

Université Abou Bekr Belkaid  
Tlemcen Algérie



جامعة أبي بكر بلقايد  
تلمسان الجزائر



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen  
Faculté des Sciences  
Département de Physique



Laboratoire de physique théorique

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master en Physique

*Option: Physique des Plasmas*

*Thème*

Résolution de l'Equation de Boltzmann avec la  
méthode de Chapman-Enskog

Présenté par :

Mlle BELABBAS Meryem

Le mardi 26 Juin 2018.

Devant le jury composé de MM.

- Pr BEDRANE ZEYNEB. : Président
- Pr LIANI Bachir. : Encadreur
- Pr BENTHALHA Zine El Abidine. : Examineur

Année universitaire : 2017-2018

# Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire professeur Liani Bachir. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je remercie Madame BEDRANE ZEYNEB, Docteur de l'Université Abou Bakr Belkaid, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma mémoire.

Je remercie Monsieur BENTHALHA Zine El Abeline , Docteur de l'Université Abou Bakr Belkaid de m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail

Je remercie mes très chers parents, mes frères Brahim et Adam ; et mes sœurs ZINEB ET KHADIDJA .

## Table des matières

Introduction générale.....	8
<b>Chapitre I : Généralités sur les plasmas thermiques:</b> .....	10
I-1 Plasmas thermiques : .....	10
I-2 Générations des plasmas thermiques : .....	10
I-2-1 Décharge arc à haute tension : .....	10
I-2-1-1 Les plasmas d'arc : .....	11
I-2-2 Décharge inductif : .....	11
I-3 Générateurs des plasmas thermiques : .....	11
I-3-1 Générateurs à induction haute fréquence:.....	12
I-3-2 DC arc : .....	12
I-4 Les applications des plasmas thermiques : .....	12
I-5 L'équilibre thermodynamique local (ETL):.....	14
I-5-1 Les lois d'équilibre thermodynamique local (ETL): .....	14
I-6 Plasma thermique hors équilibre (ETL) :.....	15
<b>Chapitre II : Établissement de l'équation de Boltzmann</b> .....	16
II-1 Élément de la théorie cinétique : .....	16
II-1-1 Fonction de distribution de Maxwell :.....	16
II-1-2 Le libre parcours moyen :.....	18
II-1-3 La section efficace : .....	19
II-2 Phénomènes de transport : .....	19
II-2-1 Diffusion : .....	20
II-2-2 Viscosité : .....	20
II-2-3 Conductivité thermique : .....	20

II -2-4 La conductivité électrique : .....	21
II -3 Établissement de l'équation de Boltzmann : .....	21
II -4 Détermination du terme de collision : .....	23
II -4- 1 Méthode 1 :.....	24
II -4- 1-1 Le terme de perte : .....	24
II -4- 1-2 Le terme de gain : .....	24
II -4- 1-3 Le terme de collision total:.....	25
II -4- 2 Méthode 2 :.....	26
II -4- 2-1 Le terme de perte : .....	26
II -4- 2-2 Le terme de gain : .....	26
II -4- 2-3 Le terme de collision total:.....	27
II -5 Distribution à l'équilibre : .....	27
<b>Chapitre III :Méthode de Chapman-Enskog et coefficients de transport.....</b>	<b>31</b>
III-1 Série d'Enskog : .....	31
III-2 Solution de perturbation d'ordre 1 : .....	32
III -3 La solution des équations des intégrales : .....	35
III -4 Le développement des coefficients en polynôme de Sonine : .....	37
III -5 Les coefficients de Transport : .....	39
III -5-1 La viscosité : .....	39
III -5-2 La diffusion ordinaire : .....	40
III -5-3 La conductivité électrique : .....	41
III -5-4 La conductivité thermique : .....	42
<b>Chapitre IV : Les intégrales de collision.....</b>	<b>45</b>
IV-1 Les intégrales de collision effectives : .....	45
IV-2 La section efficace de transport : .....	45
IV-3 Les intégrales de collision réduites : .....	46
IV-3-1 Le modèle des sphères rigides : .....	47
IV-4 Moyenne pondérée : .....	47

IV-5 La relation de récurrence : .....	47
IV-6 Les interactions entre particules : .....	48
IV-6-1 Les interactions neutre-neutre : .....	48
IV-6-1-1 Potentiel Lennard Jones : .....	48
IV-6-1-2 Potentiel de Stockmayer : .....	48
IV-6-1-3 Potentiel de Morse : .....	48
IV-6-1-4 Potentiel de Buckingham : .....	49
IV-6-1-5 Potentiel de Sutherland : .....	49
IV-6-1-6 Potentiel de Hulbrut-Hirschfelder : .....	49
IV-6-2 Les interactions ion-neutre : .....	50
IV-6-2-1 Le transfert de charge : .....	50
IV-6-2-2 Les collisions élastiques : .....	50
IV-6-2-2-1 Potentiel de polarisation : .....	50
IV-6-2-2-2 Potentiel de puissance : .....	50
IV-6-2-2-3 Potentiel exponentiel : .....	51
IV-6-3 Les interactions électron-neutre : .....	51
IV-6-4 Les interactions chargé-chargé : .....	51
IV-6-4-1 Potentiel Coulombien écranté : .....	51
IV-7 Résultats et discussion : .....	51
IV-7-1 Conductivité thermique : .....	51
IV-7-2 Conductivité électrique : .....	52
IV-7-3 Viscosité : .....	53
IV-7-4 Choix du potentiel d'interaction : .....	55
<b>Conclusion</b> : .....	56

## Table de Figure :

<b>Fig. IV-1:</b> Conductivité thermique pour le mélange 50%Ar-20%H <sub>2</sub> -30%Cu : .....	52
<b>Fig. IV-2 :</b> Conductivité électrique pour divers mélanges: .....	53
<b>Fig. IV-3 :</b> Viscosité d'un plasma Ar/H <sub>2</sub> /Cu: .....	54

## **Les tableaux :**

- Table IV.1** Coefficients de transport de helium en fonction de la temperature, obtenus à partir du potentiel de Lennard-Jones et du potentiel de Buckingham: ..... 55
- Table IV.2** Coefficients de transport de l'argon en fonction de la température, obtenus à partir du potentiel de Lennard-Jones et du potentiel de Buckingham.: ..... 55

## *Introduction générale*

Le plasma est considéré comme le quatrième état de la matière. C'est un gaz dans un état ionisé consistant d'un nombre des ions chargés positivement et des électrons chargés négativement ; il est globalement neutre. Les plasmas conservent certaines propriétés des gaz comme la grande compressibilité et la faible densité. La nature des interactions entre particules confère aux plasmas des propriétés spécifiques.

Selon la température, il existe trois types de plasma: plasma chaud, plasma froid et plasmas thermiques.

Les applications technologiques basées sur l'utilisation des plasmas thermiques sont de plus en plus nombreuses ils sont utilisés dans l'éclairage, la coupure et le soudage, la métallurgie, la production de nouveaux matériaux, la projection thermique, la destruction des déchets et beaucoup d'autres.

La connaissance des coefficients de transports est nécessaire pour toute modélisation dans les plasmas donc ils sont indispensables pour le control et la maitrise des procédés basés sur l'utilisation des plasmas.

Les phénomènes de transport apparaissent dans un milieu en déséquilibre présentant un gradient de certaine grandeur physique. Ce gradient conduit à un transport ou un flux tendant à ramener le système vers un état d'équilibre. Ce flux est proportionnel au gradient qui le provoque, le paramètre de transport est le coefficient de proportionnalité.

Le calcul des coefficients de transport s'appuie sur la résolution de l'équation de Boltzmann et l'évaluation du terme de collision. Malheureusement la connaissance de la fonction de distribution est impossible. La **méthode de Chapman-Enskog** est une approximation consistant à définir la solution sous la forme d'un développement de fonctions de distribution autour de la distribution de Maxwell-Boltzmann et le terme d'ordre un qui permet de déterminer l'expression des flux de chaleur et de quantité de

mouvement et celle des coefficients de transport, à partir des potentiels d'interaction. Cette approche permet de retrouver les équations de Navier-Stokes et de justifier la diffusion par gradient thermique. Cette méthode permettra par la suite de calculer tous ces coefficients à partir de la connaissance de l'un d'entre eux en reconstituant à partir d'une mesure (généralement la viscosité) d'un potentiel d'interaction.

L'objectif de ce travail est d'étudier la **méthode de Chapman-Enskog** et l'influence du choix des potentiels d'interaction sur les intégrales de collisions et les coefficients de transport.

Dans le premier chapitre, nous présentons des généralités sur les plasmas thermiques et les plasmas d'arc, nous rappelons aussi dans ce chapitre les notions d'équilibre thermodynamique locale et le déséquilibre des plasmas thermiques.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons les notions de base de la théorie cinétique, nous établirons ensuite l'équation de Boltzmann et nous évaluons le terme de collisions, le troisième chapitre est consacré à la résolution de l'équation de Boltzmann par la méthode de Chapman-Enskog dans le cas d'un gaz monoatomique et l'écriture des expressions finales de coefficients de transports liées aux expressions des intégrales de vecteur de flux.

La détermination de l'expression analytique des intégrales de collisions et les différents types de potentiels des interactions à fait l'objet du dernier chapitre.

# Chapitre I

## *Généralités sur les plasmas thermiques*

### **I-1 Plasmas thermiques :**

Les plasmas thermiques sont des plasmas partiellement ionisés. Ils sont générés sous la pression atmosphérique ou à son voisinage ( $10^4 - 10^6 \text{ Pa}$ ) [1]. Ils sont caractérisés par une densité électronique comprise entre  $10^{21}$  et  $10^{26} \text{ m}^{-3}$  [2]. Ils peuvent en général atteindre un état d'équilibre thermodynamique local (ETL). Toutes les espèces (Les électrons, les ions et les neutres) qui constituent les plasmas thermiques, ils sont alors caractérisés par une seule température (en viron  $10^4 \text{ K}$ ) [3].

Il existe deux types des plasmas thermiques : plasmas d'arc et plasmas inductif [1].

### **I-2 Générations des plasmas thermiques :**

Les plasmas peut être générer par une décharge électrique (le passage d'un courant électrique à travers un gaz), à l'état naturel, les gaz sont des bons isolants, pour les faire traverser par un courant électrique il faut générer un nombre de charges suffisant pour les ioniser ; c'est le phénomène de claquage. Le claquage du gaz non conducteur introduit un chemin conducteur entre deux électrodes [2].

#### **I-2-1 Décharge arc à haute tension :**

Dans une décharge d'arc, le courant de génération de plasma circule d'une électrode à l'autre à travers le plasma. Les électrodes sont en contact avec le plasma et subissent des flux de chaleur plus élevés.

D'après la distribution de potentiel, l'arc à haute tension divise en 3 régions :

- la région de la cathode.

- la région d'anode.

- la colonne d'arc : cette région est le vrai plasma qui est proche d'ETL, la taille de la colonne est déterminée par l'équilibre de la dissipation de puissance électrique avec la perte de chaleur par conduction, rayonnement et convection.

### **I-2-1-1 Les plasmas d'arc :**

Les plasmas thermiques qui sont générés à partir d'une haute densité de courant, ils sont appelés plasmas d'arc. Ces plasmas sont toujours dérivés d'une cathode et se terminent à une anode. La forme spécifique et la composition de ces électrodes sont variées. Les formes d'électrodes comme des tiges, des boutons, des tubes ou des anneaux sont les plus utilisés [9].

On peut classer les appareils de plasma d'arc en soit arc-transféré ou système d'arc-non-transféré [3].

### **I-2-2 Décharge inductif :**

Une décharge RF inductif peut être maintenue par couplage inductif avec la source d'alimentation et par le champ magnétique qui varie dans le temps [2].

### **I-3 Générateurs des plasmas thermiques :**

Ces générateurs sont classés selon la méthode de génération des plasmas : les générateurs de plasmas d'arc et les générateurs à induction haute fréquence [3]

Les générateurs des plasmas thermiques, généralement connus sous le nom de torches à plasmas. La température du plasma thermique généré par ces torches varie de 5000 à 20000K dans la plage de pression d'environ 0,1MPa, et on peut dire que l'énergie électrique est convertie en flux de gaz contenant de l'énergie thermique à haute densité. Depuis la torche à plasma, on peut utiliser divers gaz tels que H<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub> et N<sub>2</sub> ainsi que des gaz inertes tels que Ar comme un gaz générateur de plasma, il peut également être utilisé pour permettre aux gaz activés à haute température de participer aux réactions [3].

### **I-3-1 Générateurs à induction haute fréquence:**

De nombreuses études ont été entreprises concernant les génératrices radiofréquences (RF). Torches de conception différente, dans la majorité des cas (99% ou plus) avec un couplage inductif. La torche est essentiellement composée de deux tubes concentriques, proches de l'autre. Le tube externe sert à confiner le plasma. Les doigts de cuivre agissent comme des transformateurs, pour coupler le plasma à la partie volante de la bobine. Le tube interne va juste au niveau du premier tour de la bobine d'induction.

La bobine d'induction est composée de 3 ou 4 spires, selon les caractéristiques de la source [6].

Dans les plasmas inductifs, étant donné que la dissipation d'énergie dans la décharge se produit essentiellement dans l'enveloppe annulaire externe du plasma, la zone la plus chaude est proche de la bobine d'induction et la partie centrale du plasma est chauffée par conduction et convection [6].

### **I-3-2 DC arc :**

Le nombre d'installations avec des puissances entre 1 et 6000 kW est beaucoup plus important que celui des plasmas RF, surtout si les plasmas de type analyse avec des niveaux de puissance inférieurs à 10 KW ne sont pas pris en compte. DC, il contient des éléments essentiels: cathode, anode, qui généralement de la buse et de la chambre d'injection de gaz. La principale différence entre les torches est due au matériau de la cathode qui génère des électrons [6].

### **I-4 Les applications des plasmas thermiques :**

- **Le soudage et découpage :**

Les procédés de soudage au gaz inerte au tungstène et au gaz inerte sont largement utilisés [2].

Pour le découpage, des torches à faible ampérage à air qui sont largement utilisées dans les ateliers de réparation automobile. Un autre développement considère les torches de découpage à courant élevé pour la coupe sous-marine [2].

- la pulvérisation :

La pulvérisation à l'arc électrique est utilisée dans la production des revêtements céramiques résistant aux hautes températures pour les aubes de turbine et de revêtements anti-usure et anticorrosion pour les applications à haute température dans lequel le matériau à déposer est introduit comme fils qui servent des électrodes consommables [2].

- Métallurgie :

La métallurgie par plasma thermique comprend les technologies de la fusion et de refusions ainsi que la métallurgie extractive qui fait référence à l'extraction des métaux purs ou alliés à partir de leurs minerais [2].

- Synthèses des nanoparticules :

Les synthèses thermiques par plasma des poudres ultrafines et ultra-pures ont suscité un intérêt croissant, en particulier dans le cadre de la synthèse des matériaux céramique. Les principales sources de la production des plasmas thermiques requis pour cette technologie sont : l'arc à haute intensité, les jets de plasma et les décharges à haute fréquence de radiofréquence [2].

- Consolidation de la poudre :

La consolidation du plasma comprend les processus de sphéroïdisation, de densification et de frittage.

Parfois, la sphéroïdisation et la densification se produisent simultanément lorsque des agglomérats poreux de forme irrégulière sont injectés dans le thermique [2].

- Traitement des déchets :

La destruction des déchets est devenue un problème de plus en plus pressant. Parmi divers procédés de destruction des déchets, la destruction thermique des déchets de plasma est considérée comme une option viable pour certains types de déchets surtout les déchets toxiques [2].

- dépôt chimique en phase vapeur par plasma (PCVD):

Parmi les nouveaux développements du traitement par plasma thermique sont les procédés de dépôt chimique en phase vapeur par plasma (PCVD). Cette technique peut déposer des films d'haute qualité à des vitesses de dépôt considérablement plus élevées que celles obtenues par des méthodes de basse pression concurrentes, l'un des développements les plus visibles est le dépôt de films de diamant et de céramique, ce qui devrait avoir un impact important sur les procédés de fabrication[2].

### **I-5 L'équilibre thermodynamique local (ETL):**

Le plasma est dans l'état d'équilibre thermodynamique complet en l'absence des gradients de température et de densité des particules et lorsque chaque processus est équilibré par son processus inverse. Dans ces conditions le plasma se comporte comme un corps noir et rayonnement suit la loi de Planck. La fonction de distribution est celle de Maxwell, la population des niveaux d'énergie des atomes et des ions est décrite par la fonction de Boltzmann, également les densités des particules chargées obéit à la loi de Saha [8].

L'équilibre thermodynamique complet (ETC) du plasma est pratiquement inexistant pour les plasmas de laboratoire (les processus radiatives ne sont pas en équilibre).

Par conséquent, il est possible d'introduire le concept d'équilibre local de plasma où le plasma est caractérisé par une valeur locale de température, pression, densité et autres paramètres thermodynamiques et que les températures de toutes les particules sont égales à la même valeur qui est aussi la température du plasma.

Pour atteindre ETL, la densité électronique doit être suffisamment élevée pour que le processus collisionnels soit très important devant les phénomènes radiatifs.

#### **I-5-1 Les lois d'équilibre thermodynamique local (ETL):**

La loi de Maxwell qui se donne fonction de distribution de vitesses.

La loi de Saha qui se donne distribution des atomes et degré d'ionisation.

La loi de Guldberg-Waage qui se donne la dissociation.

### I-6 Plasma thermique hors équilibre (ETL) :

La notion d'écart à l'équilibre thermodynamique local peut être abordée sous l'aspect de déséquilibre thermique. Ce qui possède un rôle dans les collisions élastiques [12].

Dans les plasmas thermiques hors équilibres, la densité électronique de plasma n'est pas grande et les désexcitations radiatives entre les particules lourdes ne sont pas négligeables c'est pourquoi on ne peut pas postuler l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local et le milieu n'a pas représenté par une seule température.

Dans certaines zones périphériques ou au proche des électrodes, il existe un fort gradient de concentration. Aux niveaux de ces zones, il se trouve un déséquilibre thermique où les électrons sont accélérés et plus énergétiques [11].

Alors le plasma doit être décrit par deux températures  $T_e$  et  $T_g$  (l'une est la température des électrons et l'autre est la température des particules lourdes).

Le plasma thermique hors équilibre est caractérisé par le paramètre déséquilibre  $\theta'$  [11] :

$$\theta' = \frac{T_e}{T_g}.$$

## Chapitre II

### Établissement de l'équation de Boltzmann

#### II -1 Élément de la théorie cinétique :

La théorie cinétique des gaz permet d'expliquer les propriétés macroscopiques des gaz à partir de leur comportement microscopiques et à partir de certaines grandeurs qui caractérisent les particules de gaz (vitesses, trajectoire, collisions). La théorie cinétique s'applique aux gaz suffisamment dilués et constitués d'un grand nombre de particules qui sont continuellement en **mouvement**, et sans aucune perte d'énergie. Ces particules sont assimilées à des sphères rigides. En absence des forces extérieures, les particules se déplacent en ligne droite et dans toutes les directions. Leur énergie cinétique est très grande par rapport à l'énergie potentielle. Enfin les vitesses des particules suivent une loi isotrope et indépendante du temps.

#### II -1-1 Fonction de distribution de Maxwell :

Dans un gaz composé d'un grand nombre de particules  $N$  en mouvement, les vitesses ne cessent pas à cause des collisions mutuelles donc ce gaz doit avoir des particules lentes et d'autres rapides. La fonction de distribution de vitesses des particules du gaz qui se trouve dans un état l'équilibre, est donnée par la fonction de distribution de Maxwell [14] [19].

Dans un élément de volume  $dr^3 dv^3$ , le nombre moyen des particules ayant des vitesses comprises entre  $v$  et  $v + dv$  est donné par [23]:

$$d^6 N = N f(\vec{r}, \vec{v}, t) dr^3 dv^3. \quad (\text{II.1})$$

À l'équilibre, la fonction de distribution est isotrope, homogène et indépendante du temps :

$$d^3 N/N = f(v) dv_x dv_y dv_z. \quad (\text{II.2})$$

Qui représente la probabilité de trouver le système dans un élément de volume  $dr^3 dv^3$ .

$f(v)$  joue le rôle d'une densité de probabilité, il est évident que :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(v) dv_x dv_y dv_z = 1.$$

À cause de l'isotropie, la fonction de distribution  $f(v)$  dépend uniquement du module de la vitesse  $v$ , elle est donc constante lorsque :  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  (a).

De même on peut introduire le nombre :

$dN_x$  des particules ayant une composante de la vitesse suivant  $x$  comprise entre  $v_x$  et  $v_x + dv_x$  :

$$\frac{dN_x}{N} = dv_x \iint_{-\infty}^{+\infty} f(v) dv_y dv_z = g(v_x) dv_x. \quad (\text{II.3})$$

$dN_y$  des particules ayant une composante de la vitesse suivant  $y$  comprise entre  $v_y$  et  $v_y + dv_y$  :

$$\frac{dN_y}{N} = dv_y \iint_{-\infty}^{+\infty} f(v) dv_x dv_z = g(v_y) dv_y. \quad (\text{II.4})$$

$dN_z$  des particules ayant une composante de la vitesse suivant  $z$  comprise entre  $v_z$  et  $v_z + dv_z$  :

$$\frac{dN_z}{N} = dv_z \iint_{-\infty}^{+\infty} f(v) dv_x dv_y = g(v_z) dv_z \quad (\text{II.5})$$

On peut vérifier que les trois événements sont indépendants et que la fonction de distribution  $f(v)$  peut-être égale au produit de fonctions des distributions  $g(v_x)$ ,  $g(v_y)$  et  $g(v_z)$  comme suite :

$$f(v) = g(v_x)g(v_y)g(v_z). \quad (\text{II.6})$$

On détermine la fonction de distribution  $f(v)$  à partir de l'équation (II.6) par prendre son logarithme[13]:

$$\ln f(v) = \ln g(v_x) + \ln g(v_y) + \ln g(v_z). \quad (\text{II.7})$$

La forme différentielle de (II.7) se donne :

$$\frac{1}{v} \frac{d \ln(f(v))}{dv} = \frac{1}{v_x} \frac{d \ln(g(v_x))}{dv_x} + \frac{1}{v_y} \frac{d \ln(g(v_y))}{dv_y} + \frac{1}{v_z} \frac{d \ln(g(v_z))}{dv_z}. \quad (\text{II.8})$$

La fonction de distribution est isotrope , donc on peut écrire :

$$\frac{1}{v_x} \frac{d \ln(g(v_x))}{dv_x} + \frac{1}{v_y} \frac{d \ln(g(v_y))}{dv_y} + \frac{1}{v_z} \frac{d \ln(g(v_z))}{dv_z} = 0. \quad (\text{II.9})$$

D'après (a) on a :  $2dv_x + 2dv_y + 2dv_z = 0$  (b).

On multiplie (b) par la constante A puis on effectue la somme avec la formule (II.8) donc on obtient :

$$\left[ \frac{1}{v_x} \frac{d \ln(g(v_x))}{dv_x} + Adv_x \right] + \left[ \frac{1}{v_y} \frac{d \ln(g(v_y))}{dv_y} + Adv_y \right] + \left[ \frac{1}{v_z} \frac{d \ln(g(v_z))}{dv_z} + Adv_z \right] = 0. \quad (\text{II.10})$$

Ce qui donne :

$$\left. \begin{cases} \frac{1}{v_x} \frac{d \ln(g(v_x))}{dv_x} + Adv_x = 0 \rightarrow g(v_x) = Be^{-\frac{A}{2}v_x^2} \\ \frac{1}{v_y} \frac{d \ln(g(v_y))}{dv_y} + Adv_y = 0 \rightarrow g(v_y) = Be^{-\frac{A}{2}v_y^2} \\ \frac{1}{v_z} \frac{d \ln(g(v_z))}{dv_z} + Adv_z = 0 \rightarrow g(v_z) = Be^{-\frac{A}{2}v_z^2} \end{cases} \right\}. \quad (\text{II.11})$$

Par conséquent, la fonction de distribution  $f(v)$  s'écrit sous la forme :

$$f(v) = B'e^{-\frac{A}{2}v^2}. \quad (\text{II.12})$$

On peut montrer que :  $B' = \left(\frac{A}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$  et  $A = \frac{m}{k_{\beta}T}$ .

Alors on obtient :

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_{\beta}T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2k_{\beta}T}v^2}. \quad (\text{II.13})$$

L'expression (II.13) représente la fonction de distribution des vitesses qui nommé la fonction de distribution de Maxwell[13].

## II -1-2 Le libre parcours moyen :

Au cours de la théorie cinétique, on considère une particule de gaz qui est mise en mouvement avec une vitesse relative  $\bar{v}_r$ . Cette particule entre en collision avec les

autres particules de gaz qu'ils appartiennent au cylindre de volume  $V = \sigma \cdot \bar{v}_r \cdot t$  avec  $\sigma = \pi d^2$ . Le temps libre moyen ( $\tau$ ) correspondant à une collision est donné par [15]:

$$\tau = \frac{1}{n\pi d^2 \bar{v}_r} \quad (\text{II.14})$$

$n$  : La densité de gaz.

Le libre parcours moyen se définit comme la distance parcourue par une particule entre 2 collisions successives [19] [24].

$$l = \bar{v} \cdot \tau \quad (\text{II.15})$$

$\bar{v}$  : La vitesse de particules entre deux collisions successives.

On en déduit :

$$l = \frac{\bar{v}}{n\pi d^2 \bar{v}_r} \quad (\text{II.16})$$

### II -1-3 La section efficace :

La section efficace est le rapport entre le nombre de particules diffusées  $\Delta N$  par unité de temps et d'angle solide  $d\Omega$  et le flux de particules incidentes [24].

D'où :

$$d\Omega = \sin X \, dX \, d\theta \quad (\text{II.17})$$

Le nombre de particules  $\Delta N$  diffusées est :

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = 2\pi \varphi \sin X \, dX \, \sigma(X) \quad (\text{II.18})$$

Le flux de particules incidentes est:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = 2\pi \varphi b \, db \quad (\text{II.19})$$

On donne alors la formule de la section efficace est comme suite:

$$\sigma(X) = \left| \frac{b}{\sin X} \frac{db}{dX} \right| \quad (\text{II.20})$$

### II -2Phénomènes de transport :

Dans un plasma hors équilibre, le transport d'une quantité physique ou le flux résulte d'un gradient de vitesse, de température, de densité et de potentiel où le facteur de proportionnalité entre le flux et le gradient qui le provoque s'appelle le coefficient de transport.

Généralement, le coefficient de transport est lié à la densité de flux d'une quantité physique (tel que l'énergie, le nombre de particules, la quantité du mouvement, le nombre de charges) par la relation suivante [16] [20] :

$$\text{Flux} = (\text{coefficient de transport}) * (\text{gradient}). \quad (\text{II.21})$$

### II -2-1 Diffusion :

L'existence d'un gradient de densité dans un milieu réactif implique un transfert de masse de la région la plus dense vers la région la moins concentrée.

La diffusion est définie par la loi de Fick [16] :

$$\vec{J}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n \quad . \quad (\text{II.22})$$

$\vec{J}_n$ : Densité de particules (le nombre de particules par unité de temps).

$D$  : Coefficient de diffusion ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

$\overrightarrow{\text{grad}} n$  : Gradient de densité (le nombre de particules / unité de surface ( $\text{m}^2$ )).

On dit auto-diffusion, le phénomène de transport d'une quantité de matière qui se produit dans un gaz où les molécules qui le constituent ont pratiquement les mêmes caractéristiques (comme les isotopes de certains éléments) [13] .

### II -2-2 Viscosité :

L'application d'un gradient de vitesse provoque un phénomène de transport, la quantité transportée dans ce cas est une quantité vectorielle [16].

La viscosité suit la loi suivante [16] :

$$\frac{\vec{F}_x}{A} = -\eta \frac{d\vec{v}_x}{dx} \quad (\text{II.23})$$

$\frac{\vec{F}_x}{A}$  : Force de frottement ( $\text{kg}/\text{s}^2.\text{m}$ ).

$\eta$  : Viscosité dynamique ( $\text{kg} / \text{ms}$ ).

$\frac{d\vec{v}_x}{dx}$  : Gradient de vitesse à une dimension ( $1/\text{s}$ ).

### II -2-3 Conductivité thermique :

Cette conductivité thermique est reliée au transport de chaleur, elle représente la conduction de milieu. La chaleur va d'une région chaude vers une région froide à cause

d'un gradient de température [17] [18].

La loi phénoménologique est la loi de Fourier [16] :

$$\vec{J} = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (\text{II.24})$$

$\vec{J}$  : La quantité de chaleur ( $\text{W}/\text{m}^2$ ).

$\kappa$  : Conductivité thermique ( $\text{W} / \text{m K}$ ).

$\overrightarrow{\text{grad}} T$  : Gradient de température ( $\text{K}/\text{m}$ ).

### II -2-4 La conductivité électrique :

L'inhomogénéité de potentiel modifie le milieu par l'apparition d'un courant électrique la conductivité électrique est le coefficient de transport qui caractérise cette modification [21].

La relation entre le flux de charges et le gradient de potentiel est la suivante [16]:

$$\vec{J}_e = -\sigma_e \overrightarrow{\text{grad}} V . \quad (\text{II.25})$$

$\vec{J}_e$  : La densité de courant ( $\text{A} / \text{m}^2$ )

$\sigma_e$  : Conductivité électrique ( $\Omega^{-1} . \text{m}^{-1}$ ).

$\overrightarrow{\text{grad}} V$  : Gradient de Potentiel ( $\text{V}/\text{m}^2$ ).

### II -3 *Établissement de l'équation de Boltzmann :*

Considérons un nombre des particules qu'il occupe un élément de volume  $d\Gamma$  à l'instant  $t$ . Ce nombre des particules va déplacer vers un notre volume  $d\Gamma'$  à l'instant  $t + dt$ .

La probabilité de trouver les particules dans un volume  $d\Gamma$  est :

$$dP = \frac{dN}{N} = f(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) d\Gamma \quad (\text{II.26})$$

$dN$  : Le nombre des particules qui se trouve dans un volume  $d\Gamma$  .

En absence des collisions, La probabilité de trouver les particules dans un volume  $d\Gamma'$  est :

$$dP = \frac{dN}{N} = f(\vec{r}'_i, \vec{v}'_i, t) d\Gamma' . \quad (\text{II.27})$$

D'après le théorème de Liouville, on a une conservation de volume :

$$d\Gamma = d\Gamma'. \quad (\text{II.28})$$

Donc les fonctions de distribution  $f(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t)$  et  $f(\vec{r}'_i, \vec{v}'_i, t)$  sont égaux :

$$f(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) = f(\vec{r}'_i, \vec{v}'_i, t). \quad (\text{II.29})$$

La différence entre fonction les deux fonctions de distributions se donne :

$$\Delta f_i = f(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) - f(\vec{r}'_i, \vec{v}'_i, t) = 0. \quad (\text{II.30})$$

La différentielle par rapport le temps de l'équation (II.30) s'implique :

$$\frac{\Delta f_i}{\Delta t} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}_i} \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = 0. \quad (\text{II.31})$$

Tels que :  $\frac{\partial r_i}{\partial t} = \vec{v}_i$  et  $m_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = \vec{F}_i$ ,  $\vec{\nabla}_r f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_i}$ ,  $\vec{\nabla}_v f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}_i}$ .

Finalement, on obtient l'équation de Boltzmann sans collision :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i = 0. \quad (\text{II.32})$$

En présence des collisions, il existe des particules qui s'échappent de volume donc il n'y a pas une conservation de nombre de particules [12] :

$$\Delta f_i \neq 0 \quad (\text{II.33})$$

Donc on obtient l'équation de Boltzmann avec second membre [22] [23] :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{coll}. \quad (\text{II.34})$$

$f_i$  : Fonction de distribution des vitesses.

$\vec{v}_i$  : La vitesse particulière des espèces i.

$\vec{F}_i$  : Force extérieure (N) appliquée sur la particule i.

$m_i$  : La masse des espèces i (Kg).

$\vec{\nabla}_r$  : Le gradient dans l'espace de position.

$\vec{\nabla}_v$  : Le gradient dans l'espace des vitesses.

$\left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{coll}$  : représente le terme de collision.

On peut écrire le terme de collision sous la forme bi-linéaire [19]:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_{coll} = \sum_{j=1}^k I(f_i, f_j). \quad (\text{II.35})$$

$k$  : Le nombre d'espèces qui constitue le plasma,

$I(f_i, f_j)$  : La forme bi-linéaire des intégrales de collision.

#### II -4 Détermination du terme de collision :

La forme bi-linéaire des intégrales de collision s'écrit sous la forme suivante :

$$I(f_i, f_j) = I^+ - I^-. \quad (\text{II.36})$$

$I^-$  : Le terme de perte,

$I^+$  : Le terme de gain.

Pour évaluer le terme de collision de Boltzmann, il devrait satisfaire quelques hypothèses simplificatrices [19] [24] :

- Supposons que  $\tau_c \ll \tau$ .

$\tau_c$  : Le temps de collision.

$\tau$ : Temps moyen entre deux collisions.

Ce qui nous permet de considérer un intervalle de temps  $\Delta t$  entre  $\tau_c$  et  $\tau$ .

La distribution d'une particule  $f(r, v, t)$ , varie lentement sur l'intervalle du temps  $\Delta t$ .

- Considérons un gaz suffisamment dilué, pour ne prendre en compte que des collisions binaires.
- La section efficace ne dépend pas la force  $F$ .
- les force  $F$  externes sont négligeables par rapport à l'interaction moléculaire pendant du temps moyen de collision  $\tau_c$ ;
- On suppose que chaque collision ne dépend pas les collisions précédentes et on néglige la corrélation entre les vitesses et les positions (approximation du chaos moléculaire);
- On prend en compte les lois de la mécanique classique.
- $dv^3, dr^3$ : des quantités infiniment petites.

## II -4- 1Méthode 1 :

### II -4- 1-1Le terme de perte :

Le nombre de particules par unité de temps qui subissent une collision de type  $(\vec{v}_i, \vec{v}_j \rightarrow \vec{v}'_i, \vec{v}'_j)$  pour un flux incident et pour une seule particule cible est donné par [24]:

$$[\sigma(\vec{v}_i, \vec{v}_j \rightarrow \vec{v}'_i, \vec{v}'_j)dv_i'^3 dv_j'^3]. \quad (\text{II.37})$$

Le nombre des particules cibles (ici les particules de vitesse  $\vec{v}_i$ ) [24]:

$$[f_i dr^3 dv_i^3]. \quad (\text{II.38})$$

Le flux relatif de particules de vitesse  $\vec{v}_j$  sur les particules de vitesse  $\vec{v}_i$  [24]:

$$[\vec{v}_{ij} f_j dv_j^3]. \quad (\text{II.39})$$

Le nombre de particules par unité de temps qui passent de  $dr^3 dv_i^3$  vers  $dr^3 dv_j^3$  [24]:

$$[\sigma(\vec{v}_i, \vec{v}_j \rightarrow \vec{v}'_i, \vec{v}'_j)dv_i'^3 dv_j'^3][f_i dr^3 dv_i^3][\vec{v}_{ij} f_j dv_j^3] \quad (\text{II.40})$$

Dans un élément de volume  $dr^3 dv_i^3$ , le nombre de particules qui diminuent [24]:

$$I^- dr^3 dv_i^3 = \iint \sigma(\vec{v}_i, \vec{v}_j \rightarrow \vec{v}'_i, \vec{v}'_j) f_i f_j \vec{v}_{ij} dv_i'^3 dv_j'^3 dv_j^3 dr^3 dv_i^3. \quad (\text{II.41})$$

### II -4- 1-2Le terme de gain :

Le nombre de particules par unité de temps qui subissent une collision de type  $(\vec{v}'_i, \vec{v}'_j \rightarrow \vec{v}_i, \vec{v}_j)$  pour un flux incident et pour une seule molécule cible est donné par [24] :

$$[\sigma(\vec{v}'_i, \vec{v}'_j \rightarrow \vec{v}_i, \vec{v}_j)dv_i^3 dv_j^3] \quad (\text{II.42})$$

Le nombre des particules cibles (ici les particules de vitesse  $\vec{v}'_i$ ) :

$$[f_i' dr^3 dv_i'^3]. \quad (\text{II.43})$$

Le flux relatif de particules de vitesse  $\vec{v}'_j$  sur les particules de vitesse  $\vec{v}'_i$  :

$$[\vec{v}_{ij} f_j' dv_j'^3]. \quad (\text{II.44})$$

Le nombre de particules par unité de temps qui passent de  $dr^3 dv_j^3$  vers  $dr^3 dv_i^3$  [24] :

$$[\sigma(\vec{v}'_i, \vec{v}'_j \rightarrow \vec{v}_i, \vec{v}_j)dv_i^3 dv_j^3][f_i' dr^3 dv_i'^3][\vec{v}_{ij} f_j' dv_j'^3] \quad (\text{II.45})$$

Dans un élément de volume  $dr^3 dv_i^3$ , Le nombre de particules qui augmentent [24]:

$$I^+ dr^3 dv_i^3 = \iint \sigma(\vec{v}_i, \vec{v}_j \rightarrow \vec{v}'_i, \vec{v}'_j) f_i' f_j' \vec{v}_{ij} dv_i'^3 dv_j'^3 dv_j^3 dr^3 dv_i^3. \quad (\text{II.46})$$

### II-4- 1-3 Le terme de collision total:

On peut déterminer le terme de collision total par l'effectuation d'une somme entre l'équation (II.41) et (II.46):

$$(I^+ - I^-)dr^3 dv_i^3 = \iint \sigma(\vec{v}_i, \vec{v}_j \rightarrow \vec{v}'_i, \vec{v}'_j)(f'_i f'_j - f_i f_j) \vec{v}_{ij} dv_i'^3 dv_j'^3 dv_j^3 dr^3 dv_i^3. \quad (\text{II.47})$$

Ce qui donne :

$$I^+ - I^- = \iint \sigma(\vec{v}_i, \vec{v}_j \rightarrow \vec{v}'_i, \vec{v}'_j)(f'_i f'_j - f_i f_j) \vec{v}_{ij} dv_i'^3 dv_j'^3 dv_j^3. \quad (\text{II.48})$$

Avec :  $dv_i'^3 dv_j'^3 = dV'^3 dv_{ij}^3$  :

La vitesse de centre de masse, donc l'équation (II.48) devient :

$$I^+ - I^- = \iint \sigma(\vec{v}_i, \vec{v}_j \rightarrow \vec{v}'_i, \vec{v}'_j)(f'_i f'_j - f_i f_j) \vec{v}_{ij} dV'^3 dv_{ij}^3 dv_j^3. \quad (\text{II.49})$$

d'où :  $dv_{ij}^3 = v_{ij}^2 dv_j'^3 d\Omega$

Ce qui implique :

$$I^+ - I^- = \iint \sigma(\vec{v}_i, \vec{v}_j \rightarrow \vec{v}'_i, \vec{v}'_j)(f'_i f'_j - f_i f_j) \vec{v}_{ij} dV'^3 v_{ij}^2 dv_j'^3 d\Omega dv_j^3. \quad (\text{II.50})$$

Or

$$\sigma(\Omega') = \sigma_{ij} = \iint \sigma(\vec{v}_i, \vec{v}_j \rightarrow \vec{v}'_i, \vec{v}'_j) v_{ij}^2 dV'^3 dv_j'^3.$$

D'après l'équation (II.50), on trouve:

$$I^+ - I^- = \iint (f'_i f'_j - f_i f_j) \vec{v}_{ij} \sigma_{ij} dv_j^3 d\Omega. \quad (\text{II.51})$$

Donc :

$$I(f_i, f_j) = \iint (f'_i f'_j - f_i f_j) \vec{v}_{ij} \sigma_{ij} dv_j^3 d\Omega. \quad (\text{II.52})$$

$f_i, f_j$ : Fonction de distribution de particules  $i, j$  avant collisions respectivement.

$f'_i, f'_j$ : Fonction de distribution de particules  $i, j$  après collisions respectivement.

$\vec{v}_{ij}$ : La vitesse relative.

$\sigma_{ij}$ : La section efficace.

$dv_j^3$ : Élément de volume de vitesse de particules  $j$ .

$d\Omega$ : Élément d'angle solide.

Par conséquent, l'équation de Boltzmann devient :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i = \sum_{j=1}^k \iint (f'_i f'_j - f_i f_j) \vec{v}_{ij} \sigma_{ij} dv_j^3 d\Omega. \quad (\text{II.53})$$

## II-4-2 Méthode2 :

### II-4-2-1 Le terme de perte :

Le nombre des particules qui entrent aux collisions avec une vitesse varie entre  $v_j$  et  $v_j + dv_j^3$  est donné par [13] :

$$f_j dv_j^3 \vec{v}_{ij} \Delta t b db d\theta . \quad (\text{II.54})$$

Le nombre de particules cibles qui ont une vitesse varie entre  $v_i$  et  $v_i + dv_i^3$  [13] :

$$f_i dr^3 dv_i^3 \quad (\text{II.55})$$

Le nombre de collisions pendant un intervalle du temps est [13]:

$$f_j dv_j^3 \vec{v}_{ij} \Delta t b db d\theta f_i dr^3 dv_i^3 . \quad (\text{II.56})$$

Le nombre de collisions totales par unité de temps et dans l'espace de phase  $dr^3 dv_i^3$  est [13] :

$$I^- = dr^3 dv_i^3 \int f_j \vec{v}_{ij} b db d\theta f_i dv_j^3 . \quad (\text{II.57})$$

### II-4-2-2 Le terme de gain :

Le nombre de particules qui entrent aux collisions avec une vitesse varie entre  $v_j'$  et  $v_j' + dv_j'^3$  est donné par [13] :

$$f_j' dv_j'^3 \vec{v}_{ij} \Delta t b db d\theta . \quad (\text{II.58})$$

Le nombre de particules cibles qui ont une vitesse varie entre  $v_i'$  et  $v_i' + dv_i'^3$  [13] :

$$f_i' dr^3 dv_i'^3 . \quad (\text{II.59})$$

Le nombre de collisions pendant un intervalle du temps est [13] :

$$f_j' dv_j'^3 \vec{v}_{ij} \Delta t b db d\theta f_i' dr^3 dv_i'^3 . \quad (\text{II.60})$$

Le nombre de collisions totales par unité de temps et dans l'espace de phase  $dr^3 dv_i'^3$  est [13] :

$$I^+ = dr^3 dv_i'^3 \int f_j' \vec{v}_{ij} b db d\theta f_i' dv_j'^3 . \quad (\text{II.61})$$

Avec  $dv_i'^3 dv_j'^3 = dv_i^3 dv_j^3$ .

Ce qui donne :

$$I^+ = dr^3 dv_i^3 \int f_j' \vec{v}_{ij} b db d\theta f_i' dv_j^3 \quad (\text{II.62})$$

### II -4- 2-3 Le terme de collisions total :

Le terme de collisions total est :

$$I^+ - I^- = \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j) \vec{v}_{ij} b db dv_j^3 d\theta. \quad (\text{II.63})$$

On peut montrer que la méthode 1 est méthode 2 sont équivalents :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i = \sum_{j=1}^k \iint (f_i' f_j' - f_i f_j) \vec{v}_{ij} \sigma_{ij} dv_j^3 d\Omega.$$

$b$ : Paramètre d'impact.

$$\iint (f_i' f_j' - f_i f_j) \vec{v}_{ij} \sigma_{ij} d\vec{v}_j d\Omega = \iint (f_i' f_j' - f_i f_j) \vec{v}_{ij} \frac{b}{\sin \chi} \frac{db}{d\chi} d\vec{v}_j \sin \chi d\chi d\theta. \quad (\text{II.64})$$

$$= \iint (f_i' f_j' - f_i f_j) \vec{v}_{ij} b db dv_j^3 d\theta. \quad (\text{II.65})$$

À la fin, l'équation de Boltzmann avec le terme de collision devient :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i = \sum_{j=1}^k \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j) \vec{v}_{ij} b db dv_j^3 d\theta. \quad (\text{II.66})$$

### II -5 Distribution à l'équilibre :

À l'équilibre, le terme de collisions de l'équation de Boltzmann doit être nul :

$$\sum_{j=1}^k \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j) \vec{v}_{ij} b db dv_j^3 d\theta = 0 \rightarrow f_i' f_j' - f_i f_j = 0 \quad (\text{II.67})$$

D'après (II.67), on peut trouver :

$$\log f_i f_j = \log f_i' f_j'. \quad (\text{II.68})$$

La conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i \vec{v}_i + m_j \vec{v}_j = m_i \vec{v}_i' + m_j \vec{v}_j' . \\ \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} m_j v_j^2 = \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} m_j v_j'^2 . \end{array} \right\} \quad (\text{II.69})$$

En utilisant l'équation (II.68) et l'équation(II.69), on trouve :

$$\log f_i = A + B(m_i \vec{v}_i) - C \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right). \quad (\text{II.70})$$

Donc la fonction de distribution  $f_i$  s'écrit comme suite :

$$f_i = e^{A+B(m_i \vec{v}_i)-C(\frac{1}{2}m_i v_i^2)}. \quad (\text{II.71})$$

A : un scalaire ; B, C sont des vecteurs.

On peut écrire l'équation (II.70) comme suite :

$$f_i = A' e^{B(m_i \vec{v}_i) - C(\frac{1}{2} m_i v_i^2)}. \quad (\text{II.72})$$

On effectue le calcul suivant pour aboutir à l'équation (II.73) :

$$f_i = A' e^{B(m_i \vec{v}_i) - C(\frac{1}{2} m_i v_i^2)} = A' e^{-\frac{m_i C}{2} (v_i^2 - \frac{2B}{C} (\vec{v}_i) + (\frac{B}{C})^2 - (\frac{B}{C})^2)} = A' e^{-\frac{m_i C}{2} ((v_i - \frac{B}{C})^2 - (\frac{B}{C})^2)}. \quad (\text{II.73})$$

Alors, on obtient la fonction de distribution  $f_i$  sous la forme suivante :

$$f_i = A'' e^{-\frac{m_i C}{2} (v_i - \frac{B}{C})^2}. \quad (\text{II.74})$$

Pour déterminer la fonction de distribution  $f_i$ , on calcule les constantes  $A''$ ,  $C$  et  $B$ .

Premièrement, on calcule la densité d'espèce  $i$  [13] :

$$n_i = \int f_i dv_i^3 = \int A'' e^{-\frac{m_i C}{2} (v_i - \frac{B}{C})^2} dv_i^3. \quad (\text{II.75})$$

On pose  $v = v_i - \frac{B}{C} \rightarrow dv = dv_i$

Donc l'équation (II.75) devient :

$$n_i = A'' \left[ \int e^{-\frac{m_i C}{2} (v)^2} dv_x \right]^3. \quad (\text{II.76})$$

Alors, la densité  $n_i$  est :

$$n_i = A'' \left( \frac{2\pi}{m_i C} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{II.77})$$

Puis, on évalue la vitesse moyenne :

$$\begin{aligned} n_i v_0 &= \int v_i f_i dv_i^3. \quad (\text{II.78}) \\ &= \int v_i A'' e^{-\frac{m_i C}{2} (v_i - \frac{B}{C})^2} dv_i^3 \end{aligned}$$

$v_0$  : vitesse de dérive.

On pose  $v = v_i - \frac{B}{C} \rightarrow dv = dv_i$  et  $v_i = v + \frac{B}{C}$  puis on effectue le calcul suivant :

$$n_i v_0 = \int \left( v + \frac{B}{C} \right) A'' e^{-\frac{m_i C}{2} (v)^2} dv^3 = \int \left( \frac{B}{C} \right) A'' e^{-\frac{m_i C}{2} (v)^2} dv^3 + \int (v) A'' e^{-\frac{m_i C}{2} (v)^2} dv^3. \quad (\text{II.79})$$

Avec  $\int (v) A'' e^{-\frac{m_i C}{2} (v)^2} dv^3 = 0$  (fonction impaire).

Donc :

$$\int (v) A'' e^{-\frac{m_i C}{2} (v)^2} dv^3 = A'' \left( \frac{B}{C} \right) \left[ \int e^{-\frac{m_i C}{2} (v)^2} dv_x \right]^3 = A'' \left( \frac{B}{C} \right) \left( \sqrt{\frac{\pi}{\frac{m_i C}{2}}} \right)^3.$$

Ce qui implique :

$$n_i v_0 = A'' \left( \frac{B}{C} \right) \left( \sqrt{\frac{\pi}{\frac{m_i C}{2}}} \right)^3 = A'' \left( \frac{B}{C} \right) \left( \frac{2\pi}{m_i C} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{II.80})$$

Donc, la vitesse  $v_0$  est :

$$v_0 = \frac{B}{C}.$$

En remplaçant B par ( $v_0 C$ ) dans la fonction de distribution  $f_i$  :

$$f_i = n_i \left( \frac{m_i C}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i C}{2}(v_i - v_0)^2}. \quad (\text{II.81})$$

On note  $u = v - v_0$ , avec  $u$  : vitesse d'intrinsèque, ce qui donne :

$$f_i = n_i \left( \frac{m_i C}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i C}{2}u^2}. \quad (\text{II.82})$$

L'énergie cinétique des particules est :  $\overline{E}_c = \frac{1}{2} m_i \overline{u^2} = \frac{3}{2} k_\beta T$ .

$T$  : Température absolue.

$k_\beta$  : Constante de Boltzmann.

$$\overline{u^2} = 3 \frac{k_\beta T}{m_i}. \quad (\text{II.83})$$

Avec :

$$n_i \overline{u^2} = \int u^2 f_i du^3. \quad (\text{II.84})$$

À cause de la symétrie sphérique, on a :

$$n_i \overline{u^2} = n_i \int u^4 \left( \frac{m_i C}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i C}{2}u^2} du^3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (\text{II.85})$$

Avec :

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi. \quad (\text{II.86})$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} \int u^2 \left( \frac{m_i C}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i C}{2}u^2} du^3 &= \int u^4 \left( \frac{m_i C}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i C}{2}u^2} du_x du_y du_z. \\ &= \left( \frac{m_i C}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \int u^4 e^{-\frac{m_i C}{2}u^2} du_x \right]^3 = \left( \frac{m_i C}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2 \left( \frac{m_i C}{2} \right)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \pi^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient la formule suivante :

$$n_i \overline{u^2} = n_i 3 \frac{k_\beta T}{m_i} = \frac{3n_i}{m_i C}. \quad (\text{II.88})$$

Donc, on trouve :  $C = \frac{1}{k_\beta T}$ .

Finalement, on obtient une distribution de Maxwell après la substitution de la constante C dans la fonction de distribution  $f_i$  de l'équation(II.89) :

$$f_i = n_i \left( \frac{m_i}{2\pi k_\beta T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i}{2k_\beta T} u^2}. \quad (\text{II.89})$$

## Chapitre III

### Méthode de Chapman-Enskog et coefficients de transport.

La connaissance des coefficients de transport est nécessaire pour modéliser un plasma. La détermination de ces coefficients est effectuée à partir des expressions de flux qui sont calculés en résolvant l'équation de Boltzmann par la méthode de Chapman-Enskog. Cette méthode consiste à écrire la fonction de distribution sous la forme d'une somme de deux termes. Le premier terme correspond à l'approximation d'ordre 0 de la fonction de distribution qui est identifiée à la fonction de distribution Maxwellienne. Le deuxième terme est associé à l'approximation d'ordre 1, il représente de l'écart par rapport à la distribution de la fonction Maxwellienne [13][28].

#### III-1 Série d'Enskog :

L'équation de Boltzmann (II. 66) peut-être écrite sous la forme suivante [28] :

$$Df_i = \sum_{j=1}^k I(f_i, f_j). \quad (\text{III.1})$$

Avec :

$$Df_i = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i \quad (\text{III.2})$$

Afin d'obtenir les solutions de l'équation de Boltzmann en séries de puissance, on introduit un paramètre de perturbation  $\mu$  de telle sorte que la fréquence des collisions varie arbitrairement, sans affecter le nombre relatif de collisions d'une espèce particulière [25][16] :

$$Df_i = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^k I(f_i, f_j) \quad (\text{III.3})$$

$1/\mu$  : mesure la fréquence de collisions.

$\mu$  est très petite donc les collisions sont très fréquentes (Le plasma est continu où l'équilibre local est maintenu partout) [11][18].

La fonction de distribution est développée en série comme suite [19] :

$$f_i = f_i^0 + \mu f_i^1 + \mu^2 f_i^2 + \dots + \mu^r f_i^r. \quad (\text{III.4})$$

$f_i^0$ : Approximation d'ordre 0 de la fonction de distribution.

$f_i^1$ : Approximation d'ordre 1 de la fonction de distribution.

On reporte la valeur de  $f_i$  donnée par cette relation (III – 4) dans l'équation de Boltzmann (3,3).

Le premier terme de l'équation (III – 3) est donné par :

$$Df_i = \left( \frac{\partial f_i^0}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i^0 + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i^0 \right) + \mu \left( \frac{\partial f_i^1}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i^1 + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i^1 \right) + \mu^2 \left( \frac{\partial f_i^2}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i^2 + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i^2 \right). \quad (\text{III.5.a})$$

Le deuxième terme de l'équation (III – 3) est donné par :

$$\frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^k J(f_i, f_j) = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^k (I(f_i^0, f_j^0) + \mu(I(f_i^0, f_j^1) + I(f_i^1, f_j^0)) + \mu^2(I(f_i^0, f_j^2) + I(f_i^1, f_j^1) + I(f_i^2, f_j^0))) \quad (\text{III.5.b})$$

Après l'identification des coefficients des mêmes puissances de  $\mu$ , on obtient :

$$\sum_{j=1}^k I(f_i^0, f_j^0) = 0 \quad (\text{III.6.a})$$

$$\frac{\partial f_i^0}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i^0 + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i^0 = \sum_{j=1}^k I(f_i^0, f_j^1) + \sum_{j=1}^k I(f_i^1, f_j^0). \quad (\text{III.6.b})$$

$$\frac{\partial f_i^1}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i^1 + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i^1 = \sum_{j=1}^k I(f_i^0, f_j^2) + \sum_{j=1}^k I(f_i^1, f_j^1) + \sum_{j=1}^k I(f_i^2, f_j^0) \quad (\text{III.6.c})$$

Pour un gaz monoatomique, les équations couplées (III-6) deviennent :

$$I(f_i^0, f_j^0) = 0. \quad (\text{III.7.a})$$

$$\frac{\partial f_i^0}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i^0 + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i^0 = I(f_i^0, f_j^1) + I(f_i^1, f_j^0). \quad (\text{III.7.b})$$

$$\frac{\partial f_i^1}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i^1 + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i^1 = I(f_i^0, f_j^2) + I(f_i^1, f_j^1) + I(f_i^2, f_j^0). \quad (\text{III.7.c})$$

### III-2 Solution de perturbation d'ordre 1 :

L'équation (III-7.a) nous permet de résoudre l'équation de Boltzmann à l'équilibre, on a résolu l'équation de Boltzmann sans second membre dans le chapitre II tel que la fonction de distribution des espèces  $i$  est une distribution maxwellienne.

Dans l'approximation du premier ordre d'Enskog,  $f_i^1$  s'écrit comme suite :

$$f_i^1 = f_i^0 \varphi_i. \quad (III.8)$$

Où  $\varphi_i$  est une fonction de perturbation, elle dépend seulement l'espace et le temps via les densités d'espèces, la vitesse d'écoulement moyenne, température et leurs dérivés spatiaux [35].  $\varphi_i$  est linéaire par rapport ces dérivés. Elle présente un écart d'état d'équilibre (Maxwellienne) [13].

On suppose que :  $\varphi_i \ll 1$ .

$$f_i = f_i^0 + \mu f_i^0 \varphi_i. \quad (III.9)$$

Donc pour déterminer  $f_i$ , il faut évaluer  $\varphi_i$ . En substituant la nouvelle expression de la fonction de distribution  $f_i^1$  dans l'équation de Boltzmann (III.7.b), ce qui conduit à :

$$\frac{\partial f_i^0}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i^0 + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i^0 = \iint (f_i^{0'} f_j^{0'} \varphi_j' - f_i^0 f_j^0 \varphi_j + f_i^{0'} \varphi_i' f_j^{0'} - f_i^0 \varphi_i f_j^0) \vec{v}_{ij} \sigma_{ij} d^3 v_j d\Omega. \quad (III.10)$$

À l'équilibre on peut écrire :

$$f_i^0 f_j^0 = f_i^{0'} f_j^{0'}. \quad (III.11)$$

On remplace par la relation d'équilibre (III.11) dans l'équation de Boltzmann (III-10) ce qui donne :

$$\frac{\partial f_i^0}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i^0 + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i^0 = \iint (f_i^0 f_j^0 (\varphi_j' - \varphi_j + \varphi_i' - \varphi_i)) \vec{v}_{ij} \sigma_{ij} d^3 v_j d\Omega. \quad (III.12)$$

Cette dernière équation est une équation non homogène par rapport à  $\varphi$  et sa détermination est l'un des problèmes fondamentaux de la théorie cinétique des gaz, car elle aboutit à la connaissance des coefficients de transports en fonction des interactions moléculaires [13].

Avec :

$$Df_i^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i^0 + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i^0. \quad (III.13)$$

Et  $\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_0$ .

Ce qui donne :

$$Df_i^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial t} + (\vec{u}_i + \vec{v}_0) \vec{\nabla}_r f_i^0 + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \vec{\nabla}_v f_i^0. \quad (III.14)$$

On pose :

$$\frac{\partial f_i^0}{\partial t} = \frac{\partial f_i^0}{\partial t} - \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} \cdot \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{u}_i} ; \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{u}_i}. \quad (III.15)$$

Donc le premier terme de l'équation de Boltzmann (III-12) devient :

$$Df_i^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial t} + \vec{v}_0 \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{r}} + \vec{u}_i \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{u}_i} - \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} \cdot \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{u}_i} - \vec{v}_0 \left( \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{u}_i} \right) - \vec{u}_i \left( \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{u}_i} \right). \quad (III.16)$$

$$\text{Avec : } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \frac{\partial}{\partial \vec{r}},$$

Ce qui donne :

$$Df_i^0 = \frac{Df_i^0}{Dt} + \vec{u}_i \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{r}} + \left( \frac{\vec{F}_i}{m_i} - \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{u}_i} - \left( \frac{\partial f_i^0}{\partial \vec{u}_i} \cdot \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} \right) \quad (III.17)$$

Finalement, on obtient l'expression de  $Df_i^0$  comme suite :

$$Df_i^0 = f_i^0 \left\{ \frac{D \ln f_i^0}{Dt} + \vec{u}_i \frac{\partial \ln f_i^0}{\partial \vec{r}} + \left( \frac{\vec{F}_i}{m_i} - \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \ln f_i^0}{\partial \vec{u}_i} - \left( \frac{\partial \ln f_i^0}{\partial \vec{u}_i} \cdot \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} \right) \right\} \quad (III.18)$$

À partir de la fonction de distribution de Maxwell, on obtient le logarithme de  $f_i^0$  :

$$\ln(f_i^0) = \ln \left( n_i \cdot \left( \frac{m_i}{2\pi k_\beta} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{3}{2} \ln T - \frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2. \quad (III.19)$$

Ce qui permet de calculer les dérivés suivants :

$$\frac{\partial \ln f_i^0}{\partial \vec{u}_i} = -\frac{m_i}{k_\beta T} \vec{u}_i; \quad \frac{\partial \ln f_i^0}{\partial T} = \frac{3}{2T} + \frac{m_i}{2k_\beta T^2} u_i^2 \quad (III.20a ; 3.20b)$$

La dérivation par rapport le temps et le gradient dans l'équation des intégrales

(III – 18) et s'écrit comme suite :

$$\frac{\partial \ln f_i^0}{\partial t} + \frac{\partial \ln f_i^0}{\partial \vec{r}} = \frac{Dn_i}{n_i} - \frac{m_i}{k_\beta T} \vec{u}_i D\vec{u}_i + \frac{3}{2T} DT + \frac{m_i}{2k_\beta T^2} u_i^2 DT. \quad (III.21)$$

Dans l'équation précédente, on remplace  $\left( -\frac{Dn_i}{n_i} + \frac{m_i}{k_\beta T} \vec{u}_i D\vec{u}_i \right)$  par  $\left( \frac{3}{2T} DT \right)$  :

Ce qui implique :

$$\frac{D \ln f_i^0}{Dt} = \frac{m_i}{2k_\beta T^2} u_i^2 DT = -\frac{m_i}{3k_\beta T} u_i^2 \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}}. \quad (III.22)$$

Alors, on obtient :

$$\frac{D \ln f_i^0}{Dt} - \left( \frac{\partial \ln f_i^0}{\partial \vec{u}_i} \cdot \vec{u}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} \right) = \frac{m_i}{k_\beta T} \vec{u}_i \vec{u}_j \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}}. \quad (III.23)$$

L'équation de transport de la vitesse s'écrit:

$$\frac{\vec{F}_i}{m_i} - \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \vec{r}} + \vec{v}_0 \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}}. \quad (III.24)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\left( \frac{\vec{F}_i}{m_i} - \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \ln f_i^0}{\partial \vec{u}_i} = \frac{\partial \ln(nk_\beta T)}{\partial \vec{r}}. \quad (III.25)$$

Avec :  $P = nk_\beta T$  et  $\rho = nm_i$ .

En utilisant les équations (III - 19), (3.25), on trouve :

$$\vec{u}_i \frac{\partial \ln f_i^0}{\partial \vec{r}} + \left( \frac{\vec{F}_i}{m_i} - \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \ln f_i^0}{\partial \vec{u}_i} = \vec{u}_i \left( -\frac{3}{2} \frac{1}{T} + \frac{m_i}{2k_\beta T^2} u_i^2 - \frac{1}{T} \right) = \vec{u}_i \left( \frac{m_i}{2k_\beta T^2} u_i^2 - \frac{5}{2} \frac{1}{T} \right) \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \quad (III.26)$$

On remplace les résultats (III - 23) et (III - 26) dans (III - 18), ce qui donne :

$$Df_i^0 = f_i^0 \left\{ \vec{u}_i \left( \frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} + \frac{m_i}{k_\beta T} \vec{u}_i \vec{u}_j \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} \right\}. \quad (III.27)$$

Finalement, on obtient l'équation des intégrales suivante :

$$f_i^0 \left\{ \vec{u}_i \left( \frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} + \frac{m_i}{k_\beta T} \vec{u}_i \vec{u}_j \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} \right\} = \iint (f_i^0 f_j^0 (\varphi'_j - \varphi_j + \varphi'_i - \varphi_i)) \vec{v}_{ij} \sigma_{ij} d^3 v_j d\Omega. \quad (III.28)$$

### III -3 La solution d'équation des intégrales :

La solution d'équation des intégrales est définie par Chapman et Cowling, à partir de la théorie générale des équations des intégrales, nous savons que la solution à l'équation (III - 28) a la structure suivante :

$$\varphi = \varphi_g + \varphi_p. \quad (III.29)$$

La solution sans second membre correspondant à :

$$\iint (f_i^0 f_j^0 (\varphi'_j - \varphi_j + \varphi'_i - \varphi_i)) \vec{v}_{ij} \sigma_{ij} d^3 v_j d\Omega = 0. \quad (III.30)$$

Tel que :

$$\varphi_g = \alpha' + \alpha'' \vec{u}_i + \alpha''' u_i^2. \quad (III.31)$$

La solution particulière de (III - 28) est définie par :

$$\varphi_p = -A'' \vec{u}_i \frac{m_i}{2k_\beta T} \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} - B_{ij} \frac{m_i}{k_\beta T} \vec{u}_i \vec{u}_j \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}}. \quad (III.32)$$

$\vec{A}_i = A'' \vec{u}_i$  : Vecteur.

$\vec{B}_{ij} = B_{ij} \vec{u}_i \vec{u}_j$  : Tenseur.

La solution générale de (III - 28) s'écrit comme suit :

$$\varphi = -\vec{A}_i \frac{m_i}{2k_\beta T} \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} - \vec{B}_{ij} \frac{m_i}{k_\beta T} \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} + \alpha' + \alpha'' \vec{u}_i + \alpha''' u_i^2. \quad (III.33)$$

Les approximations doivent satisfaire la contrainte suivant [13]:

$$\int \psi f_i^n d\vec{u}_i = 0. \quad (III.34)$$

$\psi$  peut être égale à  $m_i, mc_i$  ou  $mc^2$ .

Cherchant les coefficients  $\alpha', \alpha'', \alpha'''$  :

on a:  $\int m u_i f_i^0 \varphi d\vec{u}_i = 0$ , ce qui permet d'écrire les intégrales suivantes :

$$\int m \vec{u}_i f_i^0 \left( -\vec{A}_i \frac{m_i}{2k_\beta T} \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} + \alpha'' \vec{u}_i \right) d\vec{u}_i = 0. \quad (III.35)$$

$$\int m \vec{u}_i f_i^0 \left( -\vec{B}_{ij} \frac{m_i}{k_\beta T} \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} \right) d\vec{u}_i = 0. \quad (III.36)$$

$$\int m f_i^0 (\alpha' + \alpha''' u_i^2) d\vec{u}_i = 0. \quad (III.37)$$

$$\int m u_i^2 f_i^0 (\alpha' + \alpha''' u_i^2) d\vec{u}_i = 0. \quad (III.38)$$

Le calcul d'intégrale(III – 37) se donne :

$$\alpha' + \frac{3k_\beta T}{m} \alpha''' = 0. \quad (III.39)$$

Le calcul d'intégrale(III – 38)se donne :

$$\alpha' + \frac{5k_\beta T}{m} \alpha''' = 0. \quad (III.40)$$

D'après (III – 39) et (III – 40), on déduit :  $\alpha' = 0, \alpha''' = 0$ .

On suppose que le coefficient  $\alpha''$  est proportionnel à  $\frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}}$  :

$$\int m u_i^2 f_i^0 \left( -\vec{A}_i \frac{m_i}{2k_\beta T} \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} + \frac{\alpha}{T} \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} \right) d\vec{u}_i = 0. \quad (III.41)$$

On obtient :

$$A'' \int u_i^2 f_i^0 du_i = 0. \quad (III.42)$$

Avec  $A'' = \vec{A}_i - \alpha$ .

Donc, on peut calculer la fonction de distribution  $f_i$  posant  $\mu = 1$  :

$$\begin{aligned} f_i &= f_i^0 (1 + \mu \varphi) = f_i^0 (1 + \varphi). \\ &= f_i^0 \left( 1 - \vec{A}'' \frac{m_i}{2k_\beta T} \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} - \vec{B}_{ij} \frac{m_i}{k_\beta T} \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} \right). \end{aligned} \quad (III.43)$$

Finalement, On remplace la valeur de  $\varphi$  dans l'équation (III – 28) et on obtient les équations d'intégrale suivants :

$$\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2 - \frac{5}{2}\right) \vec{u}_i = -I[A'' \vec{u}_i]. \quad (III.44)$$

$$f_i^0 \vec{u}_i \vec{u}_j = -I[B_{ij} \vec{u}_i \vec{u}_j]. \quad (III.45)$$

La détermination de  $\varphi$  demande le calcul des fonctions scalaires A et B qu'ils sont les solutions des équations d'intégrale au-dessus.

### III -4 Le développement des coefficients en polynôme de Sonine :

Le polynôme de Sonine est donné par la formule suivante [13] :

$$S_{l+\frac{1}{2}}^{(n)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}{k!(n-1)!\Gamma\left(k+l+\frac{3}{2}\right)} \right) \left(\frac{-m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right). \quad (III.46)$$

En termes de polynôme de Sonine (III-46) les équations (III-44) et (III-45) deviennent :

$$f_i^0 S_{\frac{3}{2}}^{(1)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \vec{u}_i = I[A'' \vec{u}_i]. \quad (III.47a)$$

$$f_i^0 S_{\frac{5}{2}}^{(0)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \vec{u}_i \vec{u}_j = -I[B_{ij} \vec{u}_i \vec{u}_j]. \quad (III.47b)$$

De plus, le développement des coefficients  $A''$  et  $B_{ij}$  en série de polynôme de Sonine :

$$A''(u_i^2, \rho, T) = - \sum_{r=0}^n a^{(r)} S_{\frac{3}{2}}^{(r)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right). \quad (III.48)$$

$$B_{ij}(u_i^2, \rho, T) = \sum_{r=0}^n b^{(r)} S_{\frac{5}{2}}^{(r)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right). \quad (III.49)$$

Où les coefficients  $a^{(r)}, b^{(r)}$  sont des fonctions d'expansion .

Les coefficients  $A''$  et  $B_{ij}$  doit satisfaire le contrainte (III – 42) et donc par l'utilisation de (III – 48) on trouve :

$$a^{(0)} = 0.$$

L'expression de  $A''$  réduit à :

$$A''(u_i^2, \rho, T) = - \sum_{r=1}^n a^{(r)} S_{\frac{3}{2}}^{(r)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right). \quad (III.50)$$

Les équations (III-47a) et (III-47b) deviennent :

$$f_i^0 S_{\frac{3}{2}}^{(1)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \cdot \vec{u}_i \vec{u}_j = - \sum_{r=1}^n a^{(r)} I\left[S_{\frac{3}{2}}^{(r)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \cdot \vec{u}_i\right]. \quad (III.51)$$

$$f_i^0 S_{\frac{5}{2}}^{(0)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \vec{u}_i \vec{u}_j = - \sum_{r=0}^n b^{(r)} I\left[S_{\frac{5}{2}}^{(r)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \cdot \vec{u}_i \vec{u}_j\right]. \quad (III.52)$$

Détermination des coefficients  $a^{(r)}$  et  $b^{(r)}$  :

$$f_i^0 S_{\frac{3}{2}}^{(1)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) = - \sum_{r=1}^n a^{(r)} I\left[S_{\frac{3}{2}}^{(r)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \cdot \vec{u}_i\right] \left(\frac{m_i}{2k_\beta T} \vec{u}_i S_{\frac{3}{2}}^{(s)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right)\right). \quad (III.53)$$

On multiplie (III – 51) par  $\frac{m_i}{2k_\beta T} \vec{u}_i S_{\frac{3}{2}}^{(s)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right)$  puis on intègre par rapport  $\vec{u}_i$  :

$$\int f_i^0 S_{\frac{3}{2}}^{(1)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \cdot \vec{u}_i \vec{u}_j d\vec{u}_i - \frac{m_i}{2k_\beta T} \sum_{r=1}^n a^{(r)} \cdot \int [S_{\frac{3}{2}}^{(r)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \cdot u_i] I\left[S_{\frac{3}{2}}^{(s)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \cdot \vec{u}_i\right] d\vec{u}_i. \quad (III.54)$$

On pose:

$$\alpha^{(r,s)} = \frac{-2k_\beta T}{m_i} \int \left[S_{\frac{3}{2}}^{(r)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right)\right] \vec{u}_i I\left[S_{\frac{3}{2}}^{(s)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right)\right] d\vec{u}_i. \quad (III.55)$$

Ce qui implique:

$$\frac{15}{4} n \left(\frac{2k_\beta T}{m_i}\right)^2 \delta^{(1,r)} = \sum_{s=1}^n \alpha^{(r,s)} a^{(r)}. \quad (III.56)$$

On multiplie (III – 52) par  $\left[\left(\frac{m_i}{2k_\beta T}\right)^2 S_{\frac{5}{2}}^{(s)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \cdot \vec{u}_i \vec{u}_j\right]$  et on intègre par rapport  $\vec{u}_i$  :

$$\int f_i^0 S_{\frac{5}{2}}^{(s)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \vec{u}_i \vec{u}_j d\vec{u}_i = - \left(\frac{m_i}{2k_\beta T}\right)^2 \sum_{r=1}^n b^{(r)} \cdot \int [S_{\frac{5}{2}}^{(r)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) u_i u_j] I\left[S_{\frac{5}{2}}^{(s)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right) \vec{u}_i \vec{u}_j\right] d\vec{u}_i. \quad (III.57)$$

On pose:

$$\beta^{(r,s)} = - \int \left[S_{\frac{5}{2}}^{(r)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right)\right] u_i u_j I\left[\left(S_{\frac{5}{2}}^{(s)}\left(\frac{m_i}{2k_\beta T} u_i^2\right)\right) \vec{u}_i \vec{u}_j\right] d\vec{u}_i. \quad (III.58)$$

Ce qui implique:

$$\frac{5}{2} n \left(\frac{2k_\beta T}{m_i}\right)^2 \delta^{(0,r)} = \sum_{s=1}^n \beta^{(r,s)} b^{(r)} \quad (III.59)$$

Les équations (III – 56), (III – 59) représentent une infinité des équations d'un système algébrique pour les coefficients  $a^r$  et  $b^r$  respectivement, la résolution de ces systèmes des équations linéaires permet de déterminer les coefficients de transport qui dépend l'ordre

d'approximation choisi pour le polynôme de Sonine [13][17].

Remarque :

Pour un gaz polyatomique, la solution de l'équation de Boltzmann par la méthode de Chapman-Enskog est donné par :

$$f_i = f_i^0 \left( 1 - A'' \frac{m_i}{2k_\beta T} \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} - B_{ij} \frac{m_i}{k_\beta T} \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \vec{r}} + \sum_j C^{(j)} \cdot \vec{d}_j \right). \quad (III.60)$$

avec  $d_j = \frac{1}{p} (\nabla p_j - \rho_j F_j)$ .

Où les coefficients  $A''$  et  $B_{ij}, C^{(j)}$  sont déterminés par Chapman et Cowling [25].

### III -5 Les coefficients de Transport :

#### III -5-1 La viscosité :

La viscosité peut être évaluée par la première approximation à partir de la théorie de Chapman-Enskog [13].

$$\eta = \frac{\rho}{2k_\beta T} [b^0]_1. \quad (III.61)$$

Pour un gaz mono-espèce, on peut déterminer  $b^0$  par la formule suivante :

$$b^0 = \lim_{\infty} \frac{\det \begin{vmatrix} C'' & \beta^{(0,1)} & \dots & \beta^{(0,n)} \\ 0 & \beta^{(1,1)} & \dots & \beta^{(1,n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta^{(n,1)} & \dots & \beta^{(n,n)} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} \beta^{(0,0)} & \beta^{(0,1)} & \dots & \beta^{(0,n)} \\ \beta^{(1,0)} & \beta^{(1,1)} & \dots & \beta^{(1,n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{(n,0)} & \beta^{(n,1)} & \dots & \beta^{(n,n)} \end{vmatrix}}, \quad C'' = \frac{5}{2} n \left( \frac{2k_\beta T}{m_i} \right)^2. \quad (III.62)$$

L'approximation d'ordre 1 de  $b^0$  nous permet d'écrire :

$$b^0 = \frac{5}{2} n \left( \frac{2k_\beta T}{m_i} \right)^2 \frac{1}{\beta^{(0,0)}}. \quad (III.63)$$

Avec :  $\beta^{(0,0)} = \sqrt{\pi} \left( \frac{4k_\beta T}{m_i} \right)^{\frac{5}{2}} n^2 \Omega^{(2,2)}$ .

D'après (III – 61) on a :

$$\eta = \frac{\rho}{2k_\beta T} \frac{5}{2} n \left( \frac{2k_\beta T}{m_i} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{\pi} \left( \frac{4k_\beta T}{m_i} \right)^{\frac{5}{2}} n^2 \Omega^{(2,2)}} \quad (III.64)$$

Donc on obtient l'expression de la viscosité pour un gaz pur :

$$\eta = \frac{5}{16} \sqrt{\frac{k_B T m_i}{\pi}} \frac{1}{\Omega^{(2,2)}} \quad (III.65)$$

Pour un gaz polyatomique, l'expression du coefficient de la viscosité est donnée par le rapport suivant [19][17]:

$$\eta = \frac{\det \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1v} & X_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{v1} & H_{v2} & \dots & H_{vv} & X_v \\ X_1 & X_2 & \dots & X_v & 0 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1v} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{v1} & H_{v2} & \dots & H_{vv} \end{vmatrix}} \quad (III.66)$$

D'où :

$$H_{ii} = \frac{X_i^2}{\eta_i} + \sum_{\substack{K=1 \\ K \neq i}}^v \frac{2X_i X_k}{\eta_{ik}} \frac{M_i M_k}{(M_i + M_k)^2} \left( \frac{M_k}{M_i} + \frac{5}{3} \frac{\bar{\Omega}_{ik}^{(1,1)}}{\bar{\Omega}_{ik}^{(2,2)}} \right).$$

Et la valeur de  $H_{ij}$  ( $i \neq j$ ) est :

$$H_{ij} = -\frac{2X_i X_k}{\eta_{ik}} \frac{M_i M_k}{(M_i + M_k)^2} \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{\bar{\Omega}_{ik}^{(1,1)}}{\bar{\Omega}_{ik}^{(2,2)}} \right).$$

$X_i, X_k$  : sont la fraction molaire des espèces  $i$  et  $j$  respectivement.

### III -5-2 La diffusion ordinaire :

Le coefficient de diffusion ordinaire est déterminé par la méthode de Chapman - Enskog pour un gaz binaire au premier ordre d'approximation de polynôme de Sonine.

Il est exprimé par la relation suivante [18]:

$$D_{ij} = \frac{2,662810^{-2}}{P} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\bar{\Omega}_{ij}^{(1,1)}} \left( \frac{M_i + M_j}{2M_i M_j} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (III.67)$$

$M_i, M_j$  : Poids moléculaire.

$P$  : Pression.

$T$  : Température.

Pour un gaz polyatomique, la résolution de l'équation de Boltzmann par la méthode de Chapman-Enskog (III.60) nous permet d'obtenir la forme du coefficient de diffusion ordinaire suivante [28]:

$$D_{ij} = \frac{\rho n_i}{2nm_i} \sqrt{\frac{2k_\beta T}{m_i}} C_{i0}^{(j,i)}. \quad (III.68)$$

### III -5-3 La conductivité électrique :

À l'équilibre thermodynamique local, Deveto a calculé la conductivité électrique à l'approximation d'ordre 3 [32] [33]:

$$\sigma = \frac{e^2 n_e m_e}{\rho k_\beta T} D_{ee}. \quad (III.69)$$

Avec la formule de  $D_{ee}$  est comme suite :

$$D_{ee} = \frac{3\rho n_e}{2nm_e} \sqrt{\frac{2\pi k_\beta T}{m_e}} \frac{\begin{vmatrix} q_{ej}^{11} & q_{ej}^{12} \\ q_{ej}^{21} & q_{ej}^{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_{ej}^{00} & q_{ej}^{01} & q_{ej}^{02} \\ q_{ej}^{10} & q_{ej}^{11} & q_{ej}^{12} \\ q_{ej}^{20} & q_{ej}^{21} & q_{ej}^{22} \end{vmatrix}}. \quad (III.70)$$

$$q_{ej}^{01} = 8\pi \sum_j n_e n_j \bar{\Omega}_{ej}^{(1,1)}.$$

$$q_{ej}^{01} = 8\pi \sum_j n_e n_j \left[ \frac{5}{2} \bar{\Omega}_{ej}^{(1,1)} - 3 \bar{\Omega}_{ej}^{(1,2)} \right].$$

$$q_{ej}^{02} = 8\pi \sum_j n_e n_j \left[ \frac{35}{8} \bar{\Omega}_{ej}^{(1,1)} - \frac{21}{2} \bar{\Omega}_{ej}^{(1,2)} + 6 \bar{\Omega}_{ej}^{(1,3)} \right].$$

$$q_{ej}^{11} = 8\sqrt{2} n_e^2 \pi \bar{\Omega}_{ee}^{(2,2)} + 8\pi \sum_j n_e n_j \left[ \frac{25}{4} \bar{\Omega}_{ej}^{(1,1)} - 15 \bar{\Omega}_{ej}^{(1,2)} + 12 \bar{\Omega}_{ej}^{(1,3)} \right].$$

$$q_{ej}^{12} = 8\sqrt{2} n_e^2 \pi \left[ \frac{7}{4} \bar{\Omega}_{ee}^{(2,2)} - 2 \bar{\Omega}_{ee}^{(2,3)} \right] + 8\pi \sum_j n_e n_j \left[ \frac{175}{16} \bar{\Omega}_{ej}^{(1,1)} - \frac{315}{8} \bar{\Omega}_{ej}^{(1,2)} + 57 \bar{\Omega}_{ej}^{(1,3)} - 30 \bar{\Omega}_{ej}^{(1,4)} \right].$$

$$q_{ej}^{22} = 8\sqrt{2} n_e^2 \pi \left[ \frac{77}{16} \bar{\Omega}_{ee}^{(2,2)} - 7 \bar{\Omega}_{ee}^{(2,3)} + 5 \bar{\Omega}_{ee}^{(2,4)} \right] + 8\pi \sum_j n_e n_j \left[ \frac{1225}{64} \bar{\Omega}_{ej}^{(1,1)} - \frac{735}{8} \bar{\Omega}_{ej}^{(1,2)} + \frac{399}{2} \bar{\Omega}_{ej}^{(1,3)} - 210 \bar{\Omega}_{ej}^{(1,4)} + 90 \bar{\Omega}_{ej}^{(1,5)} \right].$$

Avec  $\bar{\Omega}^{(r,s)} = \bar{\Omega}^{(s,r)}$ , ce qui implique:  $q_{ej}^{01} = q_{ej}^{10}$ ,  $q_{ej}^{02} = q_{ej}^{20}$  et  $q_{ej}^{12} = q_{ej}^{21}$ .

### III -5-4 La conductivité thermique :

La résolution de l'équation de Boltzmann nous permet d'aboutir à la conductivité thermique telle qu'elle prend la forme suivante [13] :

$$\kappa = \frac{5}{4} \frac{\rho}{2T} [a^1]_1. \quad (III.71)$$

D'où :

$$a^1 = \lim_{\infty} \frac{\det \begin{vmatrix} C' & \alpha^{(1,2)} & \dots & \alpha^{(1,n)} \\ 0 & \alpha^{(2,2)} & \dots & \alpha^{(2,n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha^{(n,2)} & \dots & \alpha^{(n,n)} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} \alpha^{(1,1)} & \alpha^{(1,2)} & \dots & \alpha^{(1,n)} \\ \alpha^{(2,1)} & \alpha^{(2,2)} & \dots & \alpha^{(2,n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{(n,1)} & \alpha^{(n,2)} & \dots & \alpha^{(n,n)} \end{vmatrix}}, C' = \frac{15}{4} n \left( \frac{2k_{\beta}T}{m_i} \right)^2. \quad (III.72)$$

Comme la viscosité, la conductivité thermique est déterminée à partir l'approximation d'ordre 1 de  $a^1$  pour un gaz pur :

$$[a^1]_1 = \frac{15}{4} n \left( \frac{2k_{\beta}T}{m_i} \right)^2 \frac{1}{\alpha^{(1,1)}}. \quad (III.73)$$

$$\text{Avec : } \alpha^{(1,1)} = \sqrt{\pi} \left( \frac{4k_{\beta}T}{m_i} \right)^{\frac{5}{2}} n^2 \Omega^{(2,2)}$$

D'après (III - 71) , on a :

$$\kappa = \frac{5}{4} \frac{\rho}{2T} \frac{15}{4} n \left( \frac{2k_{\beta}T}{m_i} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{\pi} \left( \frac{4k_{\beta}T}{m_i} \right)^{\frac{5}{2}} n^2 \Omega^{(2,2)}}. \quad (III.74)$$

Alors l'expression de la conductivité thermique est :

$$\kappa = \frac{75}{64} \frac{k_{\beta}}{m_i} \sqrt{\frac{k_{\beta}T m_i}{\pi}} \frac{1}{\Omega^{(2,2)}}. \quad (III.75)$$

$$\kappa = 8,32410^{-2} \frac{\sqrt{T}}{\bar{\Omega}_{ij}^{(2,2)}}. \quad (III.76)$$

Conductivité thermique pour un gaz binaire [18] :

$$\kappa_{ij} = \frac{25}{8} \frac{D_{ij}P}{A^*_{ij}T}. \quad (III.77)$$

$$\text{Où } A^*_{ij} = \frac{\bar{\Omega}_{ij}^{(2,2)}}{\bar{\Omega}_{ij}^{(1,1)}}.$$

$$\kappa_{ij} = 8,32410^{-2} \frac{\sqrt{T \left( \frac{M_i + M_j}{2M_i M_j} \right)}}{\bar{\Omega}_{ij}^{(2,2)}}. \quad (III.78)$$

La conductivité thermique de translation pour les particules lourdes en présence des ions est comme suit :

$$\kappa_{tr}^h = 4 \frac{\det \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1v} & x_1 \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2v} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{v1} & L_{v2} & \dots & L_{vv} & x_v \\ x_1 & x_2 & \dots & x_v & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1v} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{v1} & L_{v2} & \dots & L_{vv} \end{bmatrix}}. \quad (III.79)$$

Avec :

$$L^{(ii)} = -\frac{4x_i^2}{\kappa_{ij}} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{2x_i x_k}{\kappa_{ik}} \frac{1}{(M_i + M_k)^2} \frac{1}{A^*_{ik}} \left( \frac{15}{2} M_i^2 + \frac{25}{4} M^{(k)} - 3M_k^2 + B^*_{ik} + 4(M_i M_k A^*_{ik}) \right).$$

$$L^{(ij)} = \frac{2x_i x_j}{\kappa_{ij}} \frac{M_i M_j}{(M_i + M_j)^2} \frac{1}{A^*_{ij}} \left( \frac{55}{4} - 3B^*_{ij} + 4A^*_{ij} \right).$$

$$\text{D'où } B^*_{ij} = \frac{5\bar{\Omega}_{ij}^{(1,1)} - 4\bar{\Omega}_{ij}^{(1,3)}}{\bar{\Omega}_{ij}^{(1,1)}}.$$

La troisième approximation de la conductivité thermique pour les électrons se donne[18]:

$$\kappa_{tr}^e = \frac{75}{8} n_2^e \left( \frac{2\pi k_B T}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{q_{ej}^{22}}{q_{ej}^{11} q_{ej}^{22} - (q_{ej}^{12})^2}. \quad (III.80)$$

Conductivité thermiques de réaction [18]:

$$\kappa_{react} = -\frac{1}{RT^2} \frac{\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1v} & \Delta H_1 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2v} & \Delta H_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{v1} & A_{v2} & \dots & A_{vv} & \Delta H_v \\ \Delta H_1 & \Delta H_2 & \dots & \Delta H_v & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1v} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{v1} & A_{v2} & \dots & A_{vv} \end{bmatrix}}. \quad (III.81)$$

D'où :

$$A_{ij} = A_{ji} = \sum_{k=1}^{v-1} \sum_{l=k+1}^v \frac{RT}{D_{kl} P} X_i X_l \left( \frac{a_{ik}}{x_k} - \frac{a_{il}}{a_l} \right) \left( \frac{a_{ik}}{x_k} - \frac{a_{jl}}{a_l} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{v-1} a_{ik} B_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots \dots v)$$

$v$  : Le nombre de réactions chimique indépendantes.

$\Delta H_i$ : La variation d'enthalpie qui résulte des processus dissociation et d'ionisation.

Remarque : La conductivité thermique pour un gaz polyatomique est écrite sous la forme d'une somme de conductivité thermique de translation, conductivité thermique interne et conductivité thermique de réaction.

## Chapitre IV

### Les intégrales de collision.

Les coefficients de transport sont exprimés en fonction des intégrales de collision. Il existe deux méthodes pour obtenir ces intégrales de collisions, l'une de ces méthodes est l'intégration numérique de  $\Omega^{(l,s)}$  tel que la section efficace de transport  $Q^l$  est connue par la littérature, l'autre est le calcul de  $Q^l$  à partir de la détermination de potentiel d'interaction lors d'une collision donc l'évaluation des  $\Omega^{(l,s)}$  passe par des tables [31].

#### IV-1 Les intégrales de collision effectives :

Pour les collisions entre des particules de type i et type j, les intégrales de collision effectives sont définies par la relation suivante [21] [28]:

$$\Omega^{(l,s)} = \sqrt{\frac{2\pi k_{\beta} T}{\mu_{ij}}} \iint_0^{\infty} e^{-g_{ij}^2} g_{ij}^{2s+3} (1 - \cos^l \chi) b. db. dg_{ij}. \quad (IV.1)$$

Le nombre de paire  $(l, s)$  définit l'ordre des intégrales de collision, et leurs valeurs dépendent le nombre de termes dans les polynômes de Sonine utilisés pour calculer la perturbation de la fonction  $f_i$ [29].

$\mu_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ : La masse réduite.

$g_{ij} = \left(\frac{\varepsilon_r}{k_{\beta} T}\right)^{\frac{1}{2}}$ : La vitesse relative réduite des collisions.

$\varepsilon_r$ : L'énergie cinétique du mobile fictif.

$T$ : La température effective des collisions.

$g_{ij}^2$ : Une énergie réduite.

$b$ : Paramètre d'impact.

$\chi$ : L'angle déviation.

Le potentiel d'interaction apparait dans les intégrales de collision à partir de l'angle de déviation  $\chi$  [17] :

$$\chi = \pi - 2b \int_{r_m}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 - \frac{\phi(r)}{\frac{1}{2}\mu_{ij}g_{ij}^2}\right) r^2} dr \quad (IV.2)$$

$r_m$  : La distance minimale d'approche.

$\phi(r)$  : Le potentiel d'interaction.

#### IV-2 La section efficace de transport :

Selon le degré 1 de développement de Sonine, la section efficace de transport est définie comme suite [30]:

$$Q^l(\varepsilon_r) = 2\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^l \chi) b. db. \quad (IV.3)$$

Lorsque  $l = 1$ , la section efficace totale de transport  $Q^1(\varepsilon_r)$  s'appelle la section efficace de transfert de quantité mouvement [18].

L'intégrale de collision effective peut être exprimé en fonction de la section efficace totale de transport  $Q^l(\varepsilon_r)$  par :

$$\Omega^{(l,s)} = \sqrt{\frac{k_{\beta}T}{2\pi\mu_{ij}}} \iint_0^{\infty} e^{-g_{ij}^2} g_{ij}^{2s+3} Q^l(\varepsilon_r) dg_{ij}. \quad (IV.4)$$

#### IV-3 Les intégrales de collision réduites :

Les intégrales de collision réduites  $\Omega^{*(l,s)}$  sont utilisées par fois dans les calculs de coefficients de transport [12][18] :

$$\Omega^{*(l,s)} = \frac{\text{Les collisions des particules réelles}}{\text{Les collisions des particules décrites par le modèle des sphères rigides}}$$

$$\Omega^{*(l,s)} = \frac{\Omega^{(l,s)}}{\Omega_{sr}^{(l,s)}} \quad (IV.5)$$

#### IV-3-1 Le modèle des sphères rigides :

Le potentiel des sphères rigides est utilisé pour décrire une interaction lorsque ces données sont inconnus [12]. Pour ce modèle, le potentiel est infini à l'intérieur et nul en dehors de la particule [19] :

$$\emptyset(r) = \begin{cases} \infty & \text{si } r \leq (R_i + R_j) \\ 0 & \text{si } r > (R_i + R_j) \end{cases} \quad (IV.6)$$

Pour deux sphères rigides de rayons  $R_i$  et  $R_j$ , les intégrales de collision s'écrivent en fonction de nombre de paires  $(l, s)$  [22] :

$$\Omega_{sr}^{(l,s)} = \sqrt{\frac{k_\beta T}{2\pi\mu_{ij}}} \frac{(s+1)!}{2} \left[ 1 - \frac{1+(-1)^l}{2(l+1)} \right] \pi (R_i + R_j)^2. \quad (IV.7)$$

Où la section efficace de transport est [22] :

$$Q_{sr}^{(l,s)} = \left[ 1 - \frac{1+(-1)^l}{2(l+1)} \right] \pi (R_i + R_j)^2. \quad (IV.8)$$

#### IV-4 Moyenne pondérée :

La moyenne pondérée de  $\Omega^{(l,s)}$  relié aux intégrales de collision réduites et par conséquent aux intégrales de collision de modèle des sphères rigides par la relation suivante [22] :

$$\bar{\Omega}^{(l,s)} = (R_i + R_j)^2 \Omega^{*(l,s)}. \quad (IV.9)$$

Ainsi, la connaissance de la section efficace totale de transport  $Q^l(\varepsilon_r)$  permet de calculer la moyenne pondérée  $\bar{\Omega}^{(l,s)}$  à partir de l'expression suivante [22] :

$$\bar{\Omega}^{(l,s)} = \frac{4(l+1)}{\pi(s+1)! [2l+1 - (-1)^l]} \iint_0^\infty e^{-g_{ij}^2} g_{ij}^{2s+3} Q^l(\varepsilon_r) dg_{ij}. \quad (IV.10)$$

#### IV-5 la relation de récurrence :

La relation de récurrence permet d'accéder aux valeurs supérieures de  $s$ , elle dépend la température [22] :

$$\Omega^{(l,s+1)} = T \frac{\partial \Omega^{(l,s)}}{\partial T} + \left( s + \frac{3}{2} \right) \Omega^{(l,s)}. \quad (IV.11)$$

#### *IV-6 Les interactions entre particules :*

##### **IV-6-1 Les interactions neutre-neutre :**

##### **IV-6-1-1 Potentiel Lennard Jones :**

Lors d'une collision entre deux particules neutres qui ne portent pas de charge et n'est entouré pas par le champ Coulombien, la force d'interaction à grande distance est une force de Van der Waal attractive contrairement aux courtes distances, la force d'interaction est généralement répulsive et varie rapidement. Donc pour représenter la région d'attraction à grande distance et la région de répulsion à courte distance, la forme analytique de potentiel doit avoir au minimum deux termes, ce phénomène est traduit de façon réaliste par le potentiel d'interaction de Lennard Jones [12][13][17].

L'expression de ce type de potentiel est la suivante :

$$\phi(r) = 4C_0 \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]. \quad (IV.12)$$

$r$  : La distance interatomique.

$C_0$  : La profondeur de puits de potentiel  $\phi(r)$ .

$\sigma$  : La distance interatomique pour laquelle  $\phi(\sigma) = 0$ .

##### **IV-6-1-2 Potentiel de Stockmayer :**

La forme de potentiel de Stockmayer est comme suite [12]:

$$\phi(r) = 4C_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 + \delta \left( \frac{r_0}{r} \right)^3 \right] \quad (IV.13)$$

Ce potentiel est valable dans le cas des molécules polaires.

Si  $\delta = 0$  le potentiel de Stockmayer se réduit au potentiel de Lennard-Jones.

##### **IV-6-1-3 Potentiels de Morse :**

Pour représenter une collision entre particules neutres, le potentiel de Morse est le plus souvent utilisé dans la littérature après le potentiel de Lennard-Jones [12].

Le potentiel de Morse se met sous la forme [12] :

$$\phi(r) = C_0 [1 - e^{-B(r-r_m)}]^2. \quad (IV.14)$$

$C_0$  : La profondeur de puits de potentiel.

$r$  : La distance interparticule.

$r_m$  : La distance interparticule correspondant à l'équilibre (minimum de potentiel)

#### IV-6-1-4 Potentiel de Buckingham :

Le potentiel de Buckingham est un potentiel simple admettant des tables d'intégrales où la contribution répulsive est approximé par un terme exponentiel [12] [22]:

$$\phi(r) = \frac{c_0}{\alpha-6} \left[ 6 - e^{-\left(\alpha \frac{ar}{r_m}\right)} - \alpha \left(\frac{r}{r_m}\right)^6 \right]. \quad (IV.15)$$

#### IV-6-1-5 Potentiel de Sutherland :

Le potentiel de Sutherland est décrit par la formule suivante [19]:

$$\phi(r) = \begin{cases} \infty & \text{si } r < \sigma \\ -\varepsilon \left(\frac{\sigma}{r}\right)^n & \text{si } r > \sigma \end{cases} \quad (IV.16)$$

$n$  : L'indice d'attraction.

$\varepsilon$  : L'énergie maximale de l'attraction.

Pour  $n = 6$  , on retrouve les interactions de Van der Walls.

#### IV-6-1-6 Potentiel de Hulbrut-Hirschfelder :

La forme réduite de potentiels de Hulbrut-Hirschfelder est donné par la formule suivante [17]:

$$\phi_{HH}(r) = \varepsilon \left[ e^{-2\alpha\left(\frac{r}{\sigma d}-1\right)} - 2e^{-\alpha\left(\frac{r}{\sigma d}-1\right)} + \beta \left[\frac{r}{d\sigma} - 1\right]^3 \left(1 - \gamma \left[\frac{r}{d\sigma} - 1\right]\right) e^{-2\alpha\left(\frac{r}{d\sigma}-1\right)} \right] \quad (IV.17)$$

$r$  : La distance interatomique.

$\sigma$  : La distance interatomique pour laquelle  $\phi_{HH}(\sigma) = 0$  .

$\alpha, \beta$  et  $\gamma$  : Des constantes déterminées par les constantes spectroscopiques.

#### **IV-6-2 Les interactions ion-neutre :**

Pour ce type d'interaction, on considère deux processus : le transfert de charge et les collisions élastiques [22].

##### **IV-6-2-1 Le transfert de charge :**

Le type de collisions ( $B - B^+$ ) ne résulte pas d'une collision élastique tel que dans ce type de collision la section efficace relative au transfert de charge est très importante donc il s'agit d'un transfert de charge, on peut dire que ce type est un processus inélastique [17] [22].

##### **IV-6-2-2 Les collisions élastiques :**

###### **IV-6-2-2-1 Potentiel de polarisation :**

Le potentiel de polarisation caractérise une collision entre une particule neutre et une particule chargée autre que l'électron, il est décrit comme [12]:

$$\phi(r) = -\frac{\epsilon_B(Z_A e)^2}{2r^4}. \quad (IV.18)$$

$r$  : La distance entre deux particules.

$\epsilon_B$  : La polarisabilité de la particule neutre.

$Z_A$  : Le nombre de charges élémentaires des particules chargées

Un champ est créé par l'ion  $B^+$  qui polarise la particule neutre A, le champ électrique de polarisation interagit avec l'ion suivant d'un potentiel de polarisation [22].

###### **IV-6-2-2-2 Potentiel de puissance :**

Le potentiel de puissance est de la forme [21]:

$$\phi(r) = dr^{-6}. \quad (IV.19)$$

Ce potentiel est utilisé pour des régions attractives et répulsives [21].

#### **IV-6-2-2-3 Potentiel exponentiel :**

Ce potentiel qui peut être du type attractif ou répulsif, il est de la forme [21]:

$$\phi(r) = \pm \phi_0 e^{-Br}. \quad (IV.20)$$

#### **IV-6-3 Les interactions électron-neutre :**

Dans ce type, les potentiels des interactions ne sont pas simples. Il est traité par la mécanique quantique. Le calcul des intégrales de collision est par une intégration numérique après le passage par les sections efficaces des collisions élastiques [21].

#### **IV-6-4 Les interactions chargé-chargé :**

##### **IV-6-4-1 Potentiel Coulombien écranté :**

Dans un plasma, les particules chargées génèrent un potentiel Coulombien écranté [17]:

$$\phi(r) = \pm \left( \frac{Z_i Z_j e^2}{4 r} \right) e^{\left( -\frac{r}{\lambda_D} \right)} \quad (IV.21)$$

$e$  : La charge élémentaire.

$Z_i Z_j$  : Les nombres de charges des deux particules  $i$  et  $j$ .

$\lambda_D$  : La longueur d'onde de Debye.

#### **IV-7 Résultats et discussion**

Les coefficients de transport sont calculés en utilisant un logiciel [T&TWinner](#) développé par l'université de Limoges :

##### **IV-7-1 Conductivité thermique :**

Sur la figure *IV-1*, nous présentons les différentes contributions de la conductivité en fonction de la température pour un plasma formé de mélange AR-H<sub>2</sub>-Cu. On peut définir quatre zones de température pour lesquelles la conductivité thermique totale change de comportement :

- Une première zone comprise entre 300K et 5000K montre un important pic de conductivité thermique. Les phénomènes responsables d'un tel pic sont donc les interactions entre particules lourdes qui sont les espèces neutres (Ar, H<sub>2</sub> et Cu) et aussi les réactions qui se produisent (dissociation de H<sub>2</sub>).
- Une seconde zone comprise entre 5000K et 10000K montre une légère augmentation de la conductivité thermique suivant le pourcentage de cuivre considéré. Nous savons que l'ionisation du cuivre est le phénomène principal pour ces températures.
- Une troisième zone comprise entre 10000K et 17000K montre une augmentation de  $\kappa_{\text{Tot}}$ . Pour ces températures, le rôle des atomes neutres et des molécules diminue devant l'apparition croissante d'ions et d'électrons. Par conséquent, la conductivité thermique de translation des lourds devient petit à petit négligeable devant la conductivité thermique de translation des électrons et la conductivité thermique de réaction. L'augmentation de  $\kappa_{\text{Tot}}$  résulte donc des différentes interactions entre électrons, ions et neutres.
- Enfin, la dernière zone comprise entre 17000K et 25000K tient compte uniquement des collisions entre particules ionisées majoritaires dans notre plasma.

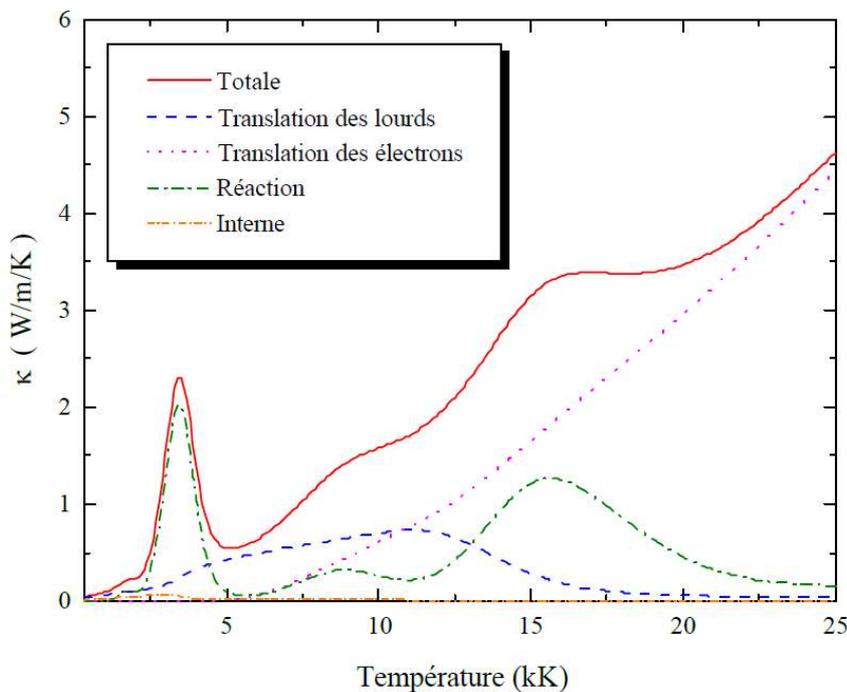


Fig. IV-1: Conductivité thermique pour le mélange 50%Ar-20%H<sub>2</sub>-30%Cu

#### IV-7-2 Conductivité électrique :

La conductivité électrique augmente rapidement avec la température avec l'ionisation du gaz et surtout grâce à la présence des électrons. À cause de leur faible potentiel d'ionisation, le cuivre est ionisé dès les faibles températures, l'augmentation du pourcentage de Cu conduit à une augmentation de la conductivité électrique du mélange. Lorsque  $T$  est supérieure à 15000 K, la conductivité augmente légèrement et la présence du cuivre n'a plus d'influence sur  $\sigma$ .

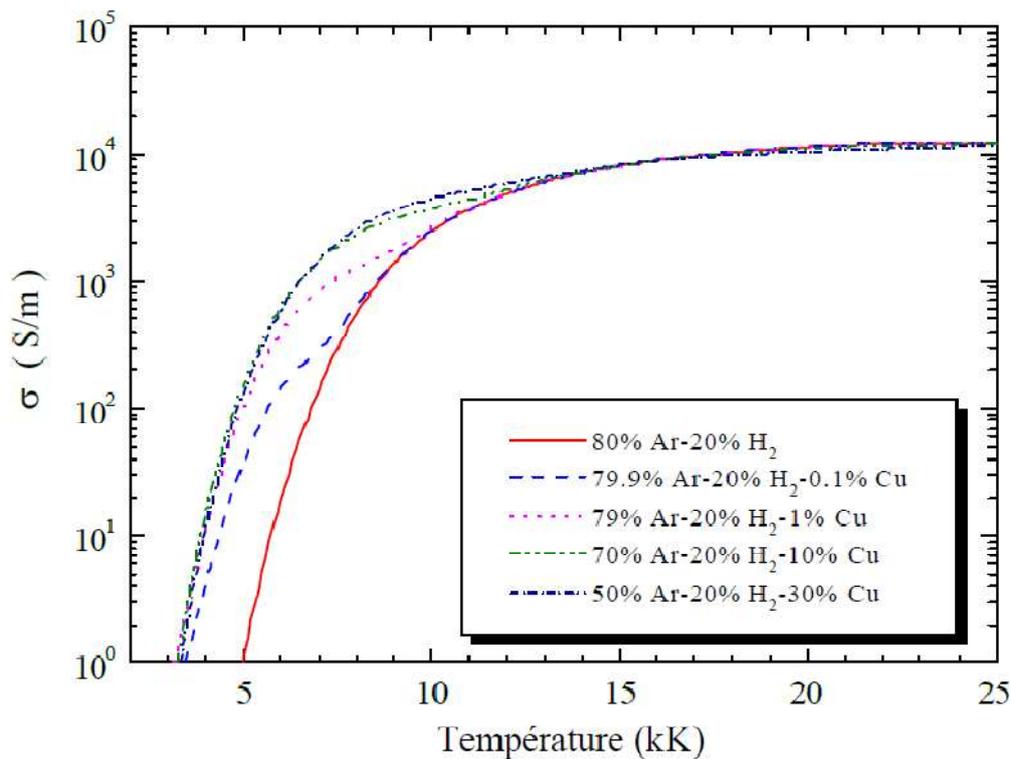


Fig. IV-2 : Conductivité électrique pour divers mélanges.

#### IV-7-3 Viscosité :

Nous avons représenté sur la figure IV-3 les résultats obtenus pour la viscosité des trois gaz purs et de quelques mélanges ternaires. Nous savons que la viscosité dépend essentiellement des particules lourdes.

Lorsque la température augmente, la viscosité du plasma est contrôlée dans un premier temps par les interactions entre particules neutres et moléculaires puis entre particules neutres uniquement lorsque les molécules se sont dissociées et finalement entre les

particules chargées pour des températures plus élevées. Cette grandeur qu'est la viscosité reflète donc la transition d'un milieu complètement neutre vers un milieu ionisé. Quand les ions deviennent majoritaires dans le plasma à cause des différentes ionisations ( $\sim 10500\text{K}$  pour l'argon et l'hydrogène,  $7000\text{K}$  pour le cuivre), la viscosité décroît avec l'accroissement de la température.

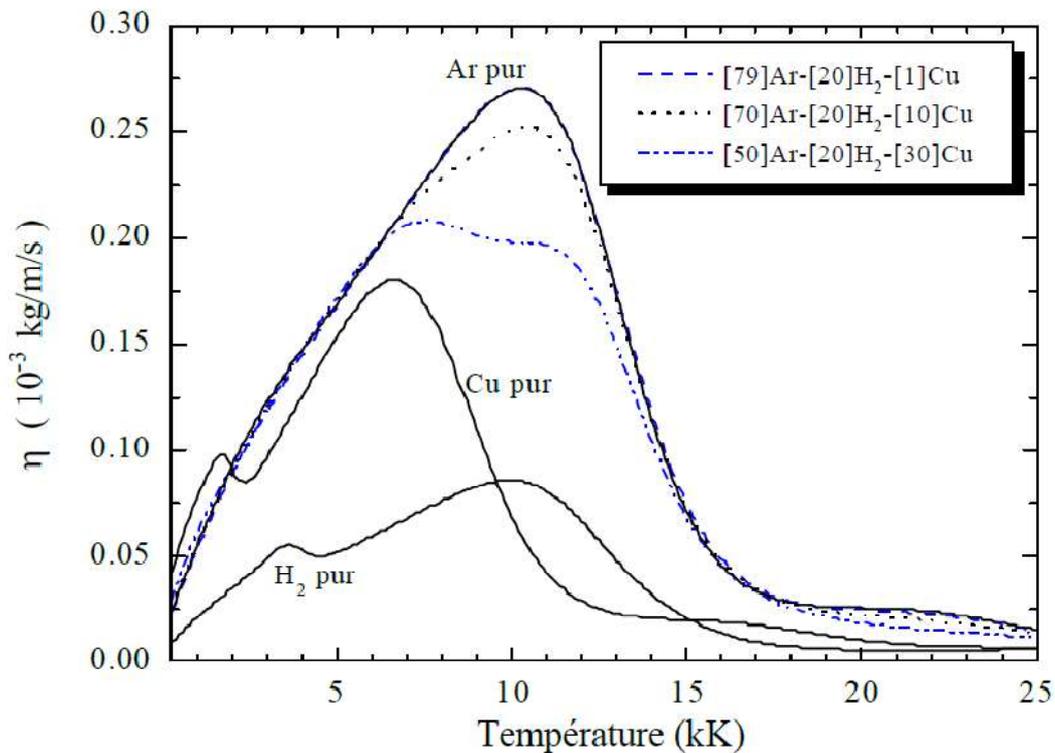


Fig. IV-3 : Viscosité d'un plasma Ar/H<sub>2</sub>/Cu

#### IV-7-4 Choix du potentiel d'interaction:

La première remarque qui peut être tirée des deux tableaux est que le choix du potentiel est très important dans le calcul des coefficients de transport, étant donné l'écart qui existe entre deux choix de potentiels différents. Le potentiel de Lennard-Jones est celui qui se rapproche le plus des résultats trouvés dans la littérature, ce qui est logique puisque la majorité des auteurs utilisent également le potentiel de Lennard-Jones.

T(K)	Lennard-Jones			Buckingham			Écart relatif		
	$\eta$ ( $\mu Pa.s$ )	$\lambda$ ( $10^{-3}W/m.K$ )	$D$ ( $10^{-4}m^2/s$ )	$\eta$ ( $\mu Pa.s$ )	$\lambda$ ( $10^{-3}W/m.K$ )	$D$ ( $10^{-4}m^2/s$ )	$\delta_\eta$ (%)	$\delta_\lambda$ (%)	$\delta_D$ (%)
200	15.26	118.86	0.8407	14.83	115.50	0.8516	2.86	2.86	1.29
300	19.83	154.47	1.6451	19.75	153.82	1.7171	0.42	0.42	4.28
400	23.89	186.08	2.6483	24.27	189.05	2.8322	1.59	1.59	6.71
500	27.61	215.05	3.8316	28.54	222.29	4.1837	3.31	3.31	8.78
600	31.08	242.09	5.1818	32.62	254.08	5.7624	4.83	4.83	10.61
700	34.36	267.63	6.6889	36.56	284.78	7.5620	6.21	6.21	12.25
800	37.48	291.95	8.3450	40.39	314.60	9.5774	7.47	7.47	13.75
900	40.47	315.26	10.1433	44.12	343.70	11.8046	8.63	8.63	15.14
1000	43.35	337.70	12.0785	47.78	372.21	14.2406	9.72	9.72	16.43
5000	124.71	971.49	174.7468	174.92	1362.56	276.6968	33.51	33.51	45.17
10000	196.56	1531.13	551.0478	367.53	2862.97	1213.1506	60.62	60.62	75.06

Table IV.1 Coefficients de transport de helium en fonction de la température, obtenus à partir du potentiel de Lennard-Jones et du potentiel de Buckingham.

T(K)	Lennard-Jones			Buckingham			Écart relatif		
	$\eta$ ( $\mu Pa.s$ )	$\lambda$ ( $10^{-3}W/m.K$ )	$D$ ( $10^{-4}m^2/s$ )	$\eta$ ( $\mu Pa.s$ )	$\lambda$ ( $10^{-3}W/m.K$ )	$D$ ( $10^{-4}m^2/s$ )	$\delta_\eta$ (%)	$\delta_\lambda$ (%)	$\delta_D$ (%)
200	15.77	12.31	0.0847	15.29	11.94	0.0772	3.10	3.10	9.26
300	22.52	17.58	0.1818	22.20	17.32	0.1736	1.45	1.45	4.61
400	28.37	22.14	0.3059	28.10	21.93	0.2983	0.96	0.96	2.50
500	33.59	26.21	0.4534	33.29	25.98	0.4471	0.88	0.88	1.40
600	38.33	29.92	0.6221	37.99	29.65	0.6175	0.89	0.89	0.74
700	42.73	33.35	0.8105	42.35	33.05	0.8082	0.90	0.90	0.29
800	46.85	36.56	1.0175	46.44	36.24	1.0181	0.88	0.88	0.06
900	50.75	39.61	1.2420	50.32	39.28	1.2463	0.84	0.84	0.35
1000	54.47	42.51	1.4834	54.04	42.18	1.4923	0.78	0.78	0.59
5000	155.13	121.08	21.5214	159.93	124.82	22.8707	3.05	3.05	6.08
10000	243.29	189.88	67.8034	258.87	202.05	74.9342	6.21	6.21	9.99

Table IV.2 Coefficients de transport de l'argon en fonction de la température, obtenus à partir du potentiel de Lennard-Jones et du potentiel de Buckingham.

## Conclusion

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous avons donné généralités sur les plasmas thermiques, nous avons vu que la plupart des applications industrielles du plasma (découpage, soudage, dépollution, etc.) dépendent ses propriétés de transport.

Dans le deuxième chapitre, on a abordé l'équation de Boltzmann au cours de la théorie cinétique des gaz et nous avons défini les phénomènes de transports .Nous avons montré que la distribution de vitesses de Maxwell est une solution de l'équation de Boltzmann à l'équilibre puis nous avons établi le terme de collisions de l'équation de Boltzmann.

Nous avons présenté aussi les phénomènes de transport tel que l'apparition d'un courant de particules, d'une pression, d'un flux de chaleur ou d'un courant électrique résulte de la présence d'un gradient de concentration, de vitesse, de température ou de potentiel .Ces phénomènes de transport sont caractérisés par des facteurs de proportionnalité appelés coefficients de transport .

La résolution de l'équation de Boltzmann par la méthode de Chapman-Enskog était le but du troisième chapitre. Nous avons traité la théorie de Chapman-Enskog dans le cas d'un gaz pur monoatomique, après nous avons donné des formules de coefficients de transport (viscosité, diffusion, conductivité électrique et conductivité thermique) qui fait apparaître les intégrales de collisions.

Le quatrième chapitre a l'objectif de présenter les intégrales de collisions et les différents potentiels d'interaction, ce qui nous montre l'influence d'interaction inter-particules sur les coefficients de transport tel que les différentes valeurs de potentiels d'interactions produit différentes valeurs des intégrales de collisions donc ces nouvelles valeurs modifient les propriétés de transport.

## *Bibliographies:*

- [1] Bahri Miloud, Benzahi Hamza, « Simulation d'un plasma thermique couplé par induction », Université kasdimerbah Ouargla (2016).
- [2] M.I. Boulos, P. Fauchais, E. Pfender, *Thermal Plasmas, Fundamental and Applications*, Plenum Press-New York and London, Volume 1, 1994.
- [3] Sneha Samal, « Thermal Plasma Processing of Ilmenite », Springer Breifs in Applied Sciences and Technology (2018).
- [4] M.F. Zhukov, I.M. Zasytkin, « thermal plasma torches: design, Characteristic, Application », Cambridge International Science Publishing (2007).
- [5] Naval Studies Board, « Plasma Processing and Processing Science », National Academy of Seinesces, NRL Strategic Series (1995).
- [4] R Benocci , G Bonizzoni , E Sindoni , « Thermal plasmas for Hazardous, Wastetreatment », Word Sientific (1996).
- [7] J. Erin, D. Morvan, J. Amouroux, « Optimisation des conditions de fonctionnement d'un pilote plasma de 25kW pour la purification du silicium » (1995).
- [8] M Baev, D Uhrland, M S Beniloand M D Cunh, « Comparing two non-equilibrium approaches to modeling of a free-burning arc ».
- [9] Sneha Samal, « Thermal plasma technology: the prospective future in material processing », University of Rennes 1, France (2017).
- [10] J P Trelles, J V R Heberlein, and E Pfender, « Non-equilibrium modeling of arc plasma torches » Department of Mechanical Engineering, University of Minnesota, Minneapoli .
- [11] Zo Alain RANARIJAONA, « étude des écarts à l'équilibre thermique dans les plasmas d'arc » , Université Toulouse III Paul Sabatier (mardi 27 septembre 2011).
- [12] hinganahugess, « contribution à l'étude des propriétés des plasmas à deux température Application à l'argon et l'air », Université Toulouse III Paul Sabatier (2010).
- [13] Gilberto, « Kremeran Introduction to the Boltzmann Equation and Transport Processes in Gases », Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2010).
- [14] Jos Uffink, « Compendium of the foundations of classical statistical physics », Institute for History and Foundations of Science », University Utrecht (2006).

- [15] DavidTong,«Kinetic Theory University of Cambridge Graduate Course », Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics (2012).
- [16] Maher I. Boulos, Pierre L. Fauchais, and Emil Pfender, «Handbook of Thermal Plasmas »(2015).
- [17] Mme Bendjebbar née BahlouliFatna, « modélisation hydrodynamique d'une torche à plasma couplée inductivement » université blaise pascal (2013).
- [18] Benjamin CHERVY, « Calcul des propriétés de transport et étude du pouvoir de coupure des mélanges Hexafluorure de soufre (SF<sub>6</sub>)-Fluorure de carbone (CF<sub>4</sub> ou C<sub>2</sub>F<sub>6</sub>) et Hexafluorure de soufre -vapeurs de cuivre » (1993).
- [19] Ali Mahfouf, « Calcul des coefficients de transport dans des plasmas hors de l'équilibre », Université Blaise Pascal(2016).
- [20] Yann Cressault,«propriétés des plasmas thermiques dans des mélanges argon-hydrogène-cuivre », (2008).
- [21] Kagoné Abdoul Karim, « caractérisation théorique de plasmas thermiques d'arc électrique de mélanges d'air et de vapeur d'eau : application au disjoncteur basse et moyenne tension »,l'Université de Ouagadougou (2012).
- [22] Daniel Arovas, «Lecture Notes on Nonequilibrium Statistical Physics (A Work in Progress)», Department of Physics University of California, San Diego (July 19, 2017)
- [23]: Bernard Jones,« Kinetic theory studies the motion of systems of interacting particles at a statistical level»,(2017).
- [24] Christian Ngô, Hélène Ngô, « Physique statistique, Cours et exercices corrigés»,3 ème édition. Sciences sup. Dunod, (2007).
- [25] S. Chapman and T.G. Cowling, «The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases», Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, (1970).
- [26] Jakobsen H, A,« Chemical reactor modeling multiphase reactive flows» (2008).
- [27] Gilberto Medeiros Kremer, «The Methods of Chapman-Enskog and Grad and Applications Gilberto Medeiros Kremer »Department de Physical Universidad Federal do Parana
- [28] Lynda Oussaid,«Calcul des coefficients de transport d'un plasma thermique par la méthode de Chapman-Enskog, application au PA66 », université mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou (2011).

[29] Edward A. Mason,t, «Transport Properties of Gases Obeying a Modified, Buckingham (Exp-Six) Potential »,Naval Research Laboratory, Department of Chemistry, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin (1953).

[30] D. Bruno, C. Catalfamo, A. Laricchiuta, D. Giordano, and M. Capitelli,«Convergence of Chapman-Enskog calculation of transport coefficients of magnetized Argon plasma», (2006)

[31] Jacques Aubreton, Pierre Fauchais,« Influence des potentiels d'interaction sur les propriétés de transport des plasmas thermiques : exemple d'application le plasma argon hydrogène à la pression atmosphérique» RevuePhys. Appl.18 (1983)51-66(1983).

[32] R. S. Deveto. «Transport coefficients of partially ionized argon. Physics of Fluids», Volume 10:354–364, (1967).

[33] Edward L. Kane, «COMPARISON OF ARGON AND URANIUM PLASMATRANSPORT PROPERTY SOLUTIONS» Plasma Physics Conference,(12-14 February, 1973).

[34] Garcia-Cohn,L.S,Green,M. S., Chaos,F, «the Chapman-Enskog solution of the generalized Boltzmann equation», Physic 32 ,450-478 (1966).

**Résumé :** Les phénomènes de transport apparaissent dans un milieu en déséquilibre présentant un gradient de certaine grandeur physique. Ce gradient conduit à un transport ou un flux tendant à ramener le système vers un état d'équilibre. Ce flux est proportionnel au gradient qui le provoque .Le paramètre de transport est le coefficient de proportionnalité.

Le calcul des coefficients de transport s'appuie sur la résolution de l'équation de Boltzmann et l'évaluation du terme de collision. Malheureusement la connaissance de la fonction de distribution est impossible. La méthode de Chapman-Enskog est une approximation consistant à définir la solution sous la forme d'un développement de fonctions de distribution autour de la distribution de Maxwell-Boltzmann et le terme d'ordre un permet de déterminer l'expression des flux de chaleur et de quantité de mouvement et celle des coefficients de transport à partir des potentiels d'interaction.

**Mots clés :** Phénomènes de transport -Equation de Boltzmann- terme de collision - potentiels d'interaction.

**Abstract:** Transport phenomena appear in an unbalanced medium with a gradient of some physical quantity. This gradient leads to a transport or flow tending to return to a state of equilibrium. This gradient is proportional to the gradient that caused it. The transport parameter is the coefficient of proportionality.

The calculation of the transport coefficients is based on the resolution of the Boltzmann equation and the evaluation of the collision term. Unfortunately knowledge of the distribution function is impossible. The Chapman-Enskog method is an approximation which consists to define the solution in the form of a development of distribution functions around the Maxwell-Boltzmann distribution and the term of order one which determines the expression of the heat flux and momentum and transport coefficients from the interaction potentials.

**Key words:** Transport phenomena - Boltzmann equation - the collision term - interaction potentials.

**ملخص:** ظواهر النقل تظهر في وسط غير متوازن يتضمن تدرجا لبعض الكميات الفيزيائية مما ينتج عنه حدوث تدفق لهذه الكميات بغية الرجوع إلى حالة التوازن حيث أن هذا التدفق يتناسب مع التدرج للكم الفيزيائي و عامل التناسبية يسمى عامل النقل.

يعتمد حساب معاملات النقل على حل معادلة بولتزمان و تقييم مدة التصادم. و لكن مع الأسف لا يمكن معرفة حل هذه المعادلة منهجية شابمان- أونسكونغ هي طريقة تعطي حلا تقريبا لمعادلة بولتزمان على شكل إعطاء قيم تقريبية من الدالة التوزيعية لماكسويل بولتزمان في الحدود الأولى للسلسلة التقريبية و بالتالي نستطيع حساب عوامل النقل انطلاقا من عبارات التدفق باستعمال الحل التقريبي للمعادلة و توترات التفاعل بين مكونات الوسط.

**الكلمات المفتاحية :** ظواهر النقل - معادلة بولتزمان - مدة التصادم - و توترات التفاعل .

