) nous avons $S = \lambda^+$, où λ^+ est donné par (4.6). Ensuite, en utilisant (4.12), nous déduisons que $x_1 = \frac{1 - \lambda^+}{1 + \gamma}$.

Ainsi, l'équilibre E_1 existe si et seulement si $x_1 > 0$, et donc $\lambda^+ < 1$.

Les composantes $S = S_2, y = y_2$ et $p = p_2$ de l'équilibre E_2 sont données par (4.11) avec $x = 0$ et $y > 0$. Alors, $f_2(S_2) = 1$, donc $S_2 = \lambda_2$, où λ_2 est donné par (4.6) et

$$1 - S_2 = f_2(S_2)y_2, \quad (4.14)$$

$$1 - p_2 = g(p_2)y_2. \quad (4.15)$$

De (4.14) on obtient $y_2 = 1 - \lambda_2$. Par ailleurs, en utilisant (4.15) nous déduisons que $W(p_2) = 1 - \lambda_2$, et donc $p_2 = p^*$, où p^* est donné par (4.7).

Ainsi, l'équilibre E_2 existe si et seulement si $y_2 > 0$ et $p_2 > 0$, i.e. $\lambda_2 < 1$.

Les composantes de $E_c = (\lambda_2, x_c, y_c, p_c)$, l'équilibre positif de (4.5), sont les solutions de (4.11) avec $x > 0$ et $y > 0$. Alors, $f_2(S_c) = 1$, donc $S_c = \lambda_2$, où λ_2 est donné par (4.6) et

$$1 - S_c = f_1(S_c)x + f_2(S_c)y_c, \quad (4.16)$$

$$f_1(S_c) = 1 + \gamma p_c, \quad (4.17)$$

$$1 - p_c = g(p_c)y_c. \quad (4.18)$$

De (4.17) nous avons $p_c = \frac{f_1(\lambda_2) - 1}{\gamma}$. A partir de (4.18) nous avons $y_c = W(p_c)$ et de (4.16) nous avons $x_c = \frac{1 - \lambda_2 - y_c}{1 + \gamma p_c}$. Donc p_c, y_c et x_c sont donnés par (4.10). Par conséquent, l'équilibre positif E_c du système (4.5), s'il existe, est unique.

Étudions la condition d'existence de E_c . On remarque d'abord que

$$y_c > 0, x_c = \frac{1 - \lambda_2 - y_c}{1 + \gamma p_c} > 0 \iff 1 - \lambda_2 > y_c > 0 \implies \lambda_2 < 1. \quad (4.19)$$

De plus, nous avons $y_c > 0$ si et seulement si $0 < p_c < 1$. D'où

$$p_c < 1, x_c > 0 \iff 0 < y_c < 1 - \lambda_2 \implies W(1) < W(p_c) < W(p^*). \quad (4.20)$$

En utilisant le fait que W est décroissante, nous obtenons

$$p^* < p_c < 1 \quad (4.21)$$

alors

$$f_1(\lambda^-) = 1 + \gamma p^* < f_1(\lambda_2) = 1 + \gamma p_c < 1 + \gamma = f_1(\lambda^+). \quad (4.22)$$

Donc, en utilisant le fait que f_1 est croissante (hypothèse (H1)), on obtient de (4.20)

$$p_c < 1, x_c > 0 \iff \lambda^- < \lambda_2 < \lambda^+. \quad (4.23)$$

En tenant compte de (4.9), (4.19) et (4.23), nous concluons enfin que E_c existe si et seulement si $\lambda^- < \lambda_2 < \min(\lambda^+, 1)$. ■

4.4.2 Stabilité locale

La matrice jacobienne en $E_c = (\lambda_2, x_c, y_c, p_c)$ de (4.5) est

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & -1 & 0 \\ m_{21} & 0 & 0 & m_{24} \\ m_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

avec

$$\begin{aligned} m_{11} &= -1 - f_1'(\lambda_2)x_c - f_2'(\lambda_2)y_c, & m_{12} &= -f_1(\lambda_2) \\ m_{21} &= f_1'(\lambda_2)x_c, & m_{24} &= -\gamma x_c, & m_{31} &= f_2'(\lambda_2)y_c \\ m_{43} &= -g(p_c), & m_{44} &= -1 - g'(p_c)y_c \end{aligned}$$

Proposition 4.3 ([12]) *Supposons que (H1) et (H2) sont satisfaites. Le système (4.5) admet les équilibres suivants :*

- L'équilibre E_0 est LES si et seulement si $\lambda^+ > 1$ et $\lambda_2 > 1$.
- L'équilibre E_1 , s'il existe, admet une variété stable de dimension supérieure à trois et est LES si et seulement si $\lambda^+ < \lambda_2$.
- L'équilibre E_2 , s'il existe, admet une variété stable de dimension supérieure à trois, et est LES si et seulement si $\lambda_2 < \lambda^-$.
- L'équilibre E_c , s'il existe, est LES si et seulement si

$$A_3(A_1 A_2 - A_3) > A_1^2 A_4, \quad (4.25)$$

où A_1, A_2, A_3, A_4 sont définis par :

$$\begin{aligned} A_1 &= -(m_{11} + m_{44}), & A_2 &= m_{31} - m_{12}m_{21} + m_{11}m_{44}, \\ A_3 &= m_{44}(m_{12}m_{21} - m_{31}), & A_4 &= -m_{12}m_{24}m_{43}m_{31}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Démonstration. Pour l'équilibre de lessivage E_0 , la matrice jacobienne M est donnée par

$$M_0 = \begin{bmatrix} -1 & -f_1(1) & -f_2(1) & 0 \\ 0 & f_1(1) - 1 - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2(1) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -g(1) & -1 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de M_0 sont $-1, -1, f_1(1) - 1 - \gamma$ et $f_2(1) - 1$. Alors, l'équilibre E_0 est LES si et seulement si $f_1(1) < 1 + \gamma$ et $f_2(1) < 1$, ou de manière équivalente, $\lambda^+ > 1$ et $\lambda_2 > 1$.

Supposons que l'équilibre E_1 exist, alors $\lambda^+ < 1$. Pour E_1 la matrice jacobienne M_1 est donnée par

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 - f_1'(\lambda^+) \hat{x} & -(1 + \gamma) & -f_2(\lambda^+) & 0 \\ f_1'(\lambda^+) \hat{x} & 0 & 0 & -\gamma \hat{x} \\ 0 & 0 & f_2(\lambda^+) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -g(1) & -1 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de M_1 sont : $-1, \frac{1}{2} \left[-1 - f_1'(\lambda^+) \hat{x} \pm [(1 + f_1'(\lambda^+) \hat{x})^2 - 4(1 + \gamma) \hat{x} f_1'(\lambda^+)]^{\frac{1}{2}} \right]$ qui a toujours une partie réelle négative, et $f_2(\lambda^+) - 1 < 0$ si et seulement si $\lambda^+ < \lambda_2$.

Supposons que l'équilibre E_2 existe. Alors $\lambda_2 < 1$. Pour E_2 la matrice jacobienne M donnée par (4.24) est

$$M_2 = \begin{bmatrix} -1 - f_1'(\lambda_2)(1 - \lambda_2) & -f_1(\lambda_2) & -1 & 0 \\ 0 & f_1(\lambda_2) - 1 - \gamma p^* & 0 & 0 \\ f_2'(\lambda_2)(1 - \lambda_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g(p^*) & -1 - g'(p^*)(1 - \lambda_2) \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de M_2 sont : $-1, -1 - g'(p^*)(1 - \lambda_2), -f_1'(\lambda_2)(1 - \lambda_2) < 0$, et $f_1(\lambda_2) - 1 - \gamma p^* = f_1(\lambda_2) - f_1(\lambda^-) < 0$ si et seulement si $\lambda_2 < \lambda^-$.

Pour E_c , la matrice jacobienne M est donnée par (4.24) de la forme suivante

$$M_c = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & -1 & 0 \\ m_{21} & 0 & 0 & m_{24} \\ m_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Le polynôme caractéristique de M_c est donnée par

$$\lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0$$

où A_1, A_2, A_3, A_4 sont donnés par (4.26). Comme $A_1, A_2, A_3 > 0$, alors par le critère de Routh-Hurwitz, E_c est LES si et seulement si : $A_3(A_1 A_2 - A_3) > A_1^2 A_4$. ■

L'existence et la stabilité locale des équilibres de (4.5), donnés par les Propositions 4.2 et 4.3, sont récapitulées dans la table 4.1 ci-dessous. Nous observons que E_0 est LES si et seulement si E_1 et E_2 n'existent pas, et E_c existe si et seulement si E_2 existe et est instable, et E_1 , s'il existe, est également instable. On conclut qu'il n'y a qu'un seul et unique équilibre qui soit stable.

Équilibres	Conditions d'existence	Conditions de stabilité
E_0	toujours	$\lambda^+ > 1$ and $\lambda_2 > 1$
E_1	$\lambda^+ < 1$	$\lambda^+ < \lambda_2$
E_2	$\lambda_2 < 1$	$\lambda_2 < \lambda^-$
E_c	$\lambda^- < \lambda_2 < \min(\lambda^+, 1)$	$A_3(A_1A_2 - A_3) > A_1^2A_4$

TABLE 4.1 – Existence et stabilité asymptotique locale des équilibres du système (4.5).

4.5 Diagramme opératoire

Dans cette section nous présentons notre résultat principal qui est la discussion de l'existence et de la stabilité des équilibres de (4.1) par rapport aux paramètres opératoires D , p^0 et S^0 . Nous supposons que g et f_1, f_2 sont fixés. Ainsi, nous considérons le système

$$\begin{cases} S' = (S^0 - S)D - f_1(S)\frac{x}{\beta_1} - f_2(S)\frac{y}{\beta_2} \\ x' = [f_1(S) - D - \gamma p]x \\ y' = [f_2(S) - D]y \\ p' = (p^0 - p)D - g(p)y. \end{cases} \quad (4.28)$$

4.5.1 Existence et stabilité des équilibres

Pour souligner la dépendance des équilibres de (4.28) par rapport aux paramètres opératoires, nous allons commencer par réécrire nos résultats précédents, obtenus pour le système non dimensionnel (4.5).

En utilisant les fonctions inverses (en utilisant l'hypothèse (H1), ces fonctions inverses sont croissantes) $f_1^{-1} : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $f_2^{-1} : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ où $I_1 = [0, f_1(+\infty)[$ et $I_2 = [0, f_2(+\infty)[$, nous définissons les concentrations de seuil de rentabilité

$$\lambda_1(D) = f_1^{-1}(D), \quad \lambda_2(D) = f_2^{-1}(D), \quad \lambda^+(D, p^0) = f_1^{-1}(D + \gamma p^0) \quad (4.29)$$

qui sont les solutions des équations $f_1(S) = D$, $f_2(S) = D$ et $f_1(S) = D + \gamma p^0$, respectivement. On note que λ_1 est définie sur I_1 , λ_2 est définie sur I_2 et λ^+ est définie pour (D, p^0) telle que $D + \gamma p^0 \in I_1$.

Nous définissons la fonction W par

$$W(p, D, p^0) = \frac{(p^0 - p)D}{g(p)}, \quad \text{pour } p \in]0, p^0].$$

Notez que W est définie pour (p, D, p^0) tel que $p \geq 0$, $D \geq 0$ et $0 < p \leq p^0$. Notez aussi que $\frac{\partial W}{\partial p} < 0$. Donc, lorsque $\lambda_2 < S^0$, l'équation $W(p, D, p^0) = \beta_2(S^0 - \lambda_2)$ a une solution unique notée $p^* = p^*(D, p^0, S^0)$:

$$W(p^*, D, p^0) = \beta_2(S^0 - \lambda_2). \quad (4.30)$$

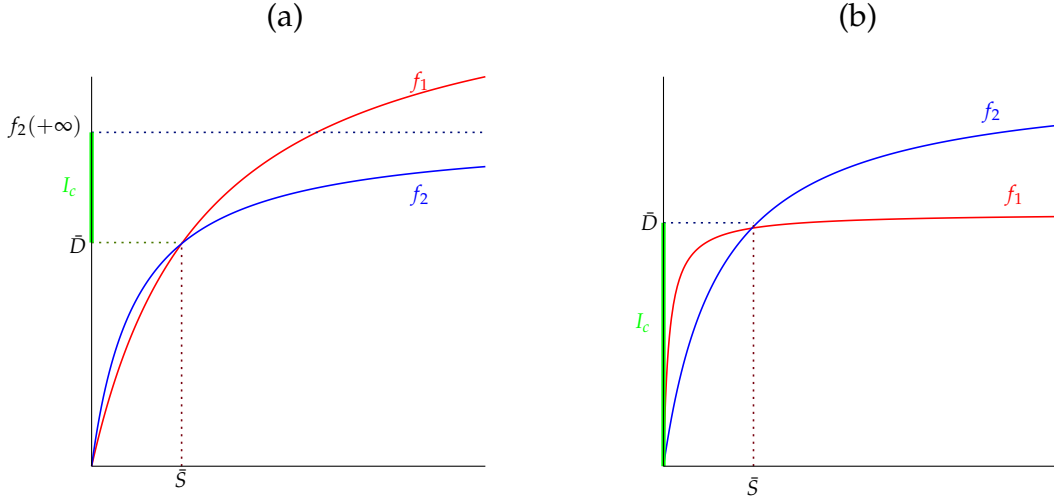


FIGURE 4.3 – Graphes des fonctions de croissance f_1 et f_2 lorsque l'équation $f_1(S) = f_2(S)$ admet une solution $S = \bar{S}$ en distinguant les deux cas pour I_c (a) : $I_c = [\bar{D}, f_2(+\infty)[$. (b) : $I_c =]0, \bar{D}]$ où $\bar{D} = f_1(\bar{S}) = f_2(\bar{S})$.

Si l'équation $f_1(S) = D + \gamma p^*$ admet une solution, elle est unique. Nous définissons

$$\lambda^-(D, p^0, S^0) = f_1^{-1}(D + \gamma p^*) \quad (4.31)$$

et posons

$$p_c(D) = \frac{f_1(\lambda_2(D)) - D}{\gamma}. \quad (4.32)$$

Notez que $p_c(D)$ est défini pour $D \in I_c$ où

$$I_c = \{D \in I_1 \cap I_2 : \lambda_1(D) < \lambda_2(D)\}. \quad (4.33)$$

Pour simplifier, nous supposons que l'équation $f_1(S) = f_2(S)$ admet au plus une solution positive $S = \bar{S} > 0$, ce qui est le cas lorsque $f_1(S)$ et $f_2(S)$ sont des fonctions de Monod. Le cas d'une intersection multiple peut être traité de la même manière. Nous avons

- $I_c = \emptyset$ si $f_1(S) < f_2(S)$ pour tout $S > 0$.
- $I_c =]\bar{D}, f_2(+\infty[$, si $f_1(S) < f_2(S)$ pour $0 < S < \bar{S}$ et $f_1(S) > f_2(S)$ for $S > \bar{S}$, voir Fig. 4.3(a).
- $I_c =]0, \bar{D}[$, si $f_1(S) > f_2(S)$ pour $0 < S < \bar{S}$ et $f_1(S) < f_2(S)$ pour $S > \bar{S}$, voir Fig. 4.3(b).
- $I_c = [0, f_2(+\infty[$ si $f_1(S) > f_2(S)$ pour tout $S > 0$.

On définit

$$y_c(D, p^0) = W(p_c(D), D, p^0), \quad x_c(D, p^0, S^0) = \beta_1 D \frac{S^0 - \lambda_2(D) - \frac{y_c(D, p^0)}{\beta_2}}{D + \gamma p_c}. \quad (4.34)$$

y_c est défini pour $(D, p^0) \in J_c$ où

$$J_c = \left\{ (D, p^0) \in I_c \times \mathbb{R}^+ : 0 < p_c(D) < p^0 \right\} \quad (4.35)$$

avec I_c défini par (4.33). Notez que x_c est défini pour $D \in \mathcal{D}_c$ où

$$\mathcal{D}_c = \left\{ (D, p^0, S^0) \in J_c \times \mathbb{R}^+ : S^0 > \lambda_2(D) + y_c(D, p^0) \right\} \quad (4.36)$$

avec J_c défini par (4.35).

Des calculs simples, similaires à ceux utilisés dans les preuves des propositions 4.2 et 4.3 montrent que le résultat suivant est vrai.

Proposition 4.4 ([12]) *Supposons que (H1) et (H2) sont satisfaites. Soient λ_2 , λ^+ et λ^- définis par (4.29) et (4.31), respectivement. Soit p^* défini par (4.30), et p_c , x_c et y_c donnés par (4.32) et (4.34), respectivement. Alors le système (4.28) admet les équilibres suivants :*

- L'équilibre de lessivage $E_0 = (S^0, 0, 0, p^0)$.
- L'équilibre $E_1 = (\lambda^+, \hat{x}, 0, p^0)$ d'extinction de y , tel que $\hat{x} = \frac{\beta_1 D (S^0 - \lambda^+)}{D + \gamma p^0}$.
- L'équilibre $E_2 = (\lambda_2, 0, \beta_2 (S^0 - \lambda_2), p^*)$ d'extinction de x .
- L'équilibre positif $E_c = (\lambda_2, x_c, y_c, p_c)$ de coexistence.

Les conditions d'existence et de stabilité de ces équilibres sont données dans le tableau suivant :

Équilibres	Conditions d'existence	Conditions de stabilité
E_0	toujours	$\lambda^+ > S^0$ & $\lambda_2 > S^0$
E_1	$\lambda^+ < S^0$	$\lambda^+ < \lambda_2$
E_2	$\lambda_2 < S^0$	$\lambda_2 < \lambda^-$
E_c	$\lambda^- < \lambda_2 < \min(\lambda^+, S^0)$	$A_3(A_1 A_2 - A_3) > A_1^2 A_4$

où $A_1 = A_1(D, p^0, S^0)$, $A_2 = A_2(D, p^0, S^0)$, $A_3 = A_3(D, p^0, S^0)$, et $A_4 = A_4(D, p^0, S^0)$, sont définis par

$$\begin{aligned} A_1 &= -(m_{11} + m_{44}), & A_2 &= \frac{m_{31} D}{\beta_2} - m_{12} m_{21} + m_{11} m_{44}, \\ A_3 &= m_{44} \left[m_{12} m_{21} - \frac{m_{31} D}{\beta_2} \right], & A_4 &= -m_{12} m_{24} m_{43} m_{31}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Les quantités m_{11} , m_{12} , m_{21} , m_{24} , m_{31} , m_{43} , m_{44} sont données par

$$\begin{aligned} m_{11} &= -D - \frac{f_1'(\lambda_2)}{\beta_1} x_c - \frac{f_2'(\lambda_2)}{\beta_2} y_c, & m_{12} &= -\frac{f_1(\lambda_2)}{\beta_1} \\ m_{21} &= f_1'(\lambda_2) x_c, & m_{24} &= -\gamma x_c, & m_{31} &= f_2'(\lambda_2) y_c \\ m_{43} &= -g(p_c), & m_{44} &= -D - g'(p_c) y_c. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dans ce qui suit, notre but est d'exprimer les conditions d'existence et de stabilité des équilibres, données par la Proposition 4.4, par rapport aux paramètres opératoires D , p^0 et S^0 .

Soit la fonction F_1 définie par

$$F_1(D, p^0) = f_1 \left(f_2^{-1}(D) \right) - \gamma p^0. \quad (4.39)$$

Notez que F_1 est défini sur $I_2 \times \mathbb{R}^+$. Nous avons les résultats suivants.

Lemme 4.1 ([12]) *On a les équivalences suivantes*

$$p_c(D) < p^0 \iff D > F_1(D, p^0) \iff \lambda_2(D) < \lambda^+(D, p^0).$$

Démonstration. En utilisant (4.29), l'hypothèse (H1) et la définition (4.39), on a

$$\begin{aligned} \lambda_2 < \lambda^+ &\iff f_2^{-1}(D) < f_1^{-1}(D + \gamma p^0) \iff f_1(f_2^{-1}(D)) < D + \gamma p^0 \\ &\iff f_1(f_2^{-1}(D)) - \gamma p^0 < D \iff D > F_1(D, p^0). \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant (4.29), (4.32) et l'hypothèses (H1) et (H2), on à

$$\begin{aligned} p_c(D) < p^0 &\iff \frac{f_1(\lambda_2) - D}{\gamma} < \frac{f_1(\lambda^+) - D}{\gamma} \\ &\iff f_1(\lambda_2) < f_1(\lambda^+) \iff \lambda_2 < \lambda^+. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du lemme. ■

Soit la fonction F_2 définie par

$$F_2(D, p^0) = f_2^{-1}(D) + \frac{W(p_c(D), D, p^0)}{\beta_2}. \quad (4.40)$$

Notez que F_2 est défini pour $(D, p^0) \in J_c$, où J_c est donné par (4.35). Alors, en utilisant (4.1), on a

$$J_c = \left\{ (D, p^0) : D \in I_c, D < F_1(D, p^0) \right\}.$$

Par conséquent, si nous supposons que l'équation $f_1(S) + \gamma p^0 = f_2(S)$ admet au plus une solution positive $S = \bar{S}(p^0) > 0$, ce qui est le cas quand $f_1(S)$ et $f_2(S)$ sont des fonctions de Monod, alors la fonction F_2 est définie pour tout $(D, p^0) \in I_c \times \mathbb{R}^+$ tel que $\bar{D}(p^0) \leq D < f_2(+\infty)$, si $f_1(S) + \gamma p^0 > f_2(S)$ pour $0 < S < \bar{S}(p^0)$, où $0 < D \leq \bar{D}(p^0)$, $f_1(S) + \gamma p^0 < f_2(S)$ pour $0 < S < \bar{S}(p^0)$. Ici $\bar{D}(p^0) = f_2(\bar{S}(p^0))$. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.2 ([12]) *On a les équivalences suivantes*

$$p_c(D) > p^*(D, p^0, S^0) \iff S^0 > F_2(D, p^0) \iff \lambda_2(D) > \lambda^-(D, p^0, S^0).$$

Démonstration. En utilisant (4.29), (4.31) et (4.32), avec les hypothèses (H1) et (H2), on a

$$\begin{aligned} \lambda_2 > \lambda^- &\iff f_1(\lambda_2) > f_1(\lambda^-) \iff D + \gamma p_c > D + \gamma p^* \\ &\iff p_c > p^*. \end{aligned} \quad (4.41)$$

En utilisant le fait que $\frac{\partial W}{\partial p} < 0$ et (4.30), on a

$$\begin{aligned} p_c > p^* &\iff W(p_c, D, p^0) < W(p^*, D, p^0) \\ &\iff W(p_c(D), D, p^0) < \beta_2(S^0 - \lambda_2). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Alors, par (4.41) et (4.42), avec $\lambda_2 = f_2^{-1}(D)$ et la définition (4.40) de F_2 , on en déduit que $p_c > p^*$ est équivalent à $S^0 > F_2(D, p^0)$. ■

Nous définissons également la fonction F_3 par

$$F_3(D, p^0, S^0) = A_3(A_1A_2 - A_3) - A_1^2A_4, \quad (4.43)$$

où A_1, A_2, A_3 , et A_4 sont définis par (4.37). Notez que F_3 est défini pour $(D, p^0, S^0) \in \mathcal{D}_c$, où \mathcal{D}_c est donné par (4.36). Donc, en utilisant les Lemmes 4.1 et 4.2, nous avons

$$\mathcal{D}_c = \left\{ (D, p^0, S^0) : D \in I_c, D > F_1(D, p^0), S^0 > F_2(D, p^0) \right\}.$$

En utilisant les notations ci-dessus, nous avons la description suivante de l'existence et de la stabilité des équilibres de (4.28)

Théorème 4.3 ([12]) *Supposons que les hypothèses et les notations de la Proposition 4.4 sont satisfaites. Les conditions d'existence et de stabilité des équilibres de (4.28) peuvent être exprimées par rapport aux paramètres opératoires D, p^0 et S^0 comme suit :*

Équilibres	Conditions d'existence	Conditions de stabilité
E_0	toujours	$D > \max(f_1(S^0) - \gamma p^0, f_2(S^0))$
E_1	$D < f_1(S^0) - \gamma p^0$	$D < F_1(D, p^0)$
E_2	$D < f_2(S^0)$	$S^0 < F_2(D, p^0)$
E_c	$D > F_1(D, p^0) \ \& \ S^0 > F_2(D, p^0)$	$F_3(D, p^0, S^0) > 0$

où $F_1(D, p^0)$, $F_2(D, p^0)$ et $F_3(D, p^0, S^0)$ sont définis par (4.39), (4.40) et (4.43), respectivement.

Démonstration. En utilisant (4.29) et l'hypothèse (H1), la condition $\lambda^+ > S^0$ et $\lambda_2 > S^0$ de la stabilité de E_0 dans la Proposition 4.4 est équivalente à $D > f_1(S^0) - \gamma p^0$ et $D > f_2(S^0)$. De même, la condition $\lambda^+ < S^0$ [resp. $\lambda_2 < S^0$] d'existence de E_1 [resp. E_2] dans la Proposition 4.4 est équivalente à $D < f_1(S^0) - \gamma p^0$ [res. $D < f_2(S^0)$].

Considérons la stabilité de E_1 et E_2 . En utilisant (4.1), la condition $\lambda^+ < \lambda_2$ de la stabilité de E_1 dans la Proposition 4.4 est équivalente à $D < F_1(D, p^0)$. D'autre part, en utilisant le Lemme 4.2, la condition $\lambda_2 < \lambda^-$ de la stabilité de E_2 dans la Proposition 4.4 est équivalente à $S^0 < F_2(D, p^0)$.

Considérons maintenant la stabilité de E_c . En utilisant les Lemmes 4.1 et 4.2, on voit que la condition $\lambda^- < \lambda_2 < \lambda^+$ d'existence de E_c dans la proposition 4.4 est équivalent à $D > F_1(D, p^0)$ et $S^0 > F_2(D, p^0)$. Enfin, en utilisant la définition (4.43) de la fonction F_3 , de la stabilité de E_c dans la Proposition 4.4 est équivalente à $F_3(S^0, D, p^0) > 0$. ■

4.5.2 Étude de la stabilité de E_c

Nous donnons maintenant la condition nécessaire et suffisante sur les paramètres opératoires D, p^0 et S^0 telle que l'équilibre positif E_c est instable, c'est-à-dire qu'on discute le signe de $F_3(D, p^0, S^0)$. Nous avons

$$F_3 = a_3x_c^3 + a_2x_c^2 + a_1x_c + a_0 \quad (4.44)$$

avec les coefficients $a_i = a_i(D, p^0)$, pour $i = 0, \dots, 3$. Par conséquent, F_3 donné par (4.44), apparaît comme un polynôme de troisième ordre dans x_c dont les coefficients ne dépendent que de D et de p^0 et non de S^0 . Soit $\Delta = \Delta(D, p^0)$ le discriminant de F_3 . Puisque nous ne nous intéressons qu'au demi-axe $x_c > 0$, nous allons étudier les racines positives de l'équation $F_3 = 0$, en commençant par remarquer que $a_0 > 0$ chaque fois que E_c existe.

Proposition 4.5 ([12]) *Soit F_3 un polynôme de degré 3 comme dans (4.44), avec $a_0 > 0$. Alors l'équation $F_3(x) = 0$*

- i) *n'a pas de solution positive si : $\{a_3 > 0 \text{ et } \Delta < 0\}$ ou $\{a_3 > 0 \text{ et } \Delta \geq 0 \text{ et } a_2 > 0 \text{ et } a_1 a_2 > a_0 a_3\}$.*
- ii) *a deux racines positives si : $a_3 > 0 \text{ et } \Delta > 0 \text{ et } a_2 \leq 0$ où $a_1 a_2 \leq a_0 a_3$.*
- iii) *a trois racines positives si : $a_3 < 0 \text{ et } \Delta > 0 \text{ et } a_2 > 0, a_1 a_2 < a_3 a_0$.*
- iv) *a une solution positive si : $\{a_3 < 0 \text{ et } \Delta < 0\}$ ou $\{a_3 < 0 \text{ et } \Delta > 0 \text{ et } a_2 \leq 0\}$ où $a_1 a_2 \geq a_0 a_3$.*

Remarques *Le cas où $a_3 = 0$ n'est pas d'une importance majeure. Il n'est donc pas inclus dans l'analyse.*

Démonstration.

- i) Si $a_0 > 0$ et $a_3 > 0$, et $\Delta < 0$, alors il y a une solution négative, parce que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_3(x) = -\infty$, et $F_3(0) = a_0 > 0$, donc il n'y a pas de solutions positives. Selon le critère de Routh-Hurwitz, l'équation n'admet que des solutions négatives si $\{a_3 > 0, a_0 > 0 \text{ et } \Delta \geq 0 \text{ et } a_2 > 0 \text{ et } a_1 a_2 > a_0 a_3\}$.
- ii) $a_3 < 0$ et $\Delta > 0$, alors la négation de $\{a_2 > 0 \text{ et } a_1 a_2 > a_0 a_3\}$, nous donne le deuxième cas avec trois solutions. L'un d'elles est négative, et le fait que $F_3(0) = a_0 > 0$ et $a_3 > 0$ signifie que les deux autres solutions doivent être positives.
- iii) Le même raisonnement, en appliquant le critère de Routh-Hurwitz sur

$$F_3(-x) = -a_3 x^3 + a_2 x^2 - a_1 x + a_0$$

donne le cas iii).

- iv) Dans ce cas, le fait que $a_3 < 0$ et $a_0 > 0$ signifie que nous avons au moins une solution positive. Nous n'avons pas trois solutions positives car le critère de Routh-Hurwitz n'est pas rempli, et nous ne pouvons pas avoir deux solutions parce que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_3(x) = -\infty$.

■

4.5.3 Diagramme opératoire

Notre objectif est maintenant de décrire le diagramme opératoire. Il n'est pas facile de représenter les régions d'existence et de stabilité des équilibres dans l'espace tridimensionnel des paramètres opératoires D , p^0 et S^0 . Pour cette raison nous

allons fixer un des paramètres opératoires, en considérant la Proposition 4.5, une façon raisonnable serait d'étudier les caractéristiques du polynôme F_3 (i.e., a_3, a_2, Δ et $a_1a_2 - a_3a_0$ dans le plan (D, p^0)), puis fixer D et montrer les régions d'existence et de stabilité dans le plan opératoire (p^0, S^0) selon les lemmes précédents et la Proposition 4.5.

La surface Γ_1 définie par

$$\Gamma_1 := \left\{ (D, p^0, S^0) : D = f_1(S^0) - \gamma p^0 \right\} \quad (4.45)$$

est la frontière de la région dans laquelle existe E_1 . Dans le plan (p^0, S^0) , Γ_1 est le graphique de la fonction $p^0 \mapsto f_1^{-1}(D + \gamma p^0)$.

La surface Γ_2 définie par

$$\Gamma_2 := \left\{ (D, p^0, S^0) : D = f_2(S^0) \right\} \quad (4.46)$$

est la frontière de la région dans laquelle existe E_2 . Dans le plan (p^0, S^0) , Γ_2 est la droite $S^0 = f_2^{-1}(D)$.

La surface Γ_3 définie par

$$\Gamma_3 := \left\{ \begin{array}{l} (D, p^0, S^0) : D = F_1(D, p^0), \\ D < f_1(S^0) - \gamma p^0 \end{array} \right\}. \quad (4.47)$$

est la frontière de la région dans laquelle E_1 est stable. Dans le plan (p^0, S^0) , Γ_3 est la droite

$$p^0 = p_c(D), \quad S^0 > \lambda_2(D).$$

La surface Γ_4 définie par

$$\Gamma_4 := \left\{ (D, p^0, S^0) : S^0 = F_2(D, p^0), D < f_2(S^0) \right\} \quad (4.48)$$

est la frontière de la région dans laquelle E_2 est stable. Dans le plan (p^0, S^0) , Γ_4 est la droite d'équation

$$S^0 = \frac{D(p^0 - p_c(D))}{\beta_2 g(p_c(D))} + \lambda_2(D), \quad p^0 > p_c(D).$$

Les surfaces Γ_3 et Γ_4 sont les frontières des régions dans lesquelles existe E_c .

Dans le plan opératoire (p^0, S^0) , où $D > 0$ est fixé, les courbes Γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, se croisent au point (p^0, S^0) où $p^0 = p_c(D)$ et $S^0 = \lambda_2(D)$.

La surface Γ_5 est définie par

$$\Gamma_5 := \left\{ (D, p^0, S^0) : F_3(D, p^0, S^0) = 0, S^0 > F_2(D, p^0), p_c(D) < p^0 \right\}. \quad (4.49)$$

Surface	Équation en (p^0, S^0) , avec D fixé
Γ_1	Graphe de $S^0 = f_1^{-1}(D + \gamma p^0)$
Γ_2	Droite horizontale $S^0 = \lambda_2(D)$
Γ_3	Droite verticale $p^0 = p_c(D)$ et $S^0 > \lambda_2(D)$
Γ_4	Droite $S^0 = \frac{D(p^0 - p_c(D))}{g(p_c(D))} + \lambda_2(D)$ et $p^0 > p_c(D)$
Γ_5	Graphe de $F_3(D, p^0, S^0) = 0$

TABLE 4.2 – Frontières des régions dans le diagramme opératoire.

4.6 Simulations numériques

Dans cette section, nous considérons le modèle (4.1), avec f_1, f_2 , et g donnés par (4.2). Montrons la façon dont nous appliquons nos résultats sur la construction du diagramme opératoire correspondant à divers paramètres biologiques.

Paramètres	$\beta_1 = \beta_2$	m_1	m_2	a_1	a_2	δ	K	γ	Figures
Cas a	1	4.0	5.0	0.03	1.0	5.0	1.3	4.0	4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9
Cas b	1	4.0	5.0	0.03	1.0	0.5	1.3	4.0	4.10, 4.11
Cas c	1	1.7	2	0.4	0.9	15	0.03	0.025	4.12, 4.13

TABLE 4.3 – Valeurs des paramètres.

4.6.1 Les valeurs des paramètres de Hsu, Li et Waltman

Les valeurs des paramètres utilisées par [41] sont données dans la table 4.3, Cas a.

Dans la figure suivante, les caractéristiques du polynôme F_3 sont tracées dans le plan (D, p^0) . Nous représentons chaque courbe dans la même couleur de son équation, par exemple $a_3 = 0$ en rouge.

Nous pouvons voir que dans la région Y_1 (voir Fig. 4.4 (b)), nous avons $a_3 < 0$, $\Delta > 0$ et $a_2 < 0$ (voir Fig. 4.4 (a)). Il correspond donc au cas 4 de la Proposition 4.5.

Dans la région Y_2 nous avons $a_3 > 0$, $\Delta > 0$ et $a_2 < 0$, sauf pour une sous-région entre les courbes en bleu et cyan contenant les points $(0.8, 1)$ et $(3.5, 0.3)$, où $a_2 > 0$ et $a_1 a_2 < a_0 a_3$. Cela correspond au cas 2 de la Proposition 4.5.

Dans la région Y_0 nous avons $a_3 > 0$, et $\Delta < 0$, sauf pour deux sous-régions où $\Delta > 0$ (le premier est entre l'axe p^0 et la courbe en bleu, la seconde entre la courbe p_c en noir et la courbe bleue au-dessus) dans ces parties, nous avons $a_2 > 0$. Cela correspond au cas 1 de la Proposition 4.5.

Dans la figure 4.4, nous considérons la région au-dessus de la courbe $p^0 = p_c(D)$, et $D \leq \bar{D} \simeq 3.97$ l'image de la solution de $f_2(S) = f_1(S)$, voir Fig 4.3.

On commence par le cas où $D \in [D_2, D_3]$ (Fig 4.4 (b)). On choisit $D_5 = 2.2$ par exemple. Il y a des points \bar{p}_0 tels que $(D, \bar{p}_0) \in Y_1$, i.e., $\bar{p}_0 \in [p_2, p_3]$ (voir Fig 4.5) il admet $x_1 > 0$ comme racine de $F_3 = 0$. Donc $F_3 < 0 \Leftrightarrow x \in [x_1, +\infty]$.

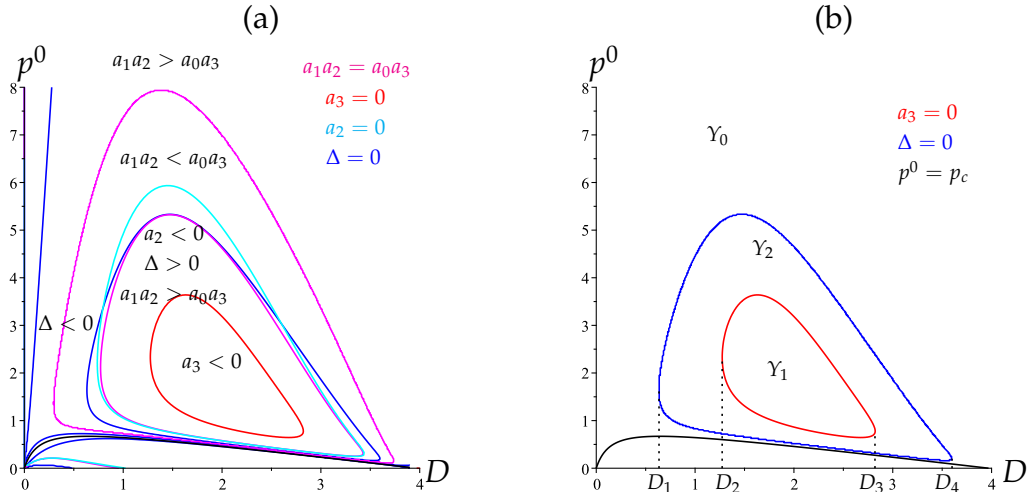


FIGURE 4.4 – Caractéristiques de $F_3 = 0$. Chaque courbe colorait la même couleur de son équation. Y_i pour $i = 0..2$ représente la région dans laquelle $F_3 = 0$ admet i solutions positives. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas a.

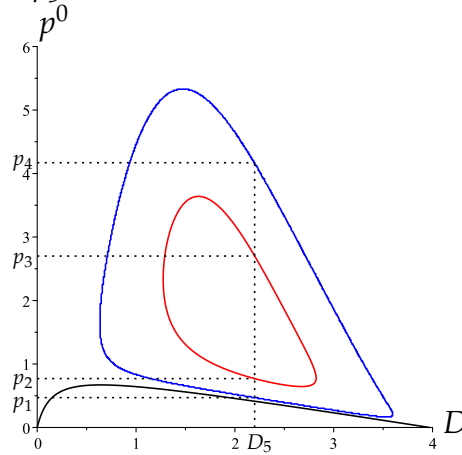


FIGURE 4.5 – Caractéristiques de $F_3 = 0$. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas a.

Cela correspond dans le diagramme opératoire (Fig 4.6 (a)) à la région au cours de la courbe verte entre p_2 et p_3 . Quand $(\bar{D}, \bar{p}_0) \in Y_2$, i.e., $\bar{p}_0 \in [p_1, p_2] \cup [p_3, p_4]$, l'équation $F_3 = 0$ a deux racines positives $0 < x_1 < x_2$. Donc $F_3(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [x_1, x_2]$ que nous pouvons voir (Fig 4.6 (a)). Le cas restant est $\bar{p}_0 \in [p_c(D), p_1] \cup [p_4, +\infty[$ où nous avons $F_3(x) > 0$, donc E_c est stable, dès qu'il existe.

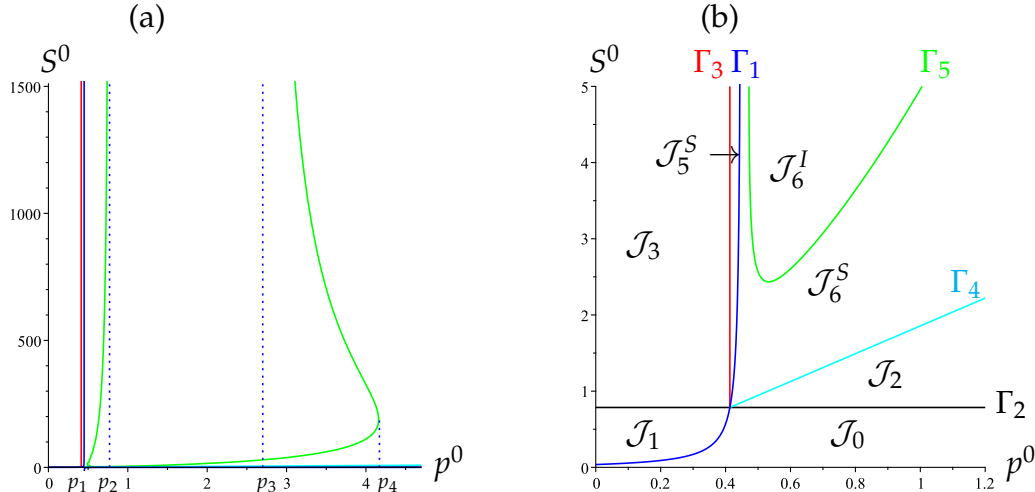
Le comportement du système dans chacune des régions \mathcal{J}_i pour $i = 0..4$, \mathcal{J}_5^S , \mathcal{J}_5^I , \mathcal{J}_6^S , et \mathcal{J}_6^I est donné par LE Théorème 4.3. Ce comportement est résumé dans la Table 4.4.

Les Fig 4.7 et 4.8 montrent que quand $D \in [D_1, D_2] \cup [D_3, D_4]$ (voir Fig 4.4 (b)), on obtient une région fermée d'instabilité de E_c dans le diagramme opératoire (l'équation $F_3 = 0$ admet deux solutions, qui sont identiques quand $\Delta = 0$), parce que nous sommes dans Y_2 ce qui correspond aux cas 2 de la Proposition 4.5. Nous pouvons voir dans la Fig. 4.8 (b) que pour $D = 1$, nous avons $(p^0 = 1, S^0 = 1) \in \mathcal{J}_6^I$, i.e., l'équilibre intérieur est instable, ce qui est en accord avec le résultat de [41].

Dans le cas où $D \in [0, D_1] \cup [D_4, \bar{D}]$ nous obtenons $F_3 > 0$, puisque nous sommes dans Y_0 . Donc E_c est stable dès qu'il existe ; ce qui est illustré par la Fig 4.9.

Regions	\mathcal{J}_0	\mathcal{J}_1	\mathcal{J}_2	\mathcal{J}_3	\mathcal{J}_4	\mathcal{J}_5^S	\mathcal{J}_5^I	\mathcal{J}_6^S	\mathcal{J}_6^I
E_0	S	I	I	I	I	I	I	I	I
E_1		S		S	I	I	I		
E_2			S	I	S	I	I	I	I
E_c						S	I	S	I

TABLE 4.4 – Existence et stabilité des équilibres dans les régions du diagramme opératoire.


 FIGURE 4.6 – (a) : Diagramme opératoire pour $D_5 = 2.2$. (b) : Zoom près de l'origine. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas a.

4.6.2 Cas où la tangente à Γ_1 en (p_c, λ_2) est au dessus de Γ_4

Considérons les valeurs des paramètres donnés dans le Tableau 4.3, cas b. On procède de la même manière, on dessine d'abord les caractéristiques de l'équation $F_3 = 0$ selon la Proposition 4.5, voir Fig 4.10.

Comme dans l'exemple précédent, nous affectons les cas 1 à 4 de la Proposition 4.5 aux régions de la figure 4.10 (b). Dans Y_1 nous avons $a_3 < 0$ et $\Delta > 0$ ce qui correspond au cas 4. Dans Y_2 nous avons $\Delta > 0$, $a_3 > 0$ et $a_2 < 0$ correspond au cas 2. De même on peut affirmer que le cas 1 caractérise Y_0 . C'est un cas très intéressant où il y a un intervalle très étroit $[D_1, D_3]$ tel que $D_1 \simeq 1.2425$ et $D_3 \simeq 1.2741$, où la région d'instabilité est une région fermée (i.e., fini), ce qui est très difficile à déterminer en faisant simplement varier D . D'où l'importance de dessiner les caractéristiques dans (D, p^0) . Nous donnons dans la figure suivante le diagramme opératoire où $D_2 = 1.26 \in [D_1, D_3]$. Nous remarquons aussi qu'une nouvelle région \mathcal{J}_4 apparaît entre Γ_4 (en cyan) et Γ_1 (en bleu), voir Fig. 4.11 (b).

4.6.3 Intersection des courbes Γ_5 et Γ_1

Un autre cas est lorsque les courbes Γ_5 et Γ_1 se croisent. Considérons les valeurs des paramètres données dans le Tableau 4.3, Cas c. Nous commençons par tracer les caractéristiques de notre équation et nous obtenons la Figure. 4.12, où Y_2 est entre les courbes bleues et rouges (nous obtenons deux solutions). Y_1 est la région délimitée d'un côté par la courbe rouge (nous obtenons une solution), et Y_0 est

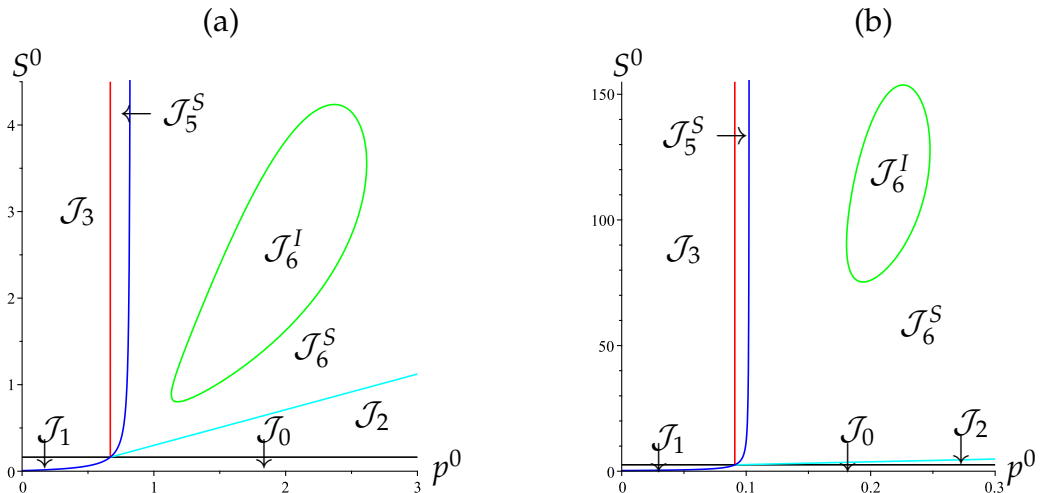


FIGURE 4.7 – Diagramme opératoire pour (a) : $D = 0.7$. (b) : $D = 3.59$. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table, Cas a.

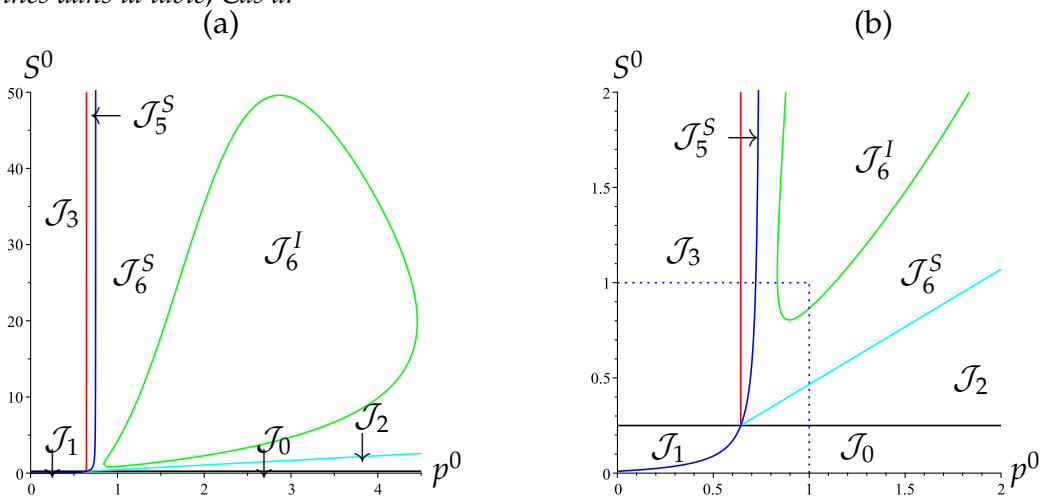


FIGURE 4.8 – (a) : Diagramme opératoire pour $D = 1$, (b) : Zoom près de l'origine.. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas a.

celle qui est au-dessus de la courbe noire et bornée d'un côté par le bleu (pas de solution).

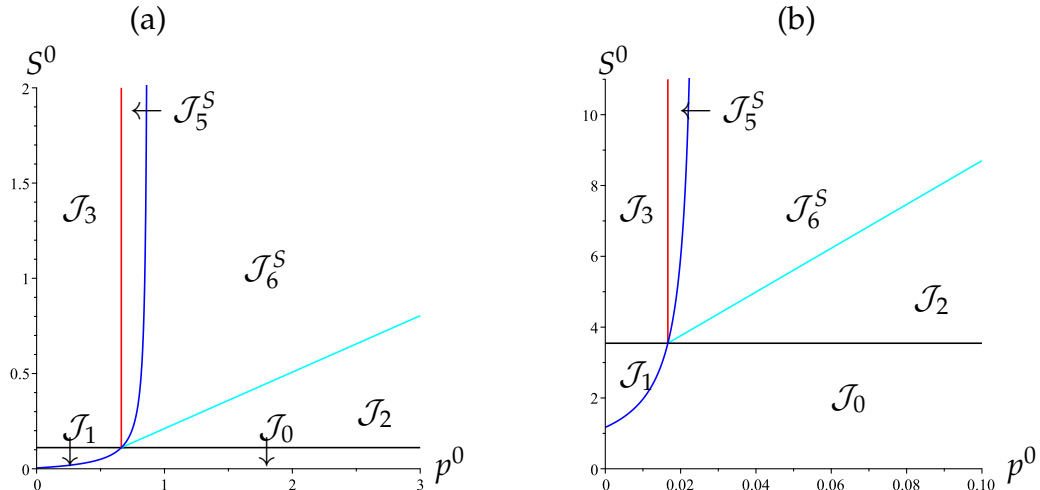


FIGURE 4.9 – Diagramme opératoire pour (a) : $D = 0.5$. (b) : $D = 3.9$, montrant que \mathcal{J}_6^U et \mathcal{J}_5^U sont vides. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas a.

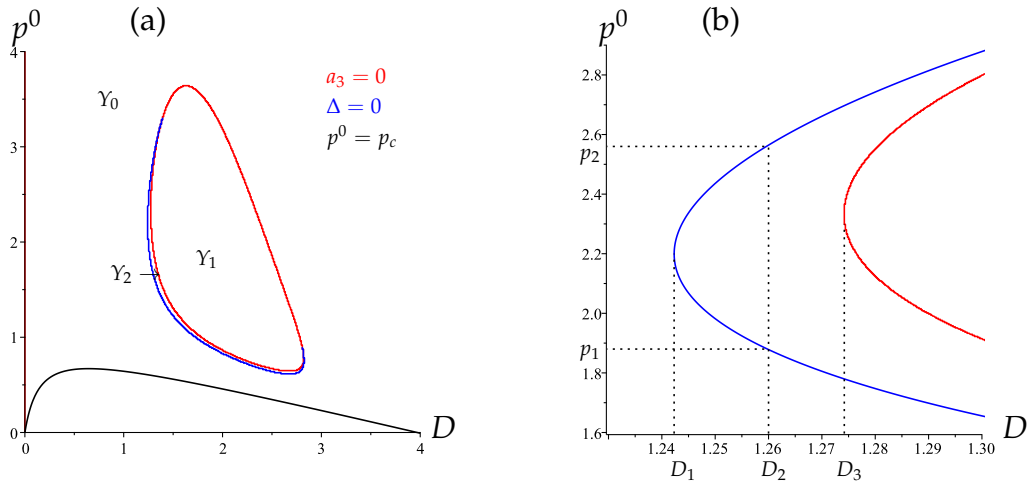


FIGURE 4.10 – (a) : Caractéristiques de $F_3 = 0$. (b) : Zoom près $D_2 = 1.26$. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas b.

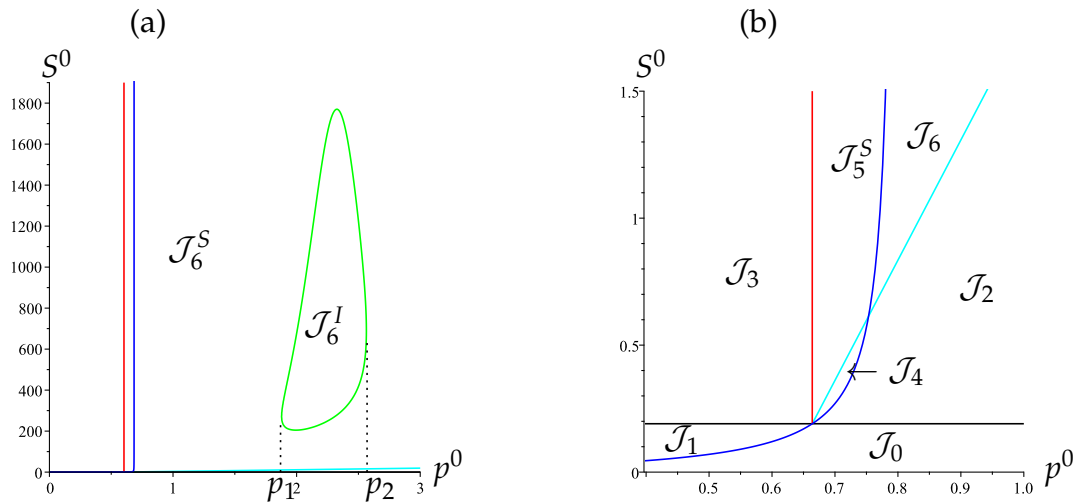


FIGURE 4.11 – (a) : Diagramme opératoire pour $D = 1.26$. (b) : Zoom près de l'origin. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas b.

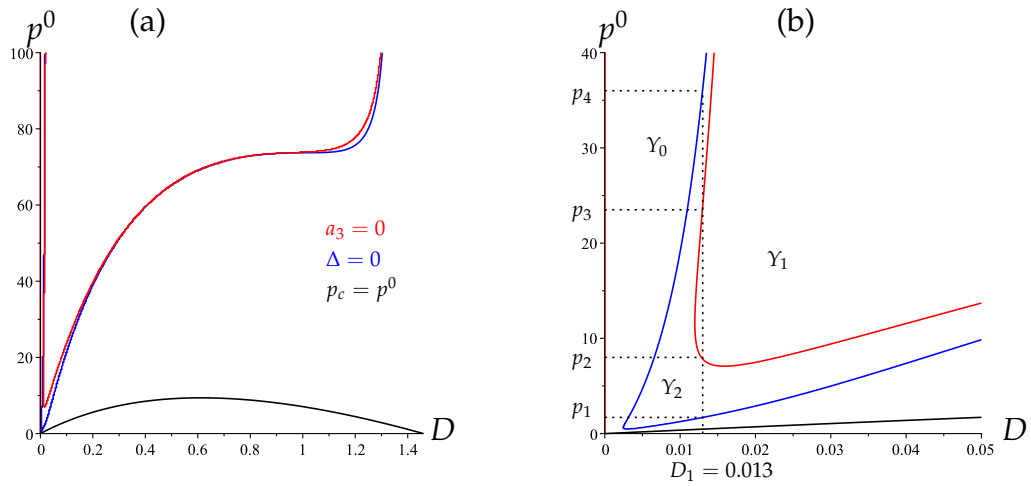


FIGURE 4.12 – (a) : Caractéristiques de $F_3 = 0$, (b) : Zoom près de l'origine. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas c.

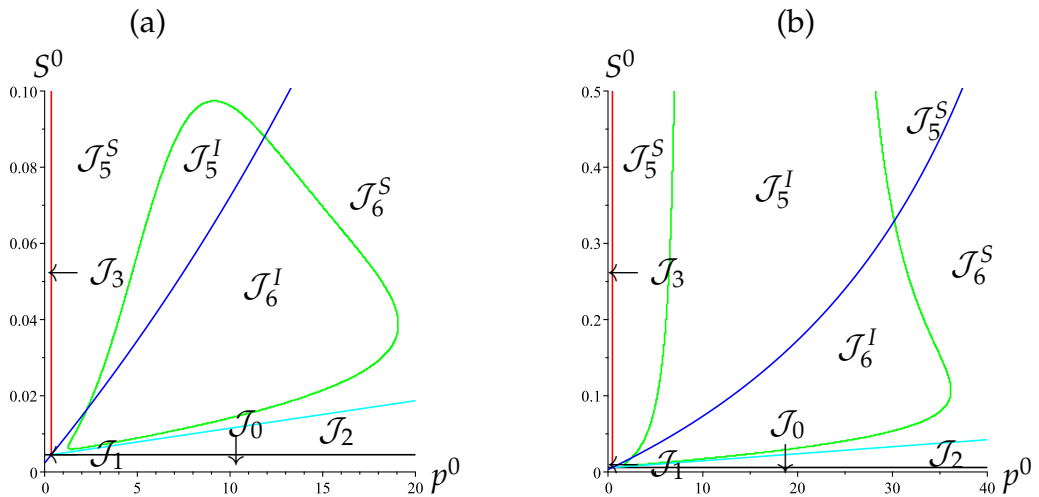


FIGURE 4.13 – Diagramme opératoire pour (a) : $D = 0.01$. (b) : $D = D_1 = 0.013$. Les paramètres biologiques sont donnés dans la table 4.3, Cas c.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aubin J. P., Frankowska H., *Set-Valued Analysis*. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [2] Aubin J. P., Cellina A., *Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.
- [3] Aubin J. P., *Fuzzy differential inclusions*. Probl. Cont. Inform. Theory 19, 55-67, 1990.
- [4] Aumann R. J., *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. 12 , 1-12, 1965.
- [5] Angelov V. G., Bainov D. D., *On the functional differential equations with "maximums"*, Appl. Anal. 16, 187-194, 1983.
- [6] Antonelli L., Křivan V., *Fuzzy Differential Inclusions as Substitutes for Stochastic Differential Equations in Population Biology* Vol. 1 No 2, 217-232, 1992.
- [7] Bainov D. D., Milusheva S. D., *Justification of the averaging method for functional differential equations with maximums*, Hardonic J. 6, 1034-1039, 1983.
- [8] Bainov D. D., Simeonov P. S., *Integral Inequalities and Applications, Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1992.
- [9] Bainov D. D., Zahariev A. I., *Oscillating and asymptotic properties of a class of functional differential equations with maxima*, Czechoslovak Math. J. 34 (109), 247-251, 1984.
- [10] Banasiak J., Lachowicz M., *Lachowicz M., Methods of Small Parameter in Mathematical Biology*, Birkhäuser, 2014.
- [11] Bar B., Lakrib M., *Averaging method for ordinary differential inclusions with maxima*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2018, No. 115, pp. 1-12, 2018
- [12] Bar B., Sari T., *The operating diagram for a model of competition in a chemostat with an external lethal inhibitor*, soumis pour publication à "Mathematical Biosciences", 2019.
- [13] Bogolyubov N. N., Mitropolsky Yu. A., *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires*, Gauthiers Villars, Paris, 1962.
- [14] Bogolyubov N. N., Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., *Methods of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics*, Hindustan Publ. Co. and Springer-Verlag, Delhi and Berlin, 1976.

-
- [15] Bourada A., Guen R., Lakrib M. and Yadi K., *Some Averaging Results for Ordinary Differential Inclusions*. Discuss. Math. Diff. Inclus., Contr. and Optim. 35, 47-63, 2015.
- [16] Butuzov V.F., Vasilyeva A.B., Fedoryuk M. V., *Asymptotic methods in the theory of ordinary differential equations*. Progress in Mathematics, Vol. 8 : Mathematical Analysis, Plenum Press, New York 1970), pp. 1-82.
- [17] Bothe D., *Minimal solutions of multivalued differential equations*. Diff. and Integral Eqs. 4, 445-447, 1991.
- [18] Castaing C., Valadier M., *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math. 580, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [19] Colombo G., Křivan V., *A Non-stochastic Approach for Modeling Uncertainty in Population Dynamics*, Bulletin of Mathematical Biology, 60, 721-751, 1998.
- [20] Colombo G., Křivan V., *Fuzzy differential inclusions and nonprobabilistic likelihood*. Dynam. Syst. Appl. 1, 419-440, 1992.
- [21] Dennis, B., P. Munholland and J. M. Scott . *Estimation of growth and extinction parameters for endangered species*. Ecol. Monog. 6, 115-143, 1991.
- [22] Deimling K., *Multivalued differential equations*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992.
- [23] Donchev T., *Semicontinuous differential inclusions*, Rend. Sem. Mat. Padova 101, 147-160, 1999.
- [24] Donchev T., Angelov V., *Regular and Singular Perturbations of Upper Semicontinuous Differential Inclusions*, Internat. J. Math. and Math. Sci. 20, 699-706, 1997.
- [25] Donchev T., Farkhi E., *Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions*. SIAM J. Control Optim. 36, 780-796, 1998.
- [26] Donchev T., Farkhi E., *Approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions with discontinuous right-hand sides*. In : A. Ioffe, S. Reich and I. Shafrir, eds., Calculus of Variations and Differential Equations. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL, 101-118, 2000.
- [27] Donchev T., Slavov I., *Singular perturbation in a class of nonlinear differential inclusions*. In : System modelling and optimization, Eds., Lect. Notes in Control and Inf. Sci. 143, 273-280, 1991.
- [28] Donchev T., Slavov I., *Averaging method for one-sided Lipschitz differential inclusions with generalized solutions*, SIAM J. Control Optimization, 37 (1999), no. 5, 1600-1613.
- [29] Dontchev A., Slavov I., *Upper semicontinuity of solutions of singularly perturbed differential inclusions*, in System Modeling and Optimization , Lecture Notes in Control and Inf. Sci., Vol. 143, pp. 273-280. Springer, New York, 1991.
- [30] Dontchev A., Donchev T., Slavov I., *A Tikhonov-type theorem for singularly perturbed differential inclusions*. Nonlinear Anal., TMA, 26, 1547-1554, 1996.
- [31] Freidlin M. I., Wentzell A. D., *Random perturbations of dynamical systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

- [32] Filippov A. F., *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [33] Filatov O. P., Khapaev M. M., *Averaging of Systems of Differential Inclusions* [in Russian], Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1998.
- [34] Filatov O. P., *Averaging of Systems of Differential Inclusions with Slow and Fast Variables*, *Differential Equations*, Vol. 44, No. 3, pp. 349-363, 2008.
- [35] Filatov O. P., *Averaging of Systems of Differential Inclusions*, *Computational Mathematics and Modeling*, Vol. 5, No. 1, 10-17, 1994.
- [36] Filatov O. P., Khapaev M. M., *On mutual ε -approximation of solutions of a system of differential inclusions and of an averaged inclusion*, *Mat. Zametki [Math. Notes]*, 47, no. 5, 127-134, 1990.
- [37] Filatov O. P., Khapaev M. M., *Averaging of differential inclusions with "fast" and "slow" variables*, *Mat. Zametki [Math. Notes]*, 47 (1990), no. 6, 102-109.
- [38] Foley P., *Predicting extinction times from environmental stochasticity and carrying capacity*. *Conserv. Biol.* 8, 124-137, 1994.
- [39] Grammel G., *Singularly perturbed differential inclusions : An averaging approach*, *Set- Valued Anal*, 4, 361-374, 1996.
- [40] Harmand J., Lobry C., Rapaport A., and Sari T., *The Chemostat : Mathematical Theory of Microorganism Cultures*, Wiley-ISTE, 2017.
- [41] Hsu S. B., Li Y. S., Waltman P., *Competition in the presence of a lethal external inhibitor*, *Mathematical Biosciences*, 167 (2000), pp. 177-199.
- [42] Hsu S. B., Waltman P., *A survey of mathematical models of competition with an inhibitor*, *Mathematical Biosciences*, 187 (2004), pp. 53-91,
- [43] Hsu S. B., Luo T. K., Waltman P., *Competition between plasmid-bearing and plasmid-free organisms in a chemostat with an inhibitor*, *J. Math. Biol.* 34 (1995) 225.
- [44] Hu S., Papageorgiou N. S., *Handbook of Multivalued Analysis, Volume I : Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1997.
- [45] Hu S., Papageorgiou N. S., *Handbook of Multivalued Analysis, Volume II : Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2000.
- [46] Hoppensteadt F. C., *Properties of solutions of ordinary differential equations with a small parameter*, *comm. Pure Appl. Math.* 24, 807-840, 1971.
- [47] Hoppensteadt F. C., *Stability in systems with parameters*, *J. Math. Anal. Appls.*, 18, 129-134, 1967.
- [48] Hoppensteadt F. C., *Singular Perturbations On infinite interval*, *Trans. Amer. Math.Soc.* 123 (1966), 521-535.
- [49] Kaufmann A., *Introduction à la théorie des ensembles flous, Vol 1*, Masson, 1973.
- [50] Khalil H. K., *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 1996.
- [51] Kichmarenko D., Sapozhnikova K.Yu., *Full averaging scheme for differential equation with maximum*, *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, Vol.3, No.1, 113-122, 2015.

- [52] Krylov N. M., Bogolyubov N. N., *An Introduction to Nonlinear Mechanics* [in Russian], Ukrainian Academy of Sciences, Kiev 1937.
- [53] Krasnosel'skii M. A., Krein S. G., *Nonlocal existence theorems and uniqueness theorems for systems of ordinary differential equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR Soviet Math. Dokl, 102, no. 1, 13-16, 1955.
- [54] Klymchuk S., Plotnikov A., Skripnik N., *Overview of V. A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions*, Physica D : Nonlinear Phenomena, 241, no. 22, 1932-1947, 2012.
- [55] Kokotovic P., Khalil H.K., O'Reilly J., *Singular Perturbation Methods in Control, Analysis and Design*. SIAM, 1999.
- [56] Křivan V., *Differential inclusions as a methodology tool in population biology*, Proceedings of the 1995 European Simulation Multiconference, San Diego, 544-547, 1995.
- [57] Kuehn C., *Multiple Time Scale Dynamics*, Springer, 2015.
- [58] Lakrib M., Sari T., *Time averaging for ordinary differential equations and retarded functional differential equations*, Electron. J. Diff. Eqns. No.40, 1-24, 2010.
- [59] Lakin W. D., Driessche P. Van Den, *Time-scales in population biology*. SIAM Journal on Applied Mathematics 32,694-705, 1977.
- [60] Liu S. J., Krstic M., *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*, Springer-Verlag London 2012.
- [61] Lobry C., Sari T., Touhami S., *On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems*, Electronic J. Differential Equat. Vol. No. 19, 1-22, 1998.
- [62] Lomov S.A., *Introduction to the General Theory of Singular Perturbations*. AMS, 1992.
- [63] Megginson R. E., *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [64] Mishchenko E.F., Kolesov Yu.S., Kolesov A.Yu., and Rozov N.Kh., *Asymptotic Methods in Singularly Perturbed Systems*. Plenum Press, 1994
- [65] Mishchenko E.F., Rozov N.Kh., *Differential Equations with Small Parameters and Relaxation Oscillations* (translated from Russian). Plenum Press, 1980.
- [66] Mitropolsky Yu. A., *Problème de la théorie des oscillations non stationnaires*, Gauthiers Villars, Paris, 1966.
- [67] Mitropolsky Yu. A., *Certains aspects des progrès de la méthode de centrage*, CIME, Edizione Cremonese, Roma, 1973.
- [68] Milusheva S., Bainov D. D., *Justification of the averaging method for multipoint boundary value problems for a class of functional differential equations with maximums*, Collect. Math. 37, 297-304, 1986.
- [69] Papageorgiou N. S., Kyritsi-Yiallourou S. Th. , *Handbook of Applied Analysis, Advances in Mechanics and Mathematics*, Springer Science+Business Media, 2009.

- [70] Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V., *Differential equations with impulse effects : multivalued right-hand sides with discontinuities*, De Gruyter studies in mathematics, 2011.
- [71] Plotnikov V., Plotnikov A., Vitiuk A., *Differential Equations with Multivalued Right-Hand Side, Asymptotical Methods*, Astro Print, Odessa, 1999 (in Russian).
- [72] Plotnikov V. A., Kichmarenko O. D., *A note on the averaging method for differential equations with maxima*, Iranian Journal of Optimization 1, 132-140, 2009.
- [73] Pontryagin L. S., Rodygin L.V., *Approximate solution of a system of ordinary differential equations involving a small parameter in the derivatives*, Soviet. Math. Dokl., 237-240, 1960.
- [74] Popov E. P., *Automatic Regulation and Control*, Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
- [75] Quincampoix M., *Singular perturbations for differential equations and inclusions : An approach through constrained systems. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, Vol. 32, No. 5, pp. 697-710, 1998.
- [76] Quincampoix M., *Contribution a l'etude des perturbations singulières pour les systèmes contrôlés et les inclusions différentielles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 316, 133-138, 1993.
- [77] Roughgarden J., *Theory of Population Genetics and Evolutionary Ecology : An Introduction*, New York : Macmillan Publishing Co, 1979.
- [78] Samoilenko A. M., Stanzhytskyi O., *Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations*. World Scientific, Series A, Vol. 78, 2011.
- [79] Sendov B., Popov V., *The Averaged Smoothness Moduli*, Mir, Moscow, 1988.
- [80] Sonntag Y., *Topologie et analyse fonctionnelle. Cours de licence avec 240 exercices et problèmes corrigés*, Ellipses, 1997.
- [81] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P., *Singular Perturbations Introduction to System Order Reduction Methods with Applications*, Springer, 2014
- [82] Sokolovskaya E. V., Filatov O. P., *Approximation from Above of Systems of Differential Inclusions with Non-Lipschitzian Right-Hand Side*, Mathematical Notes, vol. 78, no. 5, pp. 709-718., Translated from Matematicheskie Zametki, vol. 78, no. 5, pp. 763-772, 2005.
- [83] Smirnov G. V., *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, Graduate Studies in Math. 41, American Math. Soc., Providence, 2002.
- [84] Smith H. L., Waltman P., *The theory of the chemostat : Dynamics of microbial competition*, Cambridge University Press, 1995.
- [85] Tikhonov A. N., *Systems of differential equations containing small parameter near derivatives*, Mat. Sb. 31, 575-586, 1952.
- [86] Tolstonogov A. A., *Differential Inclusions in Banach Space*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [87] Vasilyeva A.B., Butuzov, V.F. *Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations*. Nauka, Moscow (1973 in Russian) 225.

-
- [88] Vasilyeva A.B., Butuzov, V.F. *Singularly Perturbed Equations in Critical Cases*. Moscow University Press, Moscow (1978 in Russian). English translation : Mathematical Research Center Technical Summary Report 2039, Madison (1980).
- [89] Veliov V., *Differential inclusions with stable subinclusions*. *Nonlinear Anal., TMA* 23, No. 8, 1027-1038, 1994.
- [90] Veliov V., *A generalization of Tikhonov theorem for singularly perturbed differential inclusions*, *J. Dynam. Control Systems*, 3 , pp. 291-319, 1997.
- [91] Verhulst F., *Methods and Applications of Singular Perturbations*. Springer, New York, 2005.)
- [92] Volosov V. M., *Averaging in systems of ordinary differential equations*, *UMN*, 17, No. 6, 3-126, 1962.
- [93] Walter W., *Ordinary Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.
- [94] Wasow W., *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Robert E. Kriger Publishing Company, New York, 1976.
- [95] Watbled F., *On singular perturbations for differential inclusions on the infinite interval*, *J. Math. Anal. Appl.* 310, 362-378, 2005.
- [96] Yadi K., *Thèse de doctorat : Perturbations Singulières : Approximations, Stabilité Pratique et Applications à des Modèles de compétition*, Université de Haute-Alsace de Mulhouse, 2008.
- [97] Zeidler E., *Functional Analysis and Its Applications I : Fixed Point Theorems*. Springer-Verlag, New York, 1986.

Abstract:

The aim of this thesis is twofold, one is the study of perturbations of differential inclusions by the multiple scales method, the second is the study of some chemostat model with inhibition.

The first is considered when we have a singular perturbation system, where an application for a resource-consumer model is considered, And when we have a differential inclusion with maximum, where the averaging method is applied to study the limit of the solutions set. The second is the study of a chemostat model with an external inhibitor, where we analyse the equilibria of the system and construct the operating diagram.

Keywords: Differential inclusions, averaging method, singular perurbation, chemostat, operating diagram.

Résumé:

Cette Thèse a un double objectif, l'un est l'étude des perturbations des inclusions différentielles par la méthode des échelles multiples, l'autre est l'étude d'un modèle de chemostat avec inhibition.

La première est considérée quand on a un système singulièrement perturbé des inclusions différentielles , où une application pour un système ressource-consommateur est considérée, et lorsque nous avons une inclusion différentielle avec maximum, où la méthode de la moyennisation est utilisée pour étudier la limite des solutions. La seconde est l'étude d'un modèle de chemostat avec inhibiteur externe, où nous analysons les équilibres du système et construisons le diagramme opératoire.

Mots clés : Inclusions différentielles, méthode de la moyennisation, perturbations singulières, chémostat, diagramme opératoire.

ملخص :

تتكون هذه الأطروحة من جزأين: الجزء الأول يتعلق بالانتماءات التفاضلية المذبذبة، الثاني يتعلق بدراسة الكيموستات في وجود مثبت. يعتبر الأول عندما يكون لدينا نظام مذبذب ، حيث يتم في تطبيق نموذج المورد والمستهلك ، وعندما يكون لدينا تضمين تفاضلي، حيث يتم تطبيق طريقة المتوسط لدراسة نهاية الحلول. والثاني هو دراسة نموذج ناظم كيميائي مع مثبت خارجي ، من النموذج، حيث نحلل توازن النظام وننشئ الرسم التخطيطي التشغيلي.

الكلمات المفتاحية: لانتماءات التفاضلية المذبذبة، طريقة المتوسط، نظام مذبذب ،الكيموستات ،التخطيطي التشغيلي.