

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique  
جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان -  
Université Abou Bekr Belkaïd – Tlemcen  
Faculté de Technologie



Mémoire présenté  
pour l'obtention du **diplôme de MASTER**  
En Génie Mécanique  
Spécialité : **Maintenance Industrielle**

Présenté par : **Mr. ZENAGUI YUCEF**

**Intitulé du sujet**

---

## **Analyse de l'influence du balourd sur le comportement dynamique d'un rotor**

---

Soutenu publiquement le 05 oct. 2017, devant le jury composé de :

Président : Mr. BELKAID.M	MCA	Université de Tlemcen
Encadreur : Mr. HAMZA CHERIF S.M.	MCA	Université de Tlemcen
Co-Encadreur: Mr. GUEZZEN S.	MCA	Université de Tlemcen
Examineur : Mr. BELALIA SA	MCA	Université de Tlemcen
Examineur : Mr. BOUKHALFA A.	MCA	Université de Tlemcen

Année universitaire 2016-2017

## *Dédicace*

*Je dédie ce travail de mon mémoire de master à dieu qui ma toujours illuminé et m'a mis sur les bonnes voies, sans oublier évidemment. Le soutien de mes parents qui ou toujours compris et accepté mes décessions même si actuellement ils se trouvent loin géographiquement.*

*Je dédie aussi ce travail à toute ma famille et mes amis car elle m'a toujours servi d'inspiration.*

YOUCEF....

## **Remerciements**

*En premier lieu, je tiens à remercier mon DIEU qui m'a donné le courage, la force et la volonté pour réaliser ce modeste travail.*

*Je présente également à cette occasion mes chaleureux remerciements à mon encadreur Mr. HAMZA CHERIF S.M mon Co-encadreur Mr .GUEZZEN .S pour l'aide honorable et infatigable qu'il m'a apporté en acceptant de superviser et de suivre mon travail, pour les conseils et les précieuses orientations.*

*J'adresse mes profonds remerciements à Mr BELKAID. M, professeur de l'université de Tlemcen, Mr. BELALIA S.M maitre de conférences de l'université de Tlemcen, Mr .BOUKHALFA.A maitre de conférences de l'université de Tlemcen, qui ont spontanément la volonté et l'honneur d'examiner mon travail. Leurs critiques et leurs remarques me permettent de clarifier plusieurs points importants dans ce mémoire. Je les exprime ma très vivre reconnaissance.*

*youcef...*

## *Résumé*

La conception de rotors capables de bien fonctionner sous les conditions de fonctionnement est nécessaire pour éviter les problèmes d'instabilités, source de défaillance catastrophique ou la cause principale est le balourd généré par le mouvement de rotation, cas très fréquent dans les turbomoteurs, turbocompresseur, pompes à vide, etc.

Le présent travail a pour objectif de prévoir le comportement dynamique d'un rotor monté sur des paliers rigides ou élastiques et soumis à un balourd. Une étude théorique permettant l'établissement des énergies cinétique et de déformation basée sur le modèle EULER -BERNOULLI nécessaires à la détermination des équations du mouvement est présentée. La méthode de RAYLEIGH-RITZ est utilisée par la suite pour résoudre le problème. Une étude de validation est faite, les résultats trouvés sont comparés aux résultats obtenus dans la littérature.

## ملخص

في هذا العمل نحاول دراسة تصميم الدوارات القادرة على أداء الجيد في ظل ظروف التشغيل وهو ضروري لتجنب مشاكل عدم الاستقرار، مصدر الفشل الكارثي أو السبب الرئيسي هو عدم التوازن الناتجة عن حركة دوران، شائعة جدا في turbo ، مضخات الفراغ، الخ .

والهدف من هذا العمل هو التنبؤ بالسلوك الديناميكي للدوار المثبت على محامل جامدة أو مرنة وتعرض لعدم التوازن. ويرد الدراسة النظرية لإنشاء الطاقة الحركية وتشوه استنادا إلى نموذج EULER -BERNOULLI الضروري لتحديد معادلات الحركة. يتم استخدام طريقة RAYLEIGH-RITZ في وقت لاحق لحل المشكلة. يتم إجراء دراسة التحقق من الصحة، تتم مقارنة النتائج مع النتائج التي تم الحصول عليها في الدراسات السابقة.

## *Abstract*

The design of rotors capable of performing well under the operating conditions is necessary to avoid problems of instability, source of catastrophic failure or the main cause is the unbalance generated by the rotational movement, very common in turbochargers, turbochargers, vacuum pumps, etc.

The aim of this work is to predict the dynamic behavior of a rotor mounted on rigid or elastic bearings and subjected to unbalance. A theoretical study allowing the establishment of kinetic energies and deformation based on the model EULER -BERNOULLI necessary to the determination of the equations of the motion is presented. The RAYLEIGH-RITZ method is used later to solve the problem. A validation study is carried out, the results are compared with the results obtained in the literature.

# SOMMAIRE

## LISTE DES SYMBOLES

## LISTE DES FIGURES

Introduction

Bibliographique

### Chapitre 1 : Analyse dynamique des systèmes en Rotation

Introduction .....	9
1-1 Disque .....	10
1.1 Energie cinétique du disque .....	11
1-2 Arbre .....	12
2.1 Energie cinétique de l'arbre .....	13
2.2 Energie de déformation de l'arbre.....	14
1-3 Paliers .....	15
1.4 Balourd .....	16

### Chapitre 2 : Résolution par la méthode de RAYLEIGH-RITZ

1-1 Introduction	
1-2 Méthode de RAYLEIGH-RITZ.....	19
1-3 Mise en équation.....	19
3-1 Détermination de la matrice de rigidité élémentaire de l'arbre .....	21
3-2 Détermination de la matrice masse et matrice gyroscopique de l'arbre .....	21
3.3 Détermination de la matrice masse élémentaire et matrice gyroscopique de disque ..	23
3.4 Détermination de la matrice $\{F_{a,rr}\}$ .....	25
3-5 Détermination de la matrice élémentaire de palier .....	25
a_ Action de HAMILTON .....	25
3-6 Déterminé les matrice globale on appliqué l' équations de Euler Lagrange on obtient .....	26
3.7 Détermination des équations de mouvement de système :.....	29

### Chapitre 3 Organisation de la programmation

1 Introduction .....	33
----------------------	----

2 Schéma de calcul .....	33-35
3 Description du programme .....	36
a-Fichier de données .....	36
b-Programme de calcul .....	36
c-Sous-programme pour le calcul des matrices masse et de rigidité globale.....	36
d- calcul des fréquences propres .....	37
e- Calcul des paramètres de fréquence.....	37

## **Chapitre 4 Résultats et interprétation**

Introduction .....	39
1-Résultats et interprétation .....	37
a- Cas stationnaire .....	39
b- Cas d'un rotor en rotation avec une vitesse de rotation $N=6000\text{tr/mn}$ .....	40
c- Diagramme de Campbell.....	40
d- Balourd.....	41
e- Force asynchrone.....	42

## Liste des symboles

Variable.....	Désignation
$T$ .....	Energie cinétique
$E_d$ .....	Energie de déformation.
$\psi$ .....	Angle de précession autour de l'axe $Oz$
$\theta$ .....	Angle de nutation autour de l'axe $Ox$
$\varphi$ .....	Angle de rotation autour de l'axe $Oy$
$\Omega$ .....	Vitesse de rotation
$u$ .....	Déplacement de l'arbre selon l'axe $Ox$
$v$ .....	Déplacement de l'arbre selon l'axe $Oy$
$w$ .....	Déplacement de l'arbre selon l'axe $Oz$
$\rho$ .....	Masse volumique
$F_u$ .....	Force généralisée autour de l'axe $Ox$
$F_w$ .....	Force généralisée autour de l'axe $Oz$
$[C]_p$ .....	Matrice d'amortissement due aux paliers
$[K]_p$ .....	Matrice de rigidité due aux paliers
$\delta u$ .....	Déplacement virtuel sur $ox$
$\delta w$ .....	Déplacement virtuel sur $oz$
$F_i$ .....	Force généralisée.
$E_d$ .....	Energie de déformation de l'arbre
$T_n$ .....	Energie cinétique de l'arbre.
$T_d$ .....	Energie cinétique du disque.
$\varepsilon_l$ .....	Déformation linéaire
$\sigma$ .....	Contrainte

---

$I_x$	.....Moment d'inertie par rapport a l'axe oz.
$I_z$	.....Moment d'inertie par rapport a l'axe ox.
$K_{xx}$	.....Raideur des paliers suivant ox
$K_{zz}$	.....Raideur des paliers suivant oz
$K_{zx}$	.....Raideur des paliers des termes croisés
$dw$	..... Travail des forces virtuel
$N_u$	..... fonction de forme suivant ox.
$N_w$	..... fonction de forme suivant oz.
$\{q\}$	..... Coordonnée généralisée
$[M_D]$	.....Matrice masse global du disque
$[M_{d1w}]$	..... .Matrice masse du disque suivant le plan xoy.
$[M_{d2w}]$	..... .Matrice masse du disque suivant le plan zoy.
$[G_{1d}]$	.....Matrice gyroscopique globale du disque
$[M_A]$	..... Matrice masse du globale de l'arbre.
$[M_{a1w}]$	..... . Matrice masse de l'arbre suivant le plan xoy.
$[M_{a2w}]$	..... .Matrice masse de l'arbre suivant le plan zoy.
$[G_a]$	..... .Matrice gyroscopique globale de l'arbre.
$[K_a]$	.....Matrice de rigidité globale de l'arbre.
$[K_{aw}]$	.....Matrice de rigidité de l'arbre suivant le plan xoy.
$[K_{aw}]$	.....Matrice de rigidité de l'arbre suivant le plan zoy.
$[M]$	..... Matrice masse globale de système
$[G]$	..... Matrice gyroscopique globale de système
$[K]$	..... Matrice rigidité globale de système
$[C]$	..... Matrice d'amortissement de système
$\{F_{ext}\}$	..... forces extérieurs de système
$q$	..... Vecteur de déplacement global.
$E$	..... Module d'Young ou module d'élasticité longitudinal
$\nu$	..... Coefficients de poisson
$\rho$	..... Masse volumique
$L$	..... Longueur de l'arbre.
$L1$	..... L'emplacement de disque
$d_e$	..... Diamètre extérieur de l'arbre et intérieur de disque
$d_i$	..... Diamètre intérieur de l'arbre
$d_{ex}$	.....Diamètre extérieur de disque
$m_B$	..... Masse de balourd
$d$	..... Diamètre de balourd

- $A$  ..... Section droite d'élément l'arbre  
 $I$  ..... Moment d'inertie de l'arbre  
 $I_{dx}$  ..... Moment d'inertie de disque suivant l'axe X  
 $I_{dy}$  ..... Moment d'inertie de disque suivant l'axe Y  
 $\omega$  ..... La pulsation propre

## Liste des figures

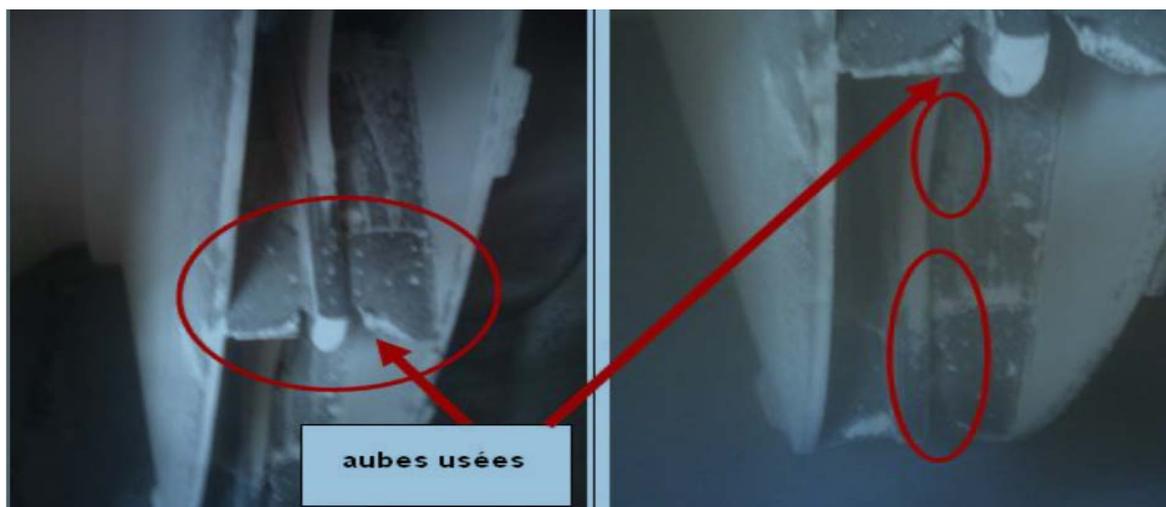
<b>Figure 1</b>	cas des aubes usées .....	2
<b>Figure 2</b>	cas d'engrenage fissuré .....	3
<b>Figure 3</b>	cas changement de surface d'engrenages.....	3
<b>Figure 4</b>	Déférant types du balourd.....	4
<b>Figure 5</b>	Diagramme schématique du banc d'essai présenté par BERLIOZ et al.....	7
<b>Figure1.1</b>	Eléments d'un rotor .....	10
<b>Figure1.2</b>	Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible .....	12
<b>Figure1.3</b>	Représentation des coordonnées.....	13
<b>Figure 1.4</b>	Coordonnées de centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor .....	15
<b>Figure 1.5</b>	Amortissement et raideur des palies.....	17
<b>Figure 1.6</b>	Répartition du balourd sur le rotor.....	17
<b>Figure 1.7</b>	Modélisation de la répartition du balourd sur le rotor.....	18
<b>Figure 1.8</b>	Balourd.....	19
<b>Figure 3.1</b>	Schéma de calcul global.....	35
<b>Figure 4.1</b>	Variation de la première fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation .....	40
<b>Figure 4.2</b>	Réponse au balourd .....	41
<b>Figure 4.3</b>	Diagramme de Campbell 1 .....	42
<b>Figure 4.4</b>	Réponse à une force asynchrone .....	43
<b>Figure 4.5</b>	Diagramme de Campbell 2.....	43

# INTRODUCTION

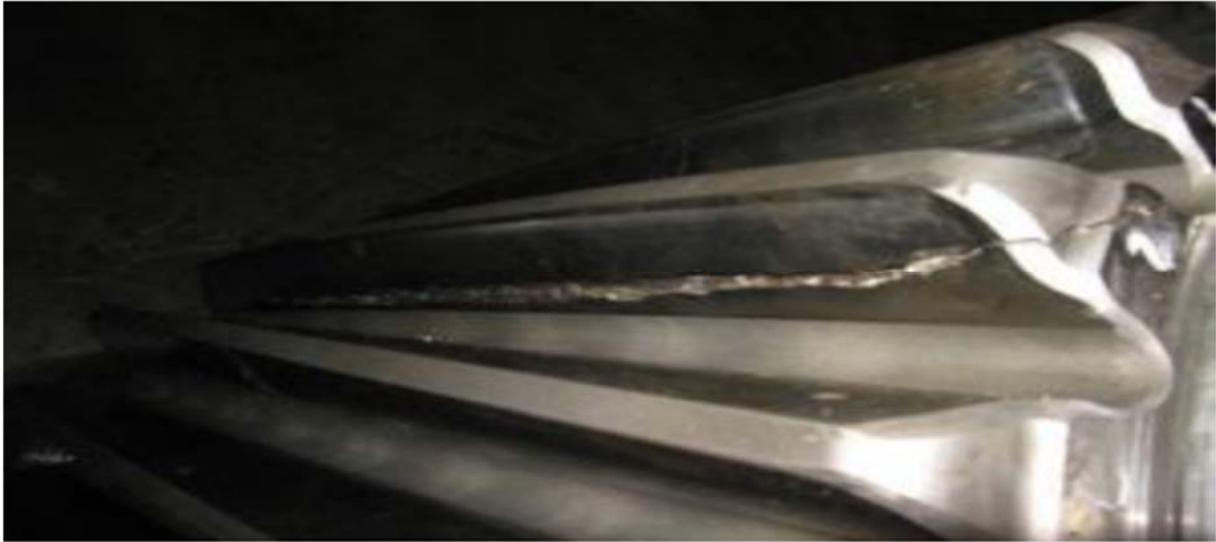
## Contexte

Les machines tournantes telles que les pompes, les turbomachines, les moteurs d'avions et les compresseurs, ... sont devenues des éléments indispensables pour l'industrie moderne. Le comportement vibratoire des arbres tournants a un grand intérêt pratique dans l'industrie, notamment pour les concepteurs et les ingénieurs en maintenance qui doivent prédire - exactement les paramètres vibratoires tels que les fréquences propres, modes propres, et les amplitudes vibratoires, réponse dynamique, etc. En effet, les défauts d'alignement, les défauts d'usinage, le frottement, les fissures et le balourd sont les causes principales des vibrations dans les machines tournantes.

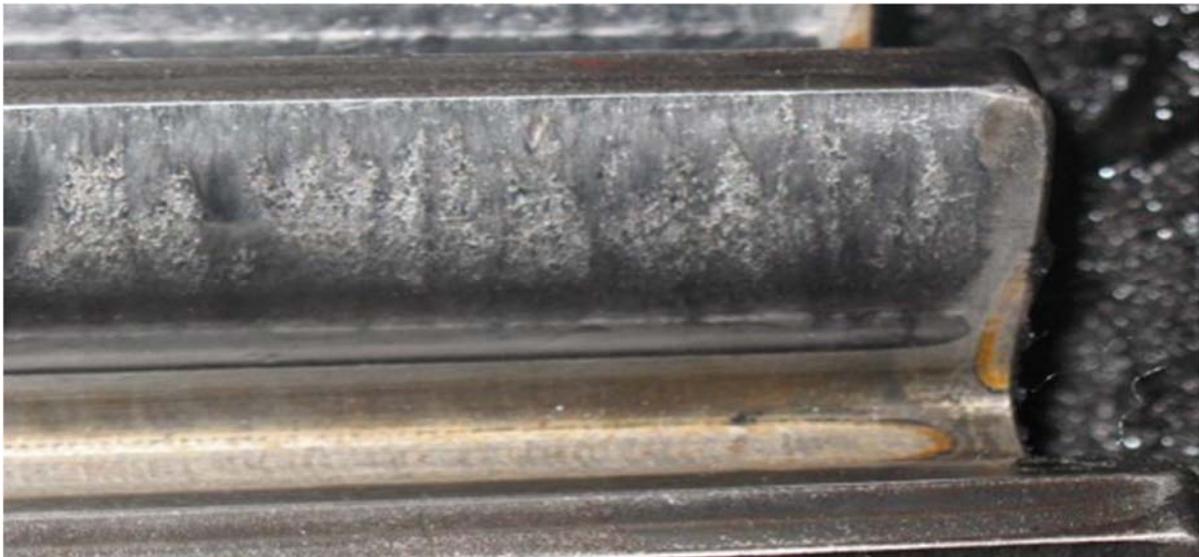
Les machines tournantes peuvent présenter des problèmes d'équilibrage dus au balourd entraînant ainsi un contact rotor-stator et des fissurations. Ces derniers sont une source d'instabilité pour toute la machine. Ainsi de nombreux chercheurs se sont intéressés à l'étude du balourd et à la stabilité des rotors et de leurs réponses à des forces extérieures. Les figures 1.2 et 3 présentent quelques cas de problèmes rencontrés.



**Figure 1** : cas des aubes usées



**Figure 2** : cas d'engrenage fissuré



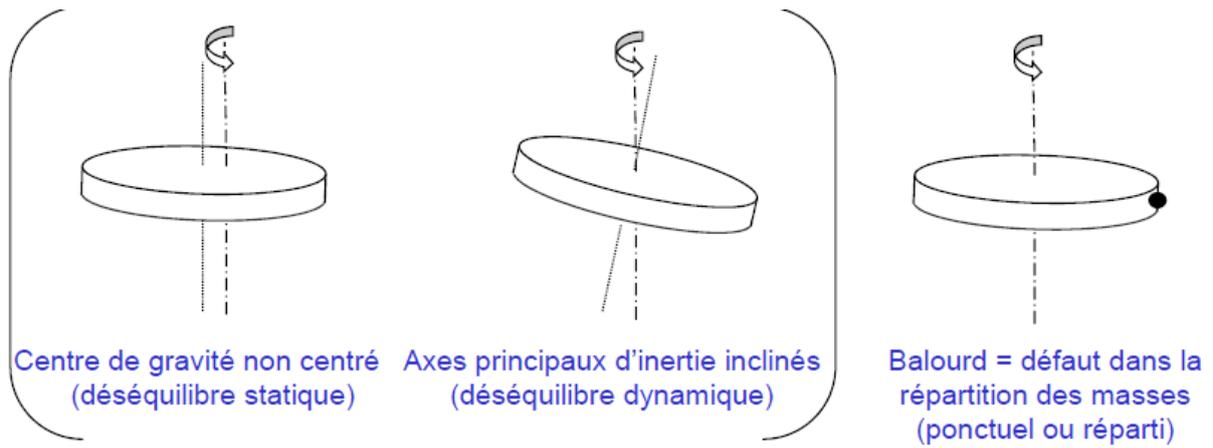
**Figure 3** : cas changement de surface d'engrenages

Lorsque les rotors ne sont pas homogènes, les rotors vibrent sous l'effet de balourd. La force de balourd est une force tournante, il existe plusieurs types de balourd : balourd statique, balourd de couple, balourd dynamique :

**Balourd statique** : L'axe d'inertie est parallèle à l'axe de rotation.

**Balourd de couple** : L'axe d'inertie et l'axe de rotation sont sécants

**Balourd dynamique** : Le balourd dynamique est une combinaison des deux précédents.



**Figure 4 :** Différents types de balourd

## Bibliographie :

Les machines tournantes jouent un rôle primordial dans de nombreuses applications industrielles. Le comportement dynamique des arbres tournants a fait l'objet de plusieurs études, beaucoup d'auteurs ont contribué au développement de modèles mathématiques et numériques de ce comportement. On peut citer entre autres, **Bauer [1]** qui fut le premier à étudier le comportement vibratoire d'une poutre d'**Euler-Bernoulli** en mouvement de rotation par rapport à son axe. **Zu et al [2]** ont étudié l'effet des conditions aux limites sur les fréquences propres des arbres tournants. L'effet gyroscopique et le couplage entre mouvements rigides et élastiques a été étudié par **Hu et al [3]** en utilisant la méthode des éléments finis. **Nelson et al [4]** ont utilisé la méthode des éléments finis pour l'étude d'un arbre composé de disques et de paliers.

Le rotor est habituellement représenté par des poutres droites de sections constantes. L'étude des vibrations d'une poutre est un sujet relativement classique. **LALANNE et al. [5]** ainsi que **THOMAS et LAVILLE [6]** abordent ce type de problèmes comme un problème de mécanique des milieux continus.

Pour appliquer les équations de **LAGRANGE**, il faut tout d'abord écrire les énergies cinétique et de déformation des composants du rotor. Le calcul des énergies nécessite quelques hypothèses et simplifications détaillées par **LALANNE et FERRARIS [7]** telles que la prise en compte des effets d'inertie de rotation des sections (poutre de **TIMOSHENKO**) et des effets gyroscopiques dans le calcul de l'énergie cinétique.

Puis, il s'agit d'approximer le champ de déplacements soit par la méthode de **RAYLEIGH-RITZ**, soit par celle des éléments finis. La méthode de **RAYLEIGH-RITZ** utilise des fonctions de déplacement cinématiquement admissibles sur tout le domaine, alors que la méthode des éléments finis fait appel à des fonctions de forme qui approchent le champ de déplacements sur des sous-domaines.

Les phénomènes de base caractéristiques de la dynamique latérale des rotors classiques sont la stabilité dynamique, les fréquences naturelles, le diagramme de **CAMPBELL** et les réponses aux effets des forces d'excitation extérieure (forces synchrones de balourd, forces asynchrones et forces harmoniques de direction fixée dans l'espace), voir, par exemple, **LALANNE et FERRARIS [7]**.

En dynamique des rotors classiques, les forces d'excitation extérieure sont le balourd, la force asynchrone et la force harmonique fixée dans l'espace. L'excitation synchrone due au balourd est une force centrifuge tournant à la même vitesse de rotation  $\Omega$  que le rotor, tandis que la force asynchrone est une force harmonique d'amplitude constante tournant à une vitesse différente de celle du rotor. Le calcul des réponses et des orbites du rotor dues aux forces d'excitation extérieure ne nécessite pas de connaître ses valeurs propres et ses vecteurs propres et est réalisé en résolvant les équations complètes du mouvement.

Le balourd inévitable et indésirable est dû à l'excentricité du centre de masse le long de l'axe du rotor. Les sources des balourds sur le rotor sont multiples. Elles peuvent être dues aux inhomogénéités de matériaux, aux défauts de fabrication, à l'assemblage des pièces tournantes ou aux conditions de service.

La résolution du problème de balourd consiste ponctuellement à ramener le centre de masse sur l'axe de rotation, mais la difficulté rencontrée est que la distribution du balourd initial tout au long du rotor est continue, arbitraire et inconnue. Comme le balourd n'est pas ponctuel, il est difficile de réaliser un équilibrage parfait. Une définition plus rigoureuse est alors que l'équilibrage du rotor est l'opération qui cherche à réduire le balourd, ce qui conduit à la minimisation de l'influence du balourd sur les vibrations du rotor, mais ne peut pas conduire généralement à une annulation complète (voir, par exemple, **XU et al. [8]**, **KANG et al. [9]**, **[10]**, **LEVECQUE et al. [11]**).

Les méthodes les plus utilisées sont la méthode modale d'équilibrage et la méthode des coefficients d'influence. La première utilise la réduction modale du balourd continu initial et le rotor est équilibré à ses vitesses critiques mode après mode, c'est-à-dire il faut calculer les balourds de correction équilibrant un mode déterminé sans déséquilibrer les modes inférieurs et supérieurs, **GNIELKA [12]**. Elle requiert une bonne connaissance de la base modale du rotor (qui est considérée comme un inconvénient car la modélisation de la machine tournante est habituellement complexe) et est souvent utilisée pour des rotors à grande vitesse ayant un grand nombre de vitesses critiques de rotation dans leur plage de fonctionnement. La deuxième est une méthode expérimentale. Elle est ainsi très largement répandue et la plus utilisée à ce jour pour des rotors à faible vitesse ayant un petit nombre de vitesses critiques dans leur plage de fonctionnement. D'une manière générale, la méthode des coefficients d'influence a pour but d'obtenir un balourd résiduel faible devant un balourd introduit (d'essai) ensuite celui connu (correcteur), qui servira de référence et sera introduit dans les modèles de rotor pour une comparaison adéquate entre calculs et mesures expérimentale (**MAHFOUDH. [13]**, **KANG et al. [14]**, **LEVECQUE et al. [11]**). Les plans d'équilibrage, les vitesses d'équilibrage et les points de mesure de vibrations sont les paramètres nécessaires à cette méthode. Ces paramètres sont sélectionnés en fonction du comportement dynamique d'un rotor étudié pour une certaine plage de vitesse de fonctionnement. Les hypothèses suivantes sont considérées pour appliquer ladite méthode :

- la relation entre les déplacements du rotor et les forces dues au balourd est linéaire car les équations différentielles du mouvement sont de type linéaire,
- le balourd initial, qui cause le déséquilibre, est supposé constitué de balourds discrets dans les plans d'équilibrage.

Les rotors peuvent être également soumis à des mouvements déterministes extérieurs fréquents de leur support qui peuvent augmenter leurs vibrations en flexion et créer un comportement dynamique instable. Par conséquent, un modèle dynamique de rotor, qui tient compte des excitations de multi-sources, est d'un intérêt primordial au stade de conception afin de produire des machines tournantes aussi fiables que possible et d'éviter une défaillance catastrophique au cours de la phase de fonctionnement. Depuis peu, des recherches ont été consacrées à la conception et à la prévision du comportement dynamique de tels types de rotors.

Au début des années **2000**, **DUCHEMIN et al. [15]** calculent la réponse temporelle en utilisant la méthode de **RAYLEIGH-RITZ** pour mettre en place les équations du mouvement d'un rotor embarqué soumis à une vitesse angulaire du support qui augmente de manière logarithmique jusqu'à atteindre la vitesse constante. L'étude de **LIN et MENG [16]** est considérée comme une des premières études portant sur les rotors embarqués dans des avions. Dans leur étude, ils prévoient l'influence des mouvements de translation à vitesse constante et à accélération constante ainsi que de translation sinusoïdale du support sur les réponses temporelles d'un rotor de type **JEFFCOTT** en présence de balourd.

Certaines études observent l'instabilité des systèmes par métriquement excités. **BERLIOZ et al. [17]** développent un banc d'essai expérimental permettant d'observer les phénomènes de vibration latérale d'une tige de forage causés par les couplages torsionnel-latéral et longitudinal-latéral. Comme montré dans leur travail, le couple constant et la partie constante de la force de compression périodique diminue la fréquence latérale de la tige considérée comme poutre encastree-encastree, tandis que celle de la force de traction périodique l'augmente.

De plus, l'influence de la force axiale est plus grande que celle du couple sur les fréquences naturelles latérales et une excitation paramétrique ainsi que des régions d'instabilité latérale sont créées par la fréquence de la force axiale. **DUFOUR et BERLIOZ [18]** accomplissent l'étude de **BERLIOZ et al. [17]** sur la dynamique d'une tige de forage. Ils analysent les équations paramétriques variables dans le temps du mouvement du système et prévoient la stabilité des poutres appuyée-appuyée, encastree-appuyée et encastree-encastree sous des forces et des couples axiaux périodiques en utilisant la méthode de **RAYLEIGH-RITZ**, la théorie de **FLOQUET** et l'approche de **FRIEDMANN [19]**. Finalement, leurs essais expérimentaux permettent la validation des résultats numériques.

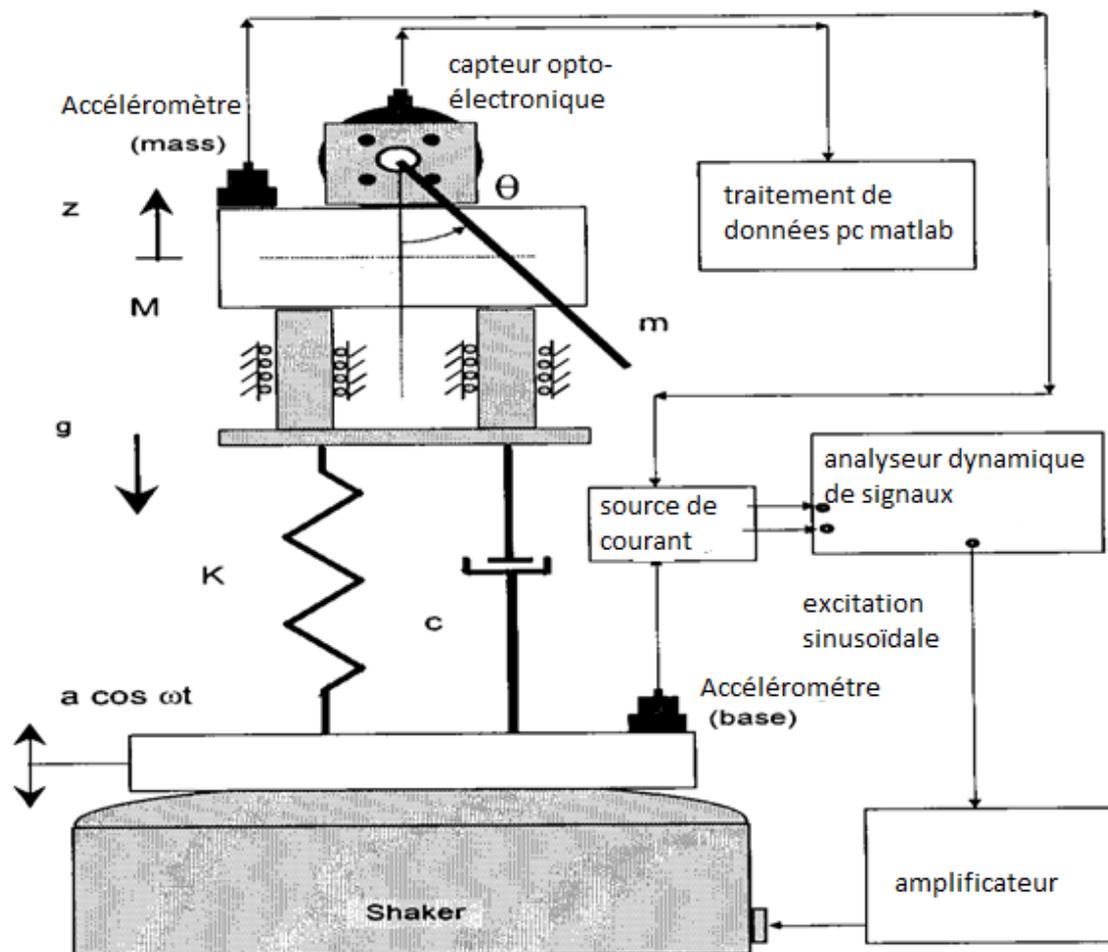


Figure 5 : Diagramme schématique du banc d'essai présenté par **BERLIOZ et al. [16]**

## Structure du mémoire

Le mémoire est organisé en quatre chapitres

- après avoir défini le problématique et présenté les différents travaux réalisés dans le domaine de la dynamique des machines tournantes, le chapitre 1 est consacré à la modélisation dynamique du rotor, dans ce chapitre les déplacements, les déformations et les expressions des énergies de déformation et cinétique de l'arbre tournant sont déterminés, ainsi que l'énergie cinétique du disque rigide sur l'arbre et le travail virtuel des paliers et l'amortissement.
- Le chapitre 2 détaille la formulation par la méthode de RAYLEIGH-RITZ pour l'obtention des matrices de rigidité, matrice masse, matrice de l'effet gyroscopique, matrice de raideurs des paliers et la matrice d'amortissement des paliers.
- Le chapitre trois est consacré à l'organisation de la programmation. Un schéma de calcul est développé.
- le chapitre quatre est consacré à la validation et interprétations des résultats obtenus.

Le mémoire est clôturé par une conclusion et des perspectives.

# **Chapitre 1**

## **Analyse dynamique des systèmes en Rotation**

## 1. Modélisation du rotor et équations du mouvement

### ➤ Introduction

Ce chapitre expose les éléments théoriques utilisés pour obtenir les équations du mouvement d'un système en rotation.

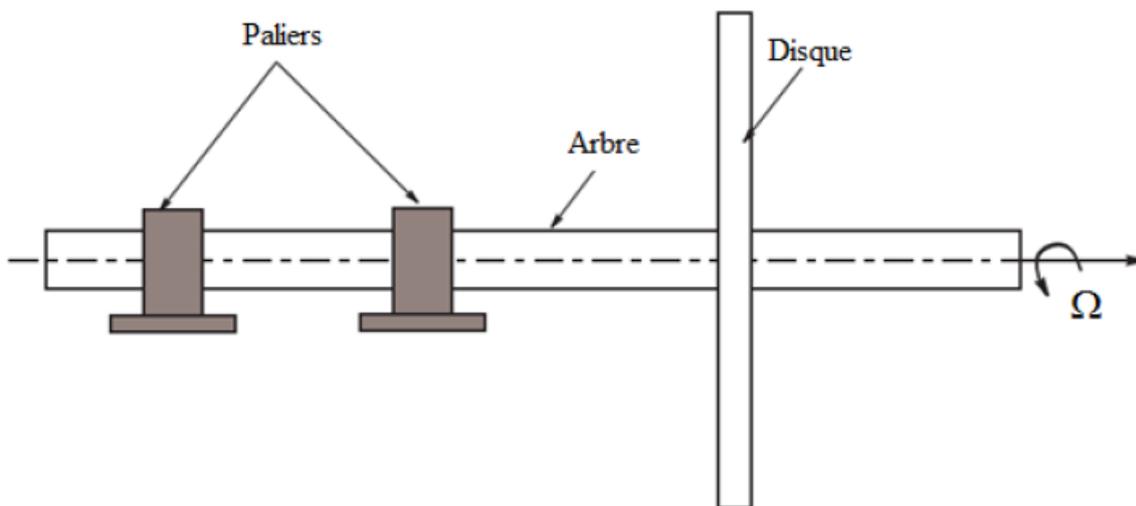


Figure1.1 : Eléments d'un rotor.

D'une manière générale, les composants de base du rotor sont les suivants (voir la figure 1.1)

- \_ le disque,
- \_ l'arbre,
- \_ le palier,

Les expressions des énergies cinétiques sont nécessaires pour caractériser l'arbre, le disque et le balourd (figure1.1)

L'énergie potentielle est nécessaire pour caractériser l'arbre. Le travail virtuel est calculé pour les forces dues aux paliers.

– L'énergie cinétique  $T$ , l'énergie de déformation  $U$  et le travail virtuel  $\delta W$  sont calculés pour tous les éléments du système.

– Les équations de Lagrange sont utilisées pour l'obtention des équations du mouvement soit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \{F\}\{q\} \quad (1.1)$$

$T$  : L'énergie cinétique de système

$U$  : l'énergie de déformation de système

$\{F\}$ :les forces extérieures

$\{q\}$  : le vecteur de déplacement

## 1.1 Disque :

Le disque est supposé rigide et donc caractérisé par son énergie cinétique.  $R_0 (XYZ)$  est un repère galiléen et  $R(XYZ)$  repère fixé au disque (**Figure I.3**). Le système de coordonnées  $xyz$  est relié au système de coordonnées  $XYZ$  par l'intermédiaire des angles  $\varphi, \theta, \phi$ . Pour déterminer la position du disque, on tourne initialement d'un angle  $\psi$  autour de l'axe  $Z$ , puis d'un angle  $\theta$  autour du nouvel axe  $x$ , noté  $x_1$ ; enfin d'un angle  $\phi$  autour de l'axe de rotation propre du disque  $y$ .

Le vecteur rotation instantanée traduisant la position du repère  $xyz$  est :

$$\overline{\omega}_{R/R_0} = \dot{\varphi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\phi}y \quad (1.2)$$

Où  $Z, X_1$  et  $Y$  sont les vecteurs unitaires des axes  $\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX_1}, \overrightarrow{OY}$ . L'énergie cinétique du disque correspondant à son mouvement autour du centre de masse  $O$  est calculée en utilisant le repère  $R$ .

Dans ce repère, le vecteur rotation instantanée est :

$$\overline{\omega}_{R/R_0} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\theta} \sin \theta \\ -\dot{\varphi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Avec  $\varphi = \phi$

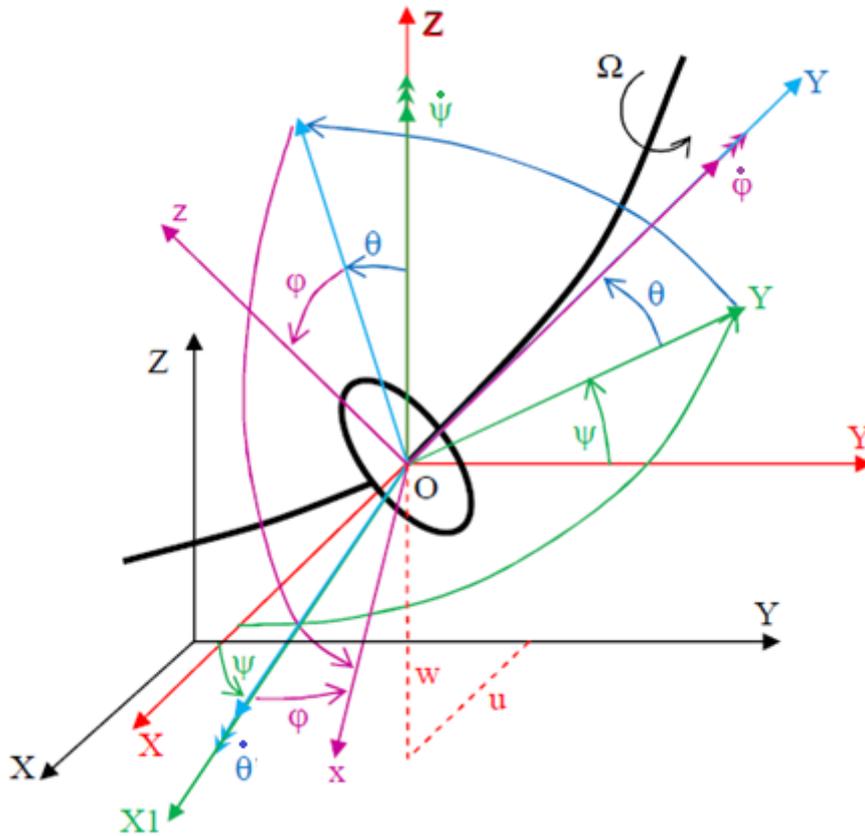


Figure 1.2 : Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

Les axes  $(x, y, z)$  sont des axes principaux  
 Le disque est un cylindre de centre O donc le produit d'inertie est nul :

$$I_{d_{xy}}=I_{d_{xz}}=I_{d_{yz}}=0 \quad (1.4)$$

$I_{dx} = I_{dz} = I_d$  :Moment d'inertie du disque (section circulaire)

### 1-1-1 Energie cinétique de disque

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \quad (1.5)$$

Avec :

$\frac{1}{2} M_d (\dot{U}^2 + \dot{W}^2)$  : Énergie cinétique de translation

$\frac{1}{2} \omega^T I_d \omega$  :Énergie cinétique de rotation -

On obtient :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\theta\dot{\phi}) \quad (1.6)$$

D'après la théorie de Bernoulli :

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varphi &= -\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\quad (1.7)$$

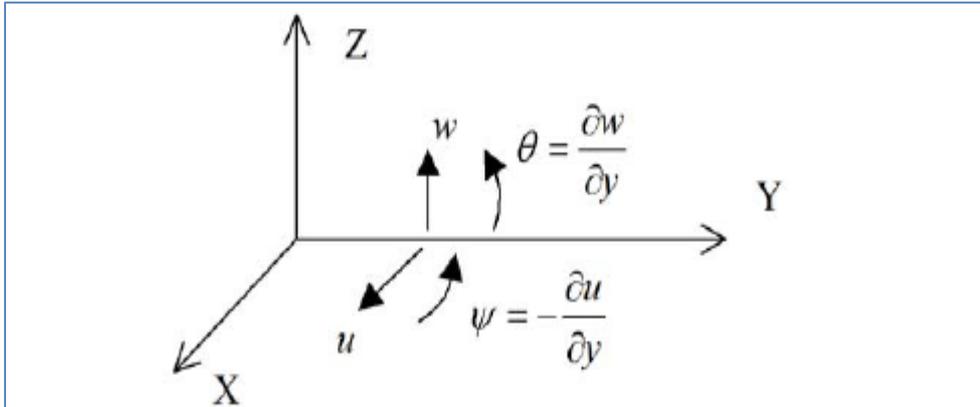


Figure I.3 : Représentation des coordonnées

Donc :

$$T_a = M_a(\dot{U}^2 + \dot{W}^2) + \frac{1}{2}I_{a_x}\left(\frac{\partial \dot{U}^2}{\partial y} + \frac{\partial \dot{W}^2}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}I_{a_y}(\Omega^2 - 2\Omega\frac{\partial \dot{U}}{\partial y}\frac{\partial \dot{W}}{\partial y}) \quad (1.8)$$

Avec :  $\Omega = \dot{\varphi}$

## 1.2 Arbre

L'arbre est représenté par une poutre de section circulaire et est caractérisé par l'énergie cinétique et l'énergie de déformation.

### 1.2.1 Énergie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque . Pour un élément de longueur L, de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique est :

$$T_a = \frac{\rho A}{2} \int (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) dy + \frac{1}{2} I \rho \int (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) dy + I \rho L \Omega^2 + 2 \rho \Omega \int \theta \dot{\varphi} dy \quad (1.9)$$

Cette expression fait apparaître les termes classiques de la dynamique des rotors :

$I \rho L \Omega^2$  Terme constant représentant l'énergie de rotation du disque. Il n'a pas d'influence sur les équations du mouvement.

$\frac{\rho A}{2} \int (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) dy$  : énergie cinétique d'un élément en translation suivant  $x, z$  respectivement.

$\frac{1}{2} I \rho \int (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) dy$  : énergie cinétique de rotation d'un élément autour des axes  $x$  et  $z$ , en général ce terme est négligé dans le cas modèle bemoulli-Euler

$2\rho\Omega \int \theta \dot{\varphi} dy$  : Effet gyroscopique (Coriolis)

Où  $\rho$  est la masse par unité de volume,  $A$  est l'aire de la section droite de la poutre et  $I$  le moment d'inertie diamétral.

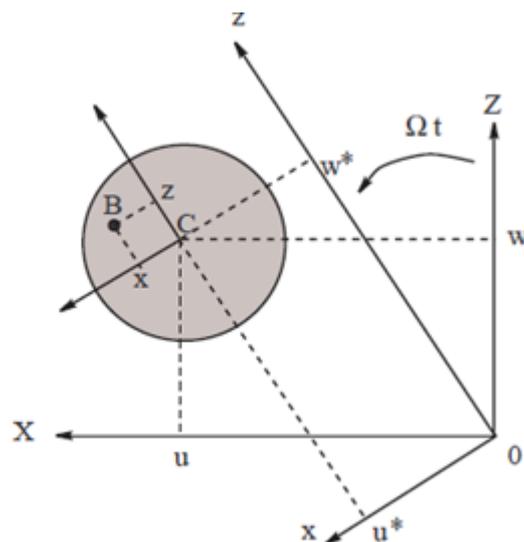
La première intégrale de (1.9) est l'expression classique d'une poutre en flexion ; la seconde intégrale correspond à l'effet secondaire d'inertie de rotation ; le terme  $(\rho I L \Omega^2)$  est constant et n'apporte aucune contribution aux équations du mouvement, enfin la dernière intégrale représente l'effet gyroscopique.

Finalement :

$$T_a = \frac{1}{2} \rho A \int (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) dy + \frac{1}{2} I_{dx} \int (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) dy + (\Omega I_{dy} \int (\dot{\varphi} \theta) dy) \quad (1.10)$$

### 1.2.2 Énergie de déformation

Le point  $C$  est le centre géométrique de la poutre,  $B(x, z)$  est un point de la section droite (Figure 1.4),  $E$  est le module d'Young,  $\varepsilon$  et  $\sigma$  sont les déformations et les contraintes,  $u$  et  $w$  sont les déplacements du centre géométrique par rapport aux axes  $x, z$  :



**Figure 1.4** : Coordonnées de centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor

L'énergie de déformation a donc comme expression :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^t \sigma d\tau \quad (1.11)$$

où « t » est le symbole matriciel de transposition. La relation entre contraintes et déformations est :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.12)$$

Alors :

$$E_d = \frac{E}{2} \int_{\tau} \varepsilon^2 d\tau \quad (1.13)$$

Compte tenu de l'énergie de déformation s'écrit

$$E_d = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_{yy} \varepsilon_{yy}] dV \quad (1.14)$$

Avec

$$dV = dA dy \quad I = z^2 dA = x^2 dA \quad (1.15)$$

on inclut les expressions (I.1) et (I.2) on obtient :

$$E_d = \frac{EI}{2} \int [(\frac{\partial^2 \dot{U}_0}{\partial y^2})^2 - (\frac{\partial^2 \dot{W}_0}{\partial y^2})^2] dy \quad (1.16)$$

Sachant que

$$\begin{Bmatrix} U_0^* \\ W_0^* \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

Finalement on remplace (11) dans (10) on obtient, pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique (où :  $I = I_x = I_z$ ), l'énergie de déformation s'écrit :

$$E_d = \frac{EI}{2} \int [(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2})^2 + (\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2})^2] dy \quad (I.18)$$

### 1.3 Paliers

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement sont supposées connues. Le travail virtuel  $\delta W$  des forces extérieures agissant sur l'arbre se met sous la forme (figure 1.5) :

$$\begin{aligned} \delta W = & -K_{xx}U\delta U - K_{xz}W\delta U - K_{zz}W\delta W - K_{zx}U\delta W \\ & -C_{xx}U\delta\dot{U} - C_{xz}W\delta\dot{U} - C_{zz}W\delta\dot{W} - C_{zx}U\delta\dot{W} \end{aligned} \quad (1.19)$$

ou sous une forme plus compacte :

$$\delta W = F_u\delta U + F_w\delta W \quad (1.20)$$

$F_u$  et  $F_w$  sont les composantes de la force généralisée et s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{zx} \\ K_{zx} & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{zx} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

Fréquemment en particulier dans le cas de palier hydrodynamique :  $k_{xx} \neq k_{zz}$  ;  $c_{xx} \neq c_{zz}$  , et  $k_{xz} \neq k_{zx}$  ;  $c_{xz} \neq c_{zx}$  .

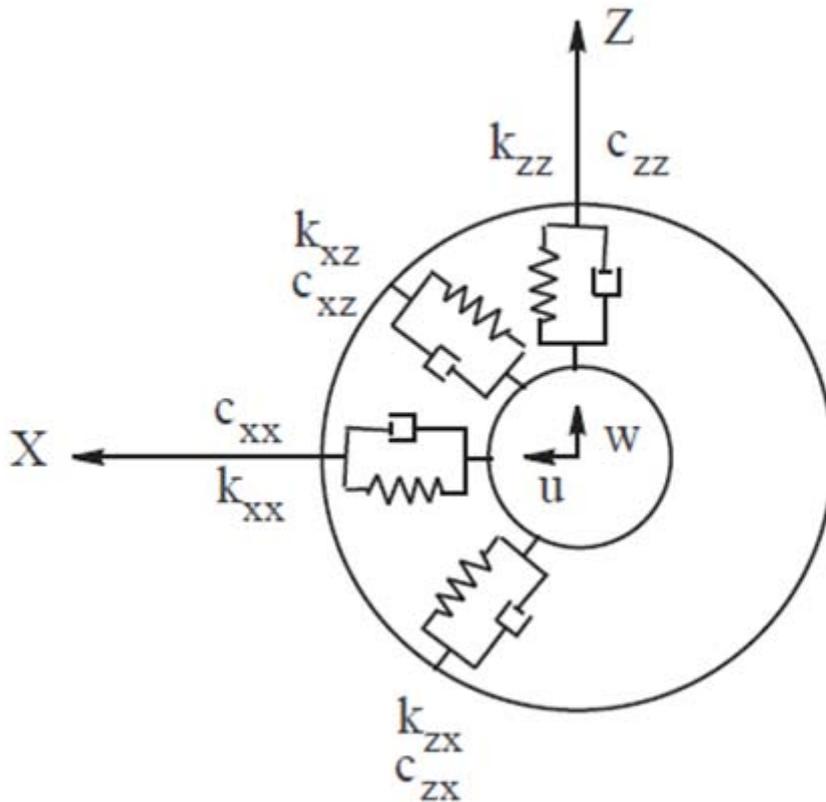


Figure 1.5 : Amortissement et raideur des paliers

## 1.4 Balourd

Le balourd initial est généralement réparti de manière continue et quelconque sur le rotor (voir Figure 1. 6)

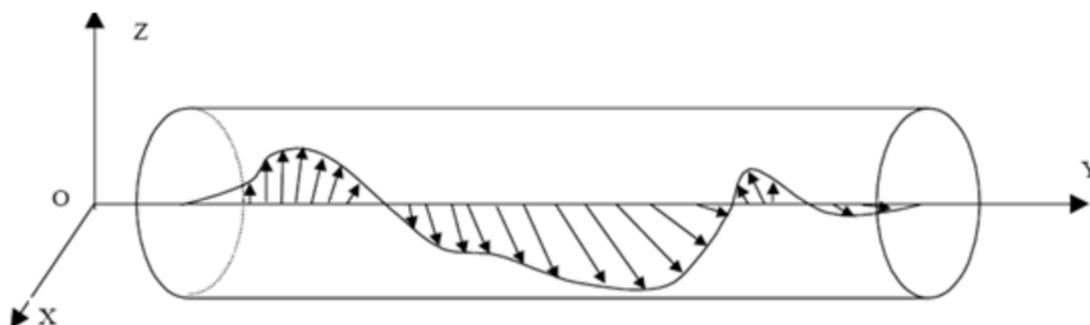


Figure 1. 6 : Répartition du balourd sur le rotor.....

Pour modéliser ce balourd, il est décomposé en masses concentrées situées dans différents plans (Figure 1. 7). Ces masses sont supposées avoir le même effet que le balourd continu sur le comportement dynamique du rotor.

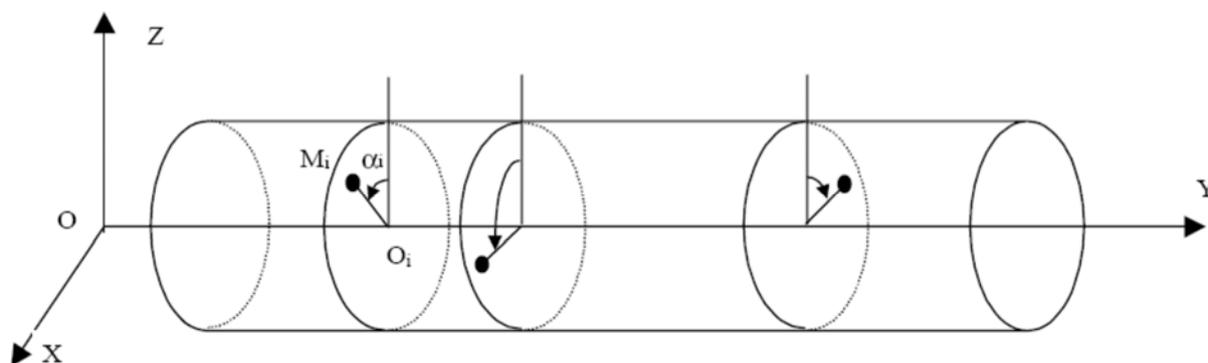


Figure 1. 7 : Modélisation de la répartition du balourd sur le rotor

le balourd (figure 1.7) est dû à une masse  $m_b$  située à la distance  $d$  du centre géométrique de l'arbre et son énergie cinétique doit être calculée . La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe  $y$  et sa coordonnée selon l'axe  $y$  est constante.

Dans le repère  $R_0$  les coordonnées de la masse sont :

$$\overrightarrow{OD} = \begin{vmatrix} U + d \sin \Omega t \\ cte \\ W + d \cos \Omega t \end{vmatrix} \quad (1.22)$$

d'où la vitesse :

$$V = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} = \begin{vmatrix} \dot{U} + d\Omega \cos \Omega t \\ cte \\ \dot{W} - d\Omega \sin \Omega t \end{vmatrix} \quad (1.23)$$

et l'énergie cinétique :

$$T_b = \frac{m_b}{2} (\dot{U}^2 + \dot{W}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{U} \cos \Omega t - 2\Omega \dot{W} d \sin \Omega t) \quad (1.24)$$

Le terme  $m_b \Omega^2 d^2 / 2$  est constant et donc sans influence sur les équations du mouvement. La masse  $m_b$  est sans commune mesure avec celle du rotor, alors l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme :

$$T_b = m_b d \Omega (\dot{U} \cos \Omega t - \dot{W} \sin \Omega t) \quad (1.25)$$

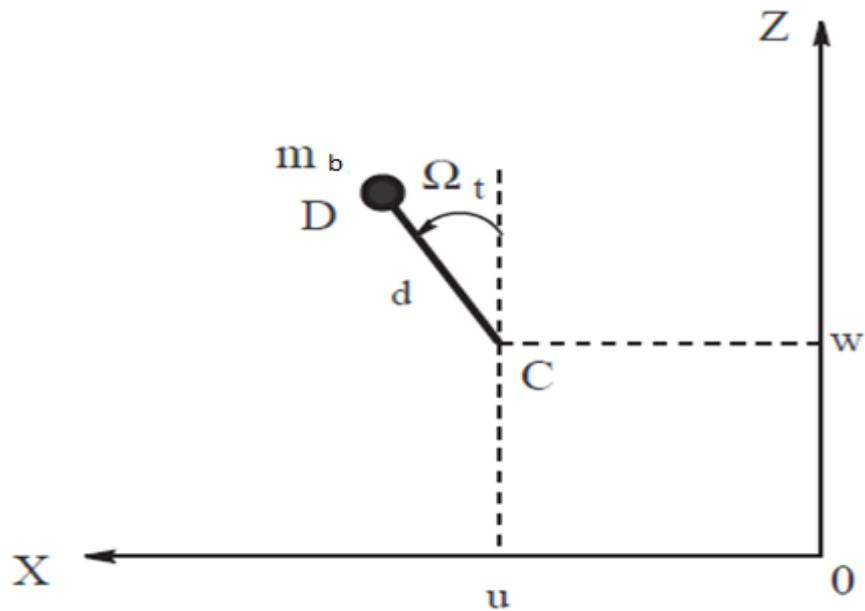


Figure 1.8 : Position du Balourd

**CHAPITRE 2 :**  
**Résolution par la méthode de**  
**RAYLEIGH-RITZ**

---

## 1.1 Introduction :

Il est difficile voire impossible de trouver des solutions analytiques d'un problème mécanique relatif à des structures déformables industrielles. Ce type de solutions ne peut être recherché que pour des cas d'école, des structures de géométrie très simple, élaborées avec des matériaux homogènes et munies de liaisons bien définies, etc.

Dans un premier temps, des modélisations rendant compte des comportements de base des différents composants d'un système industriel permettent d'analyser les phénomènes engendrés.

Dans un deuxième temps, des méthodes d'approximation reliées à des techniques numériques sont utilisées afin d'obtenir de manière approchée les équations différentielles du mouvement et puis la solution du problème mécanique. Ces méthodes sont fréquemment basées sur des formulations matricielles de l'élasticité et exploitent le grand développement des logiciels de calcul sur l'ordinateur.

Deux méthodes d'approximation du champ de déplacements peuvent être employées afin d'établir les équations différentielles du mouvement vibratoire du rotor :

– **Méthode de RAYLEIGH-RITZ** : elle utilise peu de degrés de liberté pour écrire les équations du mouvement. Cette méthode est généralement utile dans le cadre d'une étude des phénomènes de base.

– **Méthode des éléments finis** : elle permet de décrire plus complètement le système étudié. Ladite méthode est utile dans le cadre d'une étude et d'une conception des systèmes complexes et des rotors industriels.

## 1.2-Méthode de RAYLEIGH-RITZ

La méthode d'approximation appelée « RAYLEIGH-RITZ » consiste à remplacer le champ continu inconnu par un nombre fini de coefficients inconnus. Elle permet de développer un modèle simple afin d'examiner les phénomènes souhaitables lorsque le support rigide est en mouvement. Le principe de la méthode de RAYLEIGH-RITZ est brièvement rappelé ci-après.

## 1.3 Mise en équation

La méthode de RAYLEIGH-RITZ conduit à définir les déplacements  $u$  et  $w$  à un point quelconque de la ligne moyenne de l'arbre en flexion suivant les axes  $Ox$  et  $Oz$  respectivement dans le repère lié au support  $R$  en utilisant des variables d'espace et du temps séparées .

Les déplacements sont donnés par :

$$U(y, t) = \sum_i^3 N_{ui}(y)q_{ui} \quad (2.1)$$

$$W(y, t) = \sum_i^3 N_{wi}(y)q_{wi} \quad (2.2)$$

Exprimés en fonction des matrices des fonctions de forme sont :

$$U = [N_u]\{q_u\} \quad (2.3)$$

$$W = [N_w]\{q_w\} \quad (2.4)$$

Le vecteur déplacement  $\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}$  est donné par :

$$\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = [N]\{q\} \quad (2.5)$$

Avec

$$[N] = \begin{pmatrix} [N_u] & 0 \\ 0 & [N_w] \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Et

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{q_u\} \\ \{q_w\} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Où  $[N]$  est la matrice des fonctions de forme

$$[N] = [f_1 f_2 f_3] \quad (2.8)$$

$$\{q\} = \{q_1 q_2 q_3\} \quad (2.9)$$

Les angles de précession  $\theta$  (rotation autour de l'axe  $Oz$ ) et de nutation  $\varphi$  (rotation autour de l'axe  $Ox$ ) sont petits et ils sont alors approximés (selon la poutre d'EULER-BERNOULLI)

$$\dot{U}^2 = \dot{q}_u^T N_u^T N_u \dot{q}_u \quad (2.10)$$

$$\dot{W}^2 = \dot{q}_w^T N_w^T N_w \dot{q}_w \quad (2.11)$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{q}_w^T \frac{\partial N_w^T}{\partial y} \frac{\partial N_w}{\partial y} \dot{q}_w \quad (2.12)$$

$$\dot{\varphi}^2 = -\dot{q}_u^T \frac{\partial N_u^T}{\partial y} \frac{\partial N_u}{\partial y} \dot{q}_u \quad (2.13)$$

### 1.3.1 Détermination de la matrice de rigidité élémentaire de l'arbre

En introduisant les matrices des fonctions de forme  $[N_u], [N_w]$  dans l'énergie de déformation indiquée dans l'expression (1.16) on trouve :

$$E_d = \frac{1}{2} EI \int_0^L \{q_u\}^T \frac{\partial^2 [N]^T}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 [N]}{\partial y^2} \{q_u\} dy + \frac{1}{2} EI \int_0^L \{q_w\}^T \frac{\partial^2 [N]^T}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 [N]}{\partial y^2} \{q_w\} dy \quad (2.14)$$

$$E_d = \frac{1}{2} EI \int_0^L \begin{matrix} \langle q_{u1} & q_{u2} & q_{u3} \rangle \\ \left[ \begin{matrix} f''_{u1} f''_{u1} & f''_{u1} f''_{u2} & f''_{u1} f''_{u3} \\ f''_{u2} f''_{u1} & f''_{u2} f''_{u2} & f''_{u2} f''_{u3} \\ f''_{u3} f''_{u1} & f''_{u3} f''_{u2} & f''_{u3} f''_{u3} \end{matrix} \right] \end{matrix} \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} q_{u1} \\ q_{u2} \\ q_{u3} \end{matrix} \right\} \\ dy \end{matrix} \\ + \frac{1}{2} EI \int_0^L \begin{matrix} \langle q_{w1} & q_{w2} & q_{w3} \rangle \\ \left[ \begin{matrix} f''_{w1} f''_{w1} & f''_{w1} f''_{w2} & f''_{w1} f''_{w3} \\ f''_{w2} f''_{w1} & f''_{w2} f''_{w2} & f''_{w2} f''_{w3} \\ f''_{w3} f''_{w1} & f''_{w3} f''_{w2} & f''_{w3} f''_{w3} \end{matrix} \right] \end{matrix} \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} q_{w1} \\ q_{w2} \\ q_{w3} \end{matrix} \right\} \\ dy \end{matrix} \quad (2.15)$$

$$K_a = \begin{pmatrix} K_{au} & 0 \\ 0 & K_{aw} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Avec  $K_{au} = K_{aw}$

### 1.3.2 Détermination de la matrice masse et matrice gyroscopique de l'arbre

D'après l'équation de l'énergie cinétique de l'élément arbre donnée par l'équation (1.10) d'apprêt modèle Bernoulli-Euler Sous forme simplifiée on a:

$$T_{a=} \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \left( \dot{q}_u^T N_u^T N_u \dot{q}_u + \dot{q}_w^T N_w^T N_w \dot{q}_w \right) dy \\ + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \left( \dot{q}_w^t \frac{\partial N_w^T}{\partial y} \frac{\partial N_w}{\partial y} \dot{q}_w - \dot{q}_u^t \frac{\partial N_u^T}{\partial y} \frac{\partial N_u}{\partial y} \dot{q}_u \right) dy \\ + 2\rho I \Omega \int_0^L \left( -\dot{q}_u^t \frac{\partial N_u^T}{\partial y} \frac{\partial N_w}{\partial y} q_w \right) dy \quad (2.17)$$

On a

$$T_{a=} \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \begin{pmatrix} M_{a1u} & 0 \\ 0 & M_{a1w} \end{pmatrix} dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \begin{pmatrix} M_{a2u} & 0 \\ 0 & M_{a2w} \end{pmatrix} dy + 2\rho I \Omega \int_0^L \begin{pmatrix} 0 & -G_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dy \quad (2.18)$$

Donc on peut écrire la matrice masse élémentaire  $M_a$  de arbre tournant sous la forme suivante :

$$M_a = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \begin{pmatrix} M_{a1u} & 0 \\ 0 & M_{a1w} \end{pmatrix} dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \begin{pmatrix} M_{a2u} & 0 \\ 0 & M_{a2w} \end{pmatrix} dy \quad (2.19)$$

$$\text{Avec } M_{a1} = \begin{pmatrix} M_{a1u} & 0 \\ 0 & M_{a1w} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$M_{a1u} = M_{a1w} = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \begin{bmatrix} f_1(y)f_1(y) & f_1(y)f_2(y) & f_1(y)f_3(y) \\ f_2(y)f_1(y) & f_2(y)f_2(y) & f_2(y)f_3(y) \\ f_3(y)f_1(y) & f_3(y)f_2(y) & f_3(y)f_3(y) \end{bmatrix} dy \quad (2.21)$$

$$\text{Et } M_{a2} = \begin{pmatrix} M_{a2u} & 0 \\ 0 & M_{a2w} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$M_{a2u} = M_{a2w} = \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \end{bmatrix} dy \quad (2.23)$$

a/ la matrice gyroscopique de arbre sous forme suivant :

$$G_a = 2\rho I \Omega \int_0^L (M_{a3}) dy \quad (2.24)$$

Avec

$$(M_{a3}) = \begin{bmatrix} 0 & -G_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{u1}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w1}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u1}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w2}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u1}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w3}(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{u2}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w1}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u2}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w2}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u2}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w3}(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{u3}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w1}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u3}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w2}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u3}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w3}(y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} \int \mathbf{f}'_1 \mathbf{f}'_1 dy & \int \mathbf{f}'_1 \mathbf{f}'_2 dy & \int \mathbf{f}'_1 \mathbf{f}'_3 dy \\ \int \mathbf{f}'_2 \mathbf{f}'_1 dy & \int \mathbf{f}'_2 \mathbf{f}'_2 dy & \int \mathbf{f}'_2 \mathbf{f}'_3 dy \\ \int \mathbf{f}'_3 \mathbf{f}'_1 dy & \int \mathbf{f}'_3 \mathbf{f}'_2 dy & \int \mathbf{f}'_3 \mathbf{f}'_3 dy \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$G_a = 2\rho I \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \int f'_1 f'_1 dy & \int f'_1 f'_2 dy & \int f'_1 f'_3 dy \\ 0 & 0 & 0 & \int f'_2 f'_1 dy & \int f'_2 f'_2 dy & \int f'_2 f'_3 dy \\ 0 & 0 & 0 & \int f'_3 f'_1 dy & \int f'_3 f'_2 dy & \int f'_3 f'_3 dy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dy \quad (2.28)$$

### 1.3.3 Détermination de la matrice masse élémentaire et matrice gyroscopique de disque

D'après l'équation de l'énergie cinétique de l'élément disque donnée par l'équation (2.6)

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\varphi} \theta) \quad (2.29)$$

L'expression de l'énergie cinétique en coordonnées adimensionnelles est donnée comme

Suit :

$$\begin{aligned}
 T_d = & \frac{1}{2} M_d ( \dot{q}_u^T N_u^T N_u q_u + \dot{q}_w^T N_w^T N_w q_w ) \\
 & + \frac{1}{2} I_{dx} \left( \dot{q}_w^t \frac{\partial N_w^T}{\partial y} \frac{\partial N_w}{\partial y} \dot{q}_w - \dot{q}_u^t \frac{\partial N_u^T}{\partial y} \frac{\partial N_u}{\partial y} \dot{q}_u \right) \\
 & + I_{dy} \Omega \left( -\dot{q}_u^t \frac{\partial N_u^T}{\partial y} \frac{\partial N_w}{\partial y} q_w \right)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Donc on peut écrire la matrice masse élémentaire  $M_{de}$  de disque tournant sous la forme suivante :

$$M_{de} = \frac{1}{2} M_d \begin{bmatrix} M_u & 0 \\ 0 & M_w \end{bmatrix} + \frac{1}{2} I_{dx} \begin{bmatrix} M_{1u} & 0 \\ 0 & M_{2w} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Avec 
$$M_{d1} = \begin{bmatrix} M_u & 0 \\ 0 & M_w \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

$$M_u = M_w = \begin{bmatrix} f_1(y)f_1(y) & f_1(y)f_2(y) & f_1(y)f_3(y) \\ f_2(y)f_1(y) & f_2(y)f_2(y) & f_2(y)f_3(y) \\ f_3(y)f_1(y) & f_3(y)f_2(y) & f_3(y)f_3(y) \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Et

$$M_{d2} = \begin{bmatrix} M_{1u} & 0 \\ 0 & M_{1w} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

$$M_{1u} = M_{1w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

b/ la matrice gyroscopique de disque sous forme suivant :

$$G_d = I_{dy}\Omega[M_{d3}] \quad (2.36)$$

avec

$$M_{d3} = \begin{bmatrix} 0 & G_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{u1}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w1}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u1}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w2}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u1}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w3}(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{u2}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w1}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u2}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w2}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u2}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w3}(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{u3}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w1}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u3}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w2}(y)}{\partial y} & \frac{\partial N_{u3}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{w3}(y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \frac{\partial f_3(y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

### 1.3.4 Détermination de la matrice $\{F_{ext}\}$ :

D'après l'équation de l'énergie cinétique de balourd :

$$T_b = m_b d\Omega(\dot{U} \cos \Omega t - \dot{W} \sin \Omega t)$$

$$T_b = m_b d\Omega(N_u \cos \Omega t - N_w \sin \Omega t) \begin{Bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_w \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

### 1.3.5 Détermination de la matrice élémentaire de palier

Le travail virtuel  $\delta W$  des forces extérieures agissant sur l'arbre se mettent sous la forme suivant :

$$\delta W = -K_{xx}U\delta U - K_{xz}W\delta U - K_{zz}W\delta W - K_{zx}U\delta W$$

$$-C_{xx}U\delta\dot{U} - C_{xz}W\delta\dot{U} - C_{zz}W\delta\dot{W} - C_{zx}U\delta\dot{W} \quad (2.41)$$

Ou sous une forme plus compacte :

$$\delta W = F_u \delta U + F_w \delta W \quad (2.42)$$

**a\_** Action de HAMILTON :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{zx} \\ K_{zx} & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{zx} \\ C_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \delta W = & [-K_{xx}[N_u]^T[N_u]\{q_u\}\{\delta q_u\} - K_{xz}[N_w]^T[N_w]\{q_w\}\{\delta q_u\} \\ & - K_{zx}[N_u]^T[N_u]\{q_u\}\{\delta q_w\} - K_{xx}[N_w]^T[N_w]\{q_w\}\{\delta q_w\}] \\ & + [-C_{xx}[N_u]^T[N_u]\{\dot{q}_u\}\{\delta \dot{q}_u\} - C_{xz}[N_w]^T[N_w]\{\dot{q}_w\}\{\delta \dot{q}_u\} \\ & - C_{zx}[N_u]^T[N_u]\{\dot{q}_u\}\{\delta \dot{q}_w\} - C_{xx}[N_w]^T[N_w]\{\dot{q}_w\}\{\delta \dot{q}_w\}] \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = & - \begin{bmatrix} K_{xx}[N_u]^T[N_u]\{q_u\} & K_{xz}[N_w]^T[N_w]\{q_w\} \\ K_{zx}[N_u]^T[N_u]\{q_u\} & K_{zz}[N_w]^T[N_w]\{q_w\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta q_u \\ \delta q_w \end{Bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} C_{xx}[N_u]^T[N_u]\{\dot{q}_u\} & C_{xz}[N_w]^T[N_w]\{\dot{q}_w\} \\ C_{zx}[N_u]^T[N_u]\{\dot{q}_u\} & C_{xz}[N_w]^T[N_w]\{\dot{q}_w\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \dot{q}_u \\ \delta \dot{q}_w \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.45)$$

**1.3 .6 Déterminé les matrice globale on appliqué l' équations de Euler Lagrange on obtient :**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \{F\}\{q\} \quad (2.46)$$

3.1.1 Matrice de rigidité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_d}{\partial \{q\}} = & \frac{1}{2} EI \int_0^L \begin{bmatrix} f''_{u1} f''_{u1} & f''_{u1} f''_{u2} & f''_{u1} f''_{u3} \\ f''_{u2} f''_{u1} & f''_{u2} f''_{u2} & f''_{u2} f''_{u3} \\ f''_{u3} f''_{u1} & f''_{u3} f''_{u2} & f''_{u3} f''_{u3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{u1} \\ q_{u2} \\ q_{u3} \end{Bmatrix} dy \\ & + \frac{1}{2} EI \int_0^L \begin{bmatrix} f''_{w1} f''_{w1} & f''_{w1} f''_{w2} & f''_{w1} f''_{w3} \\ f''_{w2} f''_{w1} & f''_{w2} f''_{w2} & f''_{w2} f''_{w3} \\ f''_{w3} f''_{w1} & f''_{w3} f''_{w2} & f''_{w3} f''_{w3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{w1} \\ q_{w2} \\ q_{w3} \end{Bmatrix} dy \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \{q\}} = [K_a] \begin{Bmatrix} q_u \\ q_w \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

➤ Matrice globale de rigidité  $K_a$

$$K_a = \begin{pmatrix} K_{au} & 0 \\ 0 & K_{aw} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Avec  $K_{au} = K_{aw}$

$$K_a = EI \int_0^L \begin{bmatrix} f''_{u1}f''_{u1} & f''_{u1}f''_{u2} & f''_{u1}f''_{u3} & 0 & 0 & 0 \\ f''_{u2}f''_{u1} & f''_{u2}f''_{u2} & f''_{u2}f''_{u3} & 0 & 0 & 0 \\ f''_{u3}f''_{u1} & f''_{u3}f''_{u2} & f''_{u3}f''_{u3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f''_{w1}f''_{w1} & f''_{w1}f''_{w2} & f''_{w1}f''_{w3} \\ 0 & 0 & 0 & f''_{w2}f''_{w1} & f''_{w2}f''_{w2} & f''_{w2}f''_{w3} \\ 0 & 0 & 0 & f''_{w3}f''_{w1} & f''_{w3}f''_{w2} & f''_{w3}f''_{w3} \end{bmatrix} dy \quad (2.50)$$

3.1.2 Matrice masse élémentaire de arbre :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_a}{\partial \{\dot{q}\}} \right) = \left( \rho S \int_0^L [M_{a1}] dy + \rho I \int_0^L [M_{a2}] dy \right) \begin{Bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_w \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Donc

$$[M_a] = \begin{bmatrix} [M_{a1}] & 0 \\ 0 & [M_{a2}] \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

➤ Matrice masse élémentaire de disque :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_a}{\partial \{\dot{q}\}} \right) = \left( M_d \begin{bmatrix} M_u & 0 \\ 0 & M_w \end{bmatrix} + M_d \begin{bmatrix} M_{1u} & 0 \\ 0 & M_{2w} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_w \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_a}{\partial \{\dot{q}\}} \right) = \left( M_d [M_{d1}] + M_d [M_{d2}] \right) \begin{Bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_w \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

➤ Matrice masse globale du rotor :

$$[M] = [M_{a1}] + [M_{a2}] + [M_{d1}] + [M_{d2}] \quad (2.55)$$

➤ Matrice gyroscopique :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(\mathbf{G}_{a1} + \mathbf{G}_{d2})}{\partial\{\dot{q}\}} \right) - \left( \frac{\partial(\mathbf{G}_{a1} + \mathbf{G}_{d2})}{\partial\{q\}} \right) \\ &= \left[ 2\rho I \Omega \int_0^L (M_{a3}) dy + I_{dy} \Omega (M_{d3}) \right] \begin{Bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_w \end{Bmatrix} \\ & - [2\rho I \Omega ([M_{a3}]^T + I_{dy} \Omega [M_{d3}]^T)] \begin{Bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_w \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.56)$$

On a :

$$\mathbf{G}_a = 2\rho I \Omega \int_0^L ((M_{a3}) - [M_{a3}]^T) dy \quad (2.57)$$

$$\mathbf{G}_a = 2\rho I \Omega \begin{bmatrix} 0 & -\int_0^L (M_{a3}) dy \\ \int_0^L (M_{a3})^T dy & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

et

$$\mathbf{G}_d = I_{dy} \Omega ((M_{d3}) - [M_{a3}]^T) \quad (2.59)$$

$$\mathbf{G}_d = I_{dy} \Omega \begin{bmatrix} 0 & (M_{d3}) \\ [M_{d3}]^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

En fin la Matrice gyroscopique ce la forme suivant :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } a = \mathbf{G}_a + \mathbf{G}_d \quad (2.61)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -(\mathbf{G}_a + \mathbf{G}_d) \\ \mathbf{G}_a + \mathbf{G}_d & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

**1.3.7 Balourd :**

D'après l'équation (2.24) donc la forme de force extérieure  $F_b$  est :

$$T_b = m_b d\Omega (N_u \cos \Omega t - N_w \sin \Omega t) \begin{Bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_w \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

$$T_b = m_b d\Omega ((N_{u1} \cos \Omega t + N_{u2} \cos \Omega t + N_{u3} \cos \Omega t) - (N_{w1} \sin \Omega t + N_{w2} \sin \Omega t + N_{w3} \sin \Omega t)) \begin{Bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_w \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

$$T_b = m_b d\Omega \{\dot{q}_u \dot{q}_w\}^T \begin{bmatrix} N_u \\ N_w \end{bmatrix}^T \quad (2.65)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_b}{\partial \dot{q}} \right) = m_b d\Omega \begin{bmatrix} N'_u \cos \Omega t \\ N'_w \sin \Omega t \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_b}{\partial \dot{q}} \right) = m_b d\Omega \begin{bmatrix} f'_1 \cos \Omega t \\ f'_2 \cos \Omega t \\ f'_3 \cos \Omega t \\ -f'_1 \sin \Omega t \\ -f'_2 \sin \Omega t \\ -f'_3 \sin \Omega t \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$Fb = -m_b r b \begin{pmatrix} F1(L) \cos(\Omega. t) \\ F2(L) \cos(\Omega. t) \\ F3(L) \cos(\Omega. t) \\ F1(L) \sin(\Omega. t) \\ F2(L) \sin(\Omega. t) \\ F3(L) \sin(\Omega. t) \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

➤ Matrice rigidité des palies  $K_p$  et amortissement  $C_p$  :

D'après l'équation (2.28) la forme de matrice  $K_p$  et  $C_p$  sont :

$$K_p = \begin{pmatrix} K_{xx}F_1(L1)F_1(L1) & K_{xx}F_1(L1)F_2(L1) & K_{xx}F_1(L1)F_3(L1) & K_{xz}F_1(L1)F_1(L1) & K_{xz}F_1(L1)F_2(L1) & K_{xz}F_1(L1)F_3(L1) \\ K_{xx}F_2(L1)F_1(L1) & K_{xx}F_2(L1)F_2(L1) & K_{xx}F_2(L1)F_3(L1) & K_{xz}F_2(L1)F_1(L1) & K_{xz}F_2(L1)F_2(L1) & K_{xz}F_2(L1)F_3(L1) \\ K_{xx}F_3(L1)F_1(L1) & K_{xx}F_3(L1)F_2(L1) & K_{xx}F_3(L1)F_3(L1) & K_{xz}F_3(L1)F_1(L1) & K_{xz}F_3(L1)F_2(L1) & K_{xz}F_3(L1)F_3(L1) \\ K_{zx}F_1(L1)F_1(L1) & K_{zx}F_1(L1)F_2(L1) & K_{zx}F_1(L1)F_3(L1) & K_{zz}F_1(L1)F_1(L1) & K_{zz}F_1(L1)F_2(L1) & K_{zz}F_1(L1)F_3(L1) \\ K_{zx}F_2(L1)F_1(L1) & K_{zx}F_2(L1)F_2(L1) & K_{zx}F_2(L1)F_3(L1) & K_{zz}F_2(L1)F_1(L1) & K_{zz}F_2(L1)F_2(L1) & K_{zz}F_2(L1)F_3(L1) \\ K_{zx}F_3(L1)F_1(L1) & K_{zx}F_3(L1)F_2(L1) & K_{zx}F_3(L1)F_3(L1) & K_{zz}F_3(L1)F_1(L1) & K_{zz}F_3(L1)F_2(L1) & K_{zz}F_3(L1)F_3(L1) \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

$$C_p = \begin{pmatrix} C_{xx}F_1(L1)F_1(L1) & C_{xx}F_1(L1)F_2(L1) & C_{xx}F_1(L1)F_3(L1) & C_{xz}F_1(L1)F_1(L1) & C_{xz}F_1(L1)F_2(L1) & C_{xz}F_1(L1)F_3(L1) \\ C_{xx}F_2(L1)F_1(L1) & C_{xx}F_2(L1)F_2(L1) & C_{xx}F_2(L1)F_3(L1) & C_{xz}F_2(L1)F_1(L1) & C_{xz}F_2(L1)F_2(L1) & C_{xz}F_2(L1)F_3(L1) \\ C_{xx}F_3(L1)F_1(L1) & C_{xx}F_3(L1)F_2(L1) & C_{xx}F_3(L1)F_3(L1) & C_{xz}F_3(L1)F_1(L1) & C_{xz}F_3(L1)F_2(L1) & C_{xz}F_3(L1)F_3(L1) \\ C_{zx}F_1(L1)F_1(L1) & C_{zx}F_1(L1)F_2(L1) & C_{zx}F_1(L1)F_3(L1) & C_{zz}F_1(L1)F_1(L1) & C_{zz}F_1(L1)F_2(L1) & C_{zz}F_1(L1)F_3(L1) \\ C_{zx}F_2(L1)F_1(L1) & C_{zx}F_2(L1)F_2(L1) & C_{zx}F_2(L1)F_3(L1) & C_{zz}F_2(L1)F_1(L1) & C_{zz}F_2(L1)F_2(L1) & C_{zz}F_2(L1)F_3(L1) \\ C_{zx}F_3(L1)F_1(L1) & C_{zx}F_3(L1)F_2(L1) & C_{zx}F_3(L1)F_3(L1) & C_{zz}F_3(L1)F_1(L1) & C_{zz}F_3(L1)F_2(L1) & C_{zz}F_3(L1)F_3(L1) \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

### 1.3.8 Détermination des équations de mouvement de système :

Les matrices globales du système sont exprimées par le système d'équations suivantes :

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_w \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} q_u \\ q_w \end{Bmatrix} + \Omega[G] \begin{Bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_w \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_w \end{Bmatrix} = \{F_{ext}\} \quad (2.71)$$

Avec :

$[M]$  : Matrice masse globale de système

$[G]$  : Matrice gyroscopique globale de système

$[K]$  : Matrice rigidité globale de système

$[C]$  : Matrice d'amortissement de système

$\{F_{ext}\}$  : forces extérieurs de système

$q$  : Vecteur de déplacement global.

## *Chapitre 3 : Organisation de la programmation*

## Chapitre 3 : Organisation de la programmation

### Introduction :

Le programme se fait par un logiciel MATHCAD v14 a pour but de déterminer les fréquences propres d'un rotor fissuré soumis à des sollicitations composées de flexion .en introduisant la méthode de RAYLEIGH-RITZ avec les conditions aux limites et différents paramètres physiques et géométriques.et pour l'exécution de notre programme en utilise un micro-ordinateur composé d'un processeur Intel (R) core i3-4005U CPU @1.70GHZ avec une mémoire de capacité de 4.00 Go (RAM).

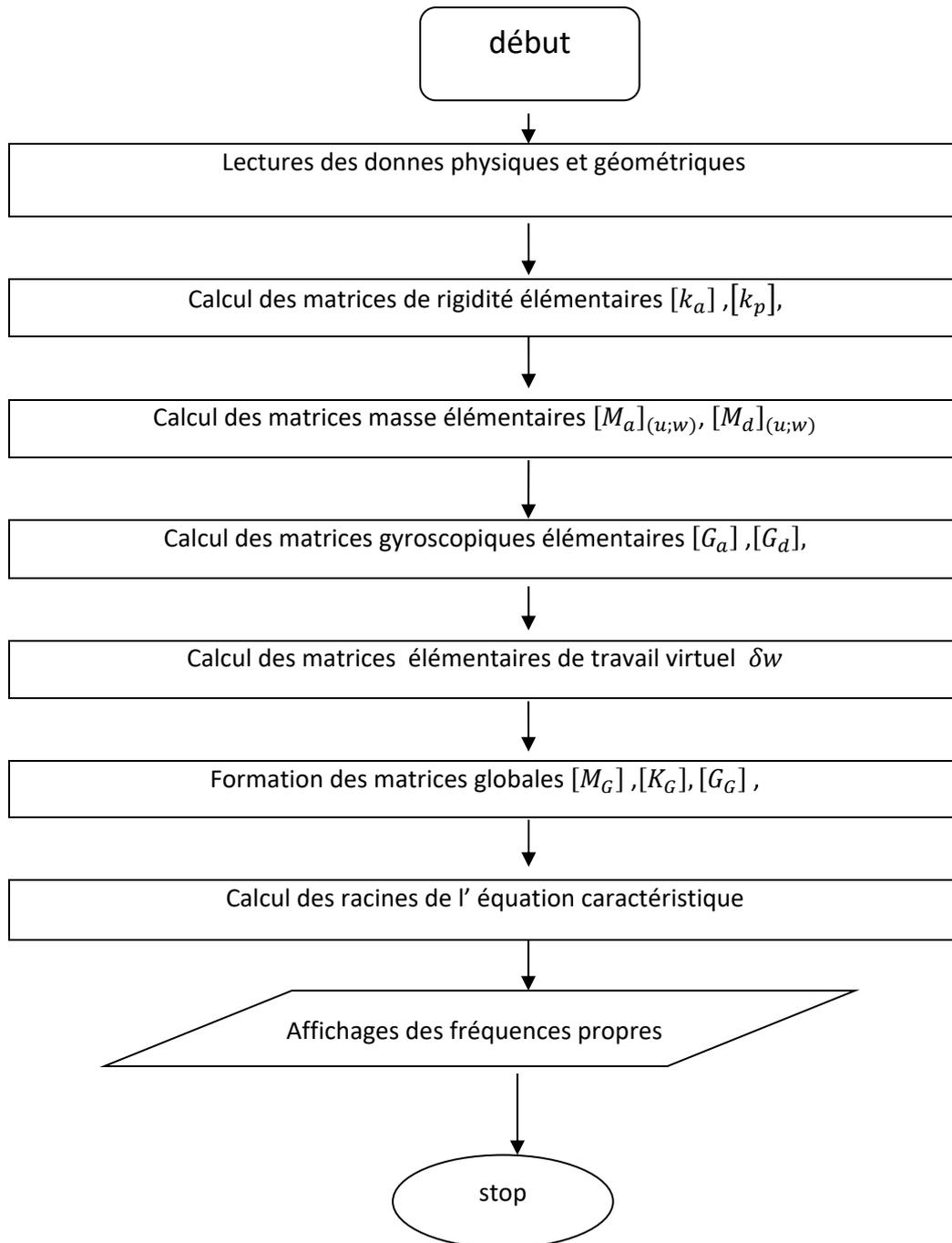
Ce programme comporte :

- Un fichier de données.
- Le programme de calcul.
- Un fichier de sortie.

### 3.1 Schéma de calcul :

La Figure 3.1représente les différentes étapes de programmation, ces étapes sont suivantes :

1. Lecture des données concernant le nombre de fonction de forme, propriétés mécaniques et les données géométriques de rotor.
2. Calcul des matrices de rigidité élémentaires  $[K_a],[K_p]$
3. Calcul des matrices masse élémentaires  $[M_a]_{(u,w)},[M_d]_{(u,w)}$
4. Calcul des matrices gyroscopiques élémentaires  $[G_a],[G_d]$
5. Calcul de la matrice élémentaire de travail virtuel  $\delta W$
6. Formation des matrices globales  $[K_G].[M_G].[G_G]$
7. Introduction des conditions aux limites
8. calcul des fréquences propres.



**Figure 3.1** : Schéma de calcul global

## 3.2 Description du programme

### a-Fichier de données

Toutes les données nécessaires pour le calcul des fréquences (paramètres élémentaires physiques et géométriques de l'arbre avec le balourd ) sont introduites.

Ces données sont :

$E$  : module d'Young ou module d'élasticité longitudinal

$\nu$  : Coefficients de poisson

$\rho$  : Masse volumique

$L$  : Longueur de l'arbre.

$L1$  : L'emplacement de disque

$d_e$  : Diamètre extérieur de l'arbre et intérieur de disque

$d_i$  : Diamètre intérieur de l'arbre

$d_{ex}$  :Diamètre extérieur de disque

$m_b$  : masse de balourd

$d$  : Diamètre de balourd

$A$  : Section droite d'élément l'arbre

$I$  : Moment d'inertie de l'arbre

$I_{dx}$  :Moment d'inertie de disque suivant l'axe X

$I_{dy}$  :Moment d'inertie de disque suivant l'axe Y

$\omega$  : La pulsation propre

### b-Programme de calcul :

Le programme "**influence de balourd sur le comportement dynamique du rotor**" permet de déterminer les fréquences propres de rotor avec le balourd

### **c-Sous-programme pour le calcul des matrices masse et de rigidité globale**

Après avoir introduit les données nécessaires, la première étape consiste à calculer les Matrices masse et de rigidité élémentaire à partir d'un sous-programme < matrice élémentaire> . On a les conditions aux limites après la formation des matrices masse et rigidité globale du système.

### **d- calcul des fréquences propres :**

Dans notre cas on traite un problème de vibrations libres :

Ce programme permet de calculer : Les pulsations propres  $\omega$  du système.

### **e- Calcul des paramètres de fréquence**

Les valeurs propres (fréquences propres) obtenues par le programme sont classées dans un ordre croissant et stockées dans un fichier de sortie.

# Chapitre 4

## Résultats et interprétations

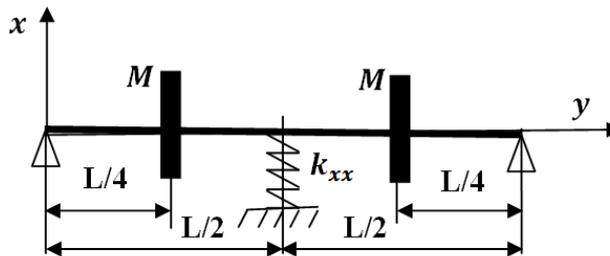
## Introduction

Nous présenterons dans ce chapitre une analyse dynamique d'un arbre tournant soumis à un balourd.

La première partie de ce chapitre met en évidence la validité du programme développé, ainsi une étude comparative est faite avec des travaux de différents auteurs. La deuxième partie fait l'objet d'une étude d'un arbre tournant soumis à un balourd,

### 1- Résultats et interprétation :

Soit la ligne d'arbre suivante composée d'un arbre en acier de densité  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$  et de module d'élasticité  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  et de deux disques en acier de mêmes dimensions guidés par deux appuis supposés rigides aux deux extrémités de l'arbre et un appui élastique au milieu, de raideur  $k_{xx} = 8 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ . on suppose un balourd situé sur le deuxième disque avec  $m_b = 1 \text{ g}$  situé à une distance  $r_b = 0.04 \text{ m}$  de l'axe de rotation.



La longueur de l'arbre  $L$  est de  $1 \text{ m}$  et de diamètre  $d = 0.02 \text{ m}$ .

La masse et les inerties du disque sont :

$$M_d = 15 \text{ kg}, \quad I_{dx} = I_{dz} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2, \quad I_{dy} = 0.2 \text{ kgm}^2$$

L'aire de la section droite et le moment d'inertie diamétral de l'arbre sont

$$S = 3.142 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad I = 7.854 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

#### a- Cas stationnaire

Les deux premières fréquences à l'arrêt sont :

Tableau 1 : fréquences à l'arrêt en rd/s

Fréquences en rd/s	
$\omega_1$	67.054
$\omega_2$	95.906

**b- Cas d'un rotor en rotation avec une vitesse de rotation  $N=6000\text{tr/mn}$**

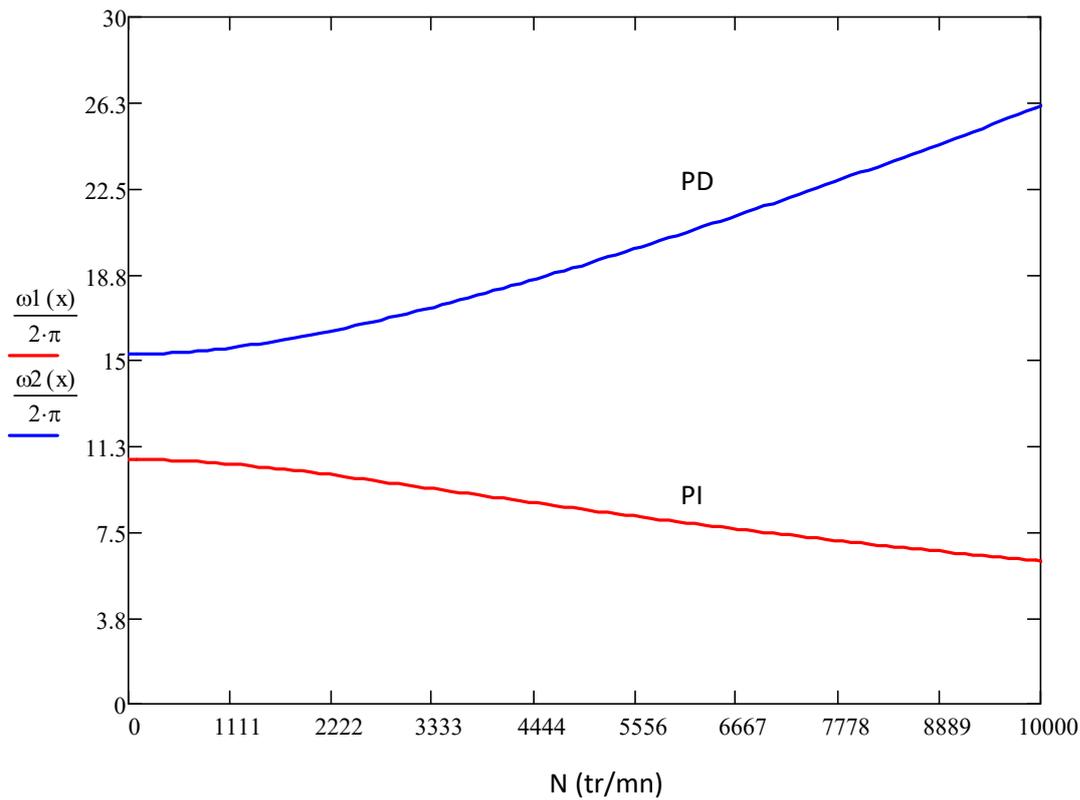
Les deux premières fréquences dans le cas d'un rotor en rotation sont :

Tableau 2 : fréquences à l'arrêt en rd/s

Fréquences en rd/s	
$\omega_1$	50.057
$\omega_2$	128.471

**c- Diagramme de Campbell**

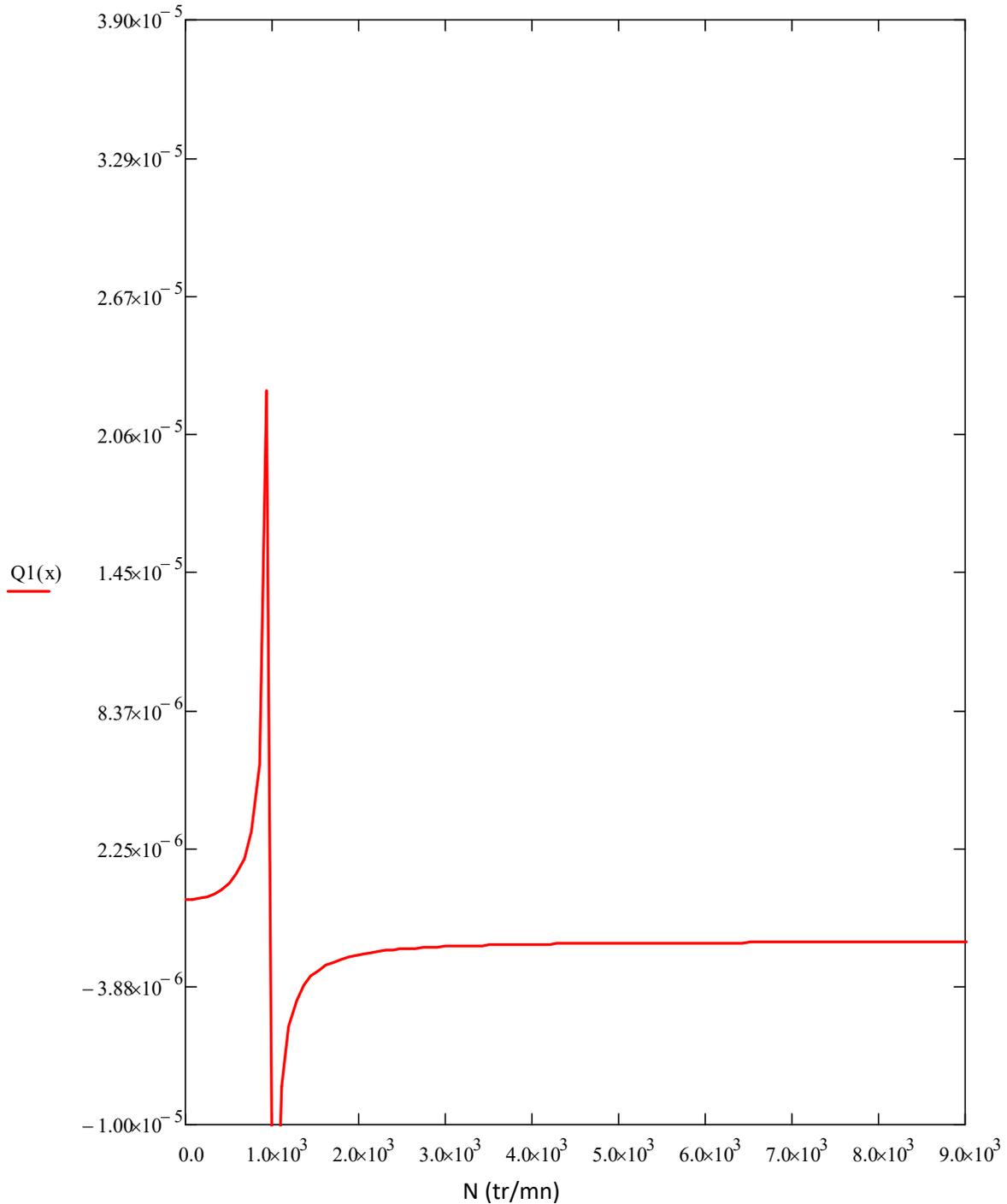
La variation des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation est donnée par la courbe suivante on constate deux branches celles des précessions directe (PD) et indirecte (PI)



**FIG 4-1** : Variation de la première fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation

**d- Balourd**

Dans le cas d'un balourd  $m_b$  de 1 g situé à  $r_b=0.04\text{m}$  de l'axe de rotation la figure suivante montre que l'amplitude de déplacement croit rapidement au voisinage de 1050 tr/mn. Ce résultat montre une seule vitesse critique est celle qui correspond à l'intersection de la courbe des PD avec la droite  $y = N/60$  (point B).



**FIG 4-2 : Réponse au balourd**

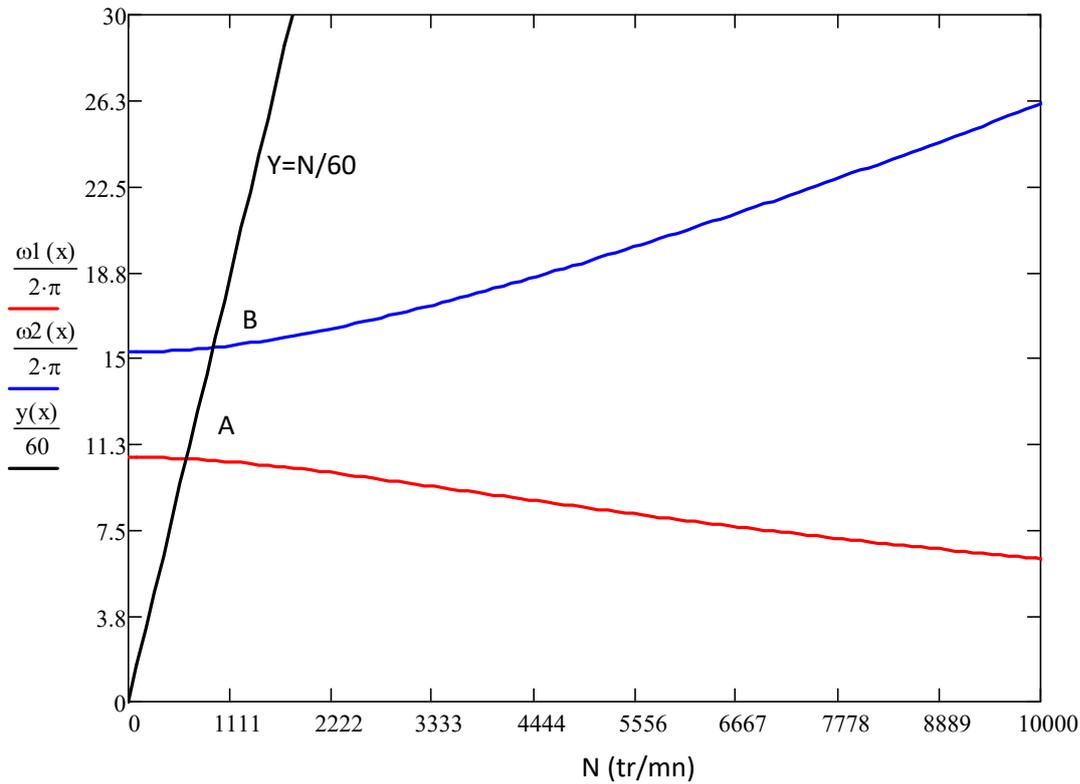


FIG 4-3 : Diagramme de Campbell 1

**e- Force asynchrone**

En fonctionnement le rotor peut être excité par des forces asynchrones. Une force asynchrone est une force d'amplitude constante  $F_0$  tournant à une vitesse ( $s\Omega$ ) différente de celle du rotor. Supposons que cette force est située sur le deuxième disque et tournant à une vitesse 0.5 N. on constate que l'amplitude de déplacement croit rapidement au voisinage de 2090 tr/mn. Ceci correspond au point D du diagramme de Campbell.

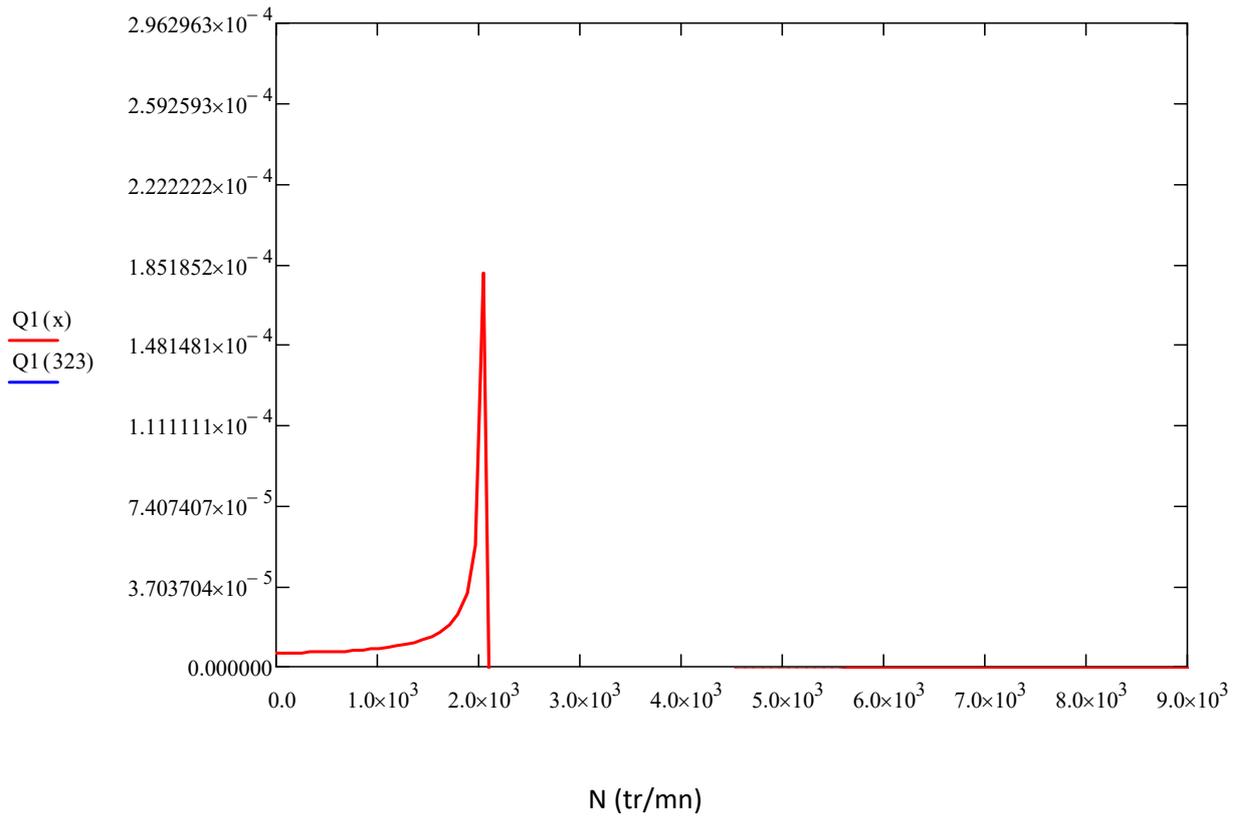


FIG 4-4 : Réponse à une force asynchrone

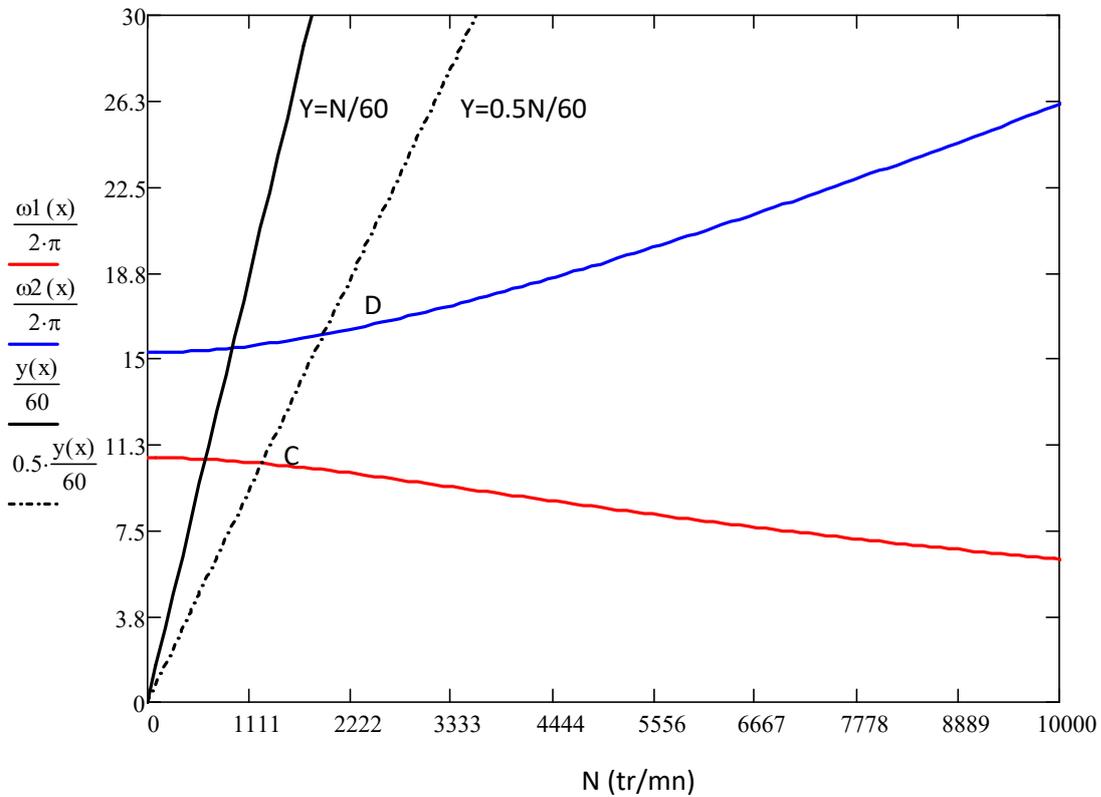


FIG 4-5 : Diagramme de Campbell 2

# *Conclusion Générale*

## **Conclusion :**

Ce mémoire est une initiation à l'étude de la dynamique des rotors. Notre objectif est de comprendre les phénomènes liés à la dynamique des rotors .

La première partie est une modélisation mathématique du comportement dynamique des rotors. On a présenté les éléments constituant un rotor et qui sont : l'arbre, le disque et les paliers. L'arbre et le disque sont caractérisés par leur énergie cinétique. La flexibilité de l'arbre se traduit par son énergie de déformation

L'utilisation de la méthode de Rayleigh-Ritz dans l'estimation des déformations du rotor permet de réduire le nombre de degrés de liberté du système et d'estimer ses plus basses fréquences.

L'application des équations de Lagrange aux différentes énergies et aux travaux virtuels dus aux paliers, nous donne les équations du mouvement. Ces derniers sont les matrices masse, effets gyroscopique (Coriolis) et raideur.

Pour comprendre le comportement dynamique du rotor, on trace les amplitudes de ses vibrations sous différentes excitations. Elles peuvent être une masse excentrique du rotor même (balourd) ou excitation extérieures de forme quelconque. En dynamique, les fréquences propres du rotor changent en fonction de sa vitesse de rotation. Le tracé du diagramme de Campbell permet de voir ces variations. Connaissant les fréquences des excitations extérieures, on doit choisir des vitesses de rotations du rotor loin des zones critiques.

En pratique, on nous impose des vitesses de rotation, donc la forme et la conception du rotor qui doit permettre l'absorption des vibrations excessives. Le diagramme de Campbell est d'une importance majeure dans la dynamique du rotor.

## Références Bibliographies

- [1] Bauer, H.F. Vibration of a rotating uniform beam, part I: orientation in the axis of rotation. *J Sound Vib* (1980) ;72:177–89.
- [2] Wu .J, Zheng.Zu and Ray.Han P.S, Natural frequencies and normal modes of spinning Timoshenko beams with general boundary conditions, *Journal of applied mechanics*, June (1992) , vol.59, 197-204.
- [3] Hu. K., NVlahopoulos.and Z.P Mourelatos, A finite element formulation for coupling rigid and flexible body dynamics of rotating beams, *J. Sound Vib.*(2002) ; 253(1), 903-630.
- [4] NelsonH.D.andMcVaugh J.M, The dynamics of rotor bearing systems using finite elements, *ASME J. Engng. Ind.*(1976) ; 98, 593-600.
- [5]Lalanne et al. . Rotor dynamics prediction in engineering. Chichester : Wiley, 1998.
- [6] Thomas etLaville. Vibration of a rotating uniform beam. *Mechanism and Machine Theory*, 2003, vol. 38, n° 12, pp. 1449-1467.
- [7]Lalanne M., Ferraris G. Rotordynamics prediction in engineering. Chichester : Wiley, 1998.
- [8]Xu B., Qu L., Sun R. The optimization technique-based balancing of flexible rotors without test runs. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, vol. 238, n° 5, pp. 877-892.
- [9] Kang Y., Tseng M.-H., Wang S.-M., Chaing C.-P., Wang C.-C. An accuracy improvement for balancing crankshafts. *Mechanism and Machine Theory*, 2003, vol. 38, n° 12, pp. 1449-1467.

[10] Kang Y., Lin T.-W., Chang Y.-J., Chang Y.-P., Wang C.-C. Optimal balancing of flexible rotors by minimizing the condition number of influence coefficients. *Mechanism and Machine Theory*, 2008, vol. 43, n° 7, pp. 891-908.

[11] Levecque N., Mahfoudh J., Violette D., Ferraris G., Dufour R. Vibration reduction of a single cylinder reciprocating compressor based on multi-stage balancing. *Mechanism and Machine Theory*, 2011, vol. 46, n° 1, pp. 1-9

[12] Gnielka P. Modal balancing of flexible rotors without test runs: an experimental investigation. *Journal of Sound and Vibration*, 1983, vol. 90, n° 2, pp. 157-172.

[13] Mahfoudh J. Contribution à l'équilibrage des machines tournantes. Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 1990, 139 p.

[14] Kang Y., Liu C.-P., Sheen G.-J. A modified influence coefficient method for balancing unsymmetrical rotor-bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 194, n° 2, pp. 199-218.

[15] Duchemin M., Berlioz A., Ferraris G. Modélisation du comportement dynamique d'un rotore embarqué. Actes du colloque de Giens, 2001.

[16] Lin F., Meng G. Study on the dynamics of a rotor in a maneuvering aircraft. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 2003, vol. 125, n° 3, pp. 324-327.

[17] Berlioz A., Derhagopian J., Dufour R., Draoui E. Dynamic behavior of a drill-string: experimental investigation of lateral instabilities. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1996, vol. 118, n° 3, pp. 292-298.

[18] Dufour R., Berlioz A. Parametric instability of a beam due to axial excitations and to boundary conditions. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1998, vol. 120, n° 2, pp. 461-467.

[19] Friedmann P.P. Numerical methods for the treatment of periodic systems with applications to structural dynamics and helicopter rotor dynamics. *Computers and Structures*, 1990, vol. 35, n° 4, pp. 329-347.

## *Résumé*

La conception de rotors capables de bien fonctionner sous les conditions de fonctionnement est nécessaire pour éviter les problèmes d'instabilités, source de défaillance catastrophique ou la cause principale est le balourd généré par le mouvement de rotation, cas très fréquent dans les turbomoteurs, turbocompresseur, pompes à vide, etc.

Le présent travail a pour objectif de prévoir le comportement dynamique d'un rotor monté sur des paliers rigides ou élastiques et soumis à un balourd. Une étude théorique permettant l'établissement des énergies cinétique et de déformation basée sur le modèle EULER -BERNOULLI nécessaires à la détermination des équations du mouvement est présentée. La méthode de RAYLEIGH-RITZ est utilisée par la suite pour résoudre le problème. Une étude de validation est faite, les résultats trouvés sont comparés aux résultats obtenus dans la littérature.

## *ملخص*

في هذا العمل نحاول دراسة تصميم الدوارات القادرة على أداء الجيد في ظل ظروف التشغيل وهو ضروري لتجنب مشاكل عدم الاستقرار، مصدر الفشل الكارثي أو السبب الرئيسي هو عدم التوازن الناتجة عن حركة دوران، شائعة جدا في turbo ، مضخات الفراغ، الخ .

والهدف من هذا العمل هو التنبؤ بالسلوك الديناميكي للدوار المثبت على محامل جامدة أو مرنة وتعرض لعدم التوازن. ويرد الدراسة النظرية لإنشاء الطاقة الحركية وتشوه استنادا إلى نموذج EULER -BERNOULLI الضروري لتحديد معادلات الحركة. يتم استخدام طريقة RAYLEIGH-RITZ في وقت لاحق لحل المشكلة. يتم إجراء دراسة التحقق من الصحة، تتم مقارنة النتائج مع النتائج التي تم الحصول عليها في الدراسات السابقة.

## *Abstract*

The design of rotors capable of performing well under the operating conditions is necessary to avoid problems of instability, source of catastrophic failure or the main cause is the unbalance generated by the rotational movement, very common in turbochargers, turbochargers, vacuum pumps, etc.

The aim of this work is to predict the dynamic behavior of a rotor mounted on rigid or elastic bearings and subjected to unbalance. A theoretical study allowing the establishment of kinetic energies and deformation based on the model EULER -BERNOULLI necessary to the determination of the equations of the motion is presented. The RAYLEIGH-RITZ method is used later to solve the problem. A validation study is carried out, the results are compared with the results obtained in the literature.