

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد- تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd- Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



THESE

Présentée pour l'obtention du **grade** de **DOCTORAT EN SCIENCE**

En : Génie Mécanique

Spécialité : Génie Mécanique

Par : MESSAOUDI Khalid

Sujet

**IMPLEMENTATION DES LOIS DE COMPORTEMENT DES MATERIAUX
GRADUELS (FGMS) DANS UN CODE DE CALCUL**

Soutenue publiquement, le 22/11/2018 , devant le jury composé de :

Mr. CHEIKH Abdelmadjid	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
Mr. BOUKHALFA Abdelkarim	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de thèse
Mr. BELDJELILI Youcef	MCA	Univ. SBA	Co- Directeur de thèse
Mr. TOUNSI Abdelouahed	Professeur	Univ. SBA	Examineur
Mr. BELALIA S. Ahmed	Professeur	Univ. Tlemcen	Examineur
Mr. AMIRAT Mohamed	MCA	C. Univ Ain Témouchent	Examineur

Année Universitaire : 2017-2018

REMERCIEMENTS

Avant d'entamer mon travail, je tiens à remercier ALAH de m'avoir donné du courage et de la volonté pour continuer le travail. Je tiens à remercier tout d'abord et particulièrement Mr BOUKHALFA Abdelkrim et Mr BELDJELILI Youcef d'avoir acceptés l'encadrement de ce travail ainsi pour leurs directives et leurs soutiens moral tout ou long de la durée de mon travail.

Je m'adresse mes sincères remerciements à toute l'équipe du laboratoire Mécanique Computationnelle MECACOMP plus particulièrement : Mr Abderrahim HOUMAT Directeur du laboratoire

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur TOUNSI Abdelouahed, Professeur à l'Université DJELALI LIABES de Sidi Bel Abbés, qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Je remercie également tous les membres du jury, qui vont honorer par leur présence et leur jugement, la soutenance de cette thèse. Enfin, ma gratitude va à tous les enseignants qui ont contribué de près ou de loin à ma formation. Un remerciement spécial à mes chères collègues Abdelkarim BENSALAM, Mustapha MESKIN, Mourad MORSLI, Abdelaziz BERROUTI, Amrane KESBI, Sid Ahmed BELACHIR et Sid Ahmed MEZIOUD.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة الاهتزاز والانحناء تحت تأثير قوة جيبيّة لصفائح واسطوانات ذات مواد متدرجة وظيفيا، باستخدام برنامج جزئي محدد من قبل المستخدم UMAT وتطبيقها على برنامج ABAQUS. يتم حساب الانتقالات والاجهادات في اماكن محددة لصفحة معدنية ذات خاصية واحدة للتأكد من دقة البرنامج الجزئي UMAT.

خصائص الصفحة المستعملة في هذه الدراسة تتغير في الاتجاه العرضي بواسطة القوانين المزج المتمثلة في S-FGM, E-FGM, P-FGM في حين نعتبر معامل Poisson ثابت. النتائج المتحصل عليها في هذه الدراسة تم مقارنتها مع تلك النتائج المعروفة مسبقا في البحوث العلمية حيث نجد تقارب بين النتائج مما يبين دقة وكفاءة الطريقة المستعملة مع تغيرات في قيمة القوة (الأس) للقانون المستعمل في الدراسة.

الكلمات المفتاحية: المواد المتدرجة وظيفيا (FGMs)، قانون القوة P-FGM، القانون الأسّي E-FGM، القانون السني

S-FGM، القوة الجيبية، طريقة العناصر المنتهية، الاجهادات، الانتقالات.

RESUME

L'objectif de ce travail est l'étude de la vibration libre et la flexion sous un chargement sinusoïdale d'une structure (plaque, panneau cylindrique) en Matériaux à Gradient Fonctionnel (FGM). Après avoir étudié la convergence et la validation du sous-programme MATériaux défini par l'Utilisateur (UMAT) implémenté dans le code de calcul ABAQUS, Le calcul des déplacements et les contraintes dans des endroits bien définies pour un matériau isotrope confirme la fiabilité de l'UMAT.

Les propriétés des structures utilisées dans cette étude changent sous les lois de mélange (P-FGM, E-FGM, S-FGM), alors nous considérons que le coefficient de poisson reste constant. Les résultats obtenus dans cette étude ont été comparés avec ceux précédemment présentés dans la littérature, où nous trouvons une convergence entre les résultats, indiquant la précision et l'efficacité de la méthode utilisée pour différentes valeurs de l'indice de la loi utilisée dans le présent travail.

Mots Clés : Matériaux à Gradient Fonctionnel (FGMs), Loi de Puissance P-FGM, loi exponentielle E-FGM, loi sigmoïde S-FGM, chargement sinusoïdal, Méthode des Eléments Finis, Contraintes, Déplacements.

ABSTRACT

The purpose of the present work is to study the free vibration and the bending Functionally Graded Material (FGM) structure (Plate, Cylindrical panel) under a sinusoidal, after studying the convergence and validation of the subroutine UMAT which is implemented on the finite element software ABAQUS. The computation of the displacements and the stresses at defined corner for an isotropic material confirm the reliability of the UMAT.

The properties of the structures used in this study change under the mixing laws P-FGM, E-FGM and S-FGM, the Poisson's ratio is kept constant. The results obtained compared to those available in the literature show the convergence, the exactitude and the efficiency of the method used with various power index of the materials.

Keywords: Functionally Graded Materials (FGM), Power Law P-FGM, exponential law E-FGM, sigmoid Law S-FGM, Sinusoidal load, Finite Element Method, Stresses, Displacement.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE.....	1
I.1. HISTORIQUE DES LIAISONS METAL-CERAMIQUE.....	5
I.2. TECHNIQUE D’ELABORATION DES FGMs	5
I.3. METHODES DE MISE EN FORME PAR VOIE CHIMIQUE	6
I.3.1. La coulée par centrifugation.....	7
I.3.2. La sédimentation.....	8
I.4. METHODES DE MISE EN FORME PAR VOIE PHYSIQUE.....	9
I.4.1. Dépôt par projection thermique	9
I.4.2. Dépôt en phase vapeur	11
I.4.3. La métallurgie des poudres	13
I.5. LES DIFFERENTES LOIS QUI REGISSENT LA VARIATION DES PROPRIETES MATERIELLES SUIVANT L’EPAISSEUR D’UNE POUTREFGM..	15
I.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM [3].....	16
I.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM [3].....	17
I.5.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM [3]	18
I.5.4. Loi de mélange	18
I.5.5. Loi de comportement	22
I.5.5.1. Matériau anisotrope	22
I.5.5.2. Matériau monoclinique	22
I.5.5.3. Matériau orthotrope	23
I.5.5.4. Matériau transversalement isotrope.....	24
I.5.5.5. Matériau unidirectionnel (isotropie transverse)	24
I.6. DOMAINES D’APPLICATIONS DES MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUES	25

I.6.1. Domaines d’application Des FGMs	25
I.6.1.1. Aéronautique	25
I.6.1.2. Électronique et optique	25
I.6.1.3. Biomatériaux	25
I.6.1.4. Industrie.....	26
I.6.1.5. Structure	26
I.6.2. Avantages et inconvénients des matériaux FGMs	26
I.6.3. L’intérêt d'utilisation des FGM	27
I.6.4. La Résistance A L'usure Des FGM	27
I.7. CONCLUSION	29
II.1. EVOLUTION DES THEORIES AUX ELEMENTS FINIS POUR LA MODELISATION COMPOSITES	30
II.2. SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES MODELES DE STRUTURES MULTIIOUHES.	32
II.2.1. Approche monocouche équivalente	33
II.2.1.1. Les principaux modèles bases sur cette approche.....	34
II.2.2. Approche par couche	38
II.2.3. Les modèles Zig-Zag	38
II.2.4. Les modèles à couches discrètes	39
II.2.5. Approche par développement asymptotique.....	42
II.2.6. Facteur de correction du CT	42
II.2.7. Modèles élément finis pour les structures isotopes et multicouches	44
II.2.7.1. Approche géométrique.....	44
II.2.7.1.1. Approche par facette plane.....	44
II.2.7.1.2. Approche curviligne	44

II.2.7.1.3. Approche Cartésienne.....	45
II.2.8. Modèles éléments finis de plaque et des coques composites	45
II.2.8.1. Eléments finis sur la théorie du premier ordre (FSDT : First Order Shear Deformation Theory) :	46
II.2.8.2. Elément finis basés sur la théorie d'ordre supérieur	48
II.3. CONCLUSION	49
III.1. INTRODUCTION	50
III.2. PRESENTATION DU CODE ABAQUS	50
III.2.1. ABAQUS/Standard	50
III.2.2. ABAQUS/Explicit.....	50
III.2.3. ABAQUS/CAE	51
III.2.4. Procédure de traitement des problèmes sous ABAQUS.....	51
III.2.4.1. Différents fichiers pour la simulation sous Abaqus.....	51
III.2.5. Schémas de résolution.....	52
III.2.5.1. Procédure « static »	52
III.2.5.2. Procédure « explicit dynamic ».....	53
III.2.5.3. Procédure de « mass-diffusion ».....	53
III.2.5.4. Procédure « uncoupled heat transfer »	53
III.2.5.5. Procédure « temp-diplacement ».....	53
III.2.6. Développement des procédures utilisateurs	53
III.3. RESOLUTION D'UN PROBLEME PAR ELEMENTS FINIS SUR ABAQUS .	56
III.3.1. Forme de la solution sur un élément finis (EF)	56
III.3.2. Intégration numérique	58
III.3.3. Problème mécanique	59
III.3.4. Formulation faible [128].....	59

III.3.5. Discrétisation en éléments finis	60
III.3.6. Résolution	63
III.4. PRESENTATION DE LA PROCEDURE UMAT	63
III.4.1. Élément fini utilisé dans cette implémentation.....	64
III.4.1.1. Formulation.....	65
III.4.1.1.1. Energie cinétique.....	65
III.4.1.1.2. Energie de déformation	65
III.4.1.1.3. Déplacement.....	65
III.4.1.1.4. Déformations.....	65
III.4.1.1.5. Contraintes	66
III.4.1.1.6. Etude dynamique (théorie de vibration).....	67
III.5. CONCLUSION.....	70
IV.1. INTRODUCTION	71
IV.2. STRATEGIE ET MISE EN ŒUVRE DE L'IMPLEMENTATION	71
IV.2.1. Formulation	72
IV.2.2. Étude de la convergence.....	73
IV.2.3. Validation	74
IV.2.4. Résultats et discussions	75
IV.2.4.1. Premier cas.....	75
IV.2.4.2. Deuxième cas	78
IV.2.4.3. Troisième cas	80
IV.2.4.4. Quatrième cas	81
IV.3. ETUDE DE LA VARIATION DES CONTRAINTES AVEC LES LOIS E-FGM ET S-FGM.....	81
IV.3.1. UMAT avec la loi « E-FGM ».....	82

TABLE DES MATIERES

IV.3.2. UMAT avec la loi « S-FGM ».....	84
IV.4. CONCLUSION.....	87
CONCLUSION GENERALE & PERSPECTIVE.....	89

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure I.1 : Configuration de la variation des FGMs.....	6
Figure I.2 : Schéma de principe de la centrifugation horizontale [49]	7
Figure I.3 : Schéma de principe de la sédimentation [10]	8
Figure I.4 : Schéma de principe de la projection thermique par flamme [11]	9
Figure I.5 : Schéma de principe de la projection thermique par arc électrique [11].	10
Figure I.6 : Schéma de principe de la projection par plasma [11]	10
Figure I.7 : Schéma de principe de la projection thermique à froid [11]	11
Figure I.8 : Schéma de principe de la déposition en phase vapeur [17]	12
Figure I.9 : Principe de la déposition par voie chimique [18]	12
Figure I.10 : Phénomènes lors du frittage d'une poudre.....	14
Figure I.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	17
Figure I.12 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	17
Figure I.13 : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM.....	18
Figure. I.14 : Variations de la fraction volumique de la céramique avec différents modèles basés sur la distribution de loi de puissance.....	20
Figure I.15 : Trois couches de céramique et de métal FGM composite [58]	21
Figure I.16 : Matériau fibreux.....	23
Figure I.17 : Matériau unidirectionnel.....	24
Figure I.18 : Principaux domaines d'application des FGM.	28

CHAPITRE II

Figure II.1 : Approximation des contraintes de CT: constantes (théorie du premier ordre) et quadratiques (ordre supérieur) [64]	31
Figure II.2 : Distribution de CT σ_{xz} selon les trois théories.....	32
Figure II.3 : Cinématique de love-Kirchhoff.....	34
Figure II.4 : Cinématique de Reissner-Mindlin.....	36
Figure II.5 : Cinématique d'ordre supérieur.....	37
Figure II.6 : Champs de déplacement pour les deux catégories de modèles. Approche cinématique.....	39
Figure II.7 : champ de déplacement des modèles Zigzag du premier ordre.....	40
Figures II.8 : Champ de déplacement des modèles Zig-Zag d'ordre supérieur.....	40

Figure II.9 : Représentation des déplacements et des fonctions d'interpolation Lagrangienne globales utilisées dans la théorie LWT [150]	40
CHAPITRE III	
Figure III.1 : Schéma de résolution d'un problème par Abaqus.	52
Figure III.2 : flux des données de base et des actions depuis le début d'une analyse ABAQUS / Standard jusqu'à la fin d'une étape.....	54
Figure III.3 : Plus de détaillée sur comptabilité comment ABAQUS / Standard calcule la raideur de l'élément lors d'une itération.....	55
Figure III.4 : Exemple d'un maillage rectangulaire.....	56
Figure III.5 : Interpolation dans (a) un élément linéaire et (b) un élément quadratique.	57
Figure III.6 : Problème mécanique et les conditions aux limites.....	59
Figure III.7 : Familles d'éléments couramment utilisées.....	64
Figure III.8 : Élément brique de type C3D20.	65
Figure III.9 : Représentation de l'élément réel et l'élément de référence.....	69
CHAPITRE IV	
Figure IV.1 : Géométrie de la plaque en FGM.	72
Figure IV.2 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque P-FGM.....	73
Figure IV.3 : Étude de la convergence d'une plaque FGM simplement supportée sous une charge sinusoïdale $q_0 = 100\text{MPa}$	74
Figure IV.4 : Tracés de contour de la déflexion transversale \bar{W} de la plaque FGM simplement supportée pour $a/h = 10$, $n = 5$	76
Figure IV.5 : Tracés de contour pour la contrainte de cisaillement non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ de la plaque FGM simplement supportée pour $a/h = 10$, $n = 5$	76
Figure IV.6 : Profil des contraintes normales et de cisaillements donnés par UMAT utilisé à travers l'épaisseur de la plaque FGM.....	77
Figure IV.7 : Tracés de contour pour la contrainte pour distribution de $\bar{\tau}_{xy}$ dans le plan $Z = -h/3$	79
Figure IV.8 : Panneau cylindrique en FGM.....	80
Figure IV.9 : Variation de la contrainte normale σ_{xx} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique	82
Figure IV.10 : Variation de la contrainte normale σ_{yy} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique.....	82

Figure IV.11 : Variation de la contrainte normale σ_{zz} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique.....	83
Figure IV.12 : Variation de la contrainte tangentielle σ_{xy} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique	83
Figure IV.13 : Variation de la contrainte tangentielle σ_{xz} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique	84
Figure IV.14 : Variation de la contrainte tangentielle σ_{yz} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique	84
Figure IV.15 : Variation de la contrainte normale σ_{xx} en fonction z/h pour différents indices de puissance.....	85
Figure IV.16 : Variation de la contrainte normale σ_{yy} en fonction z/h pour différents indices de puissance.....	85
Figure IV.17 : Variation de la contrainte normale σ_{zz} en fonction z/h pour différents indices de puissance	86
Figure IV.18 : : Variation de la contrainte tangentielle σ_{xy} en fonction z/h pour différents indices de puissance.....	86
Figure IV.19 : Variation de la contrainte tangentielle σ_{xz} en fonction z/h pour différents indices de puissance.....	87
Figure IV.20 : Variation de la contrainte tangentielle σ_{yz} en fonction z/h pour différents indices de puissance.	87

LISTE DES TABLEAUX

Tableau III.1 : Procédures de calculs dans Abaqus.	52
Tableau III.2 : Synthèse pour l'utilisation des éléments [128]	58
Tableau III.3 : Quadrature de Gauss pour une fonction scalaire f intégrée sur [-1,1]	59
Tableau IV.1 : Propriétés des matériaux.....	72
Tableau IV.2 : Valeurs de la déflexion transversale non dimensionnelle \bar{W}	74
Tableau IV.3 : Déflexion transversale de la plaque FGM simplement supportée avec $a/h = 10$ et divers indices de la loi de puissance « n »	75
Tableau IV.4 : Contrainte de cisaillement Non-dimensionnelle τ d'une plaque FGM simplement supportée.....	75
Tableau IV.5 : Déflexion transversale Non-dimensionnelle τ pour des indices variables de la loi de puissance.....	78
Tableau IV.6 : Contraintes Non-dimensionnelle τ pour des indices variables de la loi de puissance.....	79
Tableau IV.7 : Déflexion transversale non dimensionnelle pour panneau cylindrique FGM soumis à des charges différentes	80
Tableau IV.8 : Fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{W} = wh\sqrt{\rho_c/E_c}$ de Al/Al_2O_3 d'une plaque carrée.....	81

LISTE DES SYMBOLES

$[\varepsilon]$: Tenseur de déformation
$[\sigma]$: Tenseur de contrainte
$[B]$: Matrice de relations entre les déplacements et les déformations relatifs
q_0	: Charge appliquée
E_m	: Module de Young du Métal
E_c	: Module de Young du Céramique
ν	: Coefficient de poisson
U_{xi}	: Déplacement des nœuds
P_i	: Propriété mécanique
λ, G	: Coefficient de Lamé
u_1^0	: Déplacement de membrane dans la direction $\alpha=1$ et 2
$w_{,x\alpha}$: Rotation due à la flexion (sans cisaillement)
w	: Déplacement transversal
ϕ_α	: Rotation de la normale au plan moyen dans le plan $x_\alpha x_3$ ($\alpha = 1, 2$).
$\gamma_1^0(w_{,x\alpha}, \phi_{,x\alpha})$: Déformation de τ mesurée sur le plan moyen.
U_{ct1} et \bar{U}_{ct2}	: Energies suivant l'axe x
U_{ct2} et \bar{U}_{ct2}	: Energie suivant l'axe y
\otimes	: Produit tensoriel
$\langle : \rangle$: Double contraction
δ_{ij}	: Symbole de Kroneker
\bar{U}	: Déplacement
$\delta \vec{U}$: Champ des déplacement virtuels
V_i	: Fraction volumique
i, j, k, l	: Indices latins prennent des valeurs 1, 2, 3
S_{xx}	: Contrainte normale $[\sigma_{xx}]$

LISTE DES SYMBOLES

S_{yy}	: Contrainte normale [σ_{yy}]
S_{zz}	: Contrainte normale [σ_{zz}]
S_{xy}	: Contrainte tangentiel [τ_{xy}]
S_{xz}	: Contrainte tangentiel [τ_{xz}]
S_{yz}	: Contrainte tangentiel [τ_{yz}]
U_3	: Déplacement suivant l'axe Z
[K]	: Matrice de rigidité
[N]	: Matrice d'interpolation
MEF	: Méthodes des éléments finis
C_{ijkl}	: Composantes de la matrice de comportement en élasticité linéaire
CT	: Cisaillement transversal
UMAT	: Matériaux défini par l'utilisateur (User Material)
E-FGM	: Loi exponentielle E-FGM
P-FGM	: Loi de Puissance P-FGM
S-FGM	: Loi sigmoïde S-FGM
RMPT	: Théorie des plaques de Reissner–Mindlin.
TOTR	: Théorie de troisième ordre de Reddy
SHODT	: Théorie simple d'ordre supérieur de la déformation
GSDT	: Théorie de la déformation généralisée
RPT	: Théorie raffinée des plaques
NHDM	: Nouveau modèle de déplacement hyperbolique
2D HODT	: 2D Théorie d'ordre supérieur de déformation
TOT / UMAT	: Théorie de troisième ordre de Reddy avec l'utilisation du subroutine UMAT
3D EF/UMAT	: Analyse tri-dimensionnelle par éléments finis avec l'utilisation du subroutine UMAT

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La modélisation numérique a fait des progrès considérables durant les vingt dernières années, suite à l'évolution continue de la puissance des calculateurs. Grâce à des algorithmes de plus en plus robustes, Comme la méthode des éléments finis qui peut traiter des problèmes non linéaires issus du comportement du matériau et de la géométrie des pièces.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude du comportement de notre matériau FGM par une analyse tri-dimensionnelles à l'aide d'un sous-programme définie par l'utilisateur. Permet de prendre en considération la variation continue des propriétés du matériau dans une direction. Les matériaux FGMs ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche, plusieurs théories sont présentées dans la littérature pour étudier les performances des plaques FGM en flexion. Théorie classique de plaques (CPT) basée sur l'hypothèse de Kirchhoff est imprécise pour obtenir la distribution du déplacement et les contraintes dans la plaque FGM, présentée par Aydogdu [1] [130] destiné à analyser la plaque FGM, Chakraverty et Pradhan [2] [131] ont utilisé la CPT pour traiter la vibration libre d'une plaque rectangulaire FGM avec des conditions aux limites générales. Une autre théorie utilisée pour traiter la flexion comme sollicitation c'est la théorie de premier ordre de déformation par cisaillement (FOST) dans laquelle la déformation par cisaillement transversal est supposée constante dans la direction de l'épaisseur et par conséquent le facteur de correction de cisaillement est nécessaire.

Quatre degrés de liberté pour l'analyse de la flexion et la vibration libre des plaques FG a été présenté par Thai et Choi [3] [132]. Avec une méthode locale de Petroves Galerkin Meshless (MLPG) et la théorie des plaques d'ordre supérieur de déformation normale et de cisaillement HOSNDPT), Gilhooley et al. [133] ont traité la déformation infinitésimale d'une plaque élastique FGM épaisse. Della Croce et Venini [134] ont mené une étude qui une relation avec le comportement d'une plaque rectangulaire FG en utilisant la loi simple de puissance et la théorie des plaques de Reissner-Mindlin.

Application d'un sous-programme UMAT sur Abaqus a également fait l'objet des travaux de recherches récentes, Lavate et Shiyekar [135] traitaient l'effet de la flexion régie par la loi de puissance sur des plaques FG utilisant le subroutine UMAT basé sur la théorie de Reddy [136] Third Order Théorie de la déformation (TOT), leur résultats ont été validés avec . Matsunaga [139], D'autres théories ont été mentionnées par Lavate et Shiyekar [135] pour calculer les contraintes et déplacement. Le flambage et la vibration de la plaque FGM sont traités par Thai et Choi [137], où la théorie utilisée explique la variation quadratique des contraintes de cisaillements transversales à travers l'épaisseur, et satisfait la zéro traction dans

les conditions aux limites sur le haut et le bas de la surface de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. Gouasmi et al. [138] ont utilisé aussi le sous-programme UMAT dont le but d'étudier la variation du facteur de concentration de contrainte dans différentes directions autour d'une encoche dans une plaque FGM.

La modélisation analytique en deux dimensions (2D) théorie de la déformation d'ordre supérieur (HODT) est utilisée par Matsunaga [139] pour évaluer les déplacements et les contraintes dans les plaques de FGM soumises à chargement thermique et mécanique. Plusieurs théories simples raffinées sont présentées par Ait Amar Meziane et al, Tounsi et al [140], Abdalnour et al. [141], Abdelaziz et al. [142], Menasria et al. [143], Bellifa et al. [144], Belabed et al. [145], Hamidi et al. [146], Bousahla et al. [147], Boukhari et al. [148], Houari et al. [149]). Ces théories sont utilisées par Boudierba et al. [150] pour étudier la stabilité thermique d'un sandwich fonctionnellement gradué par El-Haina et al. [151] pour le gauchissement thermique des plaques sandwich FG épaisses, par Bellifa et al. [152] et (Saidi et al., [153], Attia et al., [154]) pour les vibrations, par Boudierba et al. [155] pour la réponse thermomécanique en flexion des plaques épaisses de FGM reposant sur les fondations élastiques Winkler-Pasternak et par Zidi et al. [156] pour l'analyse des plaques FGM en flexion sous un chargement hygro-thermo-mécanique. Egalement, certains d'entre ces théories sont utilisées par Ait Yahia et al. [157] pour la propagation des ondes dans les plaques fonctionnellement graduées. Quelques théories présentées sont utilisées pour les structures à l'échelle nanométrique (Zemri et al [158], Besseghier et al [159], Khetir et al [160], Bouafia et al [161], Bounouara et al. [162], Mouffoki et al. [163], Larbi Chaht et al. [164], Belkorissat et al. [165]) et pour un échelle microscopique par Al-Basyouni et al. [166]. Bourada et al. [167] ont utilisé une théorie de l'ordre supérieur trigonométrique simple et raffinée (SRTHOT) pour étudier la flexion et la vibration des poutres en FG, pour lesquels ils ont rajouté le champ de déplacement à trois inconnues avec sa modélisation comme la théorie des poutres de Timoshenko.

Un nouveau modèle de déplacement hyperbolique (NHDHM) a fait l'objet de Benyoucef et al. [168] pour étudier la réponse statique des plaques en FG simplement supportées (FGP) sous une charge uniformément répartie et sinusoïdale, dans ce cas les facteurs de corrections transversale de cisaillement n'ont pas été introduits car une représentation correcte de la déformation et de cisaillement transversal a été donné. Zenkour [169] avait le même objectif avec Benyoucef et al. [168], mais il a concentré son étude sur la plaque de FGM rectangulaire, la théorie de cisaillement généralisée était la clé de cette étude basée sur l'application des

conditions aux limites sans traction sur les faces de la plaque. Kar et Panda [170] présentaient les solutions par éléments finis non linéaires la réponse de la flexion des panneaux sphériques en FG sous un environnement uniformément thermique, Le comportement géométrique statique non linéaire est étudié par Mehar et Panda [171] pour un nanotube de carbone fonctionnellement gradué renforcé par un panneau de coque à double courbure. Kar et Panda [172] examinaient le linéaire et Green-Lagrange du comportement non linéaire de la déformation géométrique d'un panneau à coque sphérique en FG, cylindrique, hyperbolique et elliptique [173] soumis à une charge thermomécanique et sous l'influence d'un champ thermique non linéaire par Mahapatra et al. [174]. La MEF est également utilisée pour analyser les composites, sandwichs et nanotubes en carbone d'une structure renforcée [175,276]). Dans les travaux cités, en général, la déformation à travers l'épaisseur est négligée et le champ de déplacement représente la théorie qui relie le déplacement des points loin de la surface moyenne avec ceux de cette dernière.

Dans ce travail, nous utilisons la méthode des éléments finis 3D implémentée dans le logiciel Abaqus [128] et nous décrivons un matériau défini par l'utilisateur à l'aide d'un sous-programme UMAT en FORTRAN [129], pour des structures en FGM. Après une étude de convergence et de validation pour tester notre sous-programme, nous utilisons notre sous-programme UMAT pour trouver le déplacement sous une charge sinusoïdale et la fréquence propre d'un panneau en FGM. Les conditions aux limites utilisées sont simplement supportées.

Donc, cette étude est scindée en quatre chapitres, précédés par une introduction générale et clôturés par une conclusion générale. Après avoir établi, dans le premier chapitre, une description générale sur les technologies destinées pour la fabrication des matériaux FGM. Ensuite, nous présenterons dans le deuxième chapitre une analyse bibliographique sur les approches existées dans la littérature traitent les matériaux composites, le troisième chapitre est réservé pour une description générale du code de calcul ABAQUS et ces procédures de traitement des problèmes notamment la procédure UMAT pour définir un comportement d'un matériau qui sera l'objectif de notre travail ainsi leur position dans le schéma de calcul. L'élément fini C3D20 présenté dans le logiciel ABAQUS est choisi comme élément référence pour atteindre l'objectif souligné, notons que d'autres codes de calcul est déjà utilisé dans la littérature notamment le code de calcul ANSYS pour traiter les effets mécaniques (contraintes résiduelles), aussi le Code de calcul Aster dont le but d'ajout un nouveau comportement pour résoudre un problème non linéaire posé sur une structure avec « STAT_NON_LINE », pour

tous les éléments 2D/3D (Coques, Tuyaux, Poutres Multifibres) ou ajouter un nouveau comportement métallurgique dans « CALC_META ».

L'analyse d'une structure FGMs simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale sera présentée au quatrième chapitre où les résultats des simulations numériques obtenus par l'implémentation de l'UMAT est validé avec celles traitant ce type de matériau analytiquement.

CHAPITRE I :
LES MATERIAUX FGMs

I.1. HISTORIQUE DES LIAISONS METAL-CERAMIQUE

Bien que l'émaillage soit appliqué depuis plus de trois millénaires, c'est seulement depuis l'apparition des céramiques techniques (Al_2O_3 , ZrO_2 , AlN ..) et leur utilisation dans l'électronique que les recherches sur la liaison entre un métal et une céramique se sont développées. Parmi les applications visées, on peut citer les tubes électroniques, les isolateurs électriques, les valves à vide, Les condensateurs, etc. Les deux caractéristiques principales demandées à la liaison sont l'étanchéité et une tenue mécanique correcte.

Depuis une trentaine d'années, les céramiques thermomécaniques (Al_2O_3 , ZrO_2 , SiC , Si_3N_4 ...) sont étudiées en vue d'applications dans les turbines à gaz et les moteurs thermiques afin d'en améliorer le rendement grâce à une augmentation de la température de fonctionnement. C'est ainsi que plusieurs programmes d'étude et de développement ont vu le jour dans divers pays [1] :

1972, U.S.A. « DARPA » moteur turbine pour véhicule terrestre.

1976, U.S.A. « NAVSEA » et « GARRET » céramisation de turbine 200 CV.

1980, R.F.A. moteur céramisé pour automobile avec la collaboration des Sociétés Volkswagen, Feldmühle, Rosenthal...

1984, Japon. Projet « moonlight », turbine à gaz à haut rendement.

Devant l'échec des programmes concernant les moteurs « tout céramique », les grands programmes nationaux ont été en nombre plus limités. Plus récemment d'autres applications sont apparues, par exemple : e céramique-métal pour EHT et SOFC 2006, France. Projet ANR « CERAMAT » : composite céramique-métal pour EHT (Electrolyseur haute température) et SOFC (Solid Oxide Fuel cell). Cette introduction ne serait pas complète si nous ne mentionnions pas les liaisons métal- céramique utilisées dans le génie biologique et médical. Dans le domaine dentaire, avec l'utilisation des barbotines comme revêtement sur les prothèses métalliques, mais aussi récemment avec les prothèses articulaires, l'emploi des céramiques appelées biocompatibles (Al_2O_3 et ZrO_2 essentiellement) offre de réels espoirs pour la chirurgie osseuse.

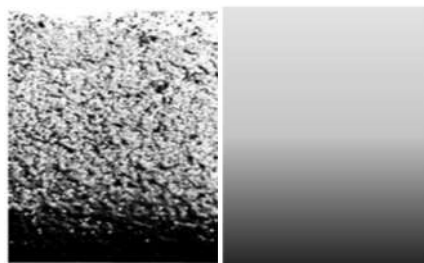
I.2. TECHNIQUE D'ELABORATION DES FGMs

Le concept des matériaux à Gradient Fonctionnel (FGM) caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique

rapide à travers les différents domaines d'application potentiels, des recherches ont été établies afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie.

Initialement, l'idée fut émise en 1984 par M. Niino et al. (National Aerospace Laboratory of Japan) [2] et présentée comme une tentative pour résoudre les problèmes posés par la préparation de matériaux de barrière thermique destinés aux structures spatiales et aux réacteurs de fusion. Cependant, l'aventure débute réellement autour de l'année 1985 lorsque d'autres pays (USA, Royaume-Uni) ressentent à leur tour la nécessité d'aborder l'ère spatiale en concevant chacun unilatéralement un avion ayant la possibilité de naviguer à la fois dans l'espace et transitoirement dans l'atmosphère terrestre [3]. Cela revenait à poser d'emblée le problème de la tenue des structures dans l'espace et du comportement du fuselage aux très hautes températures lors du retour dans l'atmosphère à vitesse hypersonique. Au cours de ces années, de nombreuses techniques de mise en forme ont été utilisées.

Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développement dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur secteurs de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal. Beaucoup d'avantages sont prévus d'employer cette classe du FGM, par exemple, la face avec le contenu est élevée en céramique peut fournir haute résistance à l'usure, alors que la face opposée où le contenu est élevé en métal offre la haute dureté et la force. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications tribologiques où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises simultanément. Les applications balistiques de cette classe des matériaux sont également très attrayantes. Un matériau à gradient fonctionnel FGM est un matériau dont les propriétés physiques évoluent selon une variation spatiale progressive (discrète ou continue) de la composition ou de la microstructure (Figure I.1).



Variation continue des propriétés



Variation discrète des propriétés

Figure I.1 : Configuration de la variation des FGMs [2]

I.3. METHODES DE MISE EN FORME PAR VOIE CHIMIQUE

Les deux techniques principales qui sont rattachées à cette catégorie, sont :

- La coulée par centrifugation,
- La sédimentation.

I.3.1. La coulée par centrifugation

Un mélange composé d'un métal fondu et d'une poudre métallique, tous deux de densité différente, est soumis à une force centrifuge au sein d'une enceinte annulaire à laquelle une rotation rapide est appliquée. Les particules métalliques sont soumises à des forces différentes dont on peut exploiter l'action pour établir une distribution de concentration volumique radiale de la phase divisée [4]. Le schéma de principe de la centrifugation horizontale est présenté (Figure I.2).

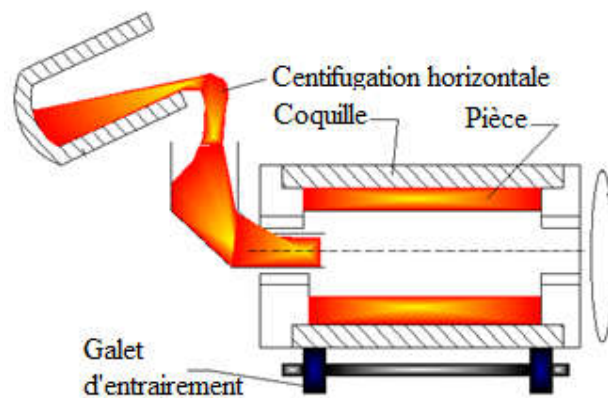


Figure I.2 : Schéma de principe de la centrifugation horizontale [4]

L'avantage de ce procédé est de permettre une production massive de Matériaux à Gradient Fonctionnel FGM. Son inconvénient principal provient de la difficulté à assurer la parfaite maîtrise ou le contrôle du mouvement des grains de poudre au sein du milieu visqueux qui constitue le bain métallique fondu [5], [6]. He et al. ont utilisé la centrifugation pour fabriquer un matériau à gradient W-Cu [7]. Le cuivre est formé et fondu en utilisant la réaction exothermique :



La centrifugation permet de séparer les produits de réaction (alumine et cuivre) et facilite l'infiltration du cuivre dans la poudre de W. Cette technique permet d'obtenir une densité de 97 % dans la couche de cuivre pur. La couche W-Cu atteint une concentration, en W, maximum de 65 % en masse. Le défaut de cette technique est que la couche W-Cu a une densité relativement faible (86 %).

I.3.2. La sédimentation

Ce procédé de mélange et de dépôt de poudres, très ancien, a fait l'objet d'une étude minutieuse avec pour objectif principal de le mettre en œuvre en tant qu'étape préliminaire à la fabrication de FGM par frittage [8-9].

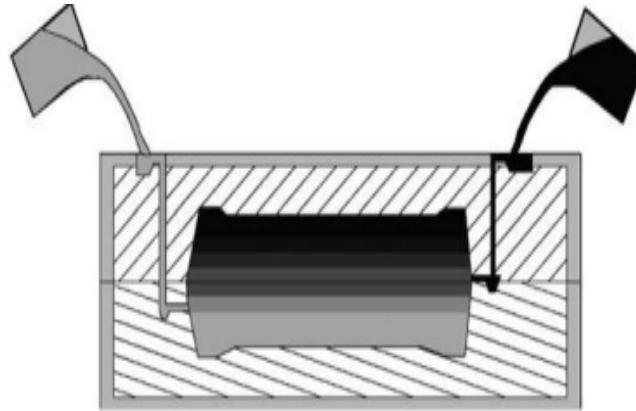


Figure I.3 : Schéma de principe de la sédimentation [10]

Selon les auteurs, la décantation – sédimentation en milieu liquide permet un contrôle soigné de l'évolution de la composition car elle donne la possibilité d'un suivi précis des variations que l'on désire successivement introduire au sein du futur FGM [10]. De plus, l'addition contrôlée de secondes phases susceptibles d'améliorer le comportement du composite est possible. Le handicap dû aux ségrégations en milieux aqueux peut être supprimé par l'emploi de solvants hydrophobes du type hexane et le contrôle rigoureux de l'humidité superficielle des grains de poudre. Le gradient de composition est obtenu par une technique multicouche qui consiste à superposer successivement plusieurs dépôts fins obtenus chacun de façon indépendante par décantation – sédimentation de mélanges de poudres à concentrations discrètement évolutives. Le schéma de principe est représenté Figure I.3. Diverses techniques sont mises en œuvre au cours du processus :

- L'agitation par ultra-sons pour l'homogénéisation des mélanges.
- L'addition d'eau à l'aide de micropipettes. Cette phase est très importante car elle contrôle l'interaction particule-particule, c'est-à-dire l'agglomération en amas qui évite la ségrégation et maintient la composition uniforme durant l'étape de sédimentation
- La décantation à travers deux plateaux parsemés chacun de trous régulièrement alignés. Lorsque les trous se superposent, l'écoulement des mélanges de poudres s'effectue sans turbulence et permet l'obtention de densités uniformes au sein de chaque couche. Le désalignement des trous isole la partie supérieure de la partie inférieure du double plateau [8]. Il

paraît néanmoins difficile d'utiliser cette technique pour la mise en forme d'un matériau composé de tungstène de par la difficulté de le mettre en suspension. En effet, la densité du tungstène étant élevée, la suspension des grains de tungstène semble difficile.

I.4. METHODES DE MISE EN FORME PAR VOIE PHYSIQUE

I.4.1. Dépôt par projection thermique

Le dépôt par projection thermique se décline en quatre techniques différentes : la projection par flamme, la projection par arc électrique, la projection par plasma (VPS) et la projection thermique à froid. Pour l'ensemble de ces techniques, la fabrication du FGM tient au contrôle de la distribution de la poudre dans la buse de projection thermique. La projection par flamme consiste à la combustion d'un gaz pour porter le matériau à sa température de fusion et le projeter sur le substrat (Figure I-4). Les avantages de cette technique sont sa simplicité et son faible coût. Par contre, la température peu élevée et une faible vitesse de projection impliquent un dépôt poreux ($\approx 90\%$) [11].

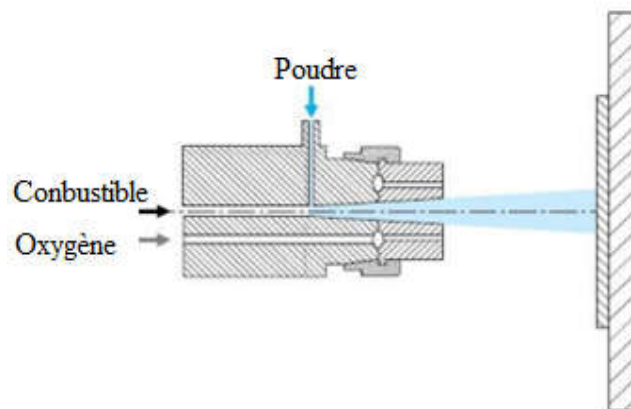


Figure I .4 : Schéma de principe de la projection thermique par flamme [11]

Le principe de la projection par arc électrique est de faire jaillir un arc électrique entre deux fils consommables, ce qui permet au matériau de fondre. Un jet d'air comprimé pulvérise le métal fondu et le projette sur le substrat (Figure I-5). La faible porosité, la bonne adhérence au substrat et la possibilité de production en moyennes et grandes séries sont les avantages de cette technique. Seuls les matériaux conducteurs peuvent être déposés. Le matériau déposé aura cependant une structure grossière et oxydée [11].

Les plasmas utilisés en projection thermique sont des plasmas thermiques ou intermédiaires faiblement ionisés (20 % maximum) et suffisamment denses pour que toutes les espèces déposées aient la même température (12000 K) (Figure I-6).

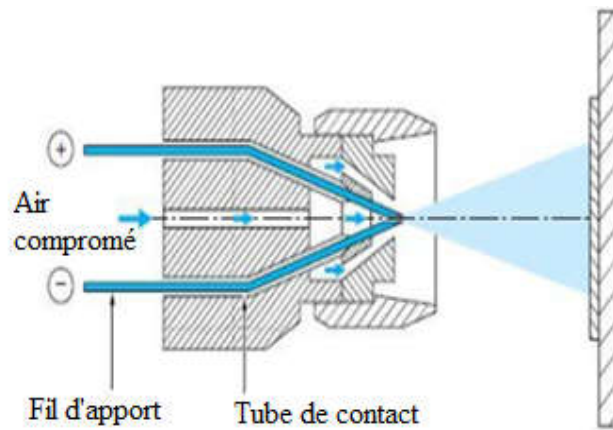


Figure I.5 : Schéma de principe de la projection thermique par arc électrique [11]

L'avantage de cette technique par rapport à celles précédemment citées, est de pouvoir déposer tous types de matériaux même les métaux réfractaires et les céramiques. Tant que la poudre est ajoutée et le plasma alimenté, le matériau peut être déposé. Le grand nombre de paramètres à étudier (température du plasma, nature du gaz plasmagène, la puissance et la distance du tir) rendent la technique complexe à mettre au point [11-12].

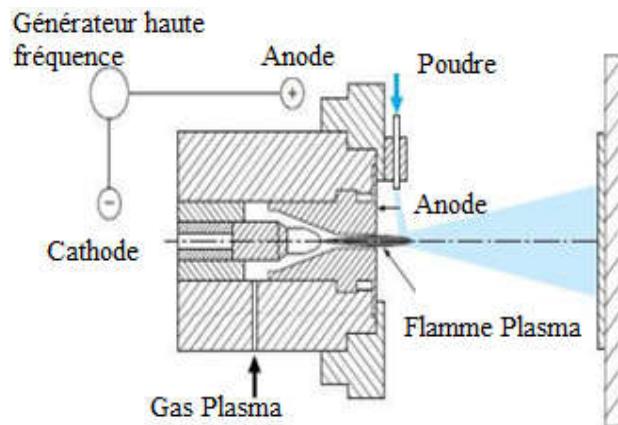


Figure I.6 : Schéma de principe de la projection par plasma [11]

La technique de projection thermique à froid (Figure I-7) consiste à accélérer le matériau sous forme de poudre à une vitesse supersonique pour obtenir une déformation suffisante à l'impact sur le substrat afin de permettre la formation du dépôt. La faible température du gaz porteur permet de garder le matériau à l'état solide et donc de conserver sa structure initiale, d'éviter l'oxydation à haute température, la recristallisation et les contraintes résiduelles. Enfin les dépôts sont denses avec très peu d'impuretés. Cette technique est néanmoins peu adaptée pour la projection de plusieurs matériaux en même temps.

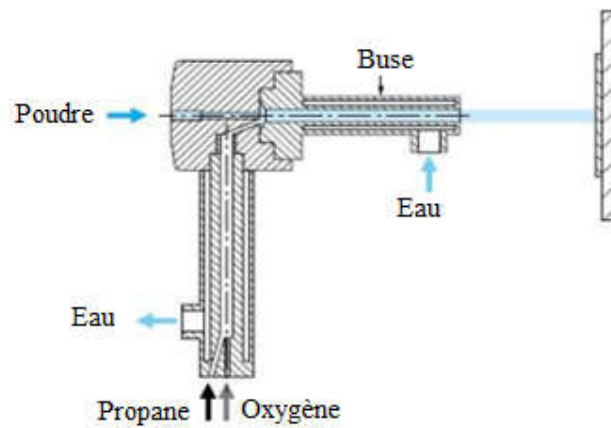


Figure I.7 : Schéma de principe de la projection thermique à froid [11]

L'utilisation de la technique de projection thermique plasma pour la fabrication de FGM W/Cu a beaucoup été étudiée ces dernières années. Le FGMW-Cu réalisé possède les mêmes propriétés mécaniques qu'un FGM fabriqué par infiltration de cuivre dans un squelette de tungstène mais a cependant une conductivité thermique plus faible [13]. Dans ce cas, 3 types de poudres ont été utilisés : 40 %, 64 % et 75 % en volume de tungstène. La première couche, contenant le moins de W, est déposée sur le substrat de cuivre, afin de ne pas faire fondre le cuivre. Plus la quantité de tungstène augmente dans la couche déposée, plus la porosité augmente, jusqu'à 8 % pour la couche contenant 75% en volume de tungstène. De plus, la quantité de cuivre mesurée après dépôt est plus faible que celle de la poudre de départ en raison d'une surchauffe lors de la projection [14]. De tels matériaux ont déjà résisté à un flux de chaleur de 7 MW.m^{-2} [15], néanmoins des fissures apparaissent à la surface après 150 cycles à 6 MW.m^{-2} [16].

I.4.2. Dépôt en phase vapeur

Le dépôt par voie physique est basé sur le principe de l'ionisation d'un gaz (argon) entre la cible (cathode) et le substrat (anode). Les atomes de gaz ionisés sont dirigés par le champ électrique créé entre la cathode et l'anode vers la cible pour arracher un atome de la cible et le déposer sur le substrat (Figure I.8) [17]. De par sa fonction d'anode, le substrat ne peut être isolant. La fabrication du FGM par un dépôt en phase vapeur est contrôlée par la vitesse de bombardement des cibles à l'intérieur de l'enceinte.

Le dépôt par voie chimique (CVD) consiste à mettre un composé volatil du matériau à déposer en contact avec un autre gaz au voisinage de la surface à recouvrir

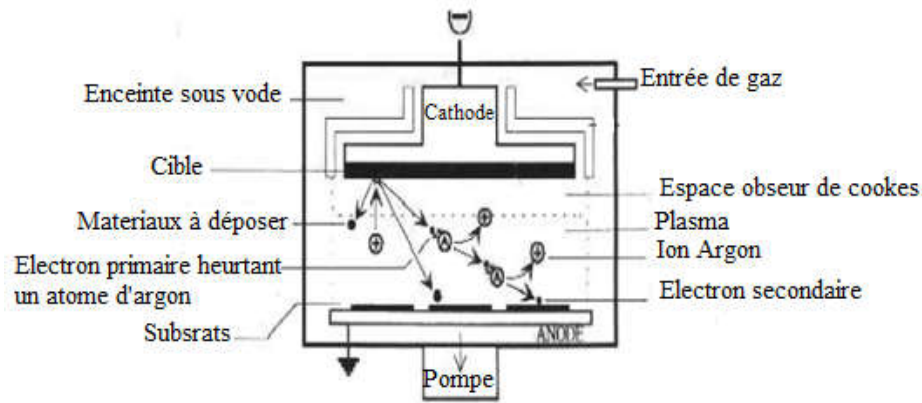


Figure I.8 : Schéma de principe de la déposition en phase vapeur [17]

Ce procédé s'effectue en six étapes présentées sur la Figure I.9. La première étape est la diffusion en phase gazeuse vers le substrat, suivie de l'adsorption à la surface du substrat, puis de la réaction chimique et la germination des grains. Ensuite, on observe sur le substrat la diffusion des atomes déposés à la surface, puis la désorption et enfin la diffusion dans la phase gazeuse. Cette technique a malheureusement un taux de dépôt assez faible qui dépend du matériau à déposer [18]. Le contrôle des réactions de formation des composés est la clé pour former des FGM.

- 1) Diffusion en phase gazeuse vers le substrat
- 2) Adsorption à la surface du substrat
- 3) Réaction chimique, germination
- 4) Diffusion sur le substrat des atomes déposés à la surface
- 5) Désorption
- 6) Diffusion dans la phase gaz

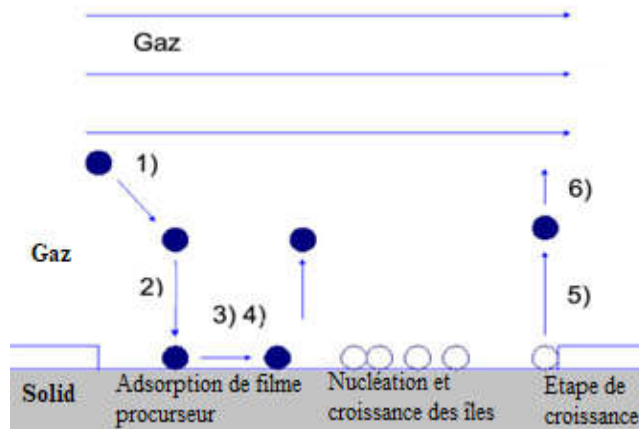


Figure I.9 : Principe de la déposition par voie chimique [18]

Un FGM W/Cu par CVD a été fabriqué. Le matériau ainsi obtenu a été soudé sur du CuCrZr équipé d'un canal de refroidissement. Le composant ainsi fabriqué a résisté à 1000 cycles à $11,7 \text{ MW.m}^{-2}$ [19]. Les épaisseurs de FGM fabriqués par ces techniques de projection ou de déposition sont inférieures à 0,5 mm. Afin de mettre en forme un FGM d'une épaisseur de plusieurs millimètres, la métallurgie des poudres semble plus appropriée. En effet,

l'épaisseur de la couche de compliance dans les composants face au plasma d'ITER est de 1 mm.

I.4.3. La métallurgie des poudres

Cette technique implique uniquement des poudres. La procédure comporte les étapes suivantes :

- Sélection et combinaison des métaux et céramiques entrant dans la composition du FGM.
- Mise au point de la distribution de composition optimale.
- Mélangeage des poudres selon un processus continu respectant le profil de composition optimale.
- Compactage et pressage isostatique à température ordinaire (CIF)
- Traitement final par frittage naturel ou frittage activé.

On appelle frittage le processus de liaison qui s'établit entre particules voisines lorsqu'une poudre ou un mélange de poudres compact est chauffé à haute température. L'opération est poursuivie pendant le temps requis pour transformer la totalité du compact (cru) initial en un matériau massif à densité la plus proche possible de la densité théorique. Le processus de frittage est celui qui assure la cohésion des matériaux élaborés par métallurgie des poudres [20]. Lors du frittage, on distingue trois étapes successives dans l'évolution de la microstructure et de la densité relative (Figure I.10) :

- 1) Les particules se soudent entre elles par la formation de "ponts". Ces particules ne subissent pas de changement morphologique important. La densité de l'échantillon n'augmente qu'entre 5 à 10% lors de cette phase.
- 2) Lors de cette étape, le squelette solide ainsi constitué est traversé de pores tubulaires qui communiquent avec l'extérieur (porosité ouverte). Ces pores s'élimineront par une diminution du diamètre des pores. En fin de densification, les pores seront constitués de sphères emprisonnées à l'intérieur du matériau (porosité fermée).
- 3) La porosité ne représente plus que 5 à 10% en volume. La croissance des grains devient majoritaire à ce stade du frittage. La taille des grains étant un paramètre influant sur les propriétés du matériau, il est essentiel que le matériau garde une taille des grains la plus proche de la taille initiale. Pour cela l'étape de densification (étape 2) doit être privilégié [20].

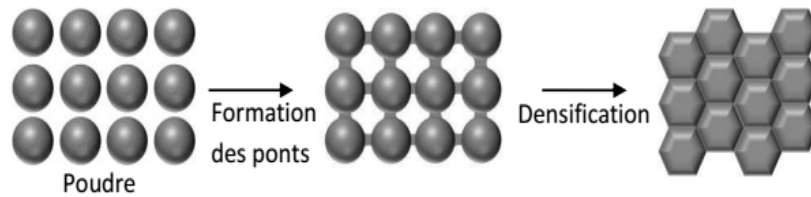


Figure I.10: Phénomènes lors du frittage d'une poudre [20]

L'opération de frittage nécessite habituellement le contrôle des paramètres suivants :

- Forme des particules équiaxes, absence d'agglomérats. Une forte agglomération de la poudre génère de larges pores lors de l'étape de compaction à froid, ce qui empêche l'obtention de crus de densité élevée.
- Nature et teneur en défauts soigneusement contrôlées.
- Distribution granulométrique contrôlée.
- Atmosphère de frittage adaptée à la nature des matériaux.

Dans le cas des FGM, les crus compactés sont composés de couches de poudres dont la composition chimique varie d'une couche à l'autre dans l'épaisseur, de sorte que les comportements au frittage de chaque tranche de concentration homogène ou quasi-homogène sont différents les uns des autres. Une étude au préalable de chaque matériau doit être entreprise. L'un des "comportements au frittage" est particulièrement critique : il s'agit du retrait au frittage (évacuation progressive des pores) qui varie en fonction des fractions volumiques respectives des poudres entrant dans la composition du mélange. L'inhomogénéité de ces retraits provient en partie des vitesses de frittage différentes affectant chaque matériau [21]. Différentes techniques de frittage existent. Il est possible de distinguer deux grandes familles de techniques. La première est caractérisée par l'absence de pression mécanique, ce sont les techniques de frittage naturels. La seconde technique est quant à elle caractérisée par l'application d'une pression mécanique, uni axiale ou isostatique, pendant le cycle de frittage (chauffage, palier et refroidissement). Ce sont les techniques de frittage sous charge. De nombreuses publications ont montré l'avantage de l'application d'une pression lors du frittage afin d'obtenir un taux de densification supérieur à 99%, tout en limitant la croissance des grains [20,24]. En effet, avec ce type de technique, la température de frittage est limitée.

Les techniques de frittage sous charge peuvent également être divisées en deux catégories qui se différencient par la méthode de chauffage de l'échantillon :

- Les techniques de frittage dites conventionnelles, comme la compaction isostatique à chaud (HIP) ou le pressage uni-axial à chaud (HP), sont caractérisées par un chauffage externe (rayonnement/conduction/convection) du système moule/échantillon.

- Les techniques de frittage dites non-conventionnelles, comme le frittage flash (SPS), ou le frittage micro-onde, sont caractérisées par un chauffage du système moule/échantillon par effet Joule dû au passage de courant.

L'inconvénient majeur des techniques conventionnelles est la nécessité d'une grande quantité de chaleur pour chauffer l'échantillon. Une partie importante de cette chaleur est effectivement nécessaire pour chauffer l'enceinte du four. Dans le frittage SPS, il n'y a pas de dissipation de chaleur pour chauffer l'enceinte du four si bien qu'à énergie équivalente les échantillons obtenus par frittage flash présentent une densité plus importante que celle obtenue avec un frittage conventionnel et également une microstructure fine. L'application d'un courant dans le système moule/échantillon lors d'un frittage semble donc être un atout pour conserver la taille initiale des grains au sein des matériaux [24]. De nombreuses études ont été menées pour élaborer un matériau à gradient de fonction W/Cu. Une des techniques les plus étudiées a été l'infiltration de cuivre dans un squelette de tungstène [25,28]. La difficulté de cette technique provient de la difficulté à contrôler l'évolution de la porosité du squelette de tungstène. Cette technique a été utilisée pour effectuer un empilement de couches de différentes concentrations et non pour réaliser un gradient continu [27]. L'existence d'une teneur limite dans la partie riche en cuivre a été montrée [29]. Pour augmenter la teneur limite, un mélange contenant plus de cuivre ou un agent porogène pourrait être utilisé. Pour la partie où le tungstène est en forte concentration, l'obtention d'un gradient de composition paraît inenvisageable par cofrittage d'un comprimé multicouche car le cuivre liquide migrerait, après sa fusion, vers le tungstène pur. La solution serait de ne pas dépasser la température de fusion du cuivre en utilisant une technique de frittage activée comme le Spark Plasma Sintering [27]. Un certain nombre de publications ont déjà mis en perspective le potentiel des techniques de frittage non-conventionnelles, particulièrement la technique du frittage flash (SPS), pour une consolidation maximale de céramiques, de métaux nanométriques [30-36], ainsi que pour l'élaboration de FGM [37-49].

I.5. LES DIFFERENTES LOIS QUI REGISSENT LA VARIATION DES PROPRIETES MATERIELLES SUIVANT L'ÉPAISSEUR D'UNE POUTRE FGM

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multiphase à travers l'épaisseur. La dépendance des propriétés à la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [50], Les propriétés effectives des matériaux en FGM, comme module de Young, peuvent alors être exprimées comme suit :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i v_i \quad \text{I.2}$$

Avec

P_i et v_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , et

$$\sum_{i=1}^n v_i = 1 \quad \text{I.3}$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions volumiques. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

I.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM [3]

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$v(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^n \quad \text{I.4}$$

Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées pour un mélange de céramique et métal par la loi suivante :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) * v(z) \quad \text{I.5}$$

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.11. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $1 < n$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $1 > n$.

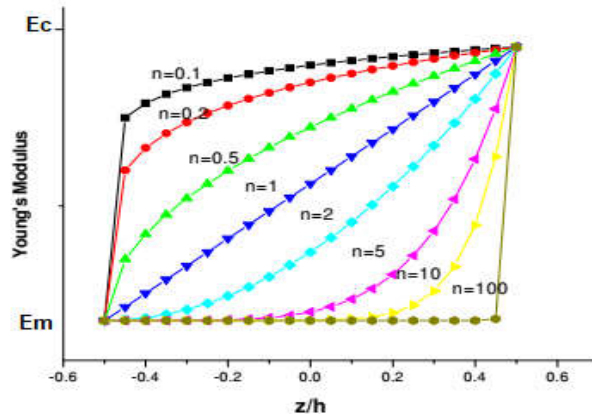


Figure I.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM [3]

I.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM [3]

Deux fonctions de loi de puissance sont utilisées pour définir la fraction volumique de la plaque, afin d’assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$\left. \begin{aligned} v_1(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + Z}{\frac{h}{2}} \right)^n, \quad -h/2 \leq Z \leq 0 \\ v_2(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - Z}{\frac{h}{2}} \right)^n, \quad 0 \leq Z \leq h/2 \end{aligned} \right\} \quad \text{I.6}$$

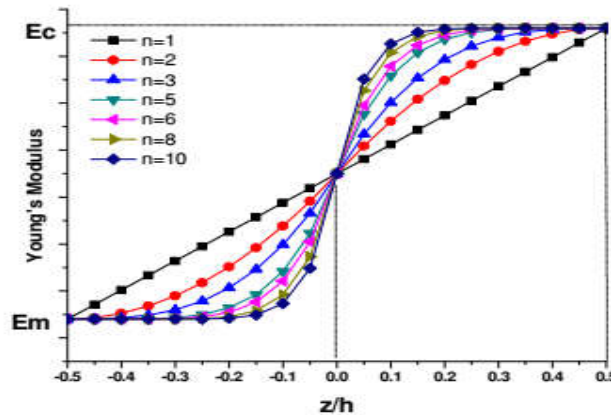


Figure I.12: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM [3]

Le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$\left. \begin{aligned} E(z) &= v_1(z)E_1 + [1 + v_1(z)] * E_2, \quad -h/2 \leq Z \leq 0 \\ E(z) &= v_2(z)E_1 + [1 + v_2(z)] * E_2, \quad 0 \leq Z \leq h/2 \end{aligned} \right\} \quad \text{I.7}$$

La figure I.12 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I.6) et (I.7) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque SFGM).

I.5.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM [3]

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme.

$$E(z) = E_2 e^{B(z + \frac{h}{2})} \quad \text{I.8}$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} * \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad \text{I.9}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure I.13.

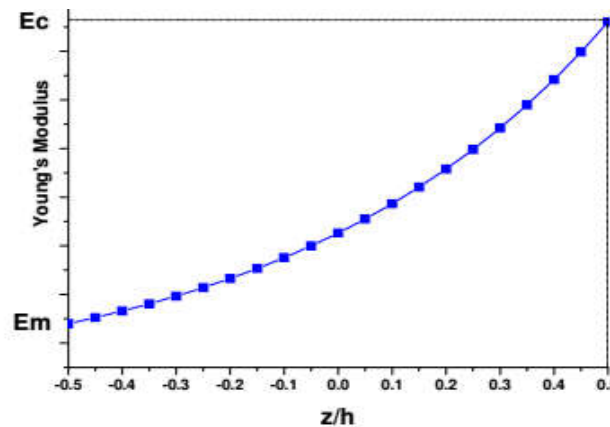


Figure I.13 : Variation de module de Young dans une plaque E-FGM [3]

I.5.4. Loi de mélange

Il existe de nombreuses approches utilisées pour décrire la variation matérielle du FGM qui sont fabriqués à partir de deux phases de matériaux. En général, la plupart des approches microstructures classées réelles [51]. Deux types de FGM, qui représentent une variation continue de compositions de matériaux à Gradient Fonctionnel, à travers la direction

représentée sur la figure (I.1) et de la variation de la couche à goutte de compositions de matière représentée sur la même figure, ont été trouvés dans la littérature. En considérant les FGM en deux matériaux distincts, on suppose que les compositions matérielles des FGM sont variées de la surface supérieure de la matière A riches à la surface inférieure de matériau B-riches. On voit que, pour le cas FGM continues, les compositions matérielles sont modifiées avec une répartition régulière dans la direction graduelle. Toutefois, pour un autre cas qui peut être défini en tant que couche de matériau quasi-homogène, les compositions sont présentées sous la forme d'une répartition en couches.

Les valeurs des propriétés matérielles des FGM continues peuvent être prédites à l'aide des divers modèles mathématiques. Comme indiqué précédemment, les propriétés du matériau FGM dépendent de la position. Une fonction exponentielle utilisée pour définir les propriétés des matériaux a été appliqué dans de nombreuses études afin d'étudier la propagation des fissures, mécanique de la rupture, la flexion, le flambage et les vibrations [52-54]. Le module de cisaillement G , le module de Young E et de la densité massique ρ varie le long de la direction de l'épaisseur z peut être défini comme ci-dessous :

$$G(z)=G_0e^{\beta z}, E(z)=E_0 e^{\beta z}, \rho(z)=\rho_0 e^{\beta z} \quad \text{I.10}$$

Où G_0 , E_0 et ρ_0 sont les valeurs du module de cisaillement, respectivement module de Young et la densité de masse au plan médian ($z = 0$). Il est à noter que β est un paramètre constant pour définir la propriété variation matériau le long de la direction d'épaisseur, et FGM peut spécialiser en matériaux isotropes homogènes en prend $\beta = 0$.

Sur la base de la règle de mélange, les propriétés des matériaux efficaces P , peuvent être écrites comme :

$$P=P_m V_m+P_c V_c \quad \text{I.11}$$

Où P_m, P_c, V_m, V_c sont les propriétés des matériaux et la fraction volumique du métal et céramique, respectivement.

$$V_m+V_c=1 \quad \text{I.12}$$

Une autre forme de modèle mathématique, appelle une distribution de loi de puissance a été largement utilisé dans un certain nombre d'études de recherche, en particulier pour le domaine du génie mécanique [55]. La distribution de loi de puissance en fonction de la règle de mélange a été introduite par Wakashima et al. Afin de définir les propriétés des matériaux efficaces de FGM [3]. La fraction volumique de céramique v_c peut écrire comme suit :

$$v_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \tag{I.13}$$

Où le nombre positif n ($0 \leq n \leq \infty$) est la loi de puissance ou l'indice de fraction volumique. z est un paramètre de distance le long de la direction gradient, tandis que h est l'épaisseur de la plaque. Pour connaître les résultats des propriétés des matériaux en fonction de la distribution de loi de puissance, cela peut être réalisé en substituant les équations de fractions de volume de matériau en équations I.12 et I.13 dans l'équation I.11. Dans l'étude de Sofiyev [56] et Pitakthapanaphong et Busso [57] plusieurs types de distribution de la loi de puissance ont été utilisés pour définir les propriétés des matériaux FGM d'une part et d'autre part pour étudier le comportement vibratoire et la stabilité des coques de forme coniques en FGM soumis à une pression externe. Basant sur la loi de puissance, les équations de la fraction volumique utilisée pour calculer le volume de la céramique V_c correspondant à différents types de distribution sont exprimés comme suite :

- Type Linéaire : $V_c = z + 0.5$
 - Type Quadratique : $V_c = (z + 0.5)^2$
 - Type Quadratique inversé : $V_c = 1 - (0.5 - z)^2$
 - Type Cubique : $V_c = 3(z + 0.5)^2 - 2(z + 0.5)^3$
- I.14

Pour bien comprendre sur les modèles mathématiques présentés dans l'équation I.16, les fractions volumiques de céramique V_c par rapport aux modèles tracés en fonction du rapport z/h sont illustrées à la Figure.I.14

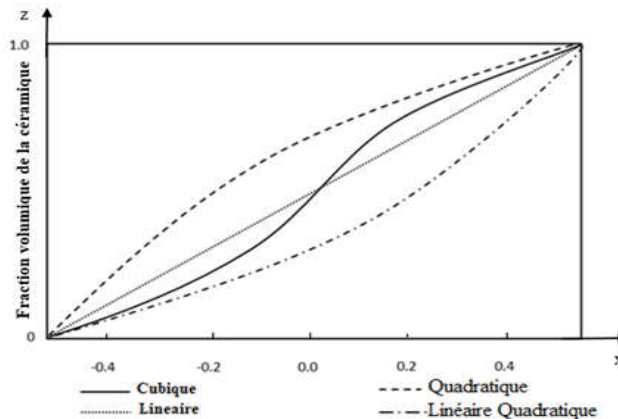


Figure. I.14. Variations de la fraction volumique de la céramique avec différents modèles basés sur la distribution de loi de puissance. [58]

Cho et Ha [58] ont présenté le modèle mathématique pour prédire la fraction volumique de matériau FGM composé de trois couches distinctes. Les couches supérieure et inférieure sont respectivement faites par la céramique et le métal homogène alors que la couche intermédiaire a été donnée pour la région à gradient comme le montre la Figure.I.16. sur cette figure, les fractions volumiques importantes ont été modifiées dans l'axe des y qui sont exprimées comme suit :

$$v_m(y) = \begin{cases} 1 & -d \leq y \leq -d_L \\ C_m & -d_L \leq y \leq -d_U \\ 0 & -d_U \leq y \leq -d \end{cases} \quad \text{I.15}$$

$$v_c(y) = 1 - v_m(y) \quad \text{I.16}$$

Où C_m est une fonction continue qui peut satisfaire les conditions de continuité aux interfaces de la couche inférieure et supérieure.

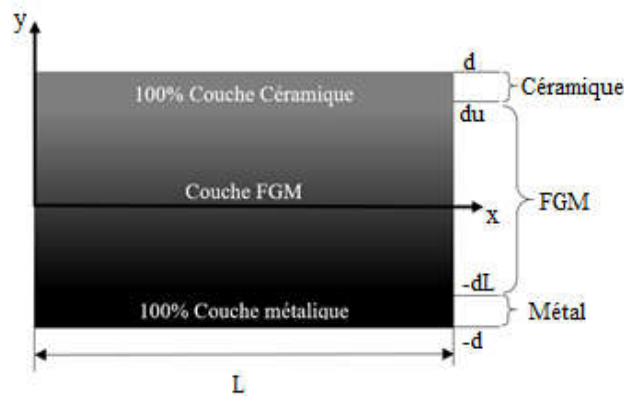


Figure I.15 : FGM avec couche de céramique et métal FGM composite [58]

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la poutre S-FGM peut calculer par :

$$S(z) = g_1(z) S_1 + [1 - g_1(z)] S_2 \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.17}$$

$$S(z) = g_2(z) S_1 + [1 - g_2(z)] S_2 \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.18}$$

La figure I.15 montre que la variation du module de Young selon les équations I.17 et I.18 avec des distributions sigmoïdes, donc la poutre FGM est ainsi appelée Poutre S-FGM.

I.5.5. Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée [59]:

$$\sigma = C \varepsilon \quad \text{I.19}$$

$[\sigma]$: Tenseur de contrainte

$[\varepsilon]$: Tenseur de déformation

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad \text{I.20}$$

Cette loi, généralement appelée loi de HOOKE généralisée, introduit la matrice de rigidité C , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité C_{ij} .

I.5.5.1. Matériau anisotrope

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

I.5.5.2. Matériau monoclinique

Un matériau monoclinique est un matériau possédant un plan de symétrie. La forme du tenseur de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectuée par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas les termes du tenseur de rigidité. C'est le cas par exemple pour les matériaux fibreux représentés sur la figure (I.16) où les directions \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont des axes de symétrie élastique. Par contre, l'axe $\vec{\Delta}$ n'en est pas un : une éprouvette taillée dans la direction $\vec{\Delta}$ n'a pas ces fibres orientées de la même façon de part et d'autre de l'axe de symétrie.

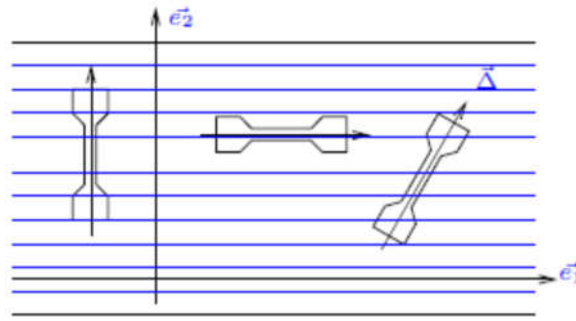


Figure I.16 : Matériau fibreux [59]

L'exploitation des changements de base conduit à un tenseur de rigidité de la forme :

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{I.21}$$

La matrice de souplesse à la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendante est réduite à 13.

I.5.5.3. Matériau orthotrope

Un matériau est dit orthotrope lorsqu'il existe deux plans de symétrie matérielle perpendiculaire. Les deux conditions de symétrie imposent la nullité d'autres termes de C. On constate que le troisième plan orthogonal est aussi axe de symétrie, l'expression de cette symétrie n'apporte aucune information supplémentaire.

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{I.22}$$

Le nombre de composantes indépendantes est ramené à 9. De plus, si la déformation est exprimée dans la base principale, alors le tenseur des contraintes sera diagonal. Les directions principales des contraintes et des déformations sont donc confondues dès qu'il existe au moins deux plans de symétrie élastique orthogonaux.

I.5.5.4. Matériau transversalement isotrope

Un matériau isotrope est un matériau pour lequel un changement de base quelconque ne change pas les propriétés. Les matériaux usuels, dans une première approximation (alliage métallique, élastomère, etc, excepte le bois) répondent généralement à cette modélisation établie à l'échelle macroscopique.

Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et les composantes du tenseur de rigidité doivent être invariantes dans tout changement de base orthonormée. L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit au tenseur de rigidité suivant :

$$[c] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{I.23}$$

Le nombre de composantes indépendantes se réduit donc à 2.

I.5.5.5. Matériau unidirectionnel (isotropie transverse)

La cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel peut être considérée comme constituée d'une Fibre a section circulaire entourée d'un cylindre a section circulaire de matrice (voir figure I.17).

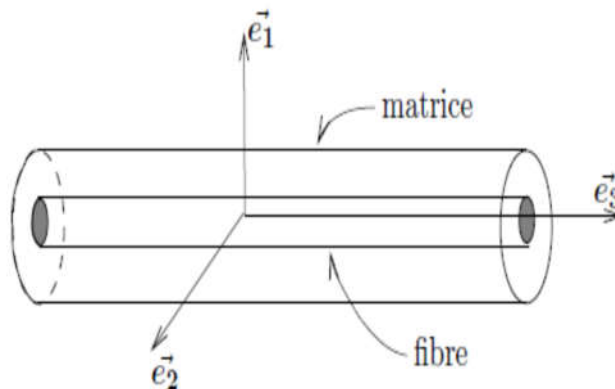


Figure I.17 : Matériau unidirectionnel [59]

Le matériau se comporte comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Il en résulte qu'un changement de base effectuée par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée le tenseur de rigidité. Les composantes du tenseur de rigidité, exprimée dans une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ou \vec{e}_3 est axe de révolution et normal au plan de symétrie, s'écrira alors :

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{I.24}$$

Les propriétés des matériaux unidirectionnels sont déterminées par 5 constantes indépendantes. Le sol, les roches, certains bois fibreux sont des matériaux isotropes transverses. Les plaques de près imprégnés sont aussi des matériaux isotropes transverses.

I.6. DOMAINES D'APPLICATIONS DES MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUES

I.6.1. Domaines d'application Des FGMs

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ces matériaux [3]. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations, le matériau FGM peut être utilisé dans plusieurs domaine tels qu'en :

I.6.1.1. Aéronautique

- ✓ L'amélioration des engins spatiaux.
- ✓ Création de barrières thermiques.

I.6.1.2. Électronique et optique

- ✓ Fibre optique avec une grande vitesse de transmission.
- ✓ Les circuits d'ordinateurs.
- ✓ Les téléphones cellulaires.

I.6.1.3. Biomatériaux

- ✓ Os artificiels.

- ✓ Dents.

I.6.1.4. Industrie

- ✓ Les machines.
- ✓ Les outils.
- ✓ Soudure.

I.6.1.5. Structure

- ✓ Cartes mémoires.
 - ✓ Matériaux piézoélectriques.
- AUTRE :
- ✓ Batte de baseball (MIZUNO Inc.).
 - ✓ Les montres en titanium (CITIZEN commercialized ASPEC).

I.6.2. Avantages et inconvénients des matériaux FGMs

Donc, les besoins technique et technologique ont donné aux matériaux FGMs la priorité dans plusieurs secteurs et de les mettre en première position et cela pour plusieurs avantages parmi lesquelles nous avons à titre d'exemple [8]:

- L'absence d'une forte interface entre deux matériaux différents, par exemple les métaux et les matériaux céramique, alors la transition graduelle dans la composition à travers une interface peut être utilisée pour distribuer les contraintes thermiques ce qui permet la limitation des contraintes critique et supprimant ainsi le début de la déformation plastique, des dommages ou fissures.
- Singularités de stress à une intersection entre les bords libres et les interfaces peuvent être évités en utilisant transition graduelle, qui peuvent par ailleurs initier une fissure interfaciale, conduisant à une insuffisance de délaminage
- La force motrice pour la croissance locale de la fissure à travers une interface peut être manipulée en modifiant les gradients de propriétés élastiques et plastiques à travers l'interface.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un meilleur contrôle sur l'ensemble des contraintes.
- Une meilleure cohésion entre les différents matériaux, tels que les métaux et les céramiques.

- Extension de la zone fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de déformation plastique.
- Suppression du délaminage.
- Augmentation de la résistance à la rupture. ect

Non seulement, ces types des matériaux ont des inconvénients majeur et l'obstacle principal d'introduire ces matériaux dans plusieurs secteur industriel la complexité de la technique de fabrication en raison de l'incompatibilité de divers propriétés, par exemple, la température de fusion, différentes affinités aux divers autres éléments, la taille des particules morphologie, Exemple typique quand il s'agit un mélange de matériau métallique qui a une température de fusion T_{m1} et un céramique qui à une température de fusion T_{m2} . Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement $T_{m1} \ll T_{m2}$. Alors, si la température de fabrication est de l'ordre T_{m1} , donc la céramique pas encore fondue, la structure finale obtenue contient des particules de céramique non fondues. La plupart des cas, une telle structure présente une grande porosité avec une petite adhérence entre les différents composants ces structures ont des applications en générale limité. Cependant, pour des applications particulières, la présence de ces particules très durs (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, le travail autour T_{m2} va certainement conduire à une oxydation rapide et évaporation de nombreux métaux, ce qui implique la naissance d'une formation ou d'une phase indésirable. Donc notre matériau doit être fabriqué dans une atmosphère protégée ou à une basse pression, et ces deux techniques sont très coûteuses.

I.6.3. L'intérêt d'utilisation des FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

Récemment, les concepts de FGM sont devenus d'intérêts scientifiques pour améliorer l'exécution des systèmes géométriquement complexes des structures.

I.6.4. La Résistance A L'usure Des FGM

Un matériau à gradient évalués peu coûteux par exemple : céramique-métal serait idéal

pour les doublures résistantes à l'usure dans l'industrie de transformation minérale. Un tel matériel comporterait un visage en céramique dur du côté exposé, un visage dur en métal do dos qui peut être boulonné ou soudé à une armature de soutien. Un tel matériau classerait uniquement les caractéristiques suivantes :

- ✓ Résistance d'usure élevée (visage en céramique).
- ✓ Résistance à haute résultante.

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.18. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique et dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

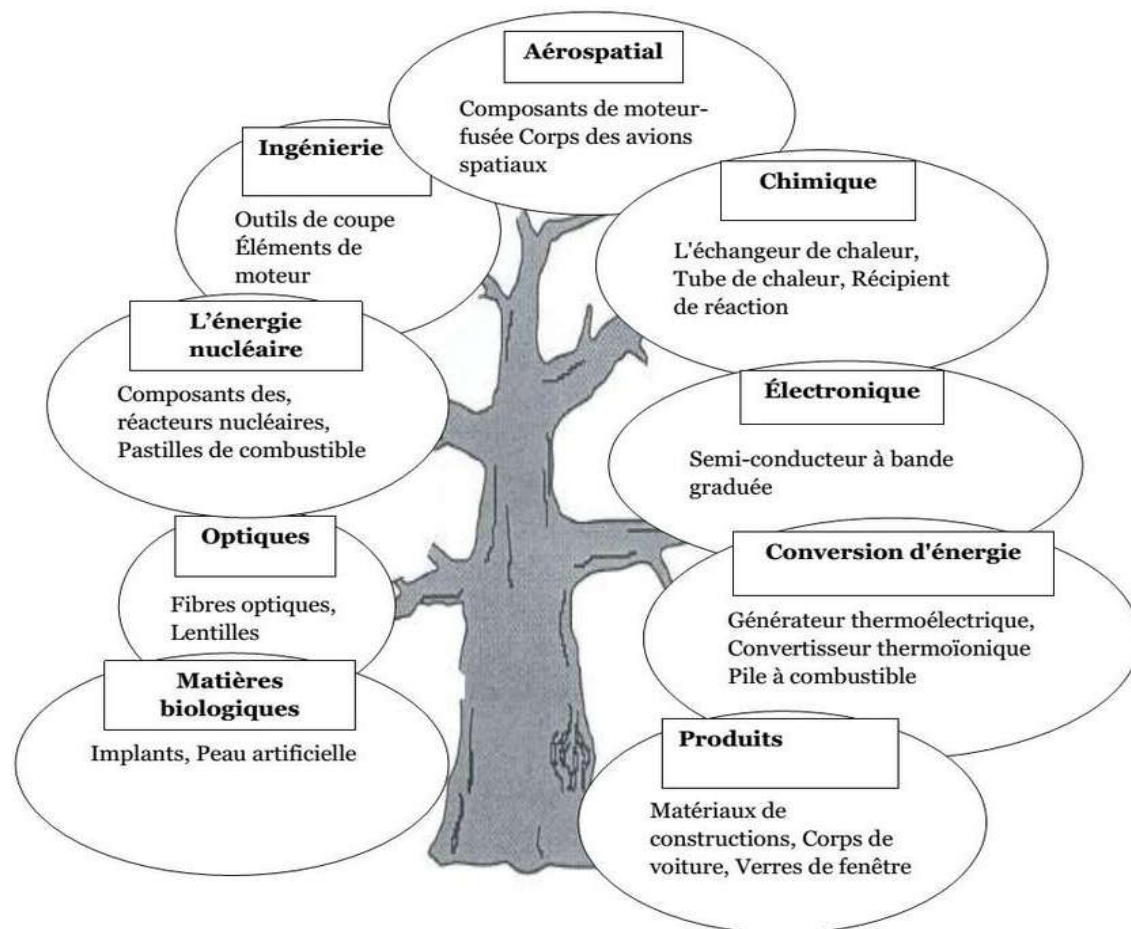


Figure I.18: Principaux domaines d'application des FGM. [3]

I.7. CONCLUSION

Ce chapitre, consacré à la présentation de la notion FGMs, nous avons défini ces types des matériaux, leurs propriétés, leurs domaines d'application, leurs l'histoire et de leur développement ainsi que les techniques d'élaborations. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application. Enfin nous avons terminé par l'étude des différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés du matériau suivant l'épaisseur de la poutre, ces lois pouvaient être puissantielles, exponentielles ou même sigmoïdes.

CHAPITRE II :
LES APPROCHES THEORIQUES

II.1. EVOLUTION DES THEORIES AUX ELEMENTS FINIS POUR LA MODELISATION COMPOSITES

Historiquement Kirchhoff [60] l'un des premier chercheur qui a fait le premier pas envers les théorie des plaque, il a déclenché cet axe avec la négligence de l'effets de CT, d'après ces principes ces types des contraintes ne peuvent être avoir un sens que dans les structures minces, alors que La théorie du premier ordre classique, le plus souvent associée à Reissner[61] ou Mindlin [62]qui furent les premiers à énoncer ses bases et prend en considération les effets du CT à travers l'épaisseur, de part hypothèse des « section droite restent droites » conduit à un vecteur de CT constant dans l'épaisseur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres (théorie de Timoshenko) ou les plaques en flexion/CT (Figure II.1.).Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction du CT y sont introduits.

Il est très souvent qu'on trouve une théorie qui soit applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich ect.) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus serait simple, facile et peu coûteuse en temps de calcul. Une modélisation adéquate pour la prise en compte des déformations de CT, dans les structures spécifiques comme les composites, les sandwichs et qui ont mis en service ces dernières années ces types des matériaux ont pris un espace de recherche. De ce fait, on pourra dire que pour Les travaux qui basés sur les hypothèses de Kirchhoff [63-64], et qui néglige les effets de CT, ne sont adéquates que pour l'analyse des structures comme les composites, sandwichs. Ces théories prévoient mal les réponses des structures multicouches modernes épaisses avec un degré d'anisotropie élevé : cela est dû au faible module de cisaillement de ces matériaux par rapport à leur rigidité d'extension, qui les a rendus faibles en cisaillement, ce qui induit une distribution complexe des contraintes de CT à travers l'épaisseur dans les structures. Dans ce contexte, plusieurs modèles ont été proposés pour prendre en compte l'effet de CT. On peut regrouper ces théories de plaque en 2D deux catégories : Les modèles à mono couche équivalente (approximation globale) et les modèles à couches discrètes (approximation locale). La première catégorie contient des théories du type Reissner-Mindlin [62] étendues aux multicouches où l'on remplace ces derniers par une structure anisotrope homogène équivalente [65-66].

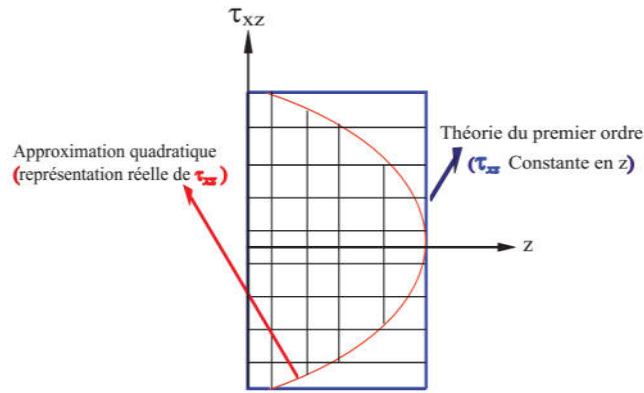


Figure II.1 : Approximation des cisaillements transversaux : constantes (théorie du premier ordre) et quadratiques (ordre supérieur) [64]

Reddy et Chao [65] ont introduit l'effet de déformation de CT dans les plaques composites, en prenant une déformation de cisaillement uniforme constante sur l'ensemble de l'épaisseur de la plaque, cette théorie est populairement connue sous l'appellation « FSDT : First Order Shear Deformation Theory ». Elle exige un facteur arbitraire de correction de cisaillement, en raison de la variation non-linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur qui doit être supposée linéaire. On trouve également des théories d'ordre supérieur HSDT, Higher Order Shear Deformation Theory basées sur l'approximation non linéaire des déplacements 3D, des contraintes 3D ou mixtes [67-69], ainsi que des théories plus fines appelées « RHSDT Refined Higher Order Shear Deformation Theory » [70]. Le principal objectif de toutes ces théories de plaque sont plus ou moins le même, certaines se distinguent par rapport aux autres en termes de précisions, particulièrement sur les contraintes de CT

Une prévision des déplacements et des contraintes des plaques sandwichs stratifiées est donnée par Kim et Cho[67], en utilisant la théorie du premier ordre renforcée, basée sur une théorie variationnelle mixte appelée « EFSDTM, Enhanced First-Order plate Theory based on the mixed variational theory ». Dans la formulation mixte, les contraintes de CT sont basées sur une théorie de plaque d'ordre supérieure efficace appelée « EHOPT (Efficient Higher Order Plate Theory) » qui fût développée par Cho et Paramerter [70].

Dans la deuxième catégorie, les modèles sont basés sur l'approche par couche et se distinguent par la linéarité ou la non-linéarité des champs dans l'épaisseur de chaque couche. Ce sont des modèles sophistiqués qui permettent d'étudier des réponses locales, notamment sur l'interface entre les couches. Bien évidemment le nombre de variables dépend du nombre de couches, qui augmente considérablement le volume de calcul. DiSiuva [69-72] propose le

modèle dit Zig-Zag, source de nombreux travaux complémentaires. Celui-ci se base sur une approche par couche mais avec un nombre de variables indépendants d'un nombre de couches.

Les caractéristiques de base de toute ses théories sont la considération d'une variation parabolique des déformations et des contraintes de CT à travers l'épaisseur et, en même temps, la discontinuité des contraintes sur les couches interfaces du stratifié. Nous présentons sur la figure II.2 la distribution des contraintes de cisaillements transversal CT à traves l'épaisseur, obtenue par trois théories différentes.

Des revues bibliographiques récentes sur les différentes théories pour la modélisation des structures multicouches sont données par [68-76]. Une comparaison intéressante entre les différentes théories est donnée par [68-75]. Des travaux très récents, basés sur la théorie du troisième ordre, Ont également fait l'objet de publication [77]. Une synthèse sur les aspects éléments finis et le lien entre les théories du premier ordre et d'ordre supérieur sont développés dans la section suivante.

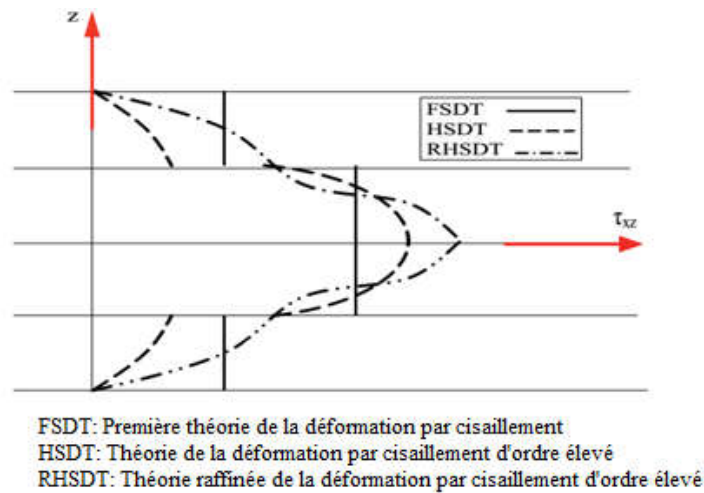


Figure II.2 : Distribution de CT τ_{xz} selon les trois théories [77]

II.2. SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES MODELES DE STRUTURES MULTIOUHES.

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de plusieurs matériaux de nature différente, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à la performance des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice et d'un renfort constitué de fibres. La matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, et.). Le renfort apporte au matériau composites ses performances

mécaniques élevées, alors que la matrice permet de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de les protéger vis-vis des agressions extérieures.

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre n_i de couches homogènes anisotropes collées. La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de CT de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwichs) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transversaux. On trouve dans [78-81-68] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention des résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [82-84]. De même, la prise en compte des endommagements spécifiques aux stratifiés (délaminage, fissure transverse), exige une bonne description des champs au voisinage des interfaces. Durant dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des effets de CT ou des endommagements. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adoptée :

- Approche monocouche équivalente.
- Approche par couche.
- Approche par développement asymptotique.

II.2.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche. Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces, en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff (figure II.3) et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous présentons dans les sections suivantes, les modèles basés sur cette approche.

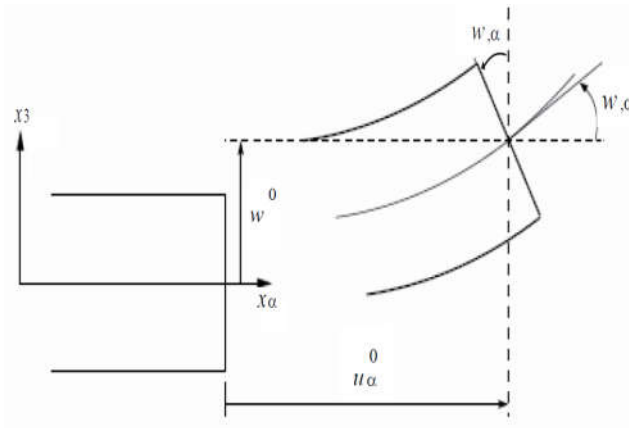


Figure II.3 : Cinématique de love-Kirchhoff [63]

II.2.1.1. Les principaux modèles bases sur cette approche

II.2.1.1.1. Les modèles classiques de Love-Kirchhoff

Ces modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur [63-64]. L'hypothèse des contraintes planes adoptée est-elle de Love-Kirchhoff [85], les déformations dues au CT étant négligées. La normale reste droite et perpendiculaire à la surface moyenne après déformation (figure.II.3).

$$u_1(x_1, x_2, x_3 = z) = u_1^0(x_1, x_2) - zw_{,x1}(x_1, x_2) \quad \text{II.1}$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3 = z) = u_2^0(x_1, x_2) - zw_{,x2}(x_1, x_2) \quad \text{II.2}$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \quad \text{II.3}$$

Avec :

u_1^0 : Déplacement de membrane dans la direction $\alpha=1,2$

$w_{,x\alpha}$: Rotation due à la flexion (sans cisaillement)

w : Déplacement transversal

II.2.1.1.2. Les modèles de Reissner-Mindlin

L'hypothèse cinématique de Reissner-Mindlin [82-86] est adoptée pour introduire l'effet du CT. Elle est basée essentiellement sur les hypothèses suivantes :

➤ **Hypothèses cinématiques**

- H_1 : Hypothèse des sections droites

Les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite mais non nécessairement normale à la surface moyenne dans la configuration déformée

H₂: La composante transversale de la déformation suivant l'épaisseur est constante.

▪ **Hypothèses mécaniques**

H₃: Hypothèse des contraintes planes

La contrainte σ_z est négligeable devant les autres composantes du tenseur des contraintes

H₄: Hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite. Cette hypothèse considère \mathbf{Z} comme axe d'orthotrope de toutes les couches (orthotrope dans le plan LT)

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit (figure II.4) :

$$u_1(x_1, x_2, x_3 = z) = u_1^0(x_1, x_2) - z\varnothing_{,x1}(x_1, x_2) \quad \text{II.4}$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3 = z) = u_2^0(x_1, x_2) - z\varnothing_{,x2}(x_1, x_2) \quad \text{II.5}$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \quad \text{II.6}$$

Avec

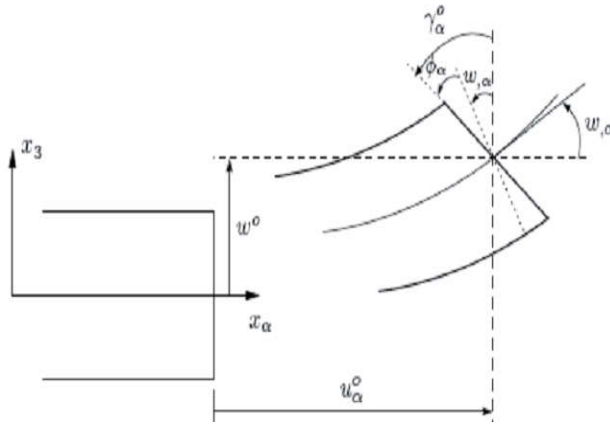
\varnothing_α : La rotation de la section dans le plan x_α, x_3 ($\alpha = 1, 2$).

$\gamma_1^0(w, \alpha, \varnothing, \alpha)$: la déformation de CT sur le plan moyen.

Avec ce choix des champs de déplacements, les déformations de CT γ_α sont constantes suivant Z. Les contraintes de CT sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal.

II.2.1.1.3. Les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement sous des contraintes dans l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (figure II.5).


Figure II.4 : Cinématique de Reissner-Mindlin [63]

La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent, avec $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
 u_i(x_1, x_2, x_3 = z) &= u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) \\
 &+ z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots
 \end{aligned} \tag{II.7}$$

Dans le cas des théories du premier ordre de Reissner-Mindlin, nous avons $\phi_i^{0(j)} = 0$ pour $j = 2, 3, 4$ et $\phi_3^{0(1)} = 0$. Pour réduire le nombre de paramètres des déplacements, plusieurs simplifications sont proposées afin d'aboutir à des modèles d'ordre supérieur. Souvent, on impose les conditions de nullité des contraintes de CT

Aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement de (1.7) est utilisé avec : $\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(2)} = \phi_i^{0(3)} = \phi_i^{0(3)} = \phi_i^{0(1)} = 0$, $\phi_\alpha^{0(1)}$, $\alpha = \{1, 2\}$ dépendent à $\phi_\alpha^{0(3)}$ et $w_{,\alpha}$. L'expression correspondante devient :

$$u_1(x_1, x_2, x_3 = z) = u_1^0(x_1, x_2) + zw_{,x_1}(x_1, x_2) + f(z)\gamma_{x_1}^0(x_1, x_2) \tag{II.8}$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3 = z) = u_2^0(x_1, x_2) + zw_{,x_2}(x_1, x_2) + f(z)\gamma_{x_2}^0(x_1, x_2) \tag{II.9}$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \tag{II.10}$$

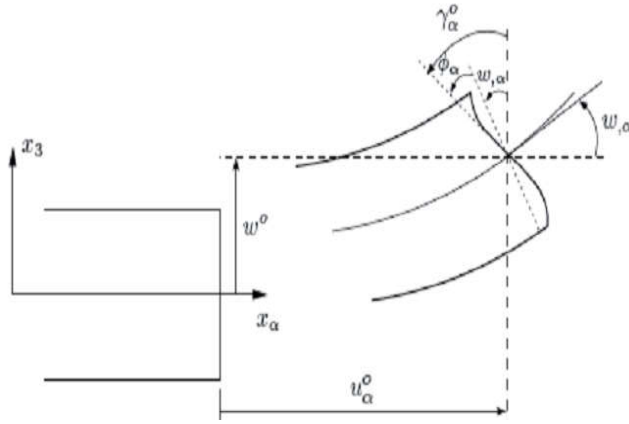


Figure II.5 : Cinématique d'ordre supérieur [63]

Dans ce qui suit, nous rappelons quelques approches de la littérature associées à des modèles d'ordre supérieur. Elles diffèrent selon l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$:

- Approche d'Ambartsumyan [87] :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad \text{II.11}$$

- Approche de Reissner [61], Panc [88] et Kaczkowski [89] :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad \text{II.12}$$

- Approche de Levinson [90], Murthy [91], Reddy [92] et [93] :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad \text{II.13}$$

h : étant l'épaisseur de la plaque multicouche

Dans le modèle de Reddy [92], le champ des déplacements membranaires est cubique et le déplacement normal « w » est constant. Ce modèle donne une bonne approximation des contraintes de CT par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution de ces contraintes est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de CT discontinus aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformations est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale sur l'interface des structures multicouches.

II.2.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface. Plusieurs modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [69-74-92-94-96]. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (le nombre de variables dépend du nombre de couches), mais permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan. D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles à couches discrètes, où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces, et les modèles Zig-Zag où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact et est indépendante du nombre de couches (figure II.6).

II.2.3. Les modèles Zig-Zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Siuva est le premier à proposer le modèle Zig-Zag du premier ordre [71-69]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ global des déplacements d'une théorie du premier ordre et d'une fonction Zig-Zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction Zig-Zag donne une contribution des déplacements membranaires, continue en Z , mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (Figure II.7). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de CT aux interfaces est assurée. L'avantage principal du champ de déplacements des modèles Zig-Zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la variation des conditions de continuité, sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction du CT est évité. En se basant sur le concept Zig-Zag premier ordre [71], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives du modèle en question [92-68-96-97].

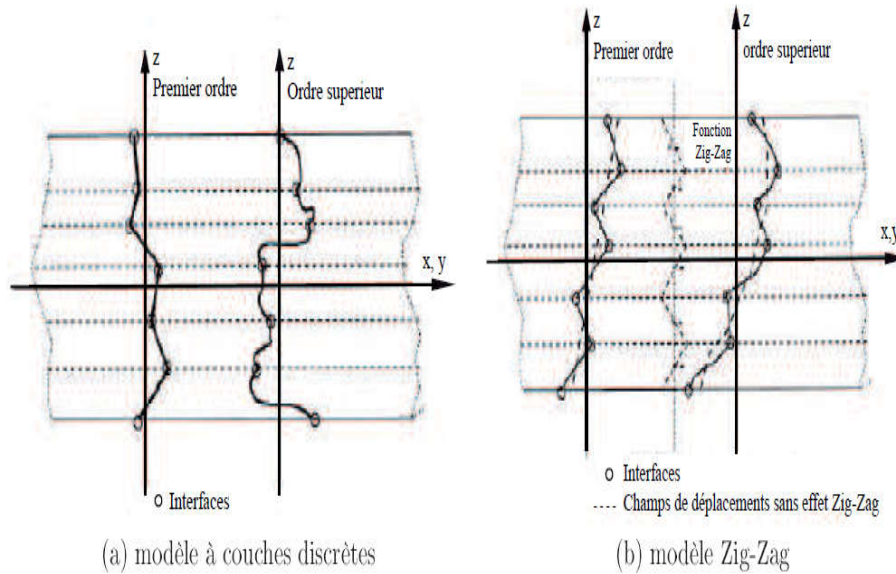


Figure II.6 : Champs de déplacement pour les deux catégories de modèles. Approche cinématique [70]

L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ Zig-Zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacements d'ordre supérieur (souvent cubique) [67-95-98] (figure.II.8). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres. Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle Zig-Zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles Zig-Zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. Le calcul des contraintes de CT par les équations constitutives des modèles Zig-Zag devient, moins précis quand le rapport d'éclatement diminue [63]. Un autre inconvénient des modèles Zig-Zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur, est la continuité de type C^1 requise qui complique leur implémentation numérique.

II.2.4. Les modèles à couches discrètes

Les modèles à couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou Zig-Zag, puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (figures II.6 et II.9). En fait, avec les modèles à couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplées par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couches de la plaque composite.

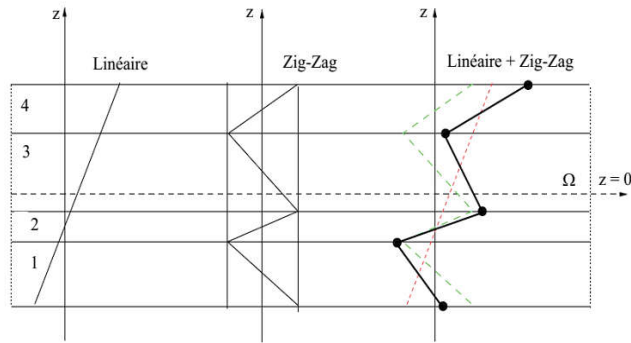
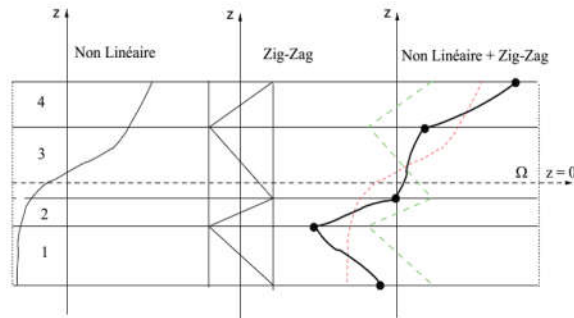


Figure II.7 : champ de déplacement des modèles Zigzag du premier ordre [70]



Figures II.8 : Champ de déplacement des modèles Zig-Zag d'ordre supérieur [70]

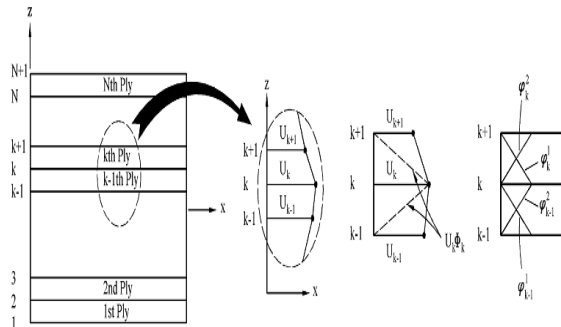


Figure II.9: Représentation des déplacements et des fonctions d'interpolation Lagrangienne globales utilisées dans la théorie LWT [70]

- Dans leurs travaux [98-105], les auteurs proposent une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couches ont obtenu en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.
- Les travaux suivants [67-69] et [106-107] utilisent une approximation des champs de contraintes et de déplacements par couche ou une contrainte mixte cinématique :

- Owen and J.A Figueiras [104] utilisent une fonction parabolique pour les contraintes de CT et le déplacement transversal. Ils développent un modèle basé sur l'approche discrète par couche en introduisant un élément fini lagrangien à 9 nœuds et l'élément Hétérosis.
 - Ren [105] utilisent un champ de contraintes dont la composante de CT est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces.
 - Pagano [69] proposent une approche dans laquelle le champ de contraintes est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées par couche, à partir de l'équilibre des forces et des moments. Les contraintes planes sont supposées constantes dans l'épaisseur ;
 - Yin [167] utilisent les fonctions de contraintes par couche [107] pour déterminer les contraintes inters laminaires. Elles sont approchées de façon polynomiale dans l'épaisseur ;
 - Plagianakos et al [108] proposent une approche dans laquelle le champ de déplacements dans chaque couche discrète, à travers l'épaisseur du stratifié, inclut des distributions quadratiques et cubiques des déplacements plans, ajouté à cela des approximations linéaires associées à la théorie du premier ordre par couche.
- Parmi les modèles à couches discrètes existants, nous pouvons trouver des modèles multipartielles. Le premier travail semble être celui de Pagano [69] qui propose le modèle local. Celui est construit à partir de la formulation variationnelle de Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche. Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratiques pour les contraintes de CT et donc cubiques pour les contraintes normales. La formulation variationnelle de Hellinger-Reissner, restreinte aux approximations de ces champs de contraintes, conduit à une cinématique du multicouche à $7n$ champs en (x, y) , (n étant le nombre de couches de la plaque). Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des mouvements du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair. La formulation mixte de Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenant dans la formulation. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux, dont l'objectif est de proposer une série des implications permettant d'alléger la formulation tout en servant

un bon niveau de prédictibilité, nous citons en particulier les travaux développés dans les références [94-109]

II.2.5. Approche par développement asymptotique

Le développement asymptotique est appliqué à des structures a priori peu épaisses, où le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient à niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvement). Les références [77-96], utilisent les résultats de la théorie classique des plaques. Puis, au voisinage du bord, les auteurs correspondants posent le problème tridimensionnel de la détermination des champs (déplacements et contraintes). Ce problème est décomposé en problèmes bidimensionnels (couches limites perpendiculaires au bord). Ensuite, on introduit une approche mixte en contrainte-déplacement résolue par des développements en séries de Fourier par exemple. L'endommagement dans les couches et aux interfaces sont prise en compte.

II.2.6. Facteur de correction du CT

Dans les années 70, le champ de déplacements d'un point quelconque de la plaque fut basé sur la théorie de premier ordre. En optant pour ce choix, les chercheurs considéraient que les contraintes et les déformations de CT sont constantes à travers l'épaisseur. Dans le cas réel, ceci n'est pas vrai. En effet, les contraintes de CT sont quadratiques à travers l'épaisseur (figure II.1). Pour corriger la constance de CT, dont l'expression est issue de la théorie du premier ordre des facteurs de corrosion sont introduits. Les facteurs de correction sont calculés à l'aide d'une comparaison entre l'énergie de τ associée à la théorie du premier ordre et celle due aux contraintes de CT. Ces contraintes sont déduites des équations de l'équilibre tridimensionnel [95-110-111]. Un calcul plus exact [112] des facteurs de correction est obtenu en composant l'énergie de cisaillement du premier ordre et celle associée ordre et celle associée à la théorie d'ordre supérieur. Dans le cas de la théorie du premier ordre, le coefficient correctif K permet d'estimer a priori la sensibilité des poutres au cisaillement transversal. Dans une section composite, cela permet d'optimiser les orientations des fibres quand il s'agit des matériaux unidirectionnels ou les épaisseurs relatives des différentes couches dans les autres cas :

Les facteurs de correction K_{11} , K_{22} , K_{33} sont définis par :

Pour un matériau isotrope [112-113], nous obtenons en générale

$U_{ct} = k\bar{U}_{ct}$ et ($U_{ct}, k\bar{U}_{ct}$ sont des énergies de cisaillement obtenues par les équations d'équilibres et par la théorie du premier ordre « Mindlin » respectivement), ce qui donne :

($K=K_{11}=K_{22}=5/6$), pour les matériaux composites, deux facteurs de correction K_{11} , et K_{22} sont introduites :

$$U_{ct} = k_{11}\bar{U}_{ct1}, \quad U_{ct} = k_{22}\bar{U}_{ct2} \quad \text{II.14}$$

U_{ct1} et \bar{U}_{ct2} : Energies suivant l'axe x

U_{ct2} et \bar{U}_{ct2} : Energie suivant l'axe y

Les facteurs peuvent devenir très petits pour les structures sandwichs. Vlachoutsis [101] propose une étude détaillée sur l'évolution de ces facteurs suivant le type de tarification. Il a notamment constaté que, quand on considère un multicouche à nombre de couches croissant, les facteurs de correction ne convergent vers 5/6, mais vers une autre valeur, dépendant du matériau utilisé dans la couche élémentaire. Nous pouvons apporter une explication à ce phénomène. En effet, lorsque le nombre de couche augmente, les contraintes de τ tendent à devenir paraboliques (comme dans une plaque homogène). Par contre, les déformations de CT seront toujours paraboliques par morceaux, avec des discontinuités proportionnelles à G_{13}/G_{23} si les fibres sont successivement orientées à 0° et 90° . Or le facteur de correction, essentiellement basé sur un critère énergétique, utilise le produit de la contrainte par la déformation. Il ne peut tendre vers 5/6 que si les deux distributions (contrainte et déformation) sont quadratiques, sans discontinuité.

- Bouabdellah [111] à développer une méthode de calcul des facteurs de correction du CT pour les coques cylindrique courbes. Il les identifier par une comparaison entre l'énergie de cisaillement résultante des équations d'équilibres et celle prévenant de la déformation de CT de premier ordre (énergie effective). L'auteur et aussi étudier l'influence du rapport d'épaisseur /rayon (h/R) sur les facteurs de correction K_{xz} et K_{yz} . On note que R et le rayon de courbure de la coque. Il a conclu que plus h/R augmente, plus l'écart entre $K=5/6$ « d'une plaque isotrope » et K_{xz} « d'une plaque multicouche » augmente.
- Auricchio et Al [114] ont adopté le principe d'équivalence entre l'énergie de CT calculée par la contrainte de $CT\tau^K$ (elle-même obtenue par les relations constitutives de la théorie du premier ordre) et l'énergie de CT calculée en adoptant la contrainte $\hat{\tau}^K$ (récupérée par les équations d'équilibres tridimensionnelles).
- Choa et al [100] ont proposé une autre méthode de calcul des facteurs de correction en comparant l'énergie de cisaillement résultante de la théorie du premier ordre et celle déduite

des équations d'équilibres, de façon à obtenir des facteurs de correction initiaux entre FSDT « First Shear Deformation Theory » et EHOST « Efficient High Order Shear Theory ». Cela permet de corriger les déformations de CT qui réduisent l'effet de rotation de l'angle de cisaillement γ

II.2.7. Modèles élément finis pour les structures isotropes et multicouches

Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simple simples. Pour les cas complexe, plusieurs méthodes numériques ont été développées. On ne s'intéresse ici qu'à la méthode des éléments finis, outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (Déplacement, contrainte, mixte et hybride). Ci-dessous, nous présentons les approches géométriques nécessaires pour le développement des éléments finis différentes contributions d'élément finis relatives à des modèles mécaniques décrits précédemment

II.2.7.1. Approche géométrique

Nous rappelons brièvement que la modélisation des coques par élément finis repose sur trois approches distinctes :

II.2.7.1.1. Approche par facette plane

Utilisée dès 1961 par Green et al [99], elle consiste à superposer à un élément de plaque (flexion), un élément de membrane. Cette approche présente certains avantages dont la simplicité de la formulation et la description géométrique ainsi que la représentation correcte des modes rigides. Parmi ses inconvénients, on compte la restriction aux éléments triangulaires lorsque les coques étudiées présentent des gauchissements importants. Les résultats qu'elle produit sont acceptables tant que les courbures ne sont importantes, car dans ces cas, il existe un couplage entre les comportements de membrane et de flexion qu'elle n'inclut pas. Une présentation plus fidèle de la géométrie des coques et de leurs comportements est assurée par des éléments courbes dans les deux approches qui suivent

II.2.7.1.2. Approche curviligne

La formulation des éléments correspondants repose sur une théorie de coque courbe et utilise un repère curviligne pour la définition des grandeurs cinématiques et statiques. La qualité des résultats obtenue à partir de cette approche dépend aussi bien du modèle numérique que la théorie des coques utilisées. Différentes théories de coques, utilisant les mêmes

hypothèses cinématiques, se distinguent par le degré d'approximation des grandeurs géométriques retenue dans la définition des relations déformation C- déplacement. Les principaux problèmes rencontrés dans cette approche sont liés à la mauvaise représentation des modes de déformations constantes ou nulles et aux blocages en membrane et/ou cisaillement.

II.2.7.1.3. Approche Cartésienne

Initiée au début des années 70 par Ahmed, Irons et Zienkiewicz [96], elle utilise des éléments isoparamétrique courbes ou tridimensionnels dégénérés. Cette approche consiste à discrétiser directement les équations tridimensionnelles de la mécanique. On passe du problème 3D à un problème bidimensionnel en introduisant les hypothèses que les normales à la surface moyenne sont inextensibles et restent droites. Sa principale qualité réside dans la souplesse d'utilisation pour modéliser des coques de formes quelconques. Les éléments correspondants utilisent les mêmes approximations pour discrétiser la géométrie et la cinématique. L'approche du solide dégénéré trouve son application dans des domaines variés de calcul des structures comme l'analyse linéaire des coques composites multicouches [83-105-101] ou la prise en compte des non linéarités géométriques et matérielles [87-115-116], et autres. Des travaux récents utilisant l'approche en question ont vu le jour, avec notamment des cinématiques particulières rendant les éléments robustes avec un minimum de nœuds et de ddl/nœud. Nous citons en particulier les travaux des références [117-118-119].

II.2.8. Modèles éléments finis de plaque et des coques composites

On ne peut pas aborder la littérature sur le sujet sans citer l'article de référence de Ahmed, Irons et Zienkiewicz [96], ces auteurs ont proposé pour la première fois un élément fini assez particulier : il s'agit d'un modèle de coque à 8 nœuds dérivant d'un solide 3D qui dégénère sur une surface moyenne, avec la possibilité de prendre en compte le gauchissement d'une coque. Ce travail pionnier a laissé place à un développement extraordinaire durant les quatre dernières décennies, en matière éléments finis à cinématique particulière. Une synthèse bibliographique est résumée par [97] et [98]. Un grand nombre d'auteurs, comme Bathe, Hughes, Zienkiewicz, Taylor, Dhatt, etc. ont apporté un savoir-faire qui a permis de rendre la formulation d'éléments finis de Reissner-Mindlin simple et abordable.

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles de premier ordre de Reissner-Mindlin avec des facteurs de correction [95-120-121]. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par nœud. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter les phénomènes de blocage en CT. Grâce à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité C^0 , les degrés de

liberté et les conditions limites physiquement faciles à interpréter, convergence rapide...) et leur précision en estimant des champs globaux, ces éléments finis restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux.

Un des inconvénients majeurs de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction du CT pour modéliser des structures composites.

II.2.8.1. Eléments finis sur la théorie du premier ordre (FSDT : First Order Shear Deformation Theory) :

Les dernières décennies ont vu le développement d'éléments finis, basés sur des théories du premier ordre (Reissner-Mindlin pour les plaques en flexion/CT et ou Kirchhoff pour les plaques minces sans effet de CT), L'emporter sur celui d'éléments finis plus « exotiques » dits l'ordre supérieurs, qui à l'époque étaient encore à leur stade embryonnaire. Une liste non exhaustive d'éléments finis du premier ordre, en particulier pour les plaques épaisses en flexion/CT, mérite ainsi d'être citée :

- Les éléments DSQ et DST de largeur [95] sont basés sur un modèle variationnel mixte modifié. L'auteur calcule la déformation de CT en partant des équations d'équilibres ($\{\gamma\}$ constant, ω cubique β quadratique). Ensuite, il ajoute à chaque côté de l'élément deux variables cinématiques (ω_x, ω_y), et deux rotation au milieu (β_s, β_n). Il obtient par exemple 8β et 4ω , pour un quadrilatère qui seront éliminés par les équations d'équilibres. Les deux éléments éliminent le verrouillage et ne présentent pas de modes parasites. Cependant, la formulation théorique reste complexe et nous devons calculer pour chaque problème les facteurs de corrections :
- Bouabdellah [111] a utilisé une formulation mixte de type Hellinger-Reissner en contrainte. Toutes les contraintes sont définies dans un seul vecteur $\{\sigma\}$ qu'il exprime en termes des paramètres $\{\alpha\}$. Au moins 14 paramètres sont nécessaires pour pouvoir éviter l'apparition des modes parasites, ils sont éliminés par condensation statique au niveau élémentaire. L'élément quadrilatéral à 4 nœuds donne de bons résultats sans modes parasites. Cependant, cette technique reste limitée à l'étude des structures courbes essentiellement cylindriques. D'autre part, elle fait appel aux facteurs de correction du CT pour simuler le comportement mécanique de structures composites multicouches :
- L'élément finis proposé par Katili [68] pour les plaques est basé sur la théorie des plaques épaisses de Reissner-Mindlin (Théorie du premier ordre). La fonctionnelle utilisée est de ce type mixte modifié de Hu-Washizu. Les variables cinématiques (w, B_x, B_y) de continuité C^0 sont interpolées de manière quadratique en introduisant des variables α_k au milieu de côté K.

α_k sont éliminés par une technique utilisant les équations d'équilibres. L'élément fini Baptisé DST-BK élimine le verrouillage en CT et ne présente pas de modes parasites. Il utilise également les facteurs de correction du CT pour simuler le comportement mécanique de structure composites multicouches.

- ELM4 [121] est un élément à 4 nœuds et 5 dll. Celui-ci est obtenu via une approche mixte améliorée. La formulation variationnelle adoptée introduit des modes incompatibles pour améliorer la précision sur les déformations planes.
- DMTS « Discrète Mindlin Triangle for Shell » [93] est un élément de coque triangulaire à 3 nœuds, formulés sur la base du nouveau modèle variationnel DDM (Déplacement discret Mindlin). On introduit de la même façon que pour DMQS deux hypothèses discrètes de Mindlin (Cinématique et mécanique) au niveau de la plaque ou de la partie « Flexion/CT ». DTMS utilise l'approche par « facettes planes » avec une combinaison de l'élément plan de membrane classique CST à celui de la plaque en flexion/CT DKMT [68].
- CT MQ20 [122] est un élément fini simple de plaque de flexion/CT à nœud de 20 dll « 5 dll/nœud » basé sur la théorie du premier ordre. Il est proposé pour l'analyse des plaques composites et stratifiées arbitraire. Cet élément est construit selon la procédure suivante :
 - La fonction de variation de la rotation et de la variation de CT le long de chaque côté de l'élément sont déterminées à l'aide de la théorie des poutres de Timochenko.
 - Les champs élémentaires des déplacements dans le plan et des rotations ainsi que le champ des déformations de CT sont déterminés par utilisation de la technique de l'interpolation améliorée. En outre, une procédure Hybride simple est également proposée pour améliorer les solutions de contraintes.
- Belinha et al [123] ont étendu puis utilisé la méthode « EFGM » : Elément Free Galerkin Method » pour l'analyse des plaques anisotropes et stratifiées, en considérant la théorie de Reissner- Mindlin (FSDT). Les fonctions d'approximation sont calculées sur la base d'une approche au sens des moindres carrés (MLS : Moving Least Square). Le verrouillage en CT est évité par l'utilisation de polynômes d'interpolation appropriés. La continuité étant bien évidemment assurée selon les auteurs.
- NHMiSP4/ml [124] (Natural Hybrid Mixed with Shear projection 4 nœud/ Multi Layer) est élément de coque quadrilatéral à 4 nœuds iso paramétrique courbe avec une formulation variationnelle hybride naturelle (au sens de Pian modifié) pour la membrane et une formulation variationnelle mixte- hybride pour la flexion et le CT.
- Dahia et al [74] ont développé un élément fini quadrilatéral à 4 nœuds et 5 dll/nœud pour les plaques stratifiées, à partir de l'approche hybride des contraintes basée sur la théorie du

premier ordre. Le nouvel élément appelé « HQ4 » est une extension de l'élément 9BQ4 proposé par Miranda et Ubertini en 2006. Ces derniers l'ont reformulé pour introduire le couplage membrane-flexion des plaques stratifiées. L'élément est conçu pour être simple, stable et sans verrouillage. Les contraintes de CT à travers l'épaisseur du stratifié sont reconstruites par l'utilisation des équations d'équilibres tridimensionnelles.

- Moleiro et al [76] ont récemment présenté un modèle d'élément fini mixte 4 nœuds et 5ddl/nœud pour l'analyse statique des plaques composites stratifiées. La formulation est basée sur un principe variationnel au sens des moindres carrés que les auteurs considèrent comme une approche alternative aux modèles éléments finis issus des formulations variationnelles faibles classiques.

II.2.8.2. Élément finis basés sur la théorie d'ordre supérieur

- Pandit et al [98] ont supposé un élément fini de plaque iso paramétrique quadrilatéral à 9 nœuds et 11ddl par nœud, basé sur la théorie d'ordre supérieur dite « Zig-Zag », avec une variation cubique des déplacements plans, le déplacement transversal étant quadratique.
- Xiao et al [99] ont développé deux modèles élément finis, nommés MQ-MLPG et TPS-MLPG, pour l'analyse des plaques composites stratifiées épais élastiques. Pour développer leur modèle, les auteurs utilisent d'une part la méthode sans maillage (MLPG : Meshless Local Petrov-Galerkin) avec deux fonction radiales MQ « Multi Quadratics » et TPS « Thinplate splines » et, d'autre part la théorie HOSNDPT (higher Order Shear and Normal Deformable Plate theory).
- Engblom et Ochoa [125] ont développé le modèle QHD40 sur la base d'une théorie d'ordre supérieur en déplacement avec variation quadratique de « u » et « v » dans l'épaisseur. Il possède huit nœuds et sept degrés de liberté par nœud dans les coins (3 déplacements, deux rotations, deux termes d'ordre supérieur correspondant au déplacement dans le plan) et trois degrés de liberté par nœud aux milieux des cotés (déplacement transversal et deux rotations). Les contraintes de CT sont obtenues à partir des équations d'équilibres et les contraintes planes via les équations constitutives.
- Topdar et al [126] ont développé un élément fini « PRHSDT : Présent Refined Higher Order Shear Deformation » Basé sur la théorie des plaques proposée par Cho et Parameter [70]. Celui-ci possède nœud et 7ddl par nœuds ($u, v, \omega, \beta_x, \beta_y, \phi_x, \phi_y$), ϕ_x et ϕ_y étant les angles de gauchissement. Le déplacement transversal ω est approché par des fonctions d'interpolation bi-cubique d'Hermite, les auteurs variables sont approchés par des fonctions d'interpolation bilinéaires. L'élément fini proposé satisfait les conditions de continuité C^1 du déplacement

transversal aux interfaces et les conditions de contraintes nulles sur les deux faces inférieures et supérieure. Les continuités inter-élémentaires sont ainsi satisfaites.

- Ferreira et al [127] ont proposé un élément fini d'ordre supérieur formulé sur la base de la théorie de Reddy [92], mais avec une méthode sans maillage (Meshless Method) Basée sur des fonctions de base multi quadratiques radiales RBFs.

II.3. CONCLUSION

Grace à son caractère universel, la méthode des éléments finis (MEF) est l'outil d'ingénieur indispensable pour l'analyse des structures composites par les modèles d'écrits ci-dessus. La plupart des modèles EF raffinés basés sur les théories d'ordre supérieur ou des couches discrètes présentent un nombre variable nodal, qui augmente avec le nombre de couche, ou des degrés de liberté non conventionnels, souvent difficiles à appliquer en pratique. L'ingénieur doit choisir entre les EF classique, moins couteux mais beaucoup. Il s'agit bien de là de l'objectif visé par cette thèse, à savoir proposer des modèles EF simple et robustes pour l'analyse des plaques et des coques composites et stratifiées.

CHAPITRE III :
IMPLEMENTATION DES LOIS DE
COMPORTEMENT DES FGMs
DANS ABAQUS

III.1. INTRODUCTION

Le développement de l'ingénierie simultanée propulsée par des exigences de réduction de coûts et de temps de fabrication ont poussé les industriels à s'intéresser de plus en plus à la modélisation numérique. La généralisation de l'utilisation des outils virtuels pour optimisation des pièces mécaniques a été possible grâce à l'apparition de logiciels performants et flexibles. Ce chapitre est consacré à la présentation des aspects numériques liés à l'implémentation du modèle UMAT dans le code de calcul Abaqus. Ce dernier offre la possibilité d'introduire des nouvelles lois de comportement en utilisant des sous-routines utilisateurs qui dépend du schéma de résolution choisi. La sous-routine UMAT est utilisée lors de la simulation avec le schéma Statique Implicite (S.I.). Une description de la discrétisation spatiale, par éléments finis employée dans le code de calcul Abaqus est d'abord donnée (C3D20). Puis nous présentons les schémas de résolution Statique Implicite (Abaqus/Standard) dans le cas d'un problème mécanique, avec un schéma de comptabilité comment ABAQUS / Standard calcule la raideur de l'élément lors d'une itération.

III.2. PRESENTATION DU CODE ABAQUS

Il se compose par trois produits, Abaqus/Standard, Abaqus/Explicit, Abaqus/CAE [128]:

III.2.1. ABAQUS/Standard

ABAQUS Est un solveur généraliste qui recourt à un schéma traditionnel d'intégration implicite.

- Résolution basée sur l'algorithme de Newton-Raphson et la méthode de Riks
- Problèmes linéaires et non linéaires, géométrie 1D, 2D, 3D et Axisymétrique
- Nombreuses procédures d'analyse dans le domaine temporel et fréquentiel.

III.2.2. ABAQUS/Explicit

ABAQUS/ Explicite Un schéma d'intégration explicite pour résoudre des problèmes dynamiques ou quasi-statiques non-linéaires.

- Analyse non linéaire (discrétisation spatiale et temporelle)
- Problème transitoire et dynamique des structures
- Résolution basée sur la méthode explicite d'intégration en temps

III.2.3. ABAQUS/CAE

ABAQUS/CAE Constitue une interface intégrée de visualisation et de modélisation pour les dits solveurs. Chacun de ces produits est complété par des modules additionnels et optionnels, spécifiques à certaines applications.

ABAQUS fut d'abord conçu pour analyser les comportements non-linéaires. Il possède en conséquence une vaste gamme de modèles de matériau. Ses modélisations d'élastomères, en particulier, méritent d'être reconnues.

III.2.4. Procédure de traitement des problèmes sous ABAQUS

Une analyse par Abaqus est généralement composée de 3 étapes, comme montré dans la figure III.1. Dans l'étape de prétraitement, on doit définir le modèle et créer le fichier d'entrée du calcul (fichier *.inp), qui contient toutes les données du problème et du schéma de résolution. Pour définir un modèle dans Abaqus/CAE, il y a 2 façons de procéder. La méthode la plus simple est d'utiliser l'interface graphique fournie par Abaqus/CAE, ou l'entrée directe par fichier *.inp. L'autre est l'utilisation d'un script en langage Python. Cette méthode est plus compliquée mais plus flexible dans la création du modèle. Elle permet de définir des géométries complexes ou des conditions aux limites « non-standard » dans l'interface graphique. Le modèle créé, quelle que soit la méthode utilisée, sera interprété par un compilateur de langage Python pour générer le fichier d'entrée (.inp), qui contient toutes les informations nécessaires à la définition d'un problème élément fini : les nœuds, les éléments, les comportements, les conditions limites, le schéma de résolution et les paramètres de convergence. Ces divers éléments sont repérés grâce à des mots clefs précédé d'un astérisque '*'.

III.2.4.1. Différents fichiers pour la simulation sous Abaqus

Le choix du solveur dépend du problème posé. Un ensemble de fichier sont alors générés, dont :

- Fichier *.log, qui regroupe les informations sur les licences disponibles, et l'échec ou le succès du calcul (une erreur dans le fichier *.inp est donné comme échec de calcul) ;
- Fichier *.dat, qui reprend les mots clefs du fichier *.inp et indique également les erreurs potentielles sur l'utilisation des mots-clés ;
- Fichier *.msg, qui donne les informations sur les incréments de calcul. Il rappelle également les paramètres de convergence ;
- Fichier *.sta, qui synthétise les caractéristiques des incréments (pas de temps, nombre d'itérations...);

- Fichier *.odb, dans lequel sont écrites les variables calculées lors de la résolution du problème.

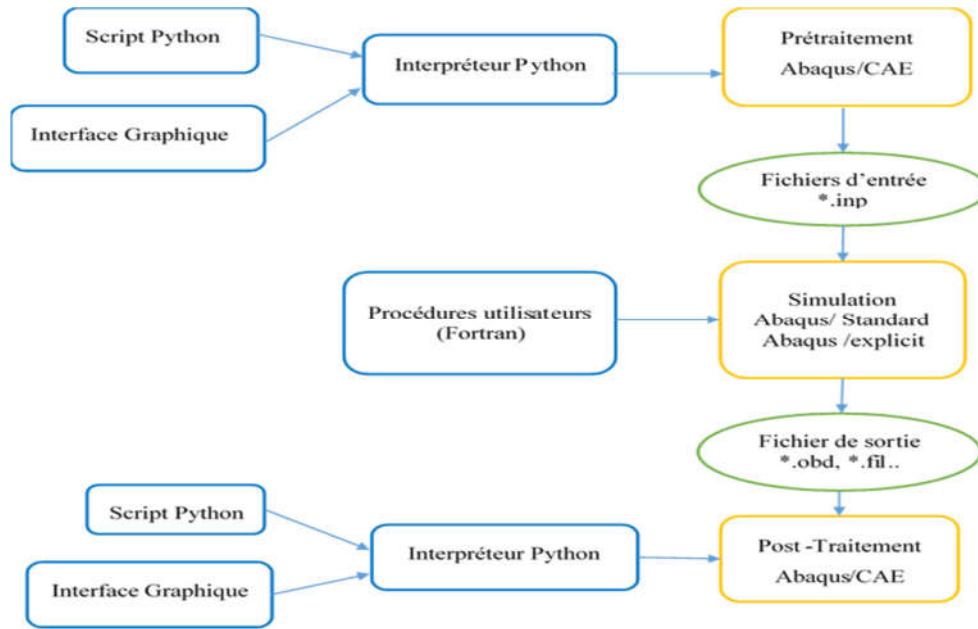


Figure III.1 : Schéma de résolution d'un problème par Abaqus [128]

Mis à part ce dernier fichier, tous les autres sont des fichiers texte.

Les résultats obtenus (fichier *.odb) sont ensuite visualisés et traités dans Abaqus/CAE, et éventuellement post-traités par des scripts en Python

Tableau III.1 : Procédures de calculs dans Abaqus.

Static Analysis	Problèmes quasi-statiques.
Explicit Dynamic Analysis	Problèmes dynamiques avec effets d'inertie.
Mass Diffusion	Diffusion de matière assistée par un champ mécanique
Uncoupled Heat Transfer	Diffusion thermique.
Coupled Temp-Displacement	Résolution couplée de problèmes mécanique et Thermique.

III.2.5. Schémas de résolution

Abaqus permet de nombreux types d'analyses comme illustré dans le tableau III.1, et brièvement présentées dans ce qui suit :

III.2.5.1. Procédure « static »

Cette procédure est utilisée quand les effets d'inertie peuvent être négligés (hypothèse quasi-statique). Elle permet de prendre en compte les non-linéarités géométriques (causé par les

grands déplacements) ou du matériau, et également l'influence de la vitesse de chargement, ou des couplages avec un champ de température (dont les variations spatiales et temporelles sont données en conditions initiales) ;

III.2.5.2. Procédure « explicit dynamic »

Elle permet d'analyser les problèmes en considérant les effets d'inertie. Pour cette procédure, le déplacement et la vitesse sont calculés au début de chaque incrément. Par conséquent, on n'a pas besoin de former et d'inverser la matrice de raideur globale comme dans la procédure « implicit dynamic ». Le coût du calcul est moins important mais la procédure est conditionnellement stable (la taille d'incrément est limitée) ;

III.2.5.3. Procédure de « mass-diffusion »

Il s'agit d'une procédure qui permet de modéliser en régime permanent ou transitoire la diffusion de la température ou la diffusion de matière dans une structure (dans les deux cas, le numéro du degré de liberté utilisé par Abaqus est le même : c'est le 11ème sur chaque nœud). Il permet de prendre en compte l'influence de la pression hydrostatique sur la diffusion de matière, mais pour un champ de contrainte fixé, et donné en condition initiale ;

III.2.5.4. Procédure « uncoupled heat transfer »

Cette procédure est utilisée pour modéliser la conduction thermique (en transitoire ou non) dans une structure ;

III.2.5.5. Procédure « temp-dplacement »

Cette procédure permet de résoudre un problème couplé mécanique-thermique en régime transitoire ou non. Le comportement mécanique peut être modifié par le champ de température, mais l'inverse n'est pas possible : la diffusion de la température suit une loi de Fourier.

III.2.6. Développement des procédures utilisateurs

Le code Abaqus permet en plus à l'utilisateur de définir un certain nombre de données du calcul et ses propres éléments de modèle, grâce à des procédures utilisateurs. Ces procédures sont écrites en langage Fortran 90 [129] ou C, compilées par le code et incluent dans le modèle au début d'analyse. Les procédures les plus utilisées incluent :

- DLOAD : cette procédure définit un chargement mécanique non-uniforme comme la pression et la force volumique ;
- ORIENT : définition d'un repère local en chaque point du matériau (en chaque point d'intégration d'un élément fini) ;

- UEL : cette procédure définit un élément fini dans Abaqus/Standard (VUEL pour des calculs en dynamique) ;
- UMAT : définition d'une loi de comportement mécanique dans Abaqus/Standard (VUMAT pour des calculs en dynamique) ;
- UMATHT : définition d'un flux de matière ou de chaleur ;
- USDFLD : récupération des champs convergés en tout point d'intégration du modèle.

Les figures III.7 et III.8 présentent les étapes et la position de quelques procédures utilisateurs qui peuvent être implémenter dans logiciel Abaqus.

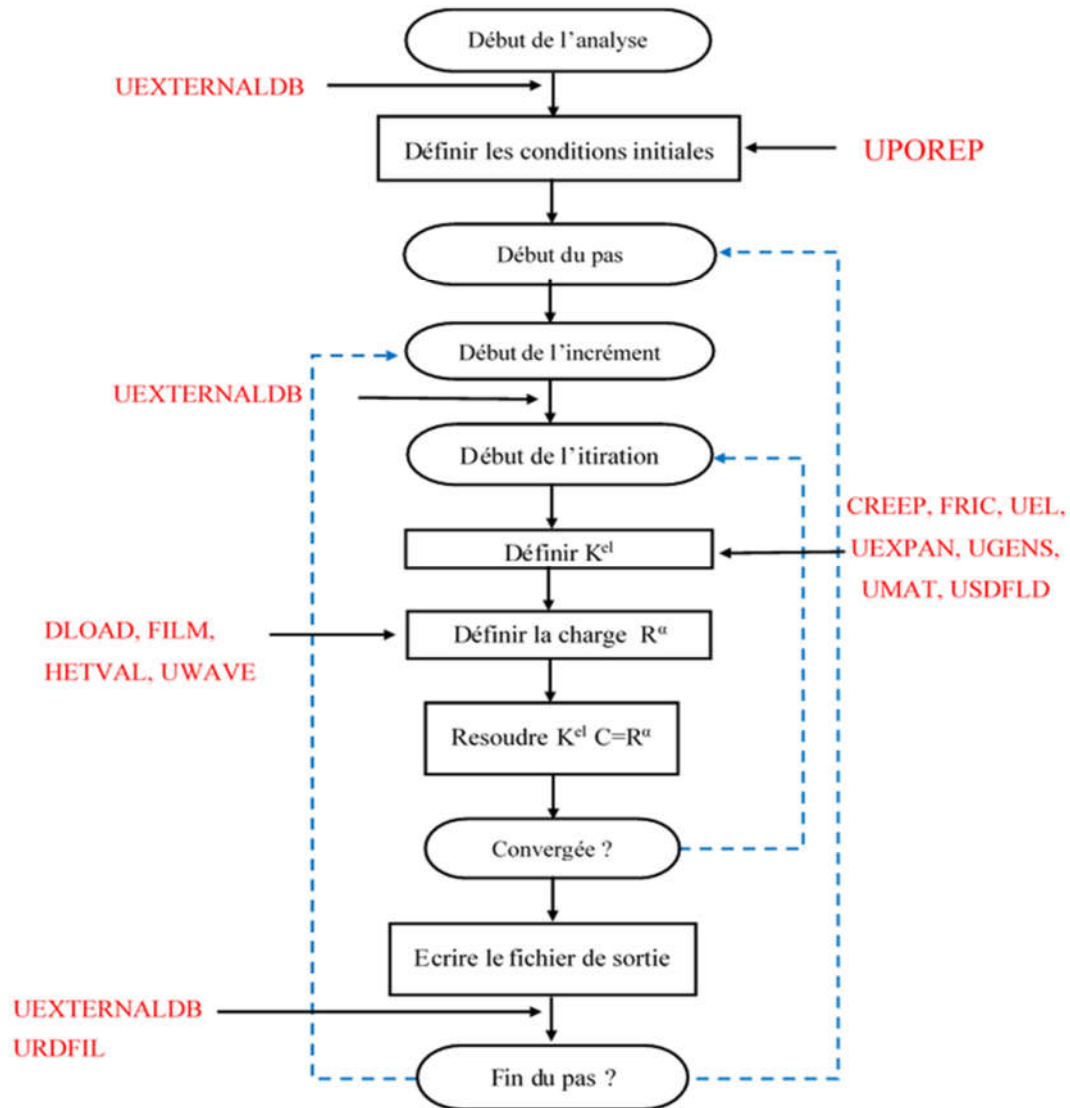


Figure III.2 : Flux des données de base et des actions depuis le début d'une analyse ABAQUS / Standard jusqu'à la fin d'une étape. [128]

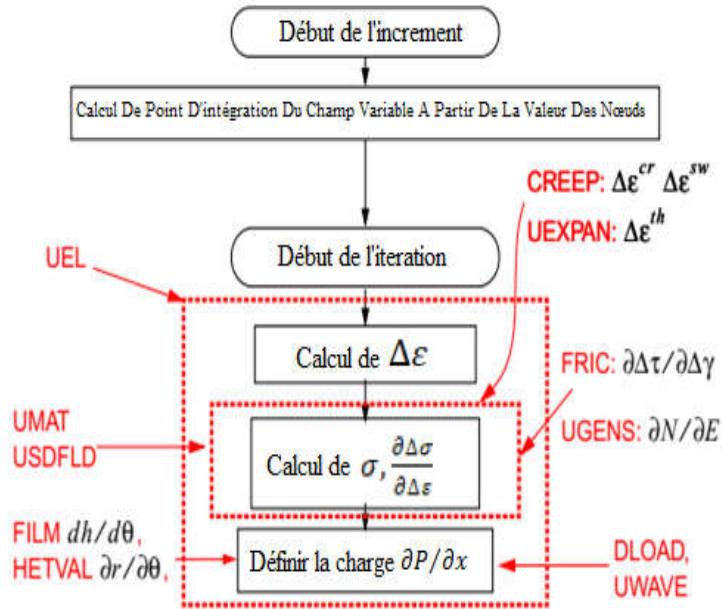


Figure III.3 : Plus de détaillée sur comptabilité comment ABAQUS / Standard calcule la raideur de l'élément lors d'une itération

Remarque:



Signifie un point de décision dans le code (c'est-à-dire, début d'incrément) pendant l'analyse



Signifie une action qui est prise pendant l'analyse

Les modifications possibles peuvent porter sur les éléments, les conditions aux limites, les comportements mécaniques, etc, on cite quelques appellations utilisées dans logiciel Abaqus

- *Step*, un cas de chargement ;
- *Incrément*, une étape convergée du calcul pour passer des conditions initiales au cas de chargement actuel (step) ;
- *Itération*, une étape non convergée de l'incrément courant, correspondant à une boucle de l'algorithme de Newton-Raphson.

Pour pouvoir traiter le problème ciblé préalablement la procédure UMAT celle qui sera implémenté dans le code de calcul Abaqus. Notons que La simulation a été effectuées avec le code Abaqus v6.11 sur PC avec les performances suivant : Intel(R) Core(TM) i3 CPU M380 2.53 GHz de 4 Go RAM.

III.3. RESOLUTION D'UN PROBLEME PAR ELEMENTS FINIS SUR ABAQUS

La méthode des éléments finis permet de résoudre un problème complexe (mécanique, diffusion...), défini par un système d'équation en tout point d'un volume, grâce à la formulation faible de ce problème. Cette formulation faible est une fonctionnelle dont on cherche la solution (sous la forme, par exemple dans les problèmes mécaniques, d'un champ de déplacement). Une fois cette formulation obtenue, le volume est discrétisé en éléments finis (le maillage) sur lesquels on postule la forme de la solution (linéaire, quadratique) ; chaque élément fini est défini par un ensemble de point, les nœuds. Cela permet de transformer cette formulation faible continue en un problème matriciel, le champ continu inconnu devenant un champ discret, constitué de degrés de libertés, décrit par un vecteur dont les composantes sont la solution du problème aux nœuds du maillage, généralement aux sommets des éléments finis. Dans tout ce qui suit, les matrices et les tenseurs seront notés en gras, que même que les vecteurs. La double contraction est notée par « : », telle que $X : X = \sum_{IJ} X_{IJ} X_{IJ}$. Enfin, le produit tensoriel est noté \otimes , et $X \otimes Y = X_i Y_j$. q_u et q_θ représentent respectivement les vecteurs déplacement et température aux nœuds d'un élément (vecteur degré de liberté, ddl).

III.3.1. Forme de la solution sur un élément finis (EF)

La méthode d'éléments finis consiste à résoudre un système d'équations différentielles dans leurs domaines en discrétisant ce domaine en petites régions, ou « sous-domaines », de géométrie simple, appelées « éléments finis » (EF). L'ensemble des éléments finis est appelé maillage (figure III. 2)

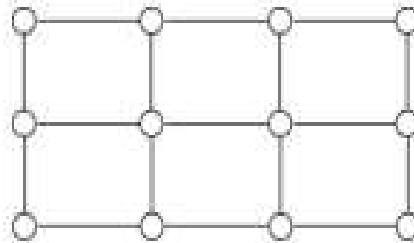


Figure III.4 : Exemple d'un maillage rectangulaire.

Cette méthode a pour origine la méthode des résidus pondérés, qui consiste à affaiblir un système d'équations pour permettre sa résolution. Elle est basée sur la définition d'un résidu, la pondération du résidu par une fonction test et l'intégration du résidu pondéré sur le domaine.

Pour la méthode EF, la solution en un point quelconque à l'intérieur d'un élément est approchée par des fonctions d'interpolations N , telles que $N_i(x_j) = \delta_{ij}$, et les solutions aux nœuds.

N_i est la fonction d'interpolation n^oi et x_j la coordonnée du j^{iem}e nœud ; δ_{ij} est le symbole de Kroneker tel que $\delta_{ij}=1$ si $i=j$, et 0 sinon.

Les fonctions d'interpolation assurent le passage du problème continu au problème discret. Elles sont souvent choisies sous forme de polynôme linéaire ou quadratique.

Si l'on considère un élément 1D à 2 nœuds, le champ q inconnu (par exemple, le déplacement dans une direction de l'espace) est supposé varier linéairement le long de cet élément (figure III .3). On a donc, en tout point de l'élément :

$$q = \frac{(1-\xi)}{2} q_1 + \frac{(1+\xi)}{2} q_2 = N_1(\xi)q_1 + N_2(\xi)q_2 , \quad \text{III.1}$$

Où q_i représente la valeur de q sur le nœud i . $\xi \in [-1,1]$ est la coordonnée locale des points dans l'élément fini, en notant que la coordonnée globale x des points dans l'élément fini isoparamétrique est telle que $x = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2$. Le vecteur de ddl pour cet élément est :

$$q = \{q_1, q_2\}.$$

Dans cas d'un élément 1D quadratique à 3 nœuds, le champ q varie de manière parabolique (figure III. 3.b). On a donc, en tout point de l'élément :

$$q = 1/2\xi(1-\xi)q_1 - (\xi+1)(\xi-1)q_2 + 1/2\xi(1+\xi)q_3 = N_1(\xi)q_1 + N_2(\xi)q_2 + N_3(\xi)q_3 \quad \text{III.2}$$

On a dans ce cas-là $q(\xi=1) = q_3$, $q(\xi=0) = q_2$ et $q(\xi=-1) = q_1$. Le vecteur ddl pour cet élément est $q = \{q_1, q_2, q_3\}$

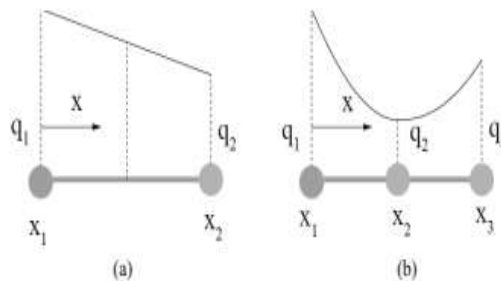


Figure III.5 : Interpolation dans (a) un élément linéaire et (b) un élément quadratique.

Il existe plusieurs types d'éléments finis, et le choix de ce type d'élément dépend du problème traité. En 2D, les plus utilisés sont :

- Éléments quadrilatéraux linéaires à 4 nœuds, ou quadratiques à 8 nœuds.
- Éléments triangulaires linéaires à 3 nœuds, ou quadratiques à 6 nœuds.

En fonction du problème traité, certains éléments sont plus adaptés que d'autre (tableau III.2).

Tableau III.2 : Synthèse pour l'utilisation des éléments [128]

Type de problème	Meilleur choix	Élément à éviter
Contact entre deux élément	QU4, TR3, HE8	Eléments du 2 ^{ème} ordre
Flexion dans le plan	QU8, TR6, HE20, Eléments à modes incompatibles	Eléments du 1 ^{er} ordre
Contact avec flexion dans le plan	Eléments à modes incompatibles	Tous les autres
Concentration de contraintes	Eléments du 2eme ordre	Elément du 1 ^{er} ordre
Matériaux quasi-incompressible (ex, plasticité)	Eléments du 1 ^{er} ordre Eléments du 2eme ordre avec intégration réduite	Eléments du 2 ^{ème} ordre avec intégration normale
Matériaux incompressible (ex, caoutchouc NU=0.5)	Eléments Hybrides	Tous les autres sauf ce qui est indiqué en 2 ^{ème} Colone
Géométrie très « torturée »	Eléments du 1 ^{er} ordre	Tous les autres sauf ce qui est indiqué en 2 ^{ème} Colone

III.3.2. Intégration numérique

La méthode des éléments finis se ramène au final à résoudre le système suivant pour trouver la solution (le vecteur ddl q)

$$K(q)q = F \quad \text{III.3}$$

La matrice K et le vecteur F sont des intégrales complexes qu'on ne peut pas toujours déterminer analytiquement. Pour cette raison, on doit recourir à une méthode numérique de calcul d'intégrale, comme la quadrature de Gauss.

Dans cette méthode, l'intégrale $\int_{-1}^1 f(x)dx$ est remplacé par $\sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$ où les point x_i (appelés point de Gauss - PG) et leurs poids ω_i sont prédéterminés (tableau III.3). Cette méthode permet d'intégrer exactement sans erreur un polynôme de degré 2n-1 avec seulement n points d'intégration.

On a donc besoin d'un seul point de Gauss pour l'élément 1D linéaire et 2 point de Gauss pour l'élément quadratique. Si moins de n points d'intégration sont utilisés pour un polynôme de degré 2n-1, l'intégration est dite réduite.

Tableau III.3 : Quadrature de Gauss pour une fonction scalaire f intégrée sur $[-1,1]$

Nombre de PG	Poids (ω_i)	Point $x_i \in [-1, 1]$
1	2	0
2	1,1	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
3	5/9, 8/9, 5/9	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$
4	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$	$\pm \sqrt{3/7 - 2/7 \sqrt{6/5}}$
	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$	$\pm \sqrt{3/7 + 2/7 \sqrt{6/5}}$

Abaqus utilise cette méthode pour calculer numériquement les intégrales. Les éléments disponibles dans Abaqus sont soit à intégration réduite, soit complète.

III.3.3. Problème mécanique

Soit un corps Ω , de masse volumique ρ et de frontière $\partial\Omega$. Ce corps est soumis à (figure III.4) :

- Une force volumique b .
- Une contrainte \bar{T} sur sa frontière $\partial\Omega_T$.
- Un déplacement \bar{u} sur sa frontière $\partial\Omega_u$.

$\partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_T$ sont tels que $\partial\Omega_T \cup \partial\Omega_u = \partial\Omega$, et $\partial\Omega_T \cap \partial\Omega_u = \emptyset$.

Pour ce problème mécanique (quasi-statique), l'équation d'équilibre (formulation forte) s'écrit :

$$\text{div } \sigma + \rho b = 0 \tag{III.4}$$

σ est le tenseur des contraintes ; c 'est une fonction du champ de déplacement u qui est l'inconnue du problème.

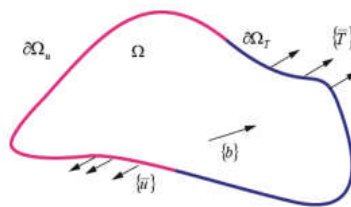


Figure III.6 : Problème mécanique et les conditions aux limites. [128]

III.3.4. Formulation faible [128]

Soit un champ de déplacement virtuel δu continu tel que $\delta u = 0$ sur $\partial\Omega_u$. L'intégrale du produit de l'équation (III.4) avec δu sur le volume Ω donne :

$$\int_{\Omega} \delta u (\nabla \sigma) dV + \int_{\Omega} \delta u \rho b dV = 0 \quad \text{III.5}$$

Par une intégration par partie, on en déduit

$$\int_{\Omega} \delta u (\nabla \sigma) dV = \int_{\Omega} \nabla (\delta u \sigma) dV - \int_{\Omega} \sigma : (\nabla \otimes \delta u) dV \quad \text{III.6}$$

Par le théorème de la divergence, on peut réécrire l'équation précédente par :

$$\int_{\Omega} \nabla (\delta u \sigma) dV = \int_{\partial \Omega} (\delta u \sigma) n dS = \int_{\partial \Omega} \delta u \bar{T} dS = \int_{\partial \Omega_T} \delta u \bar{T} dS \quad \text{III.7}$$

Où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal sortant à $\partial \Omega_T$, et avec $\delta u = 0$ sur $\partial \Omega_u$. En utilisant les équations (III.6) et (III.7), l'équation (III.5) devient donc :

$$\int_{\partial \Omega_T} \delta u \bar{T} ds - \int_{\Omega} \sigma : (\nabla \otimes \delta u) dV + \int_{\Omega} \delta u \rho b dV = 0 \quad \text{III.8}$$

En posant le tenseur de déformation $2\varepsilon = \nabla \otimes \mathbf{u} + {}^t \nabla \otimes \mathbf{u}$ (dans le cas des transformations infinitésimales), et en notant que :

$$\int_{\Omega} \sigma : (\nabla \otimes \delta u) dV = \int_{\Omega} \sigma : \frac{1}{2} (\nabla \otimes \delta u + {}^t \nabla \otimes \delta u) dV \quad \text{III.9}$$

On obtient la formulation faible du problème :

$$\forall \frac{\delta u}{\delta u} = 0 \text{ sur } \partial \Omega_u, \quad \int_{\Omega} \sigma : \delta \varepsilon dV = \int_{\partial \Omega_T} \bar{T} \delta u dS + \int_{\Omega} \delta u \rho b dV \quad \text{III.10}$$

III.3.5. Discrétisation en éléments finis

Pour chaque élément fini, le déplacement \mathbf{u} est lié au vecteur de ddl local \mathbf{q}_u par une matrice d'interpolation \mathbf{N} , telle que :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q}_u. \quad \text{III.11}$$

Le champ de déformation s'écrit alors

$$\varepsilon = (\nabla N) q_u \quad \text{III.12}$$

Avec $2\nabla N = \nabla \otimes N + {}^t\nabla \otimes N$.

Si l'on se limite au cas d'un comportement élastique, alors contraintes et déformations sont reliées par un tenseur d'élasticité d'ordre 4 tel que $\sigma = C:\varepsilon$ et l'équation (III.10) devient alors :

$$\int_{\Omega} \sigma : \delta \varepsilon dV = q_u \left[\sum_k \int_{\text{element } n^{\circ}k} \nabla N : C : {}^t\nabla N dV \right] {}^t\delta q_u \quad \text{III.13}$$

En utilisant la quadrature de Gauss, on peut ensuite calculer chaque intégrale

$$\int_{\substack{\text{élément} \\ n^{\circ}k}} \nabla N : C : {}^t\nabla N dV = \sum_{i \in \{\text{points de Gasse}\}} \omega_i \nabla N(i) : C(i) : {}^t\nabla N(i) \quad \text{III.14}$$

Et l'on peut déterminer la matrice de rigidité \mathbf{K} du problème telle que

$$K = \sum_{\text{elements}} \left(\sum_{i \in \{\text{points de Gasse}\}} \omega_i \nabla N(i) : C(i) : {}^t\nabla N(i) \right) \quad \text{III.15}$$

Tel que

$$\int_{\Omega} \sigma : \delta \varepsilon dV = q_u K \delta q_u \quad \text{III.16}$$

De même, le terme lié au chargement peut être réécrit

$$\int_{\partial\Omega_T} \bar{T} \delta u dS + \int_{\Omega} \delta u \rho b dV = F_u \delta q_u \quad \text{III.17}$$

Où F_u est le vecteur de forces généralisés tel que

$$F_u = \int_{\partial\Omega_T} \bar{T} N dS + \int_{\Omega} \rho b N dV \quad \text{III.18}$$

Ce vecteur dépend de la discrétisation élément finis du problème et des conditions aux limites en contrainte, il est donc connu. Le problème mécanique devient ainsi un problème de recherche d'un vecteur q_u tel que $h_u=0$, où

$$h_u = Kq_u - F_u , \quad \text{III.19}$$

Avec K qui peut dépendre également de q_u .

Dans le cas d'un comportement non-linéaire, la résolution du problème se fait de manière incrémentale, et l'on définit un tenseur tangent d'ordre 4 D tel que $\partial\sigma=D : \partial\varepsilon$, où $\partial\sigma$ et $\partial\varepsilon$ sont respectivement les incréments de contrainte et de déformation correspondant à des incréments de chargement (la solution étant connue avant l'incrément de chargement) ; le vecteur de ddl s'incrémente quant à lui d'une quantité ∂q_u . Le tenseur D dépend des variables internes X associées à la non-linéarité. Ces variables internes devant être actualisées pour l'incrément courant (par exemple par un algorithme de Newton-Raphson), D est donc lui-même fonction de q_u et de ∂q_u , et donc sa détermination est partie intégrante du problème à résoudre.

La formulation faible du problème incrémental devient :

$$\int_{\Omega} \sigma : \delta\varepsilon dV = \partial q_u \left[\sum_k \int_{\text{element } n^{\circ}k} \nabla N : D : {}^t \nabla N dV \right] {}^t \delta q_u \quad \text{III.21}$$

et l'on peut calculer la matrice de rigidité K du problème telle que

$$K = \sum_{\text{elements}} \left(\sum_{i \in \{\text{points de Gasse}\}} \omega_i \nabla N(i) : D(i) : {}^t \nabla N(i) \right) \quad \text{III.21}$$

Avec :

$$\int_{\Omega} \partial\sigma : \delta\varepsilon dV = \partial q_u K(q_u, X) \delta q_u \quad \text{III.22}$$

De même, le terme lié à l'incrément de chargement peut être réécrit comme précédemment

$$\int_{\partial\Omega_T} \partial\bar{T} \delta u dS = \partial F_u \delta q_u \quad \text{III.23}$$

Où ∂Fu est le vecteur incrément de forces généralisés, entièrement connus, tel que

$$\partial Fu = \int_{\partial\Omega_T} \partial \bar{T} N dS + \int_{\Omega} \rho \partial b N dV \quad \text{III.24}$$

La résolution de cet incrément de problème devient ainsi également un problème de recherche d'un vecteur ∂q_u tel que $h_u=0$, où

$$h_u = K \partial q_u - \partial Fu \quad \text{III.25}$$

III.3.6. Résolution

La recherche de la solution de l'équation (III.19) (ou III.25) se fait grâce à l'algorithme de Newton-Raphson. Pour déterminer la solution q_u^{k+1} pour l'incrément de chargement $k+1$, connaissant celle à l'incrément k , Abaqus calcule une suite de vecteur $q_u^{k,j}$ tels que $q_u^{k,j+1} = q_u^{k,j} + \Delta q_u^{k,j+1}$, avec l'incrément du vecteur de ddl $\Delta q_u^{k,j+1}$ qui s'écrit :

$$\Delta q_u^{k,j+1} = - \left[\frac{\partial h_u}{\partial q_u} \right]_{k,j}^{-1} h_u^{k,j} \quad \text{III.26}$$

La valeur de h_u et de son Jacobien $\frac{\partial h_u}{\partial q_u}$ étant calculé pour $q_u^{k,j}$. Pour $j \rightarrow +\infty$, alors $q_u^{k,j} \rightarrow q_u^{k+1}$, avec $h_u^{k+1} = 0$.

La connaissance de $\left[\frac{\partial h_u}{\partial q_u} \right]_{k,j}^{-1}$ est donc ici primordiale pour résoudre un tel problème. Pour calculer cette matrice, il est nécessaire de connaître la valeur, en chaque point de Gauss du maillage,

1. du gradient des fonctions de forme ;
2. de la relation contrainte déformation

III.4. PRESENTATION DE LA PROCEDURE UMAT

Une procédure UMAT est utilisée pour définir un comportement mécanique. Elle est appelée au début de chaque itération du calcul, et pour chaque point d'intégration ni du maillage, afin qu'Abaqus puisse résoudre le problème mécanique à l'incrément courant par une procédure de Newton Raphson (équation III.25 et III.26) :

- la contribution du point de Gauss courant à la fonction h_u , soit la grandeur

$$\sigma(i) = D(i) : {}^t \nabla N(i) q_u \quad \text{III.27}$$

- la contribution du point de Gauss courant à la matrice tangente locale $D(i)$, qui intervient dans la détermination du Jacobien de h_u , c'est-à-dire $\frac{\partial h_u}{\partial q_u}$, soit la grandeur $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}(i)$

Pour chaque point de Gauss (i), et à chaque itération de l'algorithme de Newton-Raphson Abaqus fournit à la procédure UMAT

- la valeur de la déformation $\varepsilon(i)$ à l'incrément de calcul précédent ;
- la valeur de la contrainte $\sigma(i)$ à l'incrément de calcul précédent ;
- la valeur de la variation de la déformation $\Delta\varepsilon(i)$ à l'itération précédente.

Il est possible de sauvegarder également des variables internes (STATEV), pour définir par exemple le tenseur de déformation plastique, la déformation plastique équivalente, etc

III.4.1. Élément fini utilisé dans cette implémentation

Abaqus dispose d'une vaste bibliothèque d'éléments afin de fournir un ensemble d'outils puissants pour résoudre de nombreux problèmes différents. Cinq aspects peuvent être caractérisés un élément et son comportement : Famille, Degrés de liberté (directement liés à la famille d'éléments), Nombre de nœuds, Formulation et l'intégration.

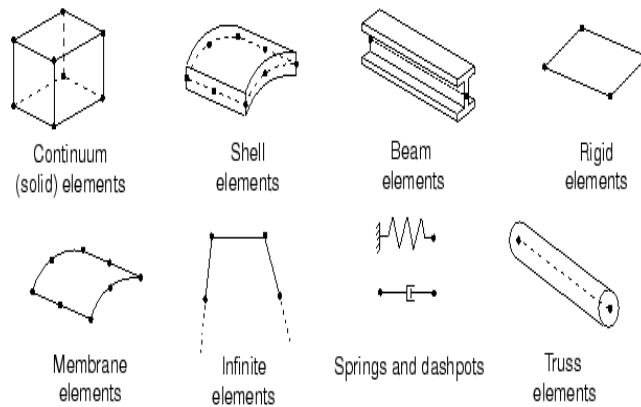


Figure III.7: Familles d'éléments couramment utilisées. [128]

Les éléments avec des nœuds au milieu, tels que la brique à 20 nœuds illustrée à la Figure III.5 utilisent une interpolation quadratique et sont souvent appelés éléments quadratiques ou éléments de second ordre. Le nombre d'élément utilisé dans le travail et 16000 éléments quadratiques de type C3D20, ce type d'élément caractérisé par 20 nœuds avec 27 points d'intégration (3x3x3) (intégration explicite et implicite), La numérotation des nœuds et le schéma d'intégration suivent la convention de la figure III.6

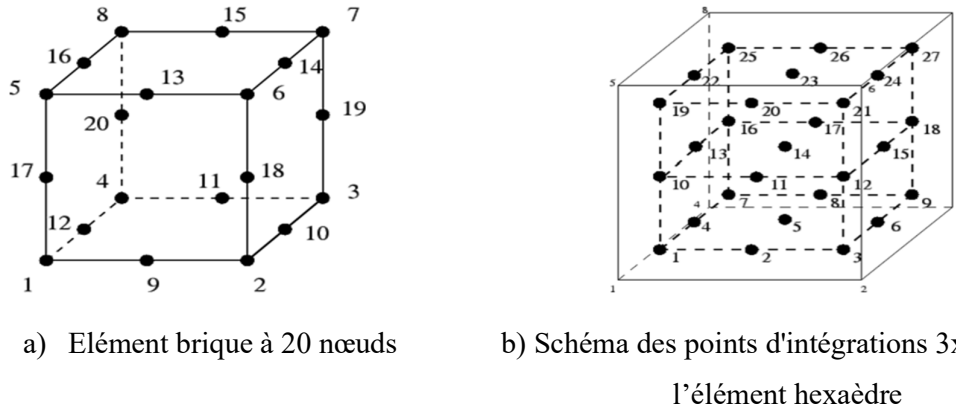


Figure III.8: Elément brique de type C3D20 [128]

III.4.1.1. Formulation

III.4.1.1.1. Energie cinétique

L'expression de l'énergie cinétique associée au champ de déplacement est donné par :

$$Ec = \frac{1}{2} \rho \int_V (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) dV \quad \text{III.28}$$

Où \dot{u}_i désignent les dérivées des déplacements par rapport au temps.

III.4.1.1.2. Energie de déformation

L'énergie de déformation est donnée par la relation suivante :

$$Ed = \frac{1}{2} \int_V \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad \text{III.29}$$

Relations déplacements avec déformations et contraintes

III.4.1.1.3. Déplacement

Dans le cas tridimensionnel le champ de déplacement est donné par :

$$\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \quad \text{III.30}$$

III.4.1.1.4. Déformations

Le tenseur déformation est donner par :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\} \quad \text{III.31}$$

Avec :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad \text{III.32}$$

On peut écrire :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{III.33}$$

Où

$$\{\varepsilon\} = [d]\{U\} \quad \text{III.34}$$

Avec :

$$[d] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

III.4.1.1.5. Contraintes

Le tenseur contraint est donné par :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} \quad \text{III.35}$$

La loi de Hooke pour un matériau isotrope donne :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad \text{III.36}$$

Avec :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Formule générale de l'énergie de déformation :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad \text{III.37}$$

Formule générale de l'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad \text{III.38}$$

III.4.1.1.6. Etude dynamique (théorie de vibration)

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations du mouvement de la structure.

Soit L la fonction de Lagrange définie à partir de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle

E_p alors :

$$L = E_c - E_p \quad \text{III.39}$$

L est une fonction des coordonnées généralisées q , des vitesses généralisées \dot{q} et du temps t.

Le calcul de l'extrémum est réalisé en utilisation des équations d'Euler appliquées à la fonction de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{III.40}$$

Du moment que l'énergie potentielle étant la somme de l'énergie de déformation E_d et du potentiel des forces surfaciques et volumiques supposées nulles.

Pour les petits mouvements des corps élastiques les énergies cinétiques et de déformation s'expriment respectivement comme forme quadratique des vitesses et des déplacements par :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad \text{III.41}$$

$$E_d = \frac{1}{2} q^T K q \quad \text{III.42}$$

Où M est la matrice masse.

K est la matrice de rigidité.

Les équations du mouvement libre s'écrivent en fonction des vecteurs de déplacement et d'accélération généralisées :

$$M \ddot{q} + K q = 0 \quad \text{III.43}$$

Dont la solution est une sinusoïde du type $q_i = x_i e^{j\omega t}$ ce qui permet d'écrire :

$$(K - \omega^2 M)X = 0 \quad \text{III.44}$$

Où ω (rad/s) est la pulsation propre du système associée au vecteur propre X.

Formulation par la version h-p de la méthode des éléments finis

Calcul élémentaire :

Matrice de rigidité élémentaire

De l'équation et de plus de la relation entre les coordonnées généralisées et les coordonnées nodaux, de côtés, de faces et internes donnée par :

$$\{U\} = [N]\{q\} \quad \text{III.45}$$

$$\text{Avec : } [N] = \begin{bmatrix} f_i & 0 & 0 \\ 0 & f_i & 0 \\ 0 & 0 & f_i \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, NENL$$

$$NENL = 20$$

$$\text{Et } [B] = [d][N]$$

L'énergie de déformation s'écrit :

$$U^e = \frac{1}{2} q^T K^e q \quad \text{III.46}$$

$$K^e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad \text{III.47}$$

Matrice masse élémentaire :

De l'équation et

$$\{\dot{U}\} = [N]\{\dot{q}\} \quad \text{III.48}$$

On aura l'énergie cinétique qui devienne :

$$U^e = \frac{1}{2} \dot{q}^T M^e \dot{q} \quad \text{III.49}$$

Avec :

$$M^e = \rho \int_V [N]^T [N] dV \quad \text{III.50}$$

Les termes des matrices mass et rigidité sont formés d'intégrales triples.

Pour l'élément C3D20 représenté sur la figure III.9 :

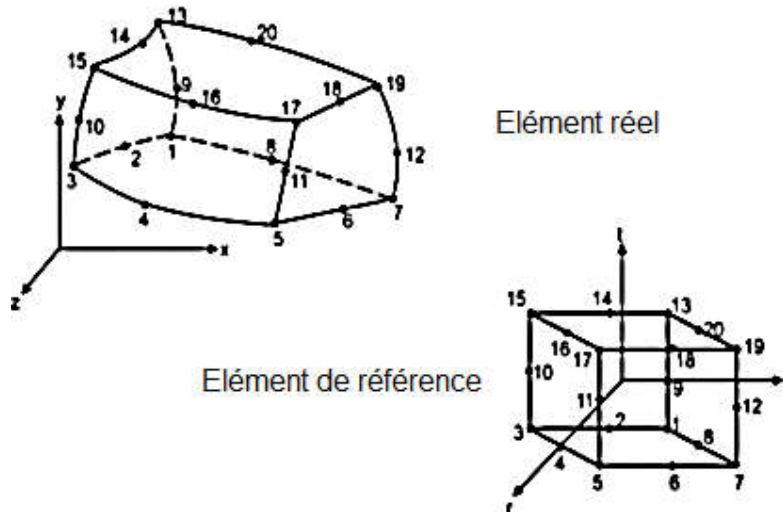


Figure III.9 : Représentation de l'élément réel et l'élément de référence

Les fonctions de formes de la famille sérendipité en coordonnées naturelle (s, t, r comprise entre -1 et 1) sont données par :

Nœud	Fonction de forme
1, 3, 5, 7, 13, 15, 17, 19	$N_i = \frac{1}{8}(1+r r_i)(1+s s_i)(1+t t_i)(r r_i + s s_i + t t_i - 2)$
4, 8, 16, 20	$N_i = \frac{1}{4}(1+r r_i)(1+s s_i)(1+t t_i)$
9, 10, 11, 12	$N_i = \frac{1}{4}(1+r r_i)(1+s s_i)(1-t^2)$
2, 6, 14, 18	$N_i = \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s s_i)(1-t t_i)$

C3D20 est un excellent élément pour les calculs élastiques linéaires. En raison de l'emplacement des points d'intégration, les concentrations de contraintes à la surface d'une structure sont bien saisies. Cependant, pour les calculs non linéaires, les éléments présentent les mêmes inconvénients que d'autre éléments, mais dans une moindre mesure, en raison de l'intégration complète, l'élément se comportera mal pour le comportement du matériau isochore, c'est-à-dire pour des valeurs élevées du coefficient de Poisson ou du comportement plastique.

Description de l'élément C3D20 :

C : Contraintes et déplacements continuent.

3D : Trois dimensions.

20 : 20 nœuds.

Le schéma d'intégration est donné dans la figure III.6.b

III.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'ensemble des aspects numériques liés à la résolution d'un problème mécanique par éléments finis au code de calcul ABAQUS, ainsi les différentes procédures utilisateurs qui existent dans ce dernier, la procédure UMAT est l'objectif souligné pour une analyse tri-dimensionnelle du déplacement et de la variation des contraintes d'une structure en FGM.

CHAPITRE IV :
RESULTATS ET
INTERPRETATIONS

IV.1. INTRODUCTION

Les matériaux à Gradient Fonctionnel FGM représentent un des derniers développements, la révolution et la conception de ces matériaux a été définie au 21^{ème} siècle. Ils sont utilisés pour des emplois à une large variété d'applications.

L'amélioration des performances des pièces structurales peut conduire à chercher au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques aux différents matériaux dans la même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau, la ténacité par exemple pose un problème dans l'interface. Une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une forte concentration de contrainte conduisant à la déformation plastique ou de fissuration. L'idée pour surmonter ces effets nuisibles on fait appeler au « Matériau Fonctionnellement Gradué » de l'anglicisme Functionally Graded Materials FGMs qui est l'objectif de notre travail.

A travers la méthode des éléments finis 3D implémentée dans le logiciel Abaqus [128] nous décrivons notre structure FGM à l'aide d'un sous-programme UMAT en FORTRAN [129]. Après une étude de convergence et de validation pour tester la fiabilité de notre sous-programme, nous utilisons ce dernier pour trouver les déplacements, et les contraintes dans une plaque FGM soumis à une charge sinusoïdale, également relever les fréquences propres d'un panneau cylindrique en FGM. Les conditions aux limites utilisées sont simplement supportées.

IV.2. STRATEGIE ET MISE EN ŒUVRE DE L'IMPLEMENTATION

Alors, ce chapitre est consacré aux outils numériques utilisés pour la simulation de la variation du module de Young dans une structure FGMs sous un chargement sinusoïdal. Le travail sera effectué à l'aide du code par éléments finis Abaqus. Dans un premier temps, et après avoir déterminé la convergence on fait un test de notre subroutine, on implémente un matériau homogène (Métal Al, Céramique Al_2O_3) tableau (IV.2), pour valider l'exactitude et la fiabilité de la démarche. Rappellera brièvement les équations qui permettent la résolution d'un problème par éléments finis pour les problèmes mécaniques. On abordera ensuite le principe de l'implémentation UMAT en code de calcul Abaqus qu'il a fallu développer pour résoudre ce problème, les résultats seront comparés avec les travaux analytique et numériques existents dans la littérature.

IV.2.1. Formulation

Considérant une plaque carrée FGM (figure IV.1) en céramique et en métal soumise à une charge sinusoïdale de la forme (équation IV.1) :

$$P_{(x,y)} = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) * \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{IV.1}$$

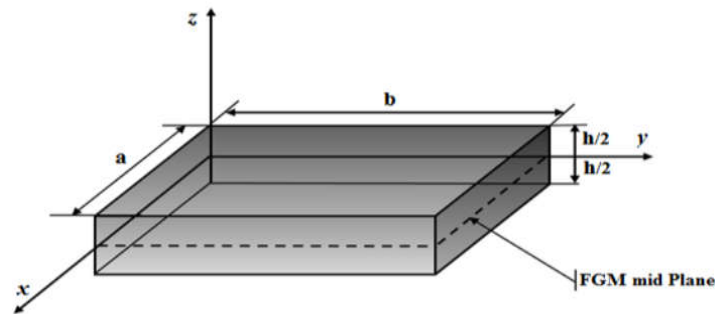


Figure IV.1 : Géométrie de la plaque en FGM

Avec $q_0 = 100\text{MPa}$ ou l'intensité de la charge est uniformément distribuée.

En raison de la symétrie de la charge et de la géométrie de la structure, le quart de la plaque a été modélisé.

Tableau IV.1: Propriétés des matériaux

Structure	Matériaux	E(GPa)	v	ρ (kg/m ³)
Plaque en statique	Métal (Al) Aluminium	72	0.3	2702
	Céramique (Al ₂ O ₃) Alumine	380	0.3	3800
Panneau cylindrique en statique	Métal (Al) Aluminium	70	0.3	2702
	Céramique (ZrO ₂) Zircane	151	0.3	6509
Plaque en vibration	Métal (Al) Aluminium	70	0.3	2702
	Céramique (Al ₂ O ₃) Alumine	380	0.3	3800

Les propriétés des matériaux constituent la plaque FGM sont listées dans le tableau IV.1. La loi de la puissance utilisée est d'écrit par l'équation IV.2.

$$\vartheta(z) = \left(\frac{z + h/2}{h/2}\right)^n \tag{IV.2}$$

$$E(z) = \vartheta(z)E_1 + (1 - \vartheta(z)E_2) \tag{IV.3}$$

Où $\vartheta(z)$ est la fraction volumique, n représente l'indice de puissance et h est l'épaisseur de la plaque. E_1 et E_2 sont respectivement le module de Young du haut en bas de la plaque. La variation du module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est illustrée à la figure IV.2.

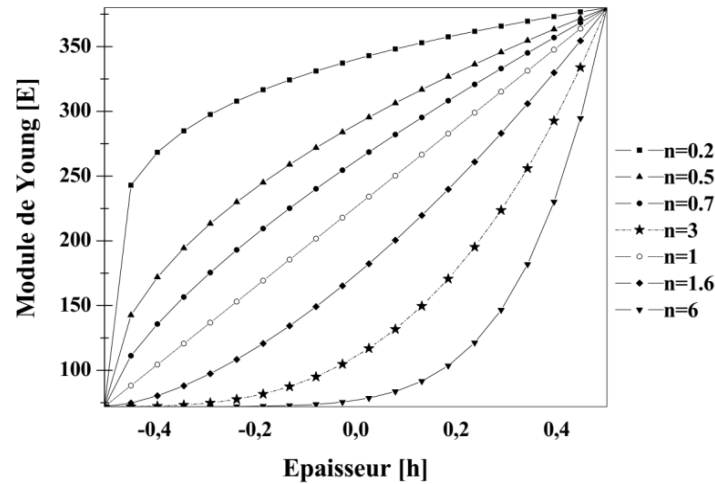


Figure IV.2: Variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque P-FGM

Un sous-programme UMAT défini par l'utilisateur du logiciel ABAQUS est élaboré dont le but de définir le comportement du matériau, ce dernier sera appelé pour le calcul dans tous les points des éléments où la définition du matériau inclut dans le comportement de matériau défini par l'utilisateur. Il doit mettre à jour les contraintes et les variables d'état de la solution dépendante à leurs valeurs à la fin de l'incrément pour lequel il est appelé. Il doit fournir la matrice jacobienne du matériau, $\partial\Delta\sigma/\partial\Delta\epsilon$, pour le modèle constitutif mécanique (Dassault-Systèmes 2011).

IV.2.2. Étude de la convergence

L'étude de la convergence d'une plaque simplement supportée est présentée dans la figure IV.3. Le maillage était raffiné. L'élément utilisé est de type C3D20. Selon la figure IV.4, un maillage de 16 000 éléments fournissent une précision de 10^{-3} . L'étude de la convergence est présentée ici mais elle accompagne tous les résultats obtenus dans le travail.

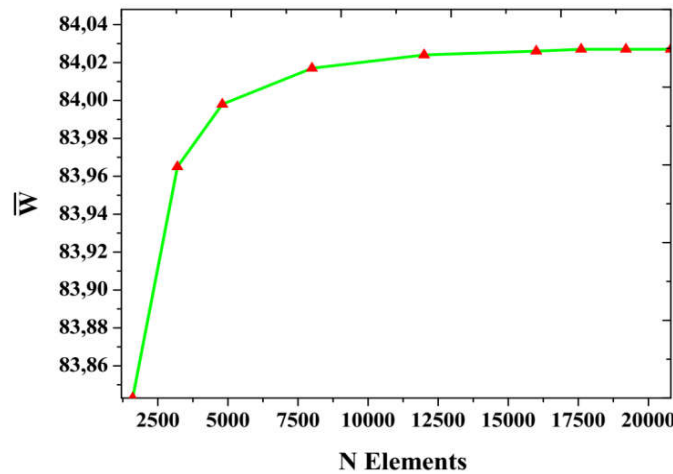


Figure IV.3: Étude de la convergence d’une plaque FGM simplement supportée sous une charge sinusoïdale $q_0 = 100\text{MPa}$

IV.2.3. Validation

La vérification de l’UMAT est basée sur le calcul de la déflexion transversale non dimensionnelle \bar{W} donné par l’équation IV.4 pour un matériau isotrope, Les résultats numériques obtenues sont représentés dans le tableau IV.2, et les valeurs de \bar{W} confirment la fiabilité de l’UMAT utilisée.

$$\bar{W} = w \left(\frac{E_c}{q_0 + h} \right), \bar{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{q_0} \tag{IV.4}$$

Pour un matériau FGM, la déflexion transversale calculée est représentée dans le tableau IV.3, les résultats obtenus sont comparés avec d’autres travaux qui existent dans la littérature.

Tableau IV.2: Valeurs de la déflexion transversale non dimensionnelle \bar{W}

Matériaux	N Eléments	ABAQUS Standard	\bar{W}
		Ou ABAQUS UMAT	
Al ₂ O ₃	16000	Standard	316,1393
		UMAT	316,1393
Al	16000	Standard	1716,1853
		UMAT	1716,1853

Tableau IV.3: Déflexion transversale de la plaque FGM simplement supportée avec $a/h=10$ et divers indices de la loi de puissance n .

	Reddy [136] TOTR	Matsunaga [139] 2D HODT	Lavate [135] TOT / UMAT	Présent 3D EF / UMAT	Erreur [%]
n	\bar{W}				
0	296,057	294,3	262,694	316,1393	6,91
0,5	453,71	450,4	373,084	483,2283	6,79
1	588,953	587,5	494,380	627,4966	6,37
4	881,478	882,3	883,880	955,8919	7,70
10	1008,7	1007	1210,30	1099,3362	8,40

[%] – Erreur / réf. Matsunaga [139]

Tableau IV.4: Contrainte de cisaillement Non-dimensionnelle d'une plaque FGM simplement supportée avec $a/h=10$ et divers indices de la loi de puissance n .

	Reddy [136] TOTR	Matsunaga [139] 2D HODT	Lavate [135] TOT / UMAT	Présent 3D EF / UMAT	Erreur [%]
n	$\bar{\tau}_{xz}$				
0	2,386	2,387	-	2,328	2,56
0,5	2,440	2,435	-	2,371	2,68
1	2,386	2,387	-	2,314	3,17
4	1,940	2,182	-	2,110	3,39
10	2,114	2,171	-	2,105	3,14

[%] Erreur / réf. Matsunaga [139]

IV.2.4. Résultats et discussions

IV.2.4.1. Premier cas

Les résultats de ce cas sont comparés avec Lavate et Shiyekar [135], Reddy [136] et Matsunaga [139]. Résultats de la déflexion transversale \bar{W} et de la contrainte de cisaillement non-dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ donnés par l'équation IV.4 pour la plaque FGM carrée simplement supportée sous une charge sinusoïdale pour divers indices de puissance est indiquée dans les tableaux IV.3 et IV.4.

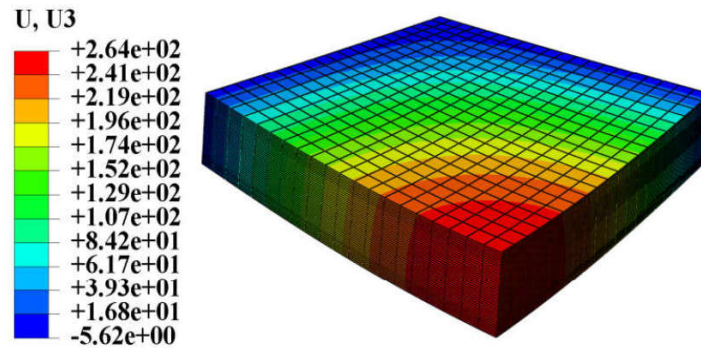


Figure IV.4: Tracés de contour de la déflexion transversale \bar{W} de la plaque FGM simplement supportée pour $a/h = 10$, $n = 5$

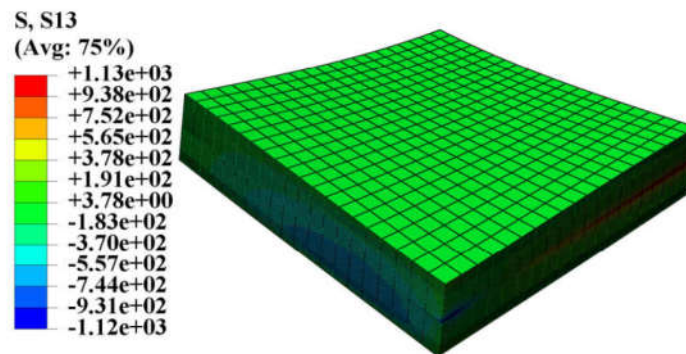


Figure IV.5: Tracés de contour pour la contrainte de cisaillement non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ de la plaque FGM simplement supportée pour $a/h = 10$, $n = 5$

Les courbes de niveau pour \bar{W} et $\bar{\tau}_{xz}$ sont représentés dans les figures IV.4 et IV.5 respectivement. Lavate et Shiyekar [135] n'ont pas mentionné les résultats de la contrainte de cisaillement. Les résultats numériques obtenus pour la déflexion transversale \bar{W} a une erreur moyenne de 7%. La contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ obtenue par le présent travail s'écarte de 2 à 3% par rapport aux résultats de Matsunaga [139]. Les contraintes résultantes en fonction de z/h sont présentées dans la figure IV.6 qui ont la même allure de courbe comme Matsunaga [139].

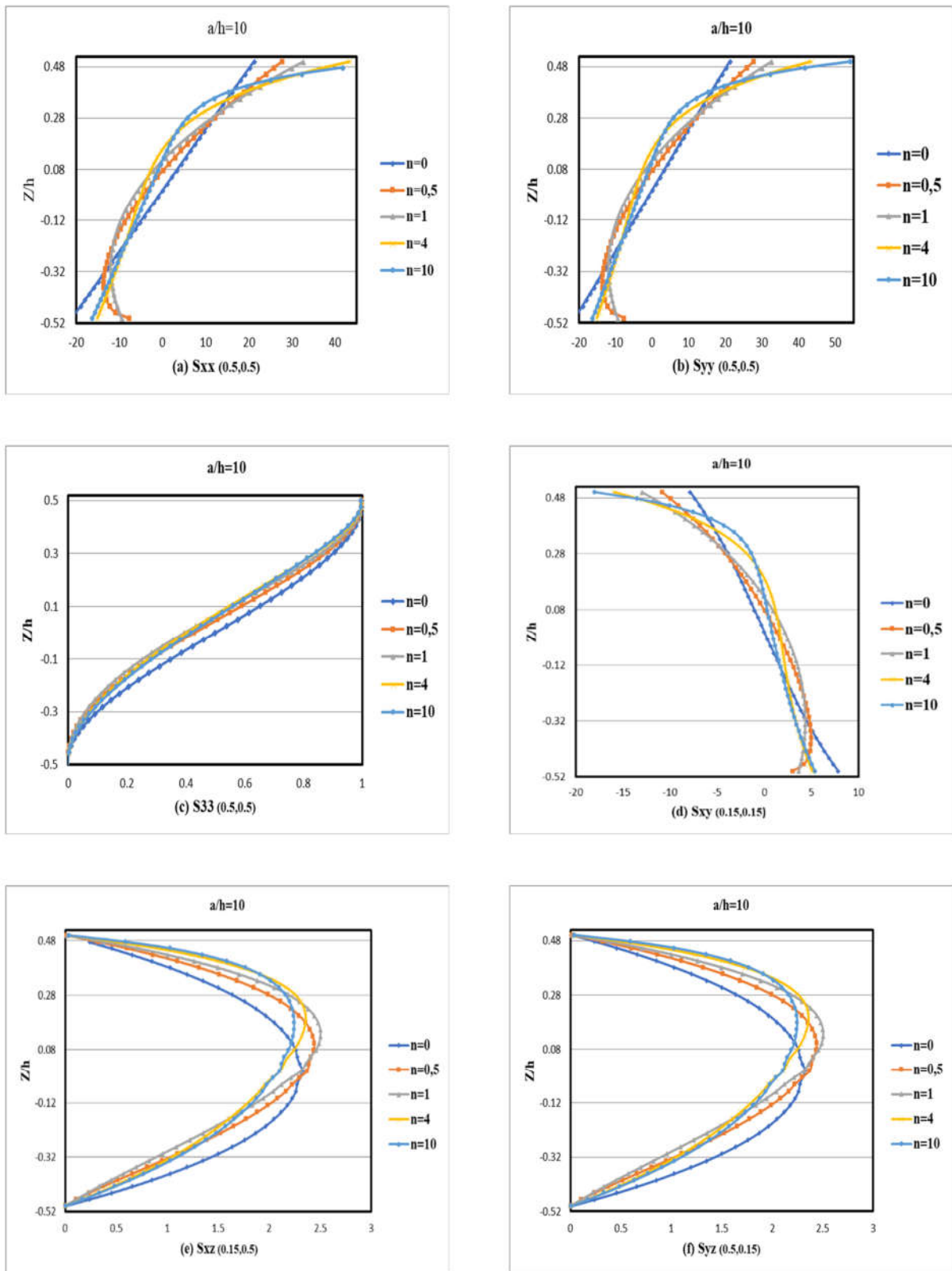


Figure IV.6: Profil des contraintes normales et de cisaillements donnés par UMAT utilisé à travers l'épaisseur de la plaque FGM

IV.2.4.2. Deuxième cas

On considère le même exemple précédent. Le travail de Thai et Choi [132] est la deuxième référence pour vérifier l'exactitude de la présente étude. La déflexion et les contraintes normales sans dimension sont définies comme suit :

$$\bar{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \bar{\sigma}_{xx} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) \quad \text{IV.5}$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3}\right), \bar{\sigma}_{xy} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{3}\right) \quad \text{IV.6}$$

Dans le cas $a/h = 10$ avec divers indices de la loi de puissance n . La déflexion transversale, les résultats des contraintes normales et de cisaillement de la plaque FGM sont listés dans les tableaux IV.5 et IV.6 respectivement. Ils ont conclu que les résultats de la déflexion transversale pour différentes fractions volumiques sont inclus.

Tableau IV.5: Déflexion transversale non-dimensionnelle \bar{W} pour différents indices de la loi de puissance.

	Benyoucef [168] NHDM	Zenkour [169] GSDT	Huu [137] RPT	Présent 3D EF / UMAT	Erreur [%]
n	\bar{W}				
Al ₂ O ₃	0.2960	0.2960	0.2961	0,3193	7,27
1	0.5889	0.5889	0.5890	0,6338	7,07
4	0.8810	0.8819	0.8815	0,9655	8,70
10	1.0083	1.0089	1.0087	1,1103	9,15
Al	1.6071	1.6070	1.6074	1,7333	7,26

[%] Erreur / réf. Huu-Tai Thai [137]

Les résultats de Thai et Choi [137] et de lors de 7 à 8%. En outre, les résultats des contraintes normales sont présentés de 5 à 6% pour différentes fractions volumiques. Les valeurs des contraintes de cisaillement vont jusqu'à 12,34% dans le cas isotopique. Pour différentes fractions volumiques, la contrainte de cisaillement est déviée à 14%. Des erreurs importantes de la contrainte de cisaillement viennent du fait qu'il est mesuré à proximité des conditions aux limites, contrairement aux autres contraintes (voir équation IV.4). La figure IV.7 montre comment la distribution de la contrainte de cisaillement change à proximité des conditions aux

limites. Donc pour des valeurs plus compatibles, il est nécessaire de s'éloigner des conditions aux limites.

Tableau IV.6: Contraintes Non-dimensionnelles pour des indices variables de la loi de puissance

n	Contraintes	Benyoucef [168] NHDM	Zenkour [169] GSDT	Huu [137] RPT	Présent 3D EF / UMAT	Erreur [%]
Al ₂ O ₃	$\overline{\sigma_{xx}}$	1,9955	1,9955	1,9943	2,11	5,48
	$\overline{\sigma_{yy}}$	1,3121	1,3121	1,3124	1,3931	5,79
	$\overline{\tau_{xy}}$	0,7065	0,7065	0,7067	0,6291	12,34
1	$\overline{\sigma_{xx}}$	3,087	3,087	3,085	3,26	5,37
	$\overline{\sigma_{yy}}$	1,4894	1,4894	1,4898	1,582	5,83
	$\overline{\tau_{xy}}$	0,611	0,611	0,6111	0,5525	10,61
4	$\overline{\sigma_{xx}}$	4,0693	4,0693	4,0655	4,3300	6,11
	$\overline{\sigma_{yy}}$	1,1783	1,1783	1,1794	1,1209	5,22
	$\overline{\tau_{xy}}$	0,5667	0,5667	0,5669	0,4894	15,84
10	$\overline{\sigma_{xx}}$	5,089	5,089	5,0849	5,4000	5,84
	$\overline{\sigma_{yy}}$	0,8775	0,8775	0,8785	0,953	7,82
	$\overline{\tau_{xy}}$	0,5894	0,5894	0,5896	0,5026	17,31
Al	$\overline{\sigma_{xx}}$	1,9955	1,9955	1,9943	2,1071	5,35
	$\overline{\sigma_{yy}}$	1,3121	1,3121	1,3124	1,3931	5,80
	$\overline{\tau_{xy}}$	0,7065	0,7065	0,7067	0,6291	12,34

[%] Erreur / réf. Huu-Tai Thai [137]

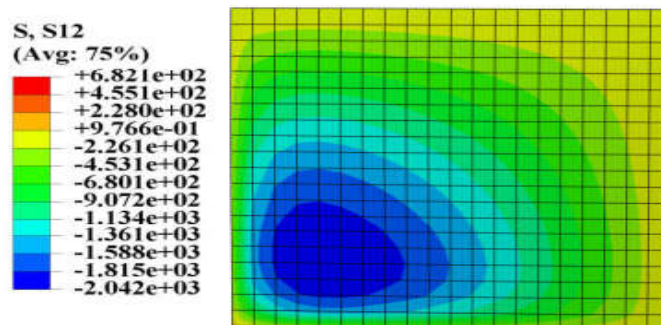


Figure IV.7: Tracés de contour pour la contrainte pour distribution de $\overline{\tau_{xy}}$ dans le plan $Z = -h/3$

IV.2.4.3. Troisième cas

Dans ce cas, le sous-programme UMAT appliquée pour un panneau cylindrique carré (figure IV.8) soumis à différentes charges uniformes (q), les propriétés de la structure sont données comme suit : $R/a=10$, $a/h=10$, $E_{Al} =70$ GPa, $E_{ZrO_2} =151$ GPa et $\nu = 0,3$ à travers l'épaisseur.

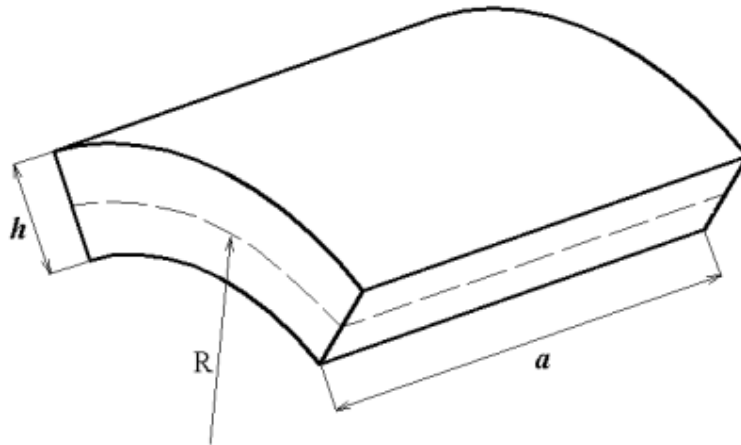


Figure IV.8 : Panneau cylindrique en FGM

Les résultats obtenus pour la déflexion transversale non dimensionnelle $\bar{W} = w/h$ sont comparés avec Kar et Panda [170] dans le tableau IV.7. Les résultats montrent que le sous-programme développé UMAT peut être utilisé avec d'autres géométries. Dans cette comparaison, la précision de la convergence est 10^{-4} . Les petites différences entre les résultats proviennent principalement de la déformation à travers l'épaisseur qui est négligée par la référence [170] en plus de la cinématique du champ de déplacement. La loi dans ce cas est d'écrit par l'équation IV.7

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)v(z) \quad \text{IV.7}$$

Tableau IV.7 : Déflexion transversale non dimensionnelle \bar{W} pour panneau cylindrique FGM soumis à des charges différentes.

Méthode	Charge ($q/10^8$)					
	3.5	7	10.5	14	17.5	
Kar and Panda [170], HSDT	\bar{W}	1.6443	3.2886	4.9329	6.5772	8.2215
Présent, 3D EF / UMAT		1.6266	3.2520	4.8779	6.4759	8.0949

IV.2.4.4. Quatrième cas

La vibration aussi c'est volet qu'on doit tester notre sous-programme développé UMAT pour une plaque FGM carrée simplement supportée. La variation de densité à travers l'épaisseur est calculée automatiquement par ABAQUS au centre des éléments en utilisant le champ analytique.

Les résultats pour une plaque de $a/h=10$ sont comparés aux références Hosseini-Hashemi [177]. Hosseini-Hashemi [178] et Thai et Kim [179] sont énumérés dans le tableau IV.8. Les différences entre les résultats obtenus et celles des références sont faibles. Les différences augmentent lorsque le rapport (a/h) diminue. Les écarts sont dus au champ de déplacement utilisé et à la déformation négligée dans l'épaisseur. Puisque nous sommes dans le cas dynamique, ces différences sont amplifiées par l'énergie cinétique.

Tableau IV.8: Fréquence fondamentale non-dimensionnelle le $\bar{\omega} = wh\sqrt{\rho_c/E_c}$ d'une plaque carrée en FGM (Al/Al₂O₃) simplement supportée.

a/h	Méthode	Indice de la loi de puissance (n)				
		0	0.5	1	4	10
5	Hosseini-b [178], RTOT	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
	Hosseini-a [177], RMPT	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
	Thai [179], SHODT	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
	Présent, 3D EF / UMAT	0.1905	0.1658	0.1519	0.1260	0.1161
10	Hosseini-b [178], RTOT	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
	Hosseini-a [177]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
	Thai [179]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
	Présent, 3D EF / UMAT	0.0551	0.0477	0.0439	0.0379	0.0352
20	Hosseini-b [178], RTOT	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Hosseini-a [177], RMPT	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Thai [179], SHODT	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Présent, 3D EF / UMAT	0.0145	0.0125	0.0116	0.0101	0.0094

IV.3. ETUDE DE LA VARIATION DES CONTRAINTES AVEC LES LOIS E-FGM ET S-FGM

Comme il a été mentionné dans le chapitre I, les matériaux FGMs peuvent suivre d'autre loi de comportement tel que E-FGM et le S-FGM, dans ce qui suite nous allons étudier la variation et la distribution des contraintes à l'aide de notre sous-programme UMAT déjà élaboré

sous une charge sinusoïdale de forme $P_{(x,y)} = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) * \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ lié au métal (Aluminium Al). La même structure (Figure VI.1) utilisée pour étudier la variation des contraintes pour les lois de comportement S-FGM et E-FGM.

IV.3.1. UMAT avec la loi « E-FGM »

La distribution des contraintes dans une plaque FGM type métal-céramique pour une loi de mélange E-FGM sont représentées sur la (figure IV-9), les contraintes normales σ_{xx} engendré dans la structure est due au chargement sinusoïdal avec l’impact de la nature de la céramique.

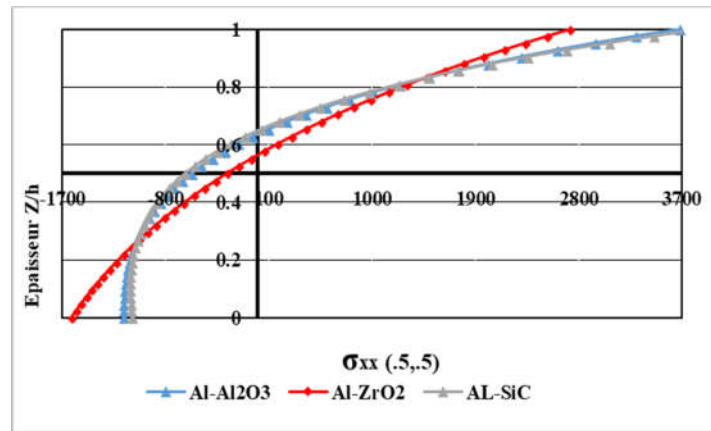


Figure IV.9 : Variation de la contrainte normale σ_{xx} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique

Nous remarquons que dans les trois matériaux les contraintes les plus importantes sont engendrées par une céramique de forte rigidité. En effet telle que la céramique conjointement liée à un métal induite une variation des contraintes. Les contraintes de même intensité à l’interface mettent le métal tension et la céramique en compression.

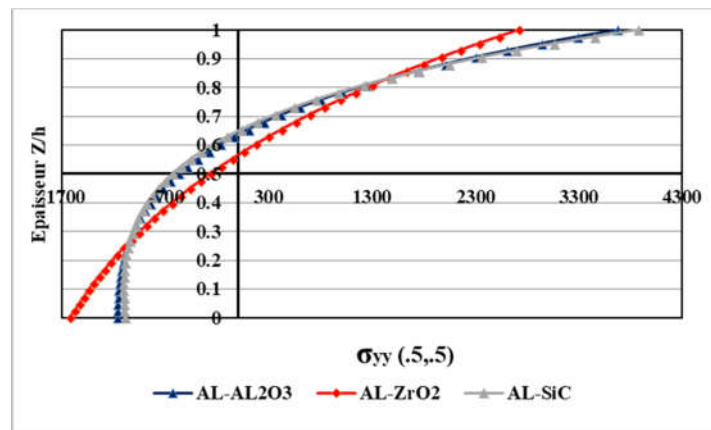


Figure IV.10 : Variation de la contrainte normale σ_{yy} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique

La variation de la contrainte normale σ_{yy} induite dans cette plaque FGM en fonction de l'épaisseur et la nature de la céramique est illustrée sur la figure IV-10, sont pratiquement comparable à de ceux des contraintes σ_{xx} . Le niveau et la distribution des contraintes normales σ_{zz} présenter dans la figure IV-11, montre une légère variation entre les contraintes montrées au milieu de la plaque et cela due au module d'élasticité. Plus le module d'élasticité de la céramique est élevé plus les contraintes σ_{zz} sont plus intenses.

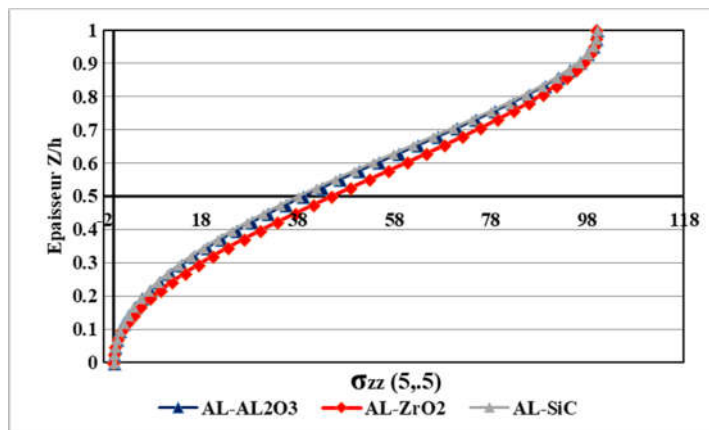


Figure IV.11 : Variation de la contrainte normale σ_{zz} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique

La contrainte tangentielle relative de plan XY (voir figure IV.1) de l'assemblage de type E-FGM sont plus faible avec une légère perturbation à la partie inferieur qui mettre la structure E-FGM en tension alors que la partie supérieure en compression figure IV-12.

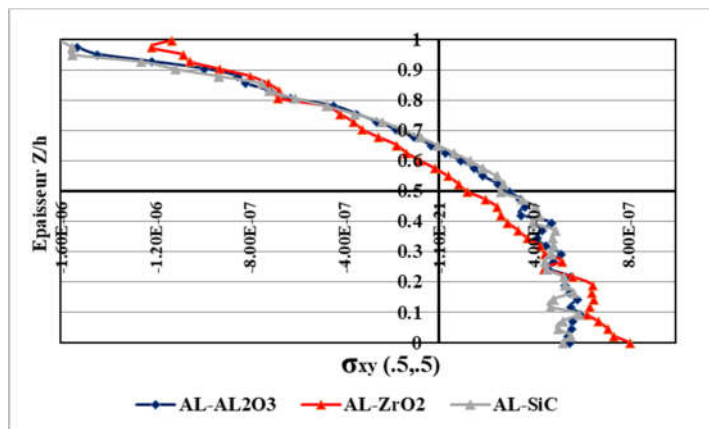


Figure IV.12 : Variation de la contrainte tangentielle σ_{xy} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique

Le niveau et la distribution des contraintes normales σ_{xz} figure IV.13 sont pratiquement comparable à de ceux des contraintes σ_{yz} comme le montre la figure IV.14

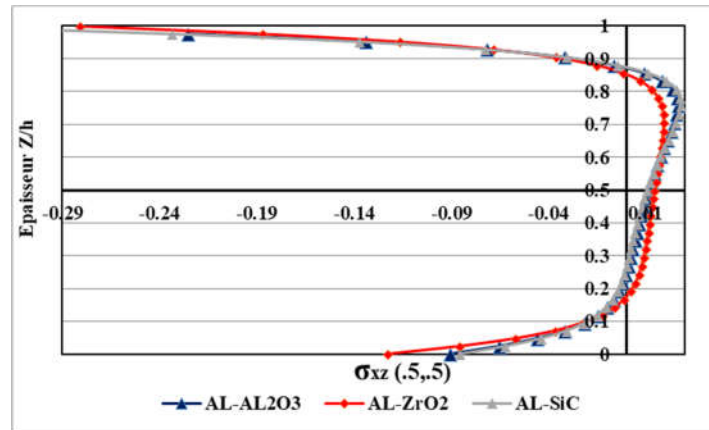


Figure IV.13 : Variation de la contrainte tangentielle σ_{xz} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique

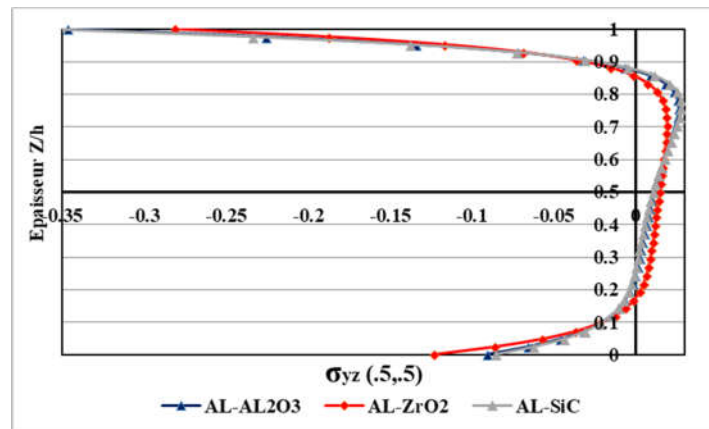


Figure IV.14 : Variation de la contrainte tangentielle σ_{yz} en fonction z/h pour différentes rigidités de la céramique

IV.3.2. UMAT avec la loi « S-FGM »

Dans ce qui suite, nous analysons numériquement par la méthode des éléments finis l'effet de l'indice de puissance pour une plaque qui suis une variation de type S FGM constituée Al_2O_3 et Al. Les résultats ainsi obtenus sont illustrés par les figures IV-15 a IV-20. Ces dernières montrent la répartition des contraintes normales, tangentielles dans la Structure étudiée.

Les contraintes normales induites selon la direction X de la structure sont fortement concentrées dans la céramique à la partie inferieur de la structure et mettre ce dernier en traction. Au voisinage proche de la ligne moyenne nous remarquons une légère variation due à l'indice.

Plus la valeur de « n » est importante la partie moyenne marque une valeur significative de puissance dont la partie supérieur (Al) est soumis en compression.

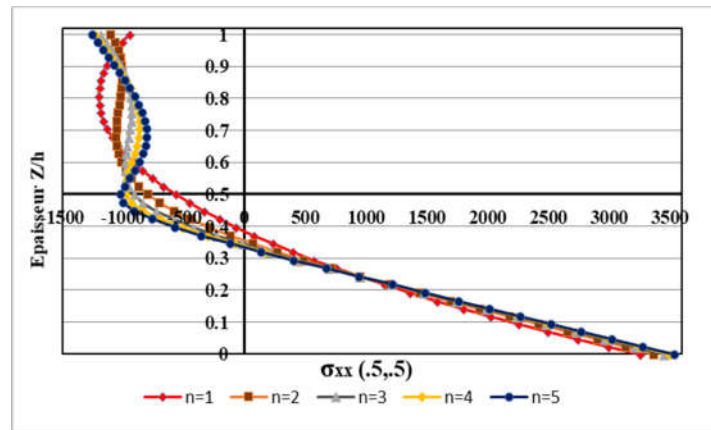


Figure IV.15 : Variation de la contrainte normale σ_{xx} en fonction z/h pour différents indices de puissance.

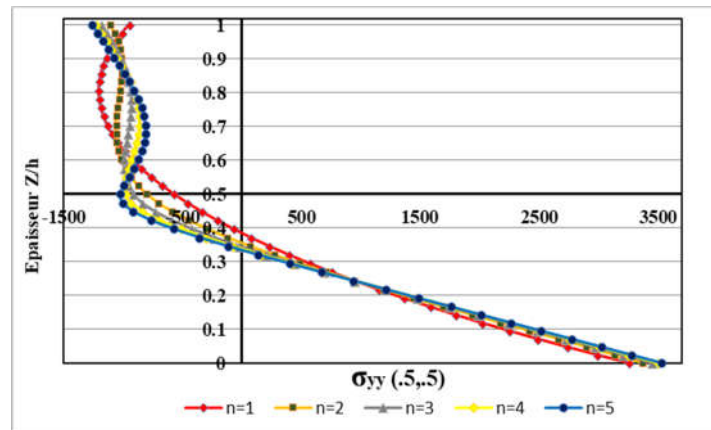


Figure IV.16 : Variation de la contrainte normale σ_{yy} en fonction z/h pour différents indices de puissance.

Les contraintes développées dans la deuxième direction de Y, σ_{yy} figure IV.16 sont pratiquement comparable à de ceux des contraintes σ_{xx} comme le montre la figure IV.15.

Dans la troisième direction Z les contraintes normales sont situées dans la céramique près du bord de son partie inferieur Al_2O_3 . Un éloignement de cette partie de la structure conduit à une relaxation progressive des ces contraintes, leur niveau le plus bas est atteint dans la partie supérieur Al (figure IV.17). Ces contraintes sont beaucoup plus stables que les deux autres contraintes normales engendrées selon la direction X et Z de la structure, l'inexistence de la zone de transition (tension vers la compression).

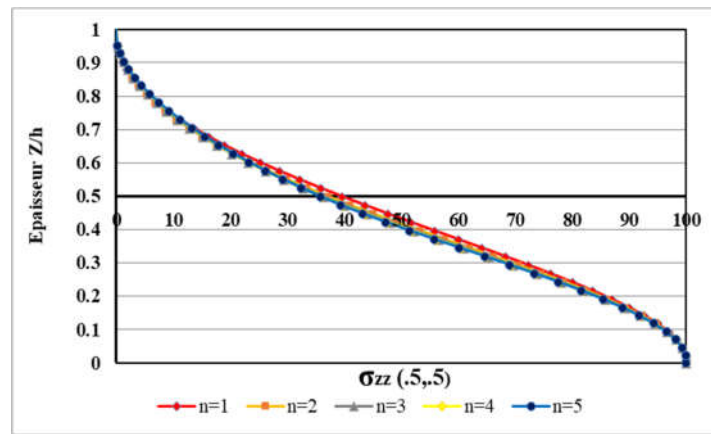


Figure IV.17 : Variation de la contrainte normale σ_{zz} en fonction z/h pour différents indices de puissance.

Les contraintes tangentielles les plus importantes sont développées dans le plan XY de la structure figure IV.18. Elles sont plus faibles elle mit la céramique Al_2O_3 toujours en compression tandis que la Al et en compression. Ces contraintes sont moins significatives que les autres contraintes.

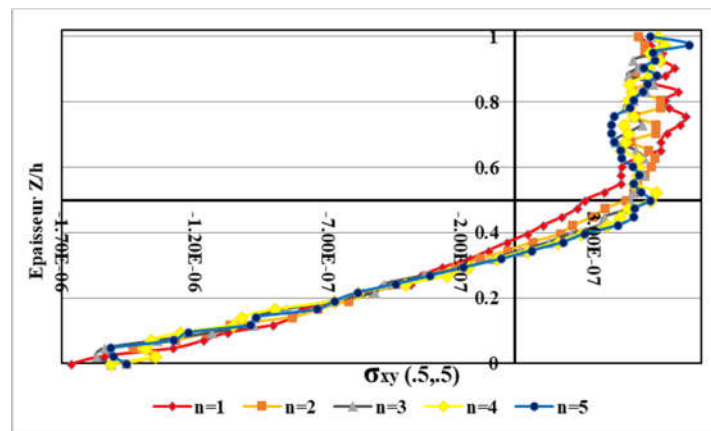


Figure IV.18 : Variation de la contrainte tangentielle σ_{xy} en fonction z/h pour différents indices de puissance.

Le niveau et la distribution des contraintes normales σ_{xz} figure IV.19 sont pratiquement comparable à de ceux des contraintes σ_{yz} comme le montre la figure IV.20.

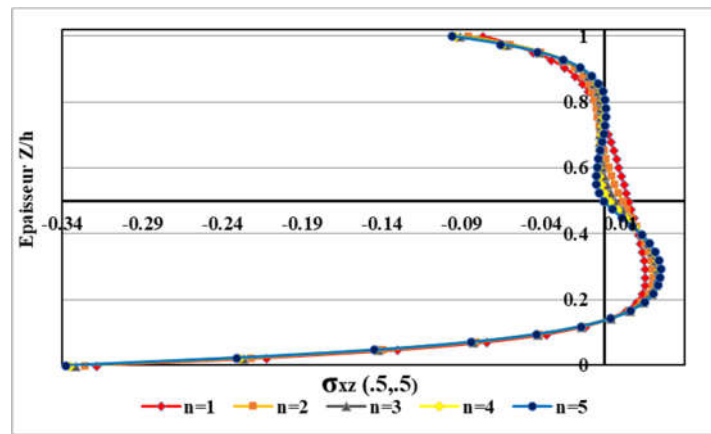


Figure IV.19 : Variation de la contrainte tangentielle σ_{xz} en fonction z/h pour différents indices de puissance.

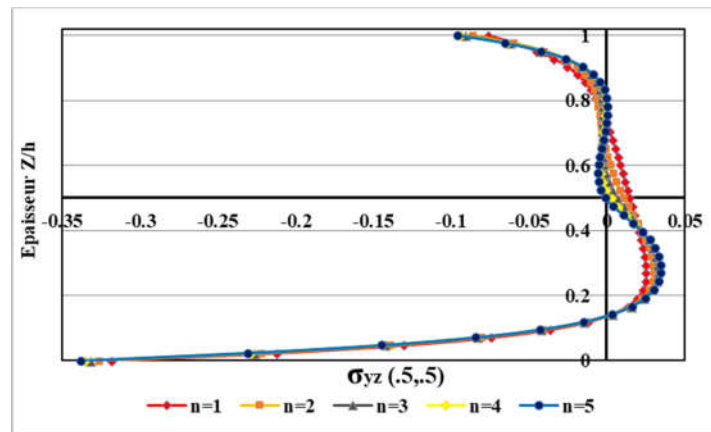


Figure IV.20 : Variation de la contrainte tangentielle σ_{yz} en fonction z/h pour différents indices de puissance.

IV.4. CONCLUSION

La méthode des éléments finis tridimensionnels est couplée au sous-programme d'un matériaux défini par l'utilisateur « UMAT » sous chargement sinusoïdal pour analyser la flexion et les vibrations libres des plaques et des panneaux cylindriques en FGM à montrer que les résultats obtenus sont proches de ceux qui existent dans la littérature. Des différences moins petites existent toujours car la déformation à travers l'épaisseur est négligée par les références. Dans la vibration, ces petites différences sont amplifiées mais les résultats restent comparables. Les comparaisons entre la méthode des éléments finis en trois dimensions et les méthodes basées sur les théories du champ de déplacement demande certaines précautions pour appliquer les conditions aux limites et extraire les valeurs souhaitées. Avec cette méthode, les avantages d'ABAQUS sont préservés pour le traitement des structures complexes, les conditions aux

limites, l'analyse et le chargement (plaque circulaire, panneaux, flambement, chargement localisé ...).

Le sous-programme UMAT nous permet d'analyser aussi les variations et la distribution des contraintes dans des plaques de type E-FGM et S-FGM.

**CONCLUSION GENERALE &
PERSPECTIVE**

CONCLUSION GENERALE & PERSPECTIVE

L'implémentation des lois de comportement est un domaine en plein essor, dont l'étude fait appel à différentes disciplines : programmation fortran, modélisation numérique, investigation sur les lois qui régissent les matériaux fonctionnellement gradués FGMs.

Dans ce travail, nous sommes intéressés à l'implémentation des lois de comportement des matériaux à Gradient Fonctionnel à partir d'un sous-programme UMAT définie par l'utilisateur pour étudier les déplacements et analyse tridimensionnelle par éléments finis la variation des contraintes dans une plaque FGM et la vibration libre d'un panneau cylindrique.

La démarche UMAT a pour objectif de modéliser les matériaux FGMs quel que soit la fonction qui décrit leur fraction volumique. Au vu de l'étude bibliographique, plusieurs approches théoriques qui basées sur les champs de déplacements traitent les matériaux ces types des matériaux mais il s'est avéré que l'implémentation d'un sous-programme UMAT a donné ces fruits vus l'exactitude des résultats obtenus qui montrent la fiabilité de la méthode.

En perspective, nous souhaitons évaluer nos résultats E-FGM et S-FGM avec d'autres résultats existés dans la littérature ainsi d'autres formes complexes et d'autres conditions aux limites dont l'objectif de déduire la fiabilité de notre UMAT avec ces deux lois de mélange. Etudier un autre comportement comme le calcul dynamique avec le sous-programme VUMAT aussi un travail qu'on souhaite le traité.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] M. Courbiere, D. Treheux, C. Beraud, and C. Esnouf, *Annales de chimie*, vol. 12 ,pp. 295-312, 1987.
- [2] M. Niino. "Design of functionally gradient materials". *Science and Technology Japan*, 18(3), 18-46.1990;
- [3] K. Wakashima, T. Hirano, M. Niino. "Functionally gradient materials (FGM) architecture: a new type of ceramic-metal assemblage designed for hot structural components". *Proceedings ESA Sump "Space applications of advanced structural materials" ESTEC*, 97-102.1995.
- [4] P.M. Biesheuvel, V. Breedveld., A.P. Higler, H. Verweij. "Graded membrane supports produced by centrifugal casting of a slightly polydisperse suspension". *Chemical Engineering Science*, 56(11), 3517-3525.2001.
- [5] A.J. R Us, E.B. Popov, D. Sun, J.J. Russel, C.C.J. Murray. "Functionally graded electrical / thermal ceramic systems". *Journal of the European Ceramic Society*, 21(10-11), 2025-2029.2001.
- [6] Y. Watanabe, H. Sato. "Review fabrication of functionally graded materials under a centrifugal force. In *Nanocomposites with unique properties and applications in medicine and industry*". Vol. 7, pp. 133-50.2011.
- [7] G. He, P. Zhao, S. Guo, Y. Chen, G. Liu, J. Li. "In suit synthesis and bonding of Cu to W-Cu composite by combustion synthesis and centrifugal infiltration". *Journal of Alloys and Compounds*, 579, 71-74.2013.
- [8] D.P. Miller, J. Lannuti, R.N. Yancey. "Functionally gradient NiAl/Al₂O₃ structures". *Ceramic Engineering and Science Proceedings*, 1, 365-373.2008.
- [9] O. Gillia, B. Caillens. "Fabrication of a material with composition gradient for metal/ceramic assembly". *Powder Technology*, 208(2), 355-366.2010.
- [10] B. Kieback, A. Neubrandn, H. Riedel. "Processing techniques for functionally graded materials". *Materials Science and Engineering*, 362(1-2), 81-105.2003.
- [11] A. Proner. "Revêtement par projection thermique". *Techniques de l'ingénieur*, M 1645, 3-20.1999.
- [12] J. Matejicek, P. Chraska, J. Linke. "Thermal Spray Coatings for fusion Applications - Review". *Journal of Thermal Spray Technology*, 16(1), 64-83.2000.
- [13] G. Pintsuk, S. Brünings, J.E. Döring, J. Linke, I. Smid, L. Xue. "Development of W/Cu- functionally graded materials". *Fusion Engineering and Design*, 66-68, 237-240.2003.
- [14] J.E. Döring, R. Vassen, G. Pintsuk, D. Stöver. "The processing of vacuum plasma-sprayed tungsten-copper composite coating for high heat flux components". *Fusion Engineering and Design*, 66-68, 259-263.2003.

- [15] W.P. Shen, Q. Li, K. Chang, Z.J. Zhou, C.C. Ge. "Manufacturing and testing W/Cu functionally graded material mock-up for plasma facing components". *Journal of Nuclear Materials*, 367-370, 1149-1453.2009.
- [16] F.L. Chong, J. Chen, J.G. Li. "Evaluation of tungsten coatings on CuCrZr and W/Cu FGM under high heat flux and HT-7 limiter plasma irradiation". *Journal of Nuclear Materials*, 363-365, 1201-1205.2007.
- [17] J. Bessot. "Dépôts par pulvérisation cathodique". *Techniques de l'ingénieur*, 1657, 1-25.1985.
- [18] T. Belmonte. "Dépôts chimiques à partir d'une phase gazeuse". *Techniques de l'ingénieur*, m1660, 1-10.2010.
- [19] Y. Lian, X. Liu, Z. Xu, J. Song, Y. Yu. "Preparation and properties of CVD-W coated W/Cu FGM mock-ups". *Fusion Engineering and Design*, 88(9-10), 1694-1698.2013.
- [20] D. Bernache-Assolant, J. Bonnet. "Frittage aspect physico-chimique - Partie 1 frittage en phase solide". *Technique de l'ingénieur*, AF 6 620, 1-19.2005.
- [21] R. Orrù, R. Licheri, A.M. Locci, A. Cincotti, G. Cao. "Consolidation/synthesis of materials by electric current activated/assisted sintering". *Materials science and engineering R*, 63, 127-287.2009.
- [22] R. Chaim, M. Margulis. "Densification maps for spark plasma sintering of nanocrystalline MgO ceramics". *Materials Science and Engineering A*, 407(1-2), 180-187.2005.
- [23] R. Chaim, R. Reshef, G. Liu, Z. Shen. "Low-temperature spark plasma sintering of NiO nanoparticles". *Materials Science and Engineering A*, 528(6), 2936-2940.2011.
- [24] Z.A. Munir, U. Anselmi-Tamburini. "The effect of electric field and pressure on the synthesis and consolidation of material". A review of the spark plasma sintering method. *Journal of Materials Science*, 41(3), 763-777.2006.
- [25] Y. Kim, N. Oh, S.-T. Oh, I.-H. Moon. "Thermal conductivity of W-Cu composites at various temperatures". *Materials Letter*, 51(5), 420-424.2001.
- [26] D.J. Ilic, J. Fiscina., C.J.R. Gonzalez-Olivier, F. Mücklich. "Sintering behavior of self-formed tungsten graded preform suitable for Cu-W fabrication". *Advanced Engineering materials*, 9(7), 1192-1197.2007.
- [27] J. Raharijaona, *Elaboration de matériaux W-Cu à gradient de propriétés fonctionnelles- Application aux composants face au plasma*.2015.
- [28] J.-H. You, A. Brendel, S. Nawka, T. Schubert, B. Kieback. "Thermal and mechanical properties of infiltrated W/CuCrZr composite materials for functionally graded heat sink application". *Journal of Nuclear Materials*, 438(1-3), 1-6.2013.
- [29] S. Nawka, T. Schubert, A. Brendel, A. Zivelonghi, J. H. You, B. Kieback. "Synthesis, Characterization and FEM-simulation of W/CuCrZr Composites for Extreme Thermal

- Applications". Paper presented at the PM2010 World Congress, Florence, Italy.2010
- [30] Minier, L. "Influence du frittage flash sur l'obtention de nanostructures dans des systèmes métalliques et céramiques, Université de Bourgogne, Dijon.2008.
- [31] P. Saravanan, J. Hsu, D. Sivaprahasam, S.V. Kamat. "Structural and magnetic properties of g-Fe₂O₃ nanostructured compacts processes by spark plasma sintering". Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 346, 175-177.2013.
- [32] C.-Q. Hong, X. Zhang, W.-J. Li, J.-C. Han, S.-H. Meng. "A novel functionally graded material in the ZrB₂-SiC and ZrO₂ system by spark plasma sintering". Materials Science and Engineering, 498(1-2), 437-441.2008.
- [33] M. Tokita. "Development of large-size ceramic/metal bulk FGM fabricated by spark plasma sintering". Materials Science Forum, 308-311, 83-88.1999.
- [34] S.-R. Li, X. Wang and R. C. Batra, "Correspondence Relations Between Deflection, Buckling Load, and Frequencies of Thin Functionally Graded Material Plates and Those of Corresponding Homogeneous Plates", ASME J. of Applied Mechanics, 82, No. 111006, 2015.
- [35] M. Gasik. "Micromechanical modelling of functionally graded materials". Computational Materials Science, 13(1-2), 42-55.1998.
- [36] J. Moon, A. Caballero, L. Hozer, Y. Chiang, M. Cima. "Fabrication of functionally graded reaction infiltrated SiC-Si composite by three-dimensional printing (3DP™) process". Materials Science and Engineering A, 1-2(110), 119.2001.
- [37] K. Inoue, (Artist). Electric-discharge sintering U.S. Patent 3,24, 956.1966.
- [38] K. Inoue, (Artist). "Apparatus for electrically sintering discrete bodies" U.S. Patent 3 250-892.1966.
- [39] J.R. Groza, A. Zavaliangos. "Sintering activation by external electrical field". Materials Science and Engineering A, 287(2), 171-177.2000.
- [40] J.R. Groza, A. Zavaliangos. "Nanostructured bulk solids by field activated sintering". Reviews on Advanced Materials Science, 5(1), 24-33.2003.
- [41] M. Lahmani, C. Bréchnignac, P. Houdy. Les nanosciences, 2. Nanomatériaux et nanochimie" (Belin ed.).2012.
- [42] M. Omori, "Sintering, consolidation, reaction and crystal growth by the spark plasma system (SPS) ". Materials Science and Engineering A, 287(2), 183-188.2000.
- [43] G. Taylor. "Apparatus for making hard metal compositions" U.S. Patent 1,896,854.1993
- [44] O. Yanagisawa, H. Kuramoto, K. Matsugi, M. Komatsu. "Observation of particle behavior in copper powder compact during pulsed electric discharge". Materials Science and Engineering A, 350(1-2), 184-189.2003.

- [45] K. Ozaki, K. Kobayashi, T. Nishio, A. Matsumoto, A. Sugiyama. "Sintering phenomena on initial stage in pulsed current sintering". *Journal of the japan society of powder and powder metallurgy*, 47(3), 293-297.2000.
- [46] C. Bonifacio, T. Holland., K. Benthem. "Evidence of surface cleaning during electric filed assisted sintering". *Scripta Materialia*, 69(11-12), 769-772.2013.
- [47] K. Matsugi, H. Kuramoto, O. Yanagisawa, M. Kiritani. "A case study for production of perfectly sintered complex compacts in rapid consolidation by spark sintering". *Materials Science and Engineering A*, 354(1-2),2015.
- [48] P. Angere, E. Neubauer., G. Korg. "Compaction behavior of various refractory metal powders and their correlated carbides during the spark plasma sintering (SPS) process". Paper presented at the Sintering 2005
- [49] <http://www.euralliage.com/centrifugation.html>
- [50] H. Shen, "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York CRC Press, Taylor & Francis Group.2009.
- [51] Chen, C.S., Hsu, C.Y., Tzou, G.J. "Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 28(10), 1215-1234.2009.
- [52] Erdogan, F. "Fracture mechanics of functionally graded materials". *Composites engineering*, 5, 753-770.1995.
- [53] Sankar, B. V. "An elasticity solution for functionally graded beams", *Composites science and technology*, 61, 689-696.2001.
- [54] J. Yang, Y. Jia, S. Sun, D. Ma, T. Shi, L. An, "Mesoscopic simulation of the impregnating process of unidirectional fibrous preform in resin transfer molding", *Materials Science and Engineering*, pp 515-520.2006.
- [55] Q. Chen, H.J. Ding. "On free vibration of a functionally graded piezoelectric rectangular plate". *Acta Mech.*, 153, pp. 207-216.2002.
- [56] A.H. Sofiyev. "The vibration and stability behavior of freely supported FGM conical shells subjected to external pressure", *Composite Structures*, V 89, Issue 3, Pages 356-366.2009.
- [57] S. Pitakthapanaphong, E.P. Busso, "Self-consistent elastoplastic stress solutions for functionally graded material systems subjected to thermal transients", *Mechanics and Physics of Solids*, Volume 50, Issue 4, April 2002, Pages 695-716.2002.
- [58] CHO, J. R. & HA, D. Y. "Volume fraction optimization for minimizing thermal stress in Ni-Al₂O₃ functionally graded materials". *Materials Science and Engineering A*, 334, 147-155.2002.
- [59] Jean-Marie Berthelot. "Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures" . 4^{ème} Edition, Lavoisier, 2005.

- [60] G. Kirchhoff. "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe". *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 40:1850, 51-88.1850.
- [61] E. Reissner. "The effect of transverse shear deformation on the bending of plates". *Jou. Appl. Meth*, 12: 69-77.1945.
- [62] R.D. Mindlin. "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates". *Jou. Appl. Meth.*, 18: 31-38.1951.
- [63] E. Reissner and Y. Stavsky. "Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates". *J. Appl. Meth*, 28: 402-408. 1961
- [64] P.C. Yang, C.H. Norris, and Y. Stavsky. "Elastic wave propagation in heterogeneous plate". *Int. Jou. Sol. Struct*, 2: 665-684. 1966
- [65] C.T. Sun and J.M. Whitney. "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates". *AIAA*, 11: 178-183.1973.
- [66] J.M. Whitney and N.J. Pagano. "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates". *Jou. Appl. Mech*, 37: 1031-1036.1970
- [67] W.L. Yin. "Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model". *Int. Jou.Sol.Str*, 31: 1549-1564.1994
- [68] I. Katili. A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields- Part II: "An extended DKT element for thick plate bending analysis". *Inte. Jou. Num. Meth. Eng.* 36:1885-1903.1993.
- [69] N.J. Pagano. "Stress field in composite laminates". *Int. Jou.Sol. Str*, 14: 385-400.1978.
- [70] M. Cho and R. Parameter. "Efficient higher order composite plate theory for general lamination configuration". *Ame.Int.Aer.Ast*, 31, n°7: 1299-1306.1993.
- [71] M. Di Sciuva. "A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates". *Atti.Accad.Sci. Torino*, 118: 279-295.1984.
- [72] M. Di Sciuva and U. Icardi. "Discrete-layer models for multilayered shells accounting for interlayer continuity". *Meccanica*, 28 : 281-291.1993.
- [73] E. Carrera. "On the use of transverse shear stress homogeneous and non homogeneous conditions in the third-order orthotropic plate theory". *Com.Str*, 77: 341-352. 2007
- [74] F. Daghia, S. Miranada, F. Ubertini and E. Viola. "A hybrid stress approach for laminated composite plates within the first order shear deformation theory". *Int. Jou. Soli .Str*, 45: 1766-1787. 2008.
- [75] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry, and E. Daya. "Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites". *Com.Str* 84: 2822-292.2008.
- [76] F. Maleiro, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, and J.N. Reddy. "Mixed Least-squares finite element model for the static analysis of laminated composite". *Com.Str*.

826-838. 2008.

- [77] Shi Guangyu. "A new simple third- order shear deformation theory of plate". *Int.Jou.Sol.Str*, 44: 43994417. 2007.
- [78] A.K. Noor and W.S. Burton. "Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates". *App. Mech. Rev*, 42, n°1: 1-12.1989.
- [79] R.K. Kapania and S. Raciti. "Recent advances in analyse of laminated beams an plates", part i: Shear and buckling; *Ame. Int. Aer.Ast*, 27, n°7: 923-934.1989.
- [80] E. Carrera. "An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates". *Com. Str*, 50: 183-198.2000.
- [81] T. Kant and K. Swaminathan. "Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composite" – A selective review and survey of current developments. *Com. Str*.49: 65-75.2000.
- [82] N.J. Pagano. "Exact solutions for rectangular bi-directional composites and sandwich plates".*Comp. Mat*, 4: 20-34.1970.
- [83] N.J. Pagano. "Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending". *Jou.Com. Mat*, 3: 398-411.1969.
- [84] S. Srinivas. "A refined analysis of composite laminates". *Jou. Sou. Vib*, 30: 495-507.1973.
- [85] G. Kirchhoff, *Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe*. *Journal for resine und angewandte mathematik*, 40: 1850.51-88.
- [86] J.C. Simo D.D Fox, and M.S and Rifai. "On a stress resultant geometrically exact shell model"-part iii. Computational aspects on the nonlinear theory. *Com. Meth. App. Mec. Eng*, 79: 21-70.1990.
- [87] S.A. Ambartsunyan. "Theory of anisotrope plate". Technomic Publishing Co. 1969
- [88] V. Panc. "Theory of elastic plates" . Noordhoff, Leyden, Netherlands. 1975.
- [89] S.A. Kaczowski. *Plpty obliczenia statyczne*. Arkady, 2 edition.1980.
- [90] M. Levinson. "An accurate simple theory of statics and dynamics of elastic plates". *Mech. Resear. Commu*, 7: 343-350. 1980.
- [91] M.V.V. Murthy. "An improved transvers shear deformation theory for laminated anistropic plate". Technical report, NASA. 1981.
- [92] J.N Reddy. "A simple higher theory for laminated composites", *Appl. Mech. ASME*, 51: 745-752.1984.
- [93] O.C Zienkiewicz, R.L Taylor, Papadopoulos, and E. Onate. "Plate bending elements with discrets constraint. New triangular element". *Com. Str*, 35: 505-522.1990.

- [94] A. Chabot. "Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaire des matériaux multicouches". Thèse de doctorat, ENPC.1997.
- [95] P Lardeur. "Developpement et eveluation de deux nouveaux element finis de plaques et coque composites avec influence du cisaillement transversal".Thèse de doctorat, UTC. 1990.
- [96] W.Yu "Mathematical construction of reissnermindlin plate theory for composite laminates". Int. Jou.Sol.str, 42: 6680-6699. 2005.
- [97] E.Carrera. On the use of the murakami's "Zig-Zag function in the modeling of layered plates and shells". Com.str, 82 : 541-554. 2004.
- [98] M.K. Pandit, A.H. Sheikh, and Singh. "An improved higher order zigzag theory for the static analysis of laminated sandwich plate with soft core. Fin. Ele". Ana Des. 2008.
- [99] J.R. Xiao, D.F. Gilhooley, R.C Batra, J.W. Gillespie Jr, and M.A. McCarthy. "Analysis of the thick composite laminates using a higher-order shear and normale deformable plate theory (hosndpt) and a meshles methode". Com. Part B, 39: 414-427. 2008.
- [100] M.Cho and J.S Kim. "A postprocess methode for laminated shell with a doubly curved nine-noded finite element". Com. Part B Engineering, 31 : 65-74. 2000.
- [101] S. Vlachoutsis. Élément finis tridimensionnel dégénérés de coques avec integration explicite suivant l'épaisseur. Thèse de doctorat, ENSAE- Toulouse. 1987.
- [102] M. Tahani and A. Nosier. "Edge effect to uniformly loaded cross-oly composite laminated". Mat. Des, 24: 647-658. 2003.
- [103] O.A Sinan and A. Chaudhuri. "Levy type analysis of cross-ply plates based on higher-order theory". Com.Str,78: 243-253. 2007.
- [104] D.R.J. Owen and J.A Figueiras. "Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shell". Int. Jou. Num. Meth. Eng, 19: 541-566.1983
- [105] J.G. Ren. A new theory of laminated plate. Com. Sci. Tech, 26: 225-239.1986.
- [106] W.L. Yin, "Free-edge effects in anisotropic laminatedunder extension, bending and twistibg, part i: A stress function based variational approach". Jou.Appl.Meth,61: 410-420.1994.
- [107] S.G. Lekhnitskii. "Theory of elasticity of anisotropic elastic body". Technical report, Holden Dey, San Francisco.1963.
- [108] T.S Plagianakos and D.A Saravanos. "Higher order layerwise laminate theory for the prediction of inetrlaminar shear stresses in thick composite and sandwich composite plates". Com.Str. 2008.
- [109] R.P carreira, J.F. Caron, and A.Diaz. "Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculation". Mech. Mat, 34: 217-

230. 2002.

- [110] Q.Tanguy. Facteurs de correction de cisaillement transverses dans les plaques composites. Master thesis, Université P. et M. Curie, 1989-1990.
- [111] M.S Bouabdellah.. Modélisation de coques cylindriques raidies isotropes et composite. Thèse de doctorat, UTC.1992.
- [112] F. Auricchio and E. Sacco. "Partial-mixed formulation and refined models for the analysis of composite laminates within and fsdt". Com. Str, 46:103-113.1999.
- [113] Rezak Ayad. Élément finis de plaque et coque en formulation avec projection en cisaillement. Thèse de doctorat, UTC. 1993.
- [114] F. Auricchio and E. Sacco. "A mixed-enhanced finite element for the analysis of laminated composite plates". Int Jou. Num. Meth. Eng, 44 :1481-1504.1999.
- [115] T.J Hughes and W.K liu. "Non Linear finite element analysis of shells Part I: Three dimensional shells. Part ii: Two dimensional shells. Com. Meth. Meth.App.Mec.Eng, 26-27: 331-362 et 167-181.1981.
- [116] G.Fezans. "Analyse linéaire et non linéaire géométrique des coques par élément finis isoparamétriques tridimensionnels dégénérés". Thèse de doctorat , ENSAE Toulouse. 1981.
- [117] Q. Zeng and A. Combescure. "A new one point quadrature, générale non linéaire quadrilatère shell élément with physical stabilization". Int. Jou. Num. Meth. Eng, 42 1307-1338.1998.
- [118] D. lemosse . Elements finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces, These de doctorat, Ecole Doctorale SPMI / INSA-Rouen. 2000.
- [119] A. Legay and Combescure. "Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element shell8ps". Int. Jou. Num. Meth.Eng, 57: 1299-1322. 2003.
- [120] S.J Hossaine, P.K Sinha, and A.H. Sheikh.a, "finite element formulation for the analysis of laminated composite shell". Com. Str. 82: 1623-1638. 2004.
- [121] F. Auricchio and E. Sacco. "A mixed-enhanced finite element for the analysis of laminated composite plates". Int Jou. Num. Meth. Eng, 44 :1481-1504,1999.
- [122] S Cen, Y Long, and Z. Yao. "A new hybrid enhanced displacement based element for the analysis of laminated composite plates". Com.Str. 80:819-833. 2002.
- [123] J. Belinha and L.M.J.S. Dinis. "Analysis of plate and laminates using the element- free galerkin method". Com.Str, 84 : 1547-1556. 2006.
- [124] A. Tafla. "Éléments finis mixte- hybrides pour les structures en coques composites multicouche". Thèse de doctorat, URCA. 2007.

- [125] J.J Engblom and O.O Ochoa. "Though the thikness stress prediction for laminate plates of advanced composite materilas". *Int. Jou. Num. Meth. Eng*, 21:1759-1776.1985.
- [126] T.Topdar, A. Chakraboti, A.H. Sheikh. "An efficient hybrid plate model for analysis and control of smart sandwich laminates". *Com. Meth. App. Mech. Eng*, 193: 4591-4610.2004.
- [127] AJM. Ferreira, CMC. Roque, and PALS. Martins. "Radial basis functions and higher order shear deformation theories in the analysis of laminated composite beams and plates". *Com.Str*,66: 287293. 2004
- [128] Dassault-Systems , *Abaqus 6.11 Documentation*", URL <http://130.149.89.49> 2080/v6.11/ index.html, 2011.
- [129] FORTRAN 90.
- [130] G. M. Zhang and R. C. Batra, "Wave Propagation in Functionally Graded Materials by Modified Smoothed Particle Hydrodynamics (MSPH) Method", *J. Computational Physics*, 222, 374-390. 2007.
- [131] Chakraverty, S. and Pradhan, K. "Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions", *Aerosp. Sci. Technol.*, 36, 132-156. 2014.
- [132] Thai, H.T. and Choi, D.H. "A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos. Struct.*, 101, 332-340. 2013.
- [133] Gilhooley, D., Batra, R., Xiao, J., McCarthy, M. and Gillespie, J. "Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions", *Compos. Struct.*, 80(4),539-552. 2007.
- [134] Della Croce, L. and Venini, P. "Finite elements for functionally graded ReissnerMindlin plates", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 193(9-11), 705-725. 2004.
- [135] Lavate, P.S. and Shiyekar, S. "Flexure Analysis of Functionally Graded (FG) Plates Using Reddy's Shear Deformation Theory", in *\Adv. Struct. Eng.*", pages 25-34, Springer India, NewDelhi. 2015.
- [136] Reddy, J.N. "Analysis of functionally graded plates", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47(1-3),663-684. 2000.
- [137] Thai, H.T. and Choi, D.H. "A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation", *Compos. Sci. Technol.*, 71(16), 1850-1858. 2011.
- [138] Gouasmi, S., Megueni, A., Bouchikhi, A.S., Zouggar, K. and Sahli, A. "On the Reduction of Stress Concentration Factor Around a Notch Using a Functionally Graded Layer", *Mater. Res.*,18(5), 971-977. 2015.

- [139] Matsunaga, H. "Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings", *Compos. Struct.*, 87(4), 344-357. 2009.
- [140] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318. 2014.
- [141] Abdalnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. "A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates", *Compos. Struct.*, 184, 688-697. 2018.
- [142] Abdelaziz, H.H., Ait Amar Meziane, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Hassan, S. and Alwabli, A.S. "An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions", *Steel Compos. Struct.*, 25(6), 693-704. 2017.
- [143] Menasria, A., Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Hassan, S. "A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates", *Steel Compos. Struct.*, 25(2), 157-175. 2017.
- [144] Bellifa, H., Bakora, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Hassan, S. "An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates", *Steel Compos. Struct.*, 25(3), 257-270. 2017.
- [145] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar B'eg, O. "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos. Part B Eng*, 60, 274-283. 2014
- [146] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Hassan, S. and Tounsi, A. "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct.*, 18(1), 235-253. 2015.
- [147] Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *Int. J. Comput. Methods*, 11(6), 1350082. 2014.
- [148] Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. "An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates", *Struct. Eng. Mech.*, 57(5), 837-859. 2016.
- [149] Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. "A new simple three-unknowns sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Steel Compos. Struct.*, 22(2), 257-276. 2016.
- [150] Boudarba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. "Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory", *Struct. Eng. Mech.*, 58(3), 397-422. 2016.
- [151] El-Haina, F., Bakora, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Hassan, S. "A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates",

Struct. Eng. Mech.,63(5), 585-595.2017.

- [152] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L. Houari, M.S.A. and Tounsi, A. "Bending and freevibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and theconcept the neutral surface position", J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Eng., 38(1), 265-275.2017.
- [153] Saidi, H., Tounsi, A. and Bousahla, A.A. "A simple hyperbolic shear deformation theory forvibration analysis of thick functionally graded rectangular plates resting on elastic foundations",Geomech. Eng., 11(2), 289-307. 2016.
- [154] Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Hassan, S. "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined platetheories", Steel Compos. Struct., 18(1), 187-212.2015.
- [155] Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. "Thermomechanical bending response of FGMthick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", Steel Compos. Struct., 14(1), 85-104.2013.
- [156] Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar B'eg, O. "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory",Aerosp. Sci. Technol., 34, 24-34.2014.
- [157] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories",Struct. Eng. Mech., 53(6), 1143-1165. 2015.
- [158] Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A.and Tounsi, A. "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory", Struct. Eng. Mech., 54(4),693-710.2015.
- [159] Besseghier, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Hassan, S. "Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory", SmartStruct. Syst., 19(6), 601-614.2017.
- [160] Khetir, H., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Hassan, S. "A new non localtrigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates", Struct. Eng. Mech., 64(4), 391-402.2017
- [161] Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M.S.A., Benzair, A. and Tounsi, A. "A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams", SmartStruct. Syst., 19(2), 115-126.2017.
- [162] Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functioally graded nanoscale plates resting on elasticfoundation", Steel Compos. Struct., 20(2), 227-249.2016
- [163] Mouffoki, A., Adda Bedia, E.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Hassan, S. "Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknowntrigonometric shear deformation beam theory", Smart Struct. Syst., 20(3),

369-383.2017.

- [164] Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar B'eg, O. and Mahmoud, S.R. "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscalebeams including the thickness stretching effect", *Steel Compos. Struct.*, 18(2), 425-442.2015.
- [165] Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S. "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *SteelCompos. Struct.*, 18(4), 1063-1081.2015.
- [166] Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. "Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutralsurface position", *Compos. Struct.*, 125, 621-630.2015.
- [167] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. "A new simple shear and normaldeformations theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.*, 18(2), 409-423.2015.
- [168] Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Ait Atmane, H. and Adda Bedia, E.A. "Bending of thick functionally graded plates resting on WinklerPasternak elastic foundations", *Mech. Compos. Mater.*, 46(4), 425-434.2010.
- [169] Zenkour, A.M. "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionallygraded plates", *Appl. Math. Model.*, 30(1), 67-84.2006.
- [170] Kar, V.R. and Panda, S.K.(a). "Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM", *Struct. Eng. Mech.*, 53(4), 661-679.2014
- [171] Mehar, K. and Panda, S.K. "Nonlinear Static Behavior of FG-CNT Reinforced Composite Flat Panel under Thermomechanical Load", *J. Aersp. Eng.*, 30(3), 4016100.2016.
- [172] Kar, V.R., Panda, S.K. and Mahapatra, T.R. "Thermal buckling behaviour of shear deformable functionally graded single/doubly curved shell panel with TD and TID properties", *Adv.Mater. Res.*, 5(4), 205-221.2016.
- [173] Kar, V.R. and Panda, S.K. "Nonlinear thermomechanical deformation behaviour of P-FGMshallow spherical shell panel", *Chinese J. Aeronaut.*, 29(1), 173-183.2015.
- [174] Mahapatra, T.R., Kar, V.R., Panda, S.K. and Mehar, K. "Nonlinear thermoelastic deflectionof temperature-dependent FGM curved shallow shell under nonlinear thermal loading", *J. Therm.Stress.*, 40(9), 1184-1199.2017.
- [175] Sahoo, S.S., Panda, S.K. and Singh, V.K. "Experimental and numerical investigation of staticand free vibration responses of woven glass/epoxy laminated composite plate", *Proc. Inst. Mech.Eng. Part L J. Mater. Des. Appl.*, 231(5), 463-478.2015.
- [176] Mehar, K., Panda, S.K. and Patle, B.K. Stress, "deflection, and frequency analysis of CNTreinforced graded sandwich plate under uniform and linear thermal environment. A finite elementapproach", *Polym. Compos. Volume 39, Issue 10*.2017.

- [177] Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Atashipour, S.R. "A new exact analytical approach for free vibration of ReissnerMindlin functionally graded rectangular plates", *Int. J. Mech. Sci.*,53(1), 11-22.2011.
- [178] Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Atashipour, S.R. "Study on the free vibration of thickfunctionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure", *Compos.Struct.*, 93(2), 722-735. 2011.
- [179] Thai, H.T. and Kim, S.E. "A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos. Struct.*, 96, 165-173.2013.
- [180] M. Aydogdu, "Conditions for functionally graded plates to remain flat under in-plane loads by classical plate theory," *Compos. Struct.*, vol. 82, no. 1, pp. 155–157, Jan. 2008.
- [181] S. Chakraverty and K. K. Pradhan, "Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions," *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 36, pp. 132–156, Jul. 2014.
- [182] H.-T. Thai and D.-H. Choi, "A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation," *Compos. Sci. Technol.*, vol. 71, no. 16, pp. 1850–1858, Nov. 2011.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة الاهتزاز والانحناء تحت تأثير قوة جيبيّة وعاديه لصفائح واسطوانات ذات مواد متدرجة وظيفيا، باستخدام برنامج جزئي محدد من قبل المستخدم UMAT وتطبيقها على برنامج ABAQUS. يتم حساب الانتقالات والاجهادات في اماكن محددة لصفحة معدنية ذات خاصية واحدة للتأكد من دقة البرنامج الجزئي UMAT.

S- خصائص الصفحة المستعملة في هذه الدراسة تتغير في الاتجاه العرضي بواسطة القوانين المزج المتمثلة في FGM, E-FGM, P-FGM في حين نعتبر معامل Poisson ثابت. النتائج المتحصل عليها في هذه الدراسة تم مقارنتها مع تلك النتائج المعروضة مسبقاً في البحوث العلمية حيث نجد تقارب بين النتائج مما يبين دقة وكفاءة الطريقة المستعملة مع تغيرات في قيمة القوة (الأس) للقانون المستعمل في الدراسة.

الكلمات المفتاحية: المواد المتدرجة وظيفيا (FGMs)، قانون القوة P-FGM، القانون الأسّي E-FGM، القانون السني

S-FGM، القوة الجيبية، طريقة العناصر المنتهية، الاجهادات، الانتقالات.

RESUME

L'objectif de ce travail est l'étude de la vibration libre et la flexion sous un chargement sinusoïdale d'une structure FGMs (plaque, panneau cylindrique). Après avoir étudié la convergence et la validation du sous-programme UMAT implémenté dans le code de calcul ABAQUS, Le calcul des déplacements et les contraintes dans des endroits bien définies pour un matériau isotrope confirme la fiabilité de l'UMAT.

Les propriétés des structures utilisées dans cette étude changent sous les lois de mélange (P-FGM, E-FGM, S-FGM), alors nous considérons que le coefficient de poisson reste constant. Les résultats obtenus dans cette étude ont été comparés avec ceux précédemment présentés dans la littérature, où nous trouvons une convergence entre les résultats, indiquant la précision et l'efficacité de la méthode utilisée pour différentes valeurs de l'indice de la loi utilisée dans le présent travail.

Mots Clés : Matériaux à Gradient Fonctionnel (FGMs), Loi de Puissance P-FGM, loi exponentielle E-FGM, loi sigmoïde S-FGM, chargement sinusoïdal, Méthode des Eléments Finis, Contraintes, Déplacements.

ABSTRACT

The purpose of the present work is to study the free vibration and the bending Functionally Graded Material (FGM) structure (Plate, Cylindrical panel) under a sinusoidal, after studying the convergence and validation of the subroutine UMAT which is implemented on the finite element software ABAQUS. The computation of the displacements and the stresses at defined corner for an isotropic material confirm the reliability of the UMAT.

The properties of the structures used in this study change under the mixing laws P-FGM, E-FGM and S-FGM, the Poisson's ratio is kept constant. The results obtained compared to those available in the literature show the convergence, the exactitude and the efficiency of the method used with various power index of the materials.

Keywords: Functionally Graded Materials (FGM), Power Law P-FGM, exponential law E-FGM, sigmoid Law S-FGM, Sinusoidal load, Finite Element Method, Stresses, Displacement.
