

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des sciences
Département de mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du
Diplôme de master en mathématiques.
Option : Biomathématiques et Modélisation

Étude d'un modèle mathématique pour lutter contre les insectes nuisibles

Présenté Par : KAROUN Rabia Chaimaà

Mémoire soutenu le 02 juillet devant le jury composé de :

<i>M. S.E-H. Miri</i>	MCA UABB TLEMEN	Président
<i>M. T.M. Touaoula</i>	PROFESSEUR UABB TLEMEN	Examineur
<i>M. A. Moussaoui</i>	PROFESSEUR UABB TLEMEN	Encadreur

Année universitaire 2017-2018

Remerciements

En préambule à ce mémoire, j'exprime ma reconnaissance envers Dieu le plus puissant. Dieu m'a donné la patience, la volonté, la confiance et la santé durant toutes mes années d'études.

Je tiens à remercier mes parents d'être si généreux si patients et tellement merveilleux, ils ont toujours été une source d'encouragements, de motivation et de beaucoup de bonheur.

Je voudrai aussi adresser mes remerciements les plus sincères et chaleureux aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

En effet, je voudrai remercier mon université, mon encadreur et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur A.Moussaoui, en tant que mon encadreur, pour son aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

J'adresse aussi mes remerciements à mes professeurs et enseignants d'avoir été là, de nous avoir énormément appris par la qualité des enseignements qu'ils nous ont prodigué.

Merci, à notre chef de département de mathématiques, Mr Benmiloud Mebkhout.

C'est encore un grand plaisir pour moi, d'adresser mes plus sincères remerciements à monsieur : T.M. Touaoula et S. Miri d'avoir bien voulu présider mon jury et d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie également mes camarades de Master II.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A mes très chers parents : Tadj-eddine et Yamna, aucune dédicace ne saurait exprimer ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon bien être.

A la mémoire de mon grand père paternel : j'aurais tant aimé que tu soit présent, que Dieu ait ton âme dans sa sainte miséricorde.

A mon grand père maternel : Mohamed et à mes grands mères : Djamila et Babia, qui m'ont accompagné par leurs prières, que Dieu vous garde pour nous.

A mon professeur de mathématique au lycée : Mr. Abdeli, merci pour vos encouragements et la confiance que vous m'avez donner afin de poursuivre mes études en mathématiques.

A mon frère : Amine et sa femme Fadia.

A mes soeurs : Zineb et son mari Mounir, Sarah et son mari Mohamed et ma princesse Amina, je vous adore.

A ma petite nièce : Ghina et mes neveux : Abd-el-Hadi et Youssef.

A toute ma famille et spécialement, mes oncles et mes tantes et à tous mes cousins et cousines.

A tous mes amis sans exception et en particulier mes chères : Khadidja et Manel.

A tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie.

A tous mes enseignants.

Résumé

Ce mémoire est principalement une synthèse de l'article de R. Anguelov, C. Dufourd and Y. Dumont, intitulé : Mathematical model for pest–insect control using mating disruption and trapping et publié dans le journal : Applied Mathematical Modelling en 2017.

L'objectif est de développer un modèle mathématique régi par un système dynamique par morceaux d'ODE¹ pour contrôler la population des insectes nuisibles en utilisant des phéromones artificielles femelles² pour confondre les mâles et nuire à leurs possibilités d'accouplement. Par conséquent, le taux de reproduction diminue, ce qui entraîne une diminution dans la taille de la population des ravageurs.

Afin de rendre le contrôle plus efficace, nous utilisons le piégeage³ qui consiste à capturer les mâles attirés par la phéromone artificielle.

Dans une première partie, une analyse théorique du modèle sans contrôle est effectuée pour évaluer les propriétés de l'équilibre endémique.

Ensuite, le contrôle est ajouté pour déterminer la valeur seuil au dessus duquel la population des insectes nuisibles disparaît.

Finalement, des simulations numériques ont été faites pour illustrer les résultats théoriques.

1. Voir la définition 1.

2. Des substances chimiques émises par la plupart des animaux et certains végétaux qui agissent comme des messagers entre les individus d'une même espèce, transmettant aux autres organismes des informations qui jouent un rôle dans l'attraction sexuelle (voir le site <https://en.wikipedia.org/wiki/Pheromone>).

3. Le piégeage est une forme de chasse qui se pratique à l'aide de dispositifs destinés à capturer ou tuer les animaux (voir le site https://fr.wikipedia.org/wiki/Pi%C3%A9geage_animal).

Abstract

This thesis is mainly a synthesis of the article of R. Anguelov, C. Dufourd and Y. Dumont, entitled : Mathematical model for pest-insect control using mating disruption and trapping and published in the journal : Applied Mathematical Modeling in 2017.

The objective is to develop a mathematical model governed by a piecewise dynamic system of ODE to control the pest population using female artificial pheromones to confuse males and harm their mating possibilities. As a result, the reproductive rate decreases, resulting in a decrease in the size of the pest population.

In order to make control more efficient, we use trapping which consists of capturing the males attracted by the artificial pheromone.

In a first part, a theoretical analysis of the model without control is carried out to evaluate the properties of the endemic equilibrium.

Then, the control is added to determine the threshold value above which the pest population disappears.

Finally, numerical simulations were made to illustrate the theoretical results.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Préliminaires	4
1.1 Systèmes dynamiques par morceaux	4
1.2 Systèmes coopératifs	5
1.3 Taux de reproduction de base R_0	6
1.3.1 Définition	6
1.3.2 Méthode pour calculer R_0	6
2 Modélisation mathématique de la population d'insectes naturels	9
2.1 Modèle compartimental de la population d'insectes	9
2.2 Analyse du modèle	12
2.2.1 Cas 1 : Abondance des mâles	13
2.2.2 Cas 2 : Pénurie masculine	17
2.3 Conclusion pour le modèle	21
3 Modélisation de la perturbation de l'accouplement et du piégeage	27
3.1 Modèle de la population d'insectes contrôlée	27
3.2 Analyse du modèle	29
3.2.1 Cas 1 : Abondance des mâles	31
3.2.2 Cas 2 : Pénurie masculine	33
3.3 Conclusion pour le modèle	39
3.3.1 Stabilité asymptotique globale de l'équilibre trivial	43
4 Simulations numériques	52
Conclusion	57
Table des figures	58

Introduction générale

Les insectes nuisibles sont responsables de dégâts considérables sur la production agricole dans le monde entier.

Au cours du temps, de nombreuses pratiques ont été développées pour limiter les dégâts des différents espèces nuisibles appelées " ravageurs ".

L'utilisation des pesticides chimiques compte parmi les méthodes de lutte antiparasitaire qui peut avoir des effets secondaires indésirables sur l'environnement. Ainsi, l'utilisation intensive de pesticides n'est pas une solution durable pour protéger la production agricole [14].

La perturbation de l'accouplement, la technique de l'insecte stérile (consiste à libérer un grand nombre de mâles stérilisés pour concurrencer les mâles sauvages contre l'insémination des femelles) et la technique d'annihilation de masse (consiste à réduire le nombre d'un ou des deux sexes par piégeage à l'aide d'un attractif spécifique) sont des exemples de méthodes faisant partie des stratégies de lutte intégrée [14].

Dans ce mémoire, nous nous concentrons principalement sur la perturbation de l'accouplement éventuellement couplée avec le piégeage, qui consiste à introduire des stimuli artificiels, comme des phéromones ou des paraphéromones [10, 11], pour perturber les mâles et nuire à leur possibilités d'accouplement[13], entraînant une réduction de la population des insectes [15]. Nous faisons une synthèse de l'article [14].

Cette méthode a été largement étudié et utilisé pour contrôler différents types de parasites sur différents types de cultures. Il s'est avéré efficace pour le contrôle sur les cultures de tomates dans les serres italiennes [1], le ver rose du cotonnier qui attaque le coton et le carpocapse de la pomme [3].

Cependant, cette méthode a parfois échoué dans la lutte contre la mineuse des feuilles de café [2] ou dans la lutte contre la tomate mentionnée ci-dessus dans des conditions de plein champ [9] où la confusion sexuelle n'a pas réussi à réduire la population de ravageurs. L'échec de la méthode peut être attribué à la composition et au dosage de la phéromone et parfois à une forte abondance d'insectes.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :
le premier chapitre va nous aider à mieux comprendre la partie consacrée à l'analyse mathématique du modèle.
Dans le deuxième chapitre, nous donnons une description du modèle sans contrôle et l'analysons théoriquement.

Ensuite, dans le troisième chapitre, nous décrivons le modèle avec contrôle et nous fournissons une analyse théorique, où nous identifions deux valeurs seuils qui déterminent les changements dans la dynamique de la population de ravageurs et l'efficacité du contrôle.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous présentons des simulations numériques pour illustrer les résultats théoriques.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Systèmes dynamiques par morceaux

Définition 1 [4]

Un système dynamique par morceaux est donné par un ensemble fini d'ODEs,

$$\dot{X} = F_i(X), X \in S_i$$

où $\cup_i S_i = D \subset \mathbb{R}^n$, chaque S_i a un intérieur non vide, et D est un domaine.

Une frontière non vide entre deux régions S_i et S_j notée Σ_{ij} sera appelée un ensemble de discontinuité, une limite de discontinuité ou un collecteur de commutation [8].

Dans le reste du travail, nous considérerons principalement le système suivant avec un seul ensemble de discontinuité Σ noté Σ_{12} .

Ainsi, le système sera écrit comme suit :

$$\dot{X} = \begin{cases} F_1(X) & \text{si } X \in S_1 \\ F_2(X) & \text{si } X \in S_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

où $S_1 \cup S_2 = D$, si F_1 génère un flot Φ_1 et F_2 un flot Φ_2 telle que :

$F_1(X) = F_2(X)$ en un point $X \in \Sigma_{12}$, alors, on dit que le degré de régularité est de 2.

Définition 2 [14]

Les systèmes qui ont un degré de régularité égal à 2 sont appelés systèmes lisses continus par morceaux PWCS (piecewise-smooth continuous systems).

Supposons que le système (1.1) a été réécrit comme suit :

$$\dot{X} = \begin{cases} F_1(X) & \text{si } H(X) > 0. \\ F_2(X) & \text{si } H(X) < 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

où l'ensemble de discontinuité Σ est défini par : $\Sigma := \{X \in D : H(X) = 0\}$.

Alors, Pour le système (1.2), il est possible d'identifier différents types d'équilibres, conduisant à la définition suivante :

Définition 3 [8]

On appelle un point $X \in D$ un équilibre régulier de (1.2) si X vérifie :

$$F_1(X) = 0 \text{ et } H(X) > 0 \text{ ou } F_2(X) = 0 \text{ et } H(X) < 0.$$

Alternativement, nous disons qu'un point $Y \in D$ est un équilibre virtuel de (1.2) si :

$$F_1(Y) = 0 \text{ et } H(Y) < 0 \text{ ou } F_2(Y) = 0 \text{ et } H(Y) > 0.$$

1.2 Systèmes coopératifs

Définition 4 [18]

$$\dot{x}(t) = f(x) \tag{\varepsilon 2}$$

où : $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, est appelé coopératif si :

f_i est monotone croissante par rapport à x_j pour $i, j = 1, \dots, n, j \neq i$. Une fonction avec la monotonie déclarée est appelée quasi-monotone.

Nous rappelons deux principaux théorèmes que nous utiliserons dans le reste du travail :

Théorème 1 [18, théorème 3.1,p.18],[12, théorème 6]

Soit $a, b \in D$, tel que :

$$a \leq b, \quad [a, b] \subseteq D \text{ et } f(b) \leq 0 \leq f(a).$$

Alors ($\varepsilon 2$) définit un système dynamique positif sur $[a, b]$.

De plus, si $[a, b]$ contient un équilibre unique p alors, p est globalement asymptotiquement stable (GAS) sur $[a, b]$.

Théorème 2 [18]

Soit $a, b \in D$, tel que :

$$a \leq b, \quad [a, b] \subseteq D \text{ et } f(a) = f(b) = 0.$$

Alors :

(a) ($\varepsilon 2$) définit un système dynamique positif sur $[a, b]$.

(b) Si a et b sont les seuls équilibres du système dynamique sur $[a, b]$, alors toutes les solutions initiées à l'intérieur de $[a, b]$ convergent vers l'une d'elles, c'est-à-dire convergent toutes vers a ou tous convergent vers b .

1.3 Taux de reproduction de base R_0

1.3.1 Définition

Le taux de reproduction de base R_0 représente le nombre moyen de cas secondaires générés par un individu infectieux durant sa période d'infection, lors de l'introduction dans une population entièrement susceptible [17].

1.3.2 Méthode pour calculer R_0

On présente brièvement la méthode développée par Van den Driessche et Watmough pour le calcul de R_0 [5] [17] :

Soit une épidémie modélisée par un système d'équations différentielles ordinaires, que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x); x_i(0) \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n; x = (x_1, \dots, x_n)^T. \quad (1.3)$$

Supposons qu'il existe n compartiments dans lesquels les m premiers compartiments sont celles des infectés.

Soit : X_s l'ensemble des états sans maladie, i.e,

$$X_s = \{x \geq 0 : x_i = 0; i = 1, \dots, m\}$$

tel que :

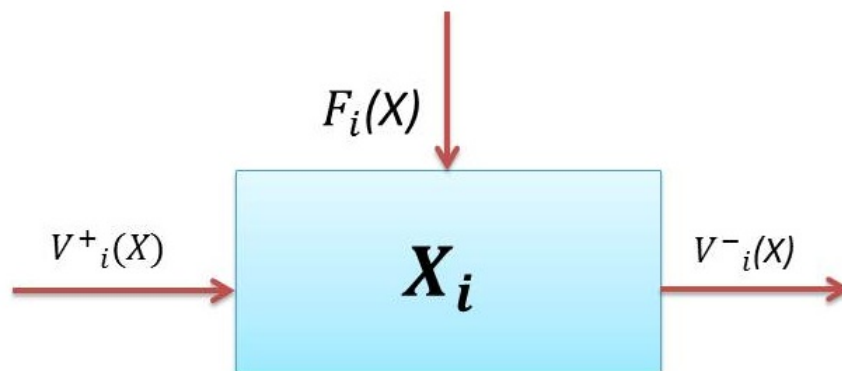


FIGURE 1.1 – le bilan de ce qui rentre et de ce qui sort d'un compartiment i .

$F_i(x)$: le taux d'apparition de nouveaux cas d'infections (de toute sorte horizontale¹ ou verticale²) dans le compartiment i .

1. transmission de la maladie d'un individu à un individu.
2. transmission de la maladie de la mère à son enfant.

$V_i^+(x)$: le taux de ce qui provient des autres compartiments au compartiment i , par toute autre cause (déplacement, guérison, vieillissement, etc ...).

$V_i^-(x)$: le taux de ce qui quitte le compartiment i , exemple par mortalité, par changement de statut épidémiologique, par mouvement etc ...

Chaque fonction est supposée être au moins deux fois différentiable par rapport à la variable x . Le système (1.3) peut se mettre sous la forme :

$$\dot{x}_i = F_i(x) - V_i(x) \quad (1.4)$$

avec $V_i(x) = V_i^-(x) - V_i^+(x)$.

Les fonctions F_i , V_i^+ et V_i^- sont supposées vérifier les hypothèses (H1)-(H5).

Comme chaque fonction représente un transfert direct des individus, elles sont tous positives. Alors,

(H1) Si $x \geq 0$ alors, F_i ; V_i^+ et $V_i^- > 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

Si un compartiment est vide, rien ne peut en sortir par mortalité, infection ou autre moyen.

(H2) Si $x_i = 0$ alors, $V_i^- = 0$. En particulier si $x \in X_s$ alors $V_i^- = 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

La condition suivante provient du simple fait que l'incidence de l'infection pour les compartiments des non infectés est nulles.

(H3) $F_i = 0$ pour $i > m$.

(H4) Si $x \in X_s$ alors, $F_i(x) = V_i^+(x) = 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

(H5) Si $F(x) = 0$ alors, toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ ont des parties réelles positives à un point $x_0 \in X_s$.

Sous les conditions précédentes, pour un $x_0 \in X_s$; les matrices F et V sont définies par le lemme suivant :

Lemme 1

Si x_0 est un équilibre sans maladie (DFE) du système (1.4) et $f_i(x)$ satisfais (H1)-(H5), alors, les dérivées de $DF(x_0)$ et $DV(x_0)$ sont données par :

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DV(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

où F et V sont deux matrices de taille $m \times m$ définies par :

$$F = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \quad V = \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x_0) \right]$$

F est positive et V est une M-matrice non singulière et toutes les valeurs propres de J_4 sont de partie réel positive.

La matrice FV^{-1} est appelée matrice de la prochaine génération.

Un élément (i, k) de F est interprété comme le nombre d'individus infectés dans le compartiment i engendré par un individu infecté initialement introduit dans le compartiment k .

Un élément (i, k) de V^{-1} est interprété comme le temps passé dans le compartiment i d'un individu infecté initialement introduit dans le compartiment k . Un élément (i, k) de FV^{-1} est interprété comme le nombre de nouvelles infections attendues dans le compartiment i produit par un individu infecté présenté originellement dans le compartiment k .

Alors, R_0 est défini comme le **rayon spectral** de la matrice de la prochaine génération i.e.

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

Chapitre 2

Modélisation mathématique de la population d'insectes naturels

2.1 Modèle compartimental de la population d'insectes :

Nous considérons un modèle mathématique basé sur des hypothèses biologiques pour décrire la dynamique d'une population d'insectes nuisibles, telles que [les mouches des fruits](#) ou les [mites](#) [14].

Ainsi, deux étapes de développement principales peuvent être envisagées :

le stade [immature](#), noté I , qui rassemble les œufs, les larves et les pupes et le stade [adulte](#) composé des [mâles](#) et [des femelles](#).

Nous divisons les femelles adultes en deux compartiments, [les femelles disponibles pour l'accouplement](#) notées Y , et [les femelles fécondées](#) notées F .

Une femelle du compartiment Y doit s'accoupler avec [un mâle](#) pour pouvoir passer dans le compartiment [des femelles fécondées](#) et être capable de déposer ses œufs.

Notons que [les femelles fécondées](#) peuvent à nouveau se reproduire c'est à dire l'accouplement multiple puisse se produire.

Nous ajoutons également un compartiment [mâle](#), noté M , pour étudier l'impact de [l'abondance des mâles](#) sur le taux de transfert de Y à F .

Notons par r la proportion de femelles émergeant du stade immature et entrant dans le compartiment Y des femelles.

Ainsi, une proportion de $(1 - r)$ d'immatures entre dans le compartiment M des mâles.

Notons par v_I le taux de [maturation](#) (taux de transfert de I à Y ou M).

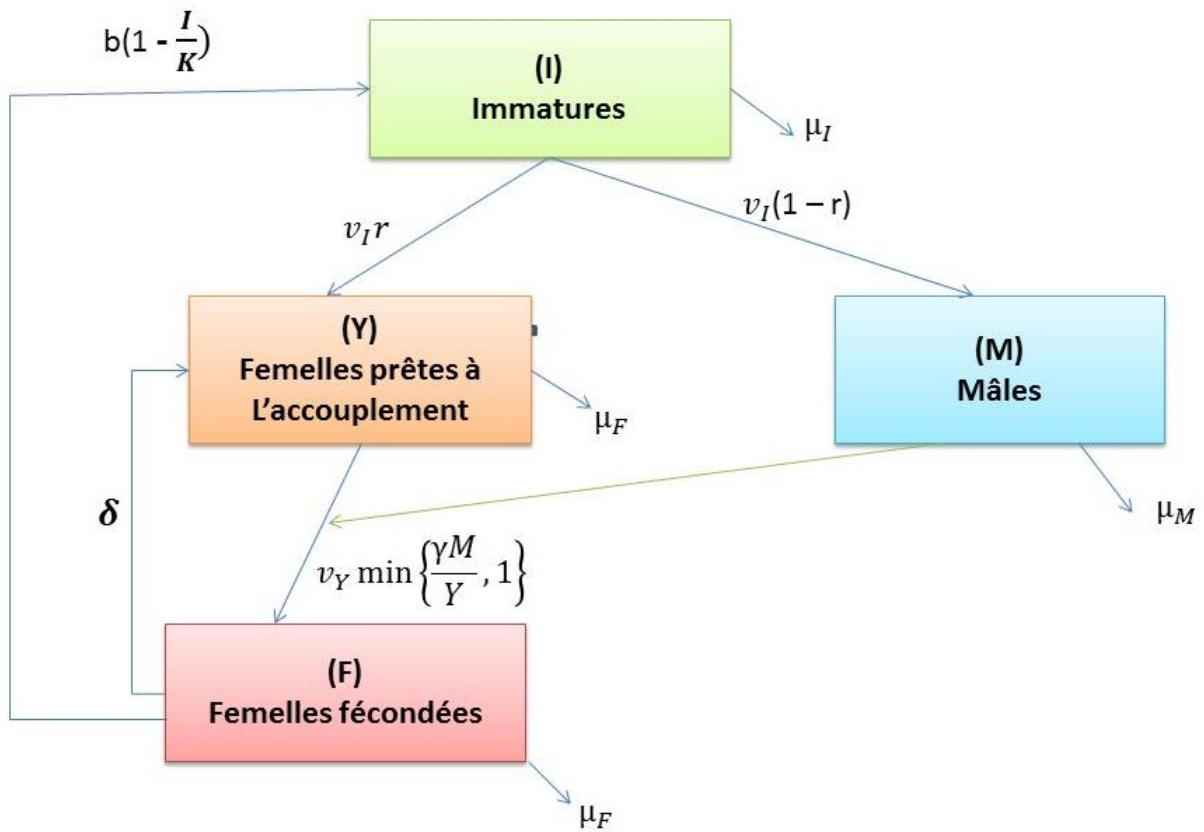


FIGURE 2.1 – Cycle de vie de l’insecte.

Ensuite, lorsque les mâles sont en abondance suffisante pour assurer la fécondation de toutes les femelles disponibles pour l’accouplement, le taux de transfert de Y à F est v_Y .

Cependant, si les mâles sont rares et si γ est le nombre de femelles qui peuvent être fécondées par un seul mâle, alors seulement une proportion $\frac{\gamma M}{Y}$ de Y femelles peut passer dans le compartiment F des femelles fécondées.

Par conséquent, le taux de transfert de Y à F est $v_Y \min(\frac{\gamma M}{Y}, 1)$.

De plus, les femelles fécondées retournent dans le compartiment des femelles prête à l’accouplement Y avec un taux de δ .

Habituellement, la femelle fécondée est responsable de causer des dommages directs à l’hôte lors de la ponte des œufs.

Par conséquent, le nombre de nouveaux nés produit par une femelle fécondée est $b(1 - \frac{I}{K})$, où b est le taux de fécondité, et K est la capacité limite des hôtes.

Enfin, les paramètres μ_I , μ_F et μ_M sont respectivement les taux de mortalité des immatures (compartiment I), des femelles (Y et F) et des mâles (M).

L’organigramme de la dynamique des insectes est représenté sur la Figure 2.1.

Le modèle est régi par le système d'ODE suivant :

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ \frac{dY}{dt} = rv_I I - v_Y \min\{\frac{\gamma M}{Y}, 1\}Y + \delta F - \mu_F Y \\ \frac{dF}{dt} = v_Y \min\{\frac{\gamma M}{Y}, 1\}Y - \delta F - \mu_F F \\ \frac{dM}{dt} = (1 - r)v_I I - \mu_M M \end{cases} \quad (2.1)$$

La liste des paramètres utilisés dans le modèle est résumée dans le tableau 2.1. Ils sont extraits de [16] pour effectuer des expériences numériques.

Table 1 : Liste des paramètres et des valeurs utilisées dans les simulations numériques :

Paramètres	Description	unit	valeur
b	Taux de fécondité	femelle ⁻¹ jour ⁻¹	9, 272
r	Rapport Femelle à mâle	-	0.57
K	Capacité limite des hôtes	-	1000
γ	Femelles fécondées par un seul mâle	-	4
μ_I	Taux de mortalité dans le compartiment I	jour ⁻¹	$\frac{1}{15}$
μ_F	Taux de mortalité dans les compartiment F et Y	jour ⁻¹	$\frac{1}{75.1}$
μ_M	Taux de mortalité dans le compartiment F	jour ⁻¹	$\frac{86.4}{1}$
v_I	Taux de maturation	jour ⁻¹	$\frac{1}{24.6}$
v_Y	Taux de transfert de Y à F	jour ⁻¹	0.5
δ	Taux de transfert de F à Y	jour ⁻¹	0.1

Plus précisément, le modèle (2.1) peut être écrit sous la forme :

$$\frac{dX}{dt} = f(X) := \begin{cases} f_1(X) & \text{si } Y \leq \gamma M \\ f_2(X) & \text{si } Y \geq \gamma M \end{cases} \quad (2.2)$$

où $X = (I, Y, F, M)^T \in \mathbb{R}_+^4$ et

$$f_1(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I + \delta F - (v_Y + \mu_F)Y \\ v_Y Y - (\delta + \mu_F)F \\ (1 - r)v_I I - \mu_M M \end{pmatrix}, \quad f_2(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I - v_Y \gamma M + \delta F - \mu_F Y \\ v_Y \gamma M - (\delta + \mu_F)F \\ (1 - r)v_I I - \mu_M M \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Soit le modèle (2.1) :

Nous distinguons deux régions :

- $Y < \gamma M$: une région d'**abondance mâle**.
- $Y > \gamma M$: une région de **pénurie masculine**.

avec les systèmes respectifs :

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X) \quad (2.4)$$

et

$$\frac{dX}{dt} = f_2(X) \quad (2.5)$$

Les deux systèmes (2.4) et (2.5) sont des systèmes différentielles ordinaires. Leurs propriétés peuvent être étudiées en utilisant des techniques standard pour de tels systèmes.

2.2 Analyse du modèle

L'analyse du modèle est réalisée en considérant (2.2) comme un système dynamique par morceaux sur \mathbb{R}_+^4 (voir la définition 1).

Ici, l'ensemble de discontinuité est donné par : $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}_+^4 : Y = \gamma M\}$.

Puisque nous avons $f_1(X) = f_2(X)$, alors, d'après les définitions 1 et 2, le système (2.2) représente un système dynamique par morceaux continu.

Pour ce type particulier de systèmes, l'existence et l'unicité des solutions découlent de la théorie standard des équations différentielles ordinaires.

Dans un premier temps, nous étudierons les systèmes (2.4) et (2.5) séparément, puis les résultats obtenus seront fusionnés en un théorème pour le système (2.1).

Selon la définition 3, dans notre contexte, un point $X = (I, Y, F, M)^T$ est appelé **un**

équilibre régulier du système (2.2) si :

$$f_1(X) = 0 \text{ et } Y < \gamma M \text{ ou } f_2(X) = 0 \text{ et } Y > \gamma M.$$

2.2.1 Cas 1 : Abondance des mâles ($Y < \gamma M$)

Dans ce cas, le modèle est défini par :

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X)$$

où $X = (I, Y, F, M)^T$ et

$$f_1(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I + \delta F - (v_Y + \mu_F)Y \\ v_Y Y - (\delta + \mu_F)F \\ (1 - r)v_I I - \mu_M M \end{pmatrix}.$$

Calcul de R_0 :

Dans ce travail, nous utiliserons R_0 uniquement comme paramètre de seuil, nous ne discuterons pas les détails sur les propriétés spécifiques du nombre.

La persistance d'une population est généralement liée à son nombre de reproduction de base.

Pour les modèles de population simples, le nombre de reproduction de base est défini comme le nombre de descendants produits par un seul individu au cours de sa vie, à condition qu'une ressource abondante soit disponible.

Pour le modèle (2.4), le taux de reproduction de base calculé par la méthode présentée dans le chapitre précédent est donné par :

$$R_0 = \frac{brv_I v_Y}{(\mu_I + v_I)((v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y)}.$$

La persistance ou l'extinction d'une population est généralement représentée dans un modèle par le concept de la stabilité asymptotique globale de l'équilibre endémique ou trivial (zéro), respectivement.

Le théorème suivant nous permet d'identifier les équilibres du modèle (2.4) ainsi que leurs stabilités :

Théorème 3 [14]

(a) Le système (2.4) définit un système dynamique positif sur \mathbb{R}_+^4 .

(b) Si $R_0 \leq 1$, alors, $TE = (0, 0, 0, 0)^T$ est un équilibre globalement asymptotiquement stable (G.A.S).

(c) Si $R_0 > 1$, alors, TE est un équilibre instable et le système admet un équilibre positif $EE^* = (I^*, Y^*, F^*, M^*)^T$, où,

$$I^* = \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)K.$$

$$Y^* = \frac{rv_I(\delta + \mu_F)}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)K.$$

$$F^* = \frac{rv_I v_Y}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)K.$$

$$M^* = \frac{(1-r)v_I}{\mu_M} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)K.$$

qui est globalement asymptotiquement stable (GAS) sur :

$$\mathbb{R}_+^4 \setminus \{X \in \mathbb{R}_+^4 : I = Y = F = M = 0\}.$$

Preuve

Il est facile de vérifier que le système (2.4) est coopératif sur $\Omega_K = \{X \in \mathbb{R}_+^4 : I \leq K\}$, car f_1 est quasi-monotone sur Ω_K (voir la définition 4).

Donc, pour démontrer (a) on va utiliser le théorème 1 :

Soit $q \in \mathbb{R}$, $q \geq K$, tel que :

$$y_q = \begin{pmatrix} K \\ \frac{rv_I(\delta + \mu_F)}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q \\ \frac{rv_I v_Y}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q \\ \frac{(1-r)v_I}{\mu_M} q \end{pmatrix}.$$

Nous avons $f_1(0_{\mathbb{R}_+^4}) = 0_{\mathbb{R}_+^4} \geq 0$ et

$$\begin{aligned}
f_1(y_q) &= \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I)K \\ rv_I K + \delta \frac{rv_I v_Y}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q - (v_Y + \mu_F) \frac{rv_I(\delta + \mu_F)}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q \\ v_Y rv_I \frac{(\delta + \mu_F)}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q - (\delta + \mu_F) \frac{rv_I v_Y}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q \\ (1-r)v_I K - \mu_M \frac{(1-r)v_I}{\mu_M} q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I)K \\ \frac{(K-q)rv_I(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta rv_I v_Y q}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} \\ 0 \\ (1-r)v_I(K-q) \end{pmatrix} \leq 0.
\end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème 1, le système (2.4) définit un système dynamique positif sur $[0, y_q]$, ainsi, le système (2.4) définit un système dynamique positif sur $\cup_{q \geq K} [0, y_q] = \Omega_K$, d'où (a).

Maintenant, pour démontrer les points (b) et (c), on doit déterminer les points d'équilibre du modèle.

les points d'équilibre :

les points d'équilibre sont obtenus en résolvant l'équation :

$$f_1(X) = 0 \text{ où } X = (I, Y, F, M)^T.$$

La résolution nous donne deux points d'équilibre :

$$TE = (0, 0, 0, 0)^T \text{ et } EE^* = (I^*, Y^*, F^*, M^*)^T \text{ où,}$$

$$I^* = \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)K.$$

$$Y^* = \frac{rv_I(\delta + \mu_F)}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)K.$$

$$F^* = \frac{rv_I v_Y}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)K.$$

$$M^* = \frac{(1-r)v_I}{\mu_M} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)K.$$

On observe que EE^* existe ssi $R_0 > 1$.

Donc, pour :

- $R_0 \leq 1$: TE est le seul point d'équilibre sur $[0, y_q]$ et il résulte du théorème 1 qu'il est G.A.S sur $[0, y_q]$.

Par conséquent, TE est G.A.S sur $\cup_{q \geq K} [0, y_q] = \Omega_K$ qui est un ensemble absorbant, alors, TE est G.A.S sur \mathbb{R}_+^4 , d'où (b).

- $R_0 > 1$: TE est instable car la linéarisation donne

$$J(TE) = \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I) & 0 & b & 0 \\ rv_I & -(v_Y + \mu_F) & \delta & 0 \\ 0 & v_Y & -(\delta + \mu_F) & 0 \\ (1-r)v_I & 0 & 0 & -\mu_M \end{pmatrix},$$

où,

$$\det J(TE) = -\mu_M b r v_I v_Y \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) < 0.$$

Donc, sur l'intervalle $[TE, EE^*]$:

le théorème 2 implique que toutes les solutions initiées à l'intérieur de l'intervalle $[TE, EE^*]$ sont attirées par EE^* (car TE est instable).

D'autre part, sur l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}_+^4 : X \geq EE^* \text{ et } I \leq K\}$:

en appliquant le théorème 1 sur l'intervalle $[EE^*, y_{q^*}]$, pour un y_{q^*} tel que $y_{q^*} > EE^*$ (en choisissant $q^* \gg K$).

On a déjà montré que : $f_1(y_q) \leq 0, \forall q \geq K$, donc, en particulier pour

$q = q^*$ on a bien $f_1(y_{q^*}) \leq 0$.

Par conséquent, EE^* est G.A.S sur $\cup [EE^*, y_{q^*}] = \{X \in \mathbb{R}_+^4 : X \geq EE^* \text{ et } I \leq K\}$.

En mettant les deux résultats précédents ensemble, nous obtenons que EE^* est

G.A.S sur Ω_K qui est un ensemble absorbant, alors, EE^* est G.A.S sur \mathbb{R}_+^4 , d'où (c).

2.2.2 Cas 2 : Pénurie masculine ($Y > \gamma M$)

Dans ce cas, le modèle est défini par :

$$\frac{dX}{dt} = f_2(X)$$

où $X = (T, Y, F, M)^T$ et

$$f_2(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I - v_Y \gamma M + \delta F - \mu_F Y \\ v_Y \gamma M - (\delta + \mu_F)F \\ (1 - r)v_I I - \mu_M M \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que la deuxième équation peut être découplée. Le système (2.5) peut être écrit sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = g(U) \tag{2.6}$$

$$\text{où } U = \begin{pmatrix} I \\ F \\ M \end{pmatrix} \text{ et } g(U) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ v_Y \gamma M - (\delta + \mu_F)F \\ (1 - r)v_I I - \mu_M M \end{pmatrix}.$$

Comme pour le premier cas, le taux de reproduction de base pour le système (2.6) est donné par :

$$\hat{R}_0 = \frac{b\gamma(1 - r)v_I v_Y}{(v_I + \mu_I)(\delta + \mu_F)\mu_M}.$$

Le théorème suivant décrit les propriétés du système (2.6).

Théorème 4 [14]

(a) Le système (2.6) définit un système dynamique positif sur \mathbb{R}_+^3 .

(b) Si $\hat{R}_0 \leq 1$, alors, $TE_3 = (0, 0, 0)^T$ est un équilibre G.A.S.

(c) Si $\hat{R}_0 > 1$, alors, TE_3 est un équilibre instable et le système admet un équilibre positif $EE_3 = (\hat{I}, \hat{F}, \hat{M})^T$,

où,

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right)K, \\ \hat{F} &= \frac{\gamma(1-r)v_I v_Y}{(\delta + \mu_F)\mu_M} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right)K, \\ \hat{M} &= \frac{(1-r)v_I}{\mu_M} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right)K.\end{aligned}$$

qui est G.A.S sur $\mathbb{R}_+^3 \setminus \{TE_3\}$.

Preuve

Il est facile de vérifier que le système (2.6) est coopératif sur $\hat{\Omega}_K = \{U \in \mathbb{R}_+^3 : I \leq K\}$, car $g(U)$ est quasi-monotone sur $\hat{\Omega}_K$ (voir la définition 4).

Donc, pour démontrer (a) on va utiliser le théorème 1 :

Soit $q \in \mathbb{R}$, $q \geq K$, tel que :

$$\hat{y}_q = \begin{pmatrix} K \\ \frac{\gamma(1-r)v_I v_Y}{(\delta + \mu_F)\mu_M} q \\ \frac{(1-r)v_I}{\mu_M} q \end{pmatrix}.$$

Nous avons $f_1(0_{\mathbb{R}_+^4}) = 0_{\mathbb{R}_+^4} \geq 0$ et

$$f_1(\hat{y}_q) = \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I)K \\ v_Y \gamma \frac{(1-r)v_I}{\mu_M} q - (\delta + \mu_F) \frac{\gamma(1-r)v_I v_Y}{(\delta + \mu_F)\mu_M} q \\ (1-r)v_I K - \mu_M \frac{(1-r)v_I}{\mu_M} q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I)K \\ 0 \\ (1-r)v_I(K - q) \end{pmatrix} \leq 0.$$

Alors, d'après le théorème 1, le modèle (2.6) définit un système dynamique positif sur $[0, \hat{y}_q]$, ainsi, le modèle (2.6) définit un système dynamique positif sur $\bigcup_{q \geq K} [0, \hat{y}_q] = \hat{\Omega}_K$, d'où (a).

Maintenant, pour démontrer les points (b) et (c), on doit déterminer les points d'équilibre du modèle.

les points d'équilibre :

les points d'équilibres sont obtenus en résolvant l'équation :

$$g(U) = 0 \text{ où, } U = (I, F, M)^T.$$

La résolution nous donne deux points d'équilibre :

$$TE_3 = (0, 0, 0)^T \text{ et } E\hat{E}_3 = (\hat{I}, \hat{F}, \hat{M})^T \text{ où}$$

$$\hat{I} = \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right)K.$$

$$\hat{F} = \frac{\gamma(1-r)v_I v_Y}{(\delta + \mu_F)\mu_M} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right)K.$$

$$\hat{M} = \frac{(1-r)v_I}{\mu_M} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right)K.$$

On observe que $E\hat{E}_3$ existe ssi $\hat{R}_0 > 1$.

Donc, pour :

- $\hat{R}_O \leq 1$: TE_3 est le seul point d'équilibre sur $[0, \hat{y}_q]$ et il résulte du théorème 1 qu'il est GAS sur $[0, \hat{y}_q]$.

Par conséquent, TE_3 est G.A.S sur $\cup_{q \geq K} [0, \hat{y}_q] = \hat{\Omega}_K$ qui est un ensemble absorbant, alors, TE_3 est G.A.S sur \mathbb{R}_+^3 , d'où (b).

- $\hat{R}_O > 1$: TE_3 est instable car la linéarisation donne :

$$J(TE_3) = \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I) & b & 0 \\ 0 & -(\delta + \mu_F) & \gamma v_Y \\ (1-r)v_I & 0 & -\mu_M \end{pmatrix}$$

où,

$$\det J(TE_3) = -b(1-r)\gamma v_I v_Y \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right) < 0.$$

Donc, sur l'intervalle $[TE_3, E\hat{E}_3]$:

le théorème 2 implique que toutes les solutions initiées à l'intérieur de l'intervalle $[TE_3, E\hat{E}_3]$ sont attirées par $E\hat{E}_3$.

D'autre part, sur l'ensemble $\{U \in \mathbb{R}_+^3 : U \geq E\hat{E}_3 \text{ et } I \leq K\}$:

en appliquant le théorème 1 sur l'intervalle $[E\hat{E}_3, \hat{y}_{q^*}]$ pour un \hat{y}_{q^*} tel que, $\hat{y}_{q^*} > E\hat{E}_3$ (en choisissant $q^* \gg K$).

On a déjà montré que : $g(\hat{y}_q) \leq 0, \forall q \geq K$, donc, en particulier pour

$q = q^*$ on a bien $g(\hat{y}_{q^*}) \leq 0$.

Par conséquent, $E\hat{E}_3$ est G.A.S sur $\cup [E\hat{E}_3, \hat{y}_{q^*}] = \{U \in \mathbb{R}_+^3 : U \geq E\hat{E}_3 \text{ et } I \leq K\}$.

En mettant les deux résultats précédentes ensemble, nous obtenons que $E\hat{E}_3$ est

G.A.S sur $\hat{\Omega}_K$ qui est un ensemble absorbant, alors, $E\hat{E}_3$ est G.A.S sur \mathbb{R}_+^3 , d'où (c).

Finalement, pour le système (2.5), les points d'équilibre sont les suivants :

$TE = (0, 0, 0, 0)^T$ et $E\hat{E} = (\hat{I}, \hat{Y}, \hat{F}, \hat{M})^T$ où ,

$$\hat{Y} = \frac{rv_I(\delta + \mu_F)\mu_M - v_Y\gamma(1-r)v_I\mu_F}{\mu_F(\delta + \mu_F)\mu_M} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right)K.$$

Remarque 1

La valeur de \hat{Y} peut être négative même si $\hat{R}_0 > 1$.

Par conséquent, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 1 [14]

(a) Le système (2.5) définit un système dynamique positif sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$.

(b) Si $\hat{R}_0 \leq 1$, alors, $TE = (0, 0, 0, 0)^T$ est un équilibre G.A.S.

(c) Si $\hat{R}_0 > 1$, alors, TE est un équilibre instable et $\hat{E}E = (\hat{I}, \hat{Y}, \hat{F}, \hat{M})$ est un équilibre G.A.S sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2 \setminus \{X \in \mathbb{R}_+^4 : I = Y = F = M = 0\}$.

2.3 Conclusion pour le modèle (2.1)

Dans la suite, nous supposons que la population admet un équilibre endémique (existence des insectes), sinon, aucun contrôle ne serait nécessaire. De plus, il est naturel de supposer qu'à l'équilibre, il y a **abondance des mâles** [14].

En termes de paramètres du modèle, ces hypothèses peuvent être écrites comme suit :

$$R_0 > 1 \tag{2.7}$$

$$Y^* < \gamma M^* \tag{2.8}$$

Sous ces deux hypothèses, nous avons $\hat{E}E > 0$ et $\hat{Y} < \gamma \hat{M}$.

En effet, lorsque $R_0 > 1$, l'inégalité

$$\frac{\hat{R}_0}{R_0} > 1 \Leftrightarrow \frac{b\gamma(1-r)v_I v_Y}{(v_I + \mu_I)(\delta + \mu_F)\mu_M} \frac{(\mu_I + v_I)(\delta + \mu_F - \delta v_Y)}{brv_I v_Y} \Leftrightarrow \gamma > \frac{r(\delta + \mu_F)\mu_M}{(1-r)((v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y)}.$$

D'autre part, en remplaçant Y^* et M^* par leurs valeurs dans la deuxième hypothèse, on obtient :

$$Y^* < \gamma M^* \Leftrightarrow \gamma > \frac{Y^*}{M^*} \Leftrightarrow \gamma > \frac{r(\delta + \mu_F)\mu_M}{(1-r)((v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y)}.$$

Donc, sous les hypothèses (2.7) et (2.8) nous avons : $\hat{R}_0 > 1$.

Or, dans ce cas, on a déjà démontré que le système (2.5) admet un équilibre non trivial $\hat{E}\hat{E}$ qui est G.A.S sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2 \setminus \{X \in \mathbb{R}_+^4 : I = F = M = 0\}$.

De plus,

$$\begin{aligned} \hat{Y} - \gamma\hat{M} &= \hat{I} \left(\frac{rv_I(\delta + \mu_F)\mu_M - v_Y\gamma(1-r)v_I\mu_F}{\mu_F(\delta + \mu_F)\mu_M} - \frac{\gamma(1-r)v_I}{\mu_M} \right) \\ &= \frac{v_I\hat{I}}{\mu_M} \left(\frac{r\mu_M}{\mu_F} - \gamma(1-r) \frac{v_Y\mu_F + \mu_F(\delta + \mu_F)}{\mu_F(\delta + \mu_F)} \right), \end{aligned}$$

avec l'hypothèse (2.8) ($\gamma > \frac{r(\delta + \mu_F)\mu_M}{(1-r)((v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y)}$)

$$\begin{aligned} \implies \hat{Y} - \gamma\hat{M} &< \frac{v_I\hat{I}}{\mu_M} \left(\frac{r\mu_M}{\mu_F} - \frac{r\mu_M}{\mu_F} \frac{v_Y\mu_F + \mu_F(\delta + \mu_F)}{(v_Y + \mu_F)((\delta + \mu_F) - \delta v_Y)} \right), \\ &< \frac{v_I\hat{I}}{\mu_M} \left(\frac{r\mu_M}{\mu_F} - \frac{r\mu_M}{\mu_F} \frac{v_Y\mu_F + \mu_F(\delta + \mu_F)}{v_Y\mu_F + \mu_F(\delta + \mu_F) - \delta v_Y\mu_F - \delta v_Y} \right). \end{aligned}$$

Or, $\frac{v_Y\mu_F + \mu_F(\delta + \mu_F)}{v_Y\mu_F + \mu_F(\delta + \mu_F) - \delta v_Y\mu_F - \delta v_Y} > 1$.

$$\implies \hat{Y} - \gamma\hat{M} < \frac{v_I\hat{I}}{\mu_M} \left(\frac{r\mu_M}{\mu_F} - \frac{r\mu_M}{\mu_F} \right) = 0.$$

Donc, $\hat{Y} < \gamma\hat{M}$.

En résumé, sous les hypothèses (2.7) et (2.8), les équilibres globalement asymptotiquement stables EE^* et $\hat{E}\hat{E}$ des systèmes (2.4) et (2.5) sont respectivement dans la région d'abondance mâle définie par $Y < \gamma M$.

Par conséquent, EE^* est un équilibre **régulier** du modèle (2.1), alors que $\hat{E}\hat{E}$ est un équilibre virtuel.

De plus, nous avons le théorème suivant :

Théorème 5 [14]

Étant donné les hypothèses (2.7) et (2.8), le modèle (2.1) définit un système dynamique positif sur \mathbb{R}_+^4 et il admet deux équilibres dans ce domaine :

- (a) TE , qui est instable, et
- (b) EE^* , qui est G.A.S sur $\mathbb{R}_+^4 \setminus (0, 0, 0, 0)^T$.

Preuve

Le fait que (2.4) et (2.5) définissent des systèmes dynamiques positifs sur \mathbb{R}_+^4 , alors, le modèle (2.1) définit un système dynamique positif sur \mathbb{R}_+^4 .

En plus, sous les hypothèses (2.7) et (2.8), nous avons $R_0 > 1$ et $\hat{R}_0 > 1$ et dans ces deux cas, nous avons déjà démontré que $TE = (0, 0, 0, 0)^T$ est un équilibre instable pour les systèmes (2.4) et (2.5) respectivement, ainsi, TE est un équilibre instable pour le système (2.1), d'où (a).

D'autre part, d'après la discussion qui précède le théorème 5, il résulte que l'équilibre EE^* attire des solutions qui sont entièrement dans la région d'abondance mâle (c'est un équilibre G.A.S pour le cas d'abondance mâles).

Les solutions dans la région de pénurie masculine sont attirées par $\hat{E}\hat{E} = (\hat{I}, \hat{Y}, \hat{F}, \hat{M})^T$ qui se trouve dans la région d'abondance mâle. Par conséquent, elles quittent la région de pénurie masculine et elles entrent dans la région d'abondance mâle, et dans ce cas, elles sont régies par le système (2.4) et par conséquent, elles sont attirées par EE^* .

En général, ce raisonnement n'exclut pas la possibilité qu'une solution puisse quitter la région d'abondance mâle, entrer dans la région de pénurie masculine puis la quitter.

Par conséquent, nous allons prouver que EE^* est G.A.S pour le système (2.1) en utilisant une approche différente.

Nous considérons le système (2.1) sous la transformation :

$$(I, Y, F, M)^T \longrightarrow (I, W, F, M)^T \text{ où, } W = F + Y.$$

Nous obtenons le nouveau système :

$$\dot{V} = G(V) \tag{2.9}$$

où, $V = (I, W, F, M)^T$ et

$$G = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I - \mu_F W \\ v_Y \min\{\gamma M, W - F\} - (\delta + \mu_F)F \\ (1 - r)v_I I - \mu_M M \end{pmatrix}.$$

les points d'équilibre :

Puisque le système (2.9) est obtenu à partir du système (2.1) par transformation linéaire,

le système (2.9) définit un système dynamique positif sur $\hat{\Omega}$ tel que :

$$\hat{\Omega} = \{(I, W, F, M)^T \in \mathbb{R}_+^4 : W \geq F\},$$

avec les équilibres : $TE = (0, 0, 0, 0)^T$ et $EE^* = (I^*, W^*, F^*, M^*)$, où $W^* = Y^* + M^*$.

Stabilité de EE^* :

Le système (2.9) est un système coopératif car le second membre est quasi-monotone

sur le domaine $\hat{\Omega}$ considéré.

Alors, la stabilité globale de EE^* est obtenue en utilisant le théorème 1 avec le point y_q^* qui est l'image de y_q sous la transformation considérée.

Soit $q \gg K$; $q \in \mathbb{R}^+$, tel que, $y_q^* > EE^*$,

$$y_q^* = \begin{pmatrix} K \\ \frac{rv_I(v_Y + (\delta + \mu_F))}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q \\ \frac{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y}{(1 - r)v_I} q \\ \frac{(1 - r)v_I}{\mu_M} q \end{pmatrix}.$$

Nous avons $G(0_{\mathbb{R}_+^4}) = 0_{\mathbb{R}_+^4}$ et

$$G(y_q^*) = \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I)K \\ rv_I K - \mu_F \frac{rv_I(v_Y + (\delta + \mu_F))}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q \\ v_Y \min\left\{ \frac{\gamma(1-r)v_I}{\mu_M} q, \frac{rv_I(\delta + \mu_F)}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q \right\} - \frac{(\delta + \mu_F)rv_I v_Y}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q \\ (1-r)v_I K - \mu_M \frac{(1-r)v_I}{\mu_M} q \end{pmatrix}.$$

Cherchons le minimum :

D'après l'hypothèse (2.8), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(1-r)v_I}{\mu_M} q - \frac{rv_I(\delta + \mu_F)}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q &> \frac{r(\delta + \mu_F)v_I}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q - \frac{rv_I(\delta + \mu_F)}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, le } \min = \frac{rv_I(\delta + \mu_F)}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } G(y_q^*) &= \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I)K \\ rv_I K - \mu_F \frac{rv_I(v_Y + (\delta + \mu_F))}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q \\ \frac{v_Y rv_I(\delta + \mu_F)}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q - \frac{(\delta + \mu_F)rv_I v_Y}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} q \\ (1-r)v_I K - \mu_M \frac{(1-r)v_I}{\mu_M} q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I)K \\ rv_I(K - q) \\ 0 \\ (1-r)v_I(K - q) \end{pmatrix} \leq 0. \end{aligned}$$

Sur $[EE^*, y_q^*]$, EE^* est le seul point d'équilibre et puisque $G(y_q^*) \leq 0$, alors, le théorème 1 implique que EE^* est G.A.S sur $[EE^*, y_q^*]$, par conséquent, il est G.A.S sur $\bigcup_{q>K} [EE^*, y_q^*] = \{V \in \mathbb{R}_+^4 : V > EE^* \text{ et } I \leq K\}$.

D'autre part, sur $[TE, EE^*]$ TE est instable ($R_0 > 1$), et le théorème 2 implique que toutes les solutions initiées dans $[TE, EE^*]$ sont attirées par EE^* .

Ainsi, EE^* est G.A.S sur $\hat{\Omega}$ qui est un ensemble absorbant, alors, EE^* est G.A.S sur \mathbb{R}_+^4 , d'où (b).

Chapitre 3

Modélisation de la perturbation de l'accouplement et du piégeage

Afin de maintenir la population de **ravageurs** à un niveau bas, nous considérons un contrôle utilisant des **pièges à phéromones femelles** pour perturber le comportement d'accouplement des mâles.

Plus précisément, nous prenons en compte deux aspects du contrôle : le premier aspect consiste à perturber l'accouplement entre mâles et femelles afin de réduire les possibilités de **fertilisation**, ce qui à son tour réduit le nombre de **reproduction de base**.

Ceci est fait en utilisant des **pièges** qui libèrent un **leurre de phéromone femelle** auquel les mâles sont attirés.

Cela conduit à une réduction du nombre de mâles disponibles pour l'accouplement près des femelles, et réduit les possibilités de **fertilisation**.

L'efficacité de la confusion sexuelle dépend de la **force du leurre** ou du **nombre de pièges** dans une zone.

Le deuxième aspect consiste à supposer que les pièges à leurre contiennent également un **insecticide** qui peut tuer les insectes capturés [14].

3.1 Modèle de la population d'insectes contrôlée

Pour prendre en compte l'effet des **leures**, nous considérons l'approche proposée par **Barclay et Van den Driessche** [6], **Barclay et Hendrichs** [7].

C'est-à-dire que la force du leurre est représentée par la quantité de **phéromones** libérées par un nombre équivalent de femelles sauvages.

Ainsi, dans le modèle, l'effet du **leurre** correspond à l'attraction de Y_P femelles supplémentaires.

Dans un tel contexte, le nombre total de «**femelles**» attirant les mâles est $Y + Y_P$ [6].

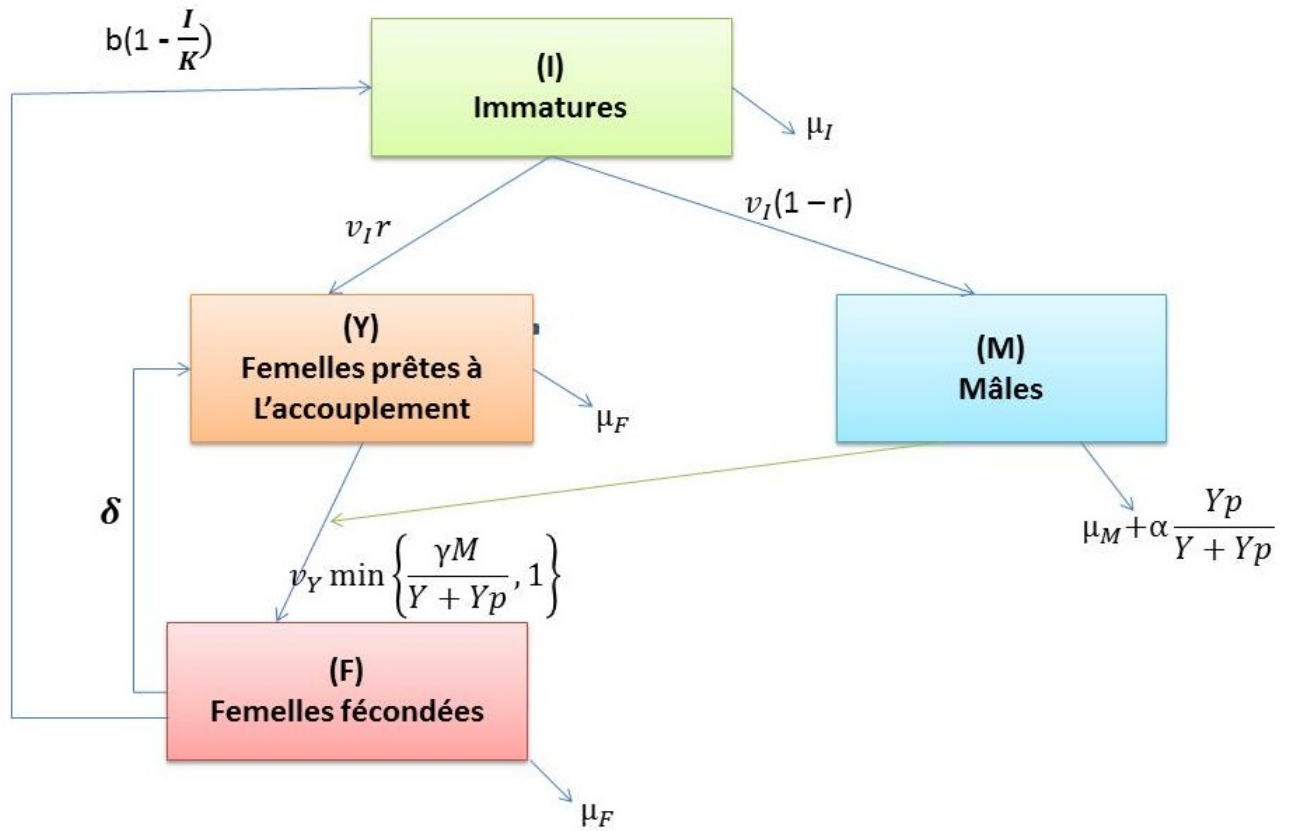


FIGURE 3.1 – Modèle de contrôle utilisant la perturbation de l'accouplement et le piégeage.

En particulier, cela signifie que les mâles ont une probabilité de $\frac{Y}{Y + Y_p}$ d'être attirés par les **femelles sauvages** (naturelles), et une probabilité de $\frac{Y_p}{Y + Y_p}$ d'être attirés aux **pièges à phéromones**.

Soit γ le nombre de femelles pouvant être **inséminées** par un seul mâle.

Ainsi, le taux de transfert de Y à F ne dépasse pas $v_Y \frac{\gamma M}{Y + Y_p}$.

Lorsque $v_Y \frac{\gamma M}{Y + Y_p} > 1$, la population est dans un état d'**abondance mâle** et le taux de transfert est v_Y .

Cependant, lorsque $\frac{\gamma M}{Y + Y_p} < 1$, la population est dans un état de **pénurie masculine** et le taux de transfert est $v_Y \frac{\gamma M}{Y + Y_p}$.

Au total, le taux de transfert est $v_Y \min\left\{\frac{\gamma M}{Y + Y_p}, 1\right\}$.

Le paramètre α représente le taux de **mortalité** des mâles attirés par les **phéromones** (les pièges) autrement dit, par la fraction $\frac{Y_p}{Y + Y_p}$ [14].

L'organigramme est représenté sur la Figure 3.1 qui donne le système d'ODE suivant :

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ \frac{dY}{dt} = rv_I I - v_Y \min\{\frac{\gamma M}{Y + Y_p}, 1\}Y + \delta F - \mu_F Y \\ \frac{dF}{dt} = v_Y \min\{\frac{\gamma M}{Y + Y_p}, 1\}Y - (\delta + \mu_F)F \\ \frac{dM}{dt} = (1 - r)v_I I - (\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y + Y_p})M \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2 Analyse du modèle

Soit le modèle (3.1) :

nous nous référons à la région définie par :

- $Y + Y_p < \gamma M$: une région d'**abondance mâle**.
- $Y + Y_p > \gamma M$: une région de **pénurie masculine**.

Avec les systèmes respectifs :

$$\frac{dX}{dt} = g_1(X) \quad (3.2)$$

et

$$\frac{dX}{dt} = g_2(X) \quad (3.3)$$

où, $X = (I, Y, F, M)^T \in \mathbb{R}_+^4$ et

$$g_1(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I + \delta F - (\mu_F + v_Y)Y \\ v_Y Y - (\delta + \mu_F)F \\ (1 - r)v_I I - (\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y + Y_p})M \end{pmatrix}, \quad g_2(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I + \delta F - v_Y \frac{\gamma M Y}{Y + Y_p} - \mu_F Y \\ v_Y \frac{\gamma M Y}{Y + Y_p} - (\delta + \mu_F)F \\ (1 - r)v_I I - (\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y + Y_p})M \end{pmatrix}.$$

Les deux systèmes (3.2) et (3.3) sont des systèmes différentiels ordinaires. Leurs propriétés peuvent être étudiées en utilisant des techniques standard pour de tels systèmes.

L'analyse théorique du modèle est réalisée en considérant (3.1) comme un système dynamique par morceaux sur \mathbb{R}_+^4 (voir la définition 1).

Ici, l'ensemble de discontinuité est donné par :

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{R}_+^4 : Y + Y_p = \gamma M\}.$$

Puisque nous avons $g_1(X) = g_2(X)$, alors, d'après les définitions 1 et 2, le modèle (3.1) représente un système dynamique continu par morceaux.

Pour ce type particulier de systèmes, l'existence locale et l'unicité des solutions découlent de la théorie standard des équations différentielles ordinaires.

Dans un premier temps, nous étudierons les systèmes (3.2) et (3.3) séparément, puis nous tirons des conclusions pour le système (3.1).

Selon la définition 3, dans notre contexte, un point $X = (I, Y, F, M)^T$ est appelé **un équilibre régulier** du système (3.1) si :

$$g_1(X) = 0 \text{ et } Y + Y_p < \gamma M \text{ ou } g_2(X) = 0 \text{ et } Y + Y_p > \gamma M.$$

3.2.1 Cas 1 : Abondance des mâles ($Y + Y_p < \gamma M$)

Dans ce cas, le modèle est défini par :

$$\frac{dX}{dt} = g_1(X)$$

où, $X = (I, Y, F, M)^T$ et

$$g_1(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I - v_Y Y + \delta F - \mu_F Y \\ v_Y Y - (\delta + \mu_F)F \\ (1 - r)v_I I - (\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y + Y_p})M \end{pmatrix}.$$

On remarque que les 3 premières équations du système (3.2) sont les mêmes que dans le système (2.4), tandis que la quatrième équation peut être découplée, donc, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 6 [14]

(a) Le système (3.2) définit un système dynamique positif sur \mathbb{R}_+^4 .

(b) Sous les hypothèses (2.7) et (2.8), le système admet deux équilibres, TE qui est instable et $EE^{**} = (I^*, Y^*, F^*, M^{**})^T$, où

$$M^{**}(Y_p) = \frac{(1 - r)v_I(Y^* + Y_p)}{\mu_M(Y^* + Y_p) + \alpha Y_p} I^* = \frac{M^*}{1 + \frac{\alpha Y_p}{\mu_M(Y^* + Y_p)}}$$

qui est globalement asymptotiquement stable (G.A.S) sur :

$$\mathbb{R}_+^4 \setminus \{X \in \mathbb{R}_+^4 : I = Y = F = M = 0\}.$$

L'équilibre EE^{**} est un équilibre régulier pour le système (3.1) si et seulement si :

$$\begin{aligned} Y^* + Y_p < \gamma M^{**} &\iff Y^* + Y_p - \gamma M^{**} < 0 \\ &\iff Y^* + Y_p - \frac{\gamma M^*}{1 + \frac{\alpha Y_p}{\mu_M(Y^* + Y_p)}} < 0. \end{aligned}$$

Or,

$$Y^* + Y_p - \frac{\gamma M^*}{1 + \frac{\alpha Y_p}{\mu_M(Y^* + Y_p)}} < \frac{Y^*}{1 + \frac{\alpha}{\mu_M}} + Y_p - \frac{\gamma M^*}{1 + \frac{\alpha}{\mu_M}} = Y_p + \frac{Y^* - \gamma M^*}{1 + \frac{\alpha}{\mu_M}} < 0$$

si et seulement si,

$$Y_p < \frac{\gamma M^* - Y^*}{1 + \frac{\alpha}{\mu_M}} = \frac{1}{\mu_M + \alpha} \left(\gamma(1-r)v_I - \frac{rv_I(\delta + \mu_F)\mu_M}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} \right) \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) K.$$

$$\text{Soit } Y^* p = \frac{1}{\mu_M + \alpha} \left(\gamma(1-r)v_I - \frac{rv_I(\delta + \mu_F)\mu_M}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} \right) \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) K.$$

Donc,

- Si $Y_p < Y_p^*$: EE^{**} est un équilibre régulier pour le système (3.1).
- Si $Y_p > Y_p^*$: EE^{**} est un équilibre virtuel pour le système (3.1).

Alors,

pour $Y_p < Y_p^*$, le contrôle n'a essentiellement aucun effet sur la population des insectes (EE^{**} est G.A.S).

Plus précisément, l'effet se limite à réduire le nombre de mâles, alors que tous les autres compartiments restent dans leur équilibre naturel.

3.2.2 Cas 2 : Pénurie masculine ($Y + Y_p > \gamma M$)

Dans ce cas, le modèle est défini par :

$$\frac{dX}{dt} = g_2(X)$$

où, $X = (I, Y, F, M)^T$ et

$$g_2(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I - v_Y \frac{\gamma MY}{Y + Y_p} + \delta F - \mu_F Y \\ v_Y \frac{\gamma MY}{Y + Y_p} - (\delta F + \mu_F)F \\ (1 - r)v_I I - (\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y + Y_p})M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ g_{23} \\ g_{24} \end{pmatrix}.$$

Le théorème suivant nous permet d'identifier les points d'équilibre du modèle pour différentes valeurs de Y_p qui peut être interprétée comme **l'effort du contrôle** :

Théorème 7 [14]

(a) Le système (3.3) définit un système dynamique positif sur \mathbb{R}_+^4 .

(b) $TE = (0, 0, 0, 0)^T$ est un équilibre asymptotiquement stable de ce système pour tout $Y_p > 0$.

(c) Il existe une valeur de seuil de Y_p tel que :

- si $Y_p > Y_p^{**}$, le seul équilibre du système sur \mathbb{R}_+^4 est TE .
- si $0 < Y_p < Y_p^{**}$, le système admet trois équilibres sur \mathbb{R}_+^4 , TE et deux autres équilibres positifs.

Preuve

Pour démontrer que (3.3) définit un système dynamique positif, on ne peut pas utiliser le théorème 2 car le second membre du système n'est pas quasi-monotone.

Donc, on utilise le fait que \mathbb{R}_+^4 est positivement invariant pour le système, i.e, le champ est rentrant.

En effet, puisque :

$$g_{21}(I = 0, Y \geq 0, F \geq 0, M \geq 0) = bF \geq 0 \implies I \geq 0.$$

$$g_{22}(I \geq 0, Y = 0, F \geq 0, M \geq 0) = rv_I I + \delta F \geq 0 \implies Y \geq 0.$$

$$g_{23} = (I \geq 0, Y \geq 0, F = 0, M \geq 0) = v_Y \frac{\gamma M Y}{Y + Y_p} \geq 0 \implies F \geq 0.$$

$$g_{22}(I \geq 0, Y \geq 0, F \geq 0, M = 0) = (1 - r)v_I I \geq 0 \implies M \geq 0.$$

Donc, \mathbb{R}_+^4 est positivement invariant pour le système, d'où (a).

Maintenant, pour montrer que $TE = (0, 0, 0, 0)^T$ est asymptotiquement stable pour ce système, on utilise la linéarisation :

$$J(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I) & 0 & b & 0 \\ rv_I & -\mu_F & \delta & 0 \\ 0 & 0 & -(\delta + \mu_F) & 0 \\ (1 - r)v_I & 0 & 0 & -(\mu_M + \alpha) \end{pmatrix},$$

avec,

$$\text{Det}J(0, 0, 0, 0) = \mu_F(v_I + \mu_I)(\delta + \mu_F)(\mu_M + \alpha) > 0$$

et

$$\text{Tr}J(0, 0, 0, 0) = -\mu_F - (v_I + \mu_I) - (\delta + \mu_F)(\mu_M + \alpha) < 0,$$

alors, TE est asymptotiquement stable pour ce système, d'où (b).

Pour démontrer le point (c), il faut chercher les équilibres du modèle (3.3).

Les points d'équilibre :

$$\dot{X} = 0 \iff \begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{Y} = 0 \\ \dot{F} = 0 \\ \dot{M} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Mais, } \dot{I} = 0 \iff F = \frac{v_I + \mu_I}{b(1 - \frac{I}{K})} I \geq 0,$$

$$\dot{M} = 0 \iff M = \frac{(1 - r)v_I}{\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y + Y_p}} I \geq 0,$$

$$\text{En plus, } \begin{cases} \dot{Y} = 0 \\ \dot{F} = 0 \end{cases} \implies \dot{Y} + \dot{F} = 0.$$

$$\implies Y = \frac{rv_I I - \mu_F}{\mu_F F} = \left(\frac{rv_I}{\mu_F} - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{\mu_F b(1 - \frac{I}{K})} \right) I \iff Y = \frac{rv_I b(1 - \frac{I}{K}) - \mu_F(v_I + \mu_I)}{\mu_F b(1 - \frac{I}{K})} I.$$

Notons

$$\phi(I) = rv_I b(1 - \frac{I}{K}) - \mu_F(v_I + \mu_I),$$

nous avons

$$Y = \frac{\phi(I)}{\mu_F b(1 - \frac{I}{K})}.$$

Puis, en remplaçant l'expression de Y , F et M dans l'équation $\dot{F} = 0$, on obtient l'équation en I suivante :

$$\psi(I) := I\xi(I)\phi(I) = \eta(Y_p, I). \quad (3.4)$$

où,

$$\xi(I) = v_Y \gamma(1 - r)v_I b(1 - \frac{I}{K}) - (\delta + \mu_F)(v_I + \mu_I)\mu_M.$$

$$\eta(Y_p, I) = \mu_F(\delta + \mu_F)(v_I + \mu_I)(\mu_M + \alpha)b(1 - \frac{I}{K})Y_p.$$

Donc, les équilibres non triviaux du système (3.3) sont de la forme :

$$Y_{MD} = \left(\frac{rv_I}{\mu_F} - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{\mu_F b(1 - \frac{I_{MD}}{K})} \right) I_{MD}.$$

$$F_{MD} = \frac{v_I + \mu_I}{b(1 - \frac{I_{MD}}{K})} I_{MD}.$$

$$M_{MD} = \frac{(1 - r)v_I}{\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y_{MD} + Y_p}} I_{MD}.$$

Avec, I_{MD} une racine positive de l'équation (3.4).

En outre, pour assurer que $Y_{MD} > 0$ il faut que :

$$rv_I b(1 - \frac{I}{K}) - \mu_F(v_I + \mu_I) > 0 \iff I_{MD} < K(1 - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{rv_I b}).$$

Ainsi, pour obtenir des équilibres biologiquement viables, il faut que :

$$I_{MD} \in [0, K(1 - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{rv_I b})].$$

Notons que les racines de l'équation (3.4) sont les abscisses des points d'intersection entre le graphe de ψ et la droite η .

En effet, il est clair que :

$\eta(Y_p, K) = 0$, donc, la droite $\eta(Y_p, I)$ intersecte l'axe des I pour $I = K$.

D'autre part,

$$\psi(I) = 0 \iff I = 0 \text{ ou } \xi(I) = 0 \text{ ou } \phi(I) = 0.$$

$$\iff I_0 = 0 \text{ ou } I_1 = K(1 - \frac{(\delta + \mu_F)(v_I + \mu_I)\mu_M}{v_Y \gamma(1-r)v_I b}) \text{ ou } I_2 = K(1 - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{rv_I b}).$$

Notons aussi que I_1 et I_2 doivent être positives et plus petite que K , i.e, $0 < I_1, I_2 < K$ à condition :

$$\frac{(\delta + \mu_F)(v_I + \mu_I)\mu_M}{v_Y \gamma(1-r)v_I b} < 1 \quad (3.5)$$

et

$$\frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{rv_I b} < 1, \quad (3.6)$$

qui sont assurés par les hypothèses (2.7) et (2.8).

En effet, l'hypothèse (3.6) est équivalente à $R_0 > 1$ car

$$R_0 > 1 \iff \frac{brv_I v_Y}{(\mu_I + v_I)((v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y)} > 1$$

$$\iff brv_I v_Y > (\mu_I + v_I)(v_Y \mu_F + \delta \mu_F + \mu_F^2)$$

$$> (v_I + \mu_I)v_Y \mu_F$$

$$\iff \frac{(v_I + \mu_I)\mu_F}{brv_I} < 1.$$

Et pour l'hypothèse (3.5), nous avons :

$$(2.8) \iff \gamma > \frac{r(\delta + \mu_F)\mu_M}{(1-r)((v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y)},$$

avec,

$$(2.8) \iff R_0 > 1 \iff \frac{1}{(v_Y + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_Y} > \frac{\mu_I + v_I}{brv_I v_Y}.$$

Alors,

$$\gamma > \frac{(\delta + \mu_F)(v_I + \mu_I)\mu_M}{bv_I v_Y(1-r)} \iff \frac{(\delta + \mu_F)(v_I + \mu_I)\mu_M}{\gamma bv_I v_Y(1-r)} < 1 \iff \text{l'hypothèse (3.5)}.$$

Donc, sous les hypothèses (2.7) et (2.8), nous avons $I_1, I_2 \in [0, K]$.

Notons aussi que η est décroissante par rapport à I , croissante par rapport à Y_p .

Le graphe du polynôme cubique ψ et de la droite η est indiqué sur la Figure 3.2.

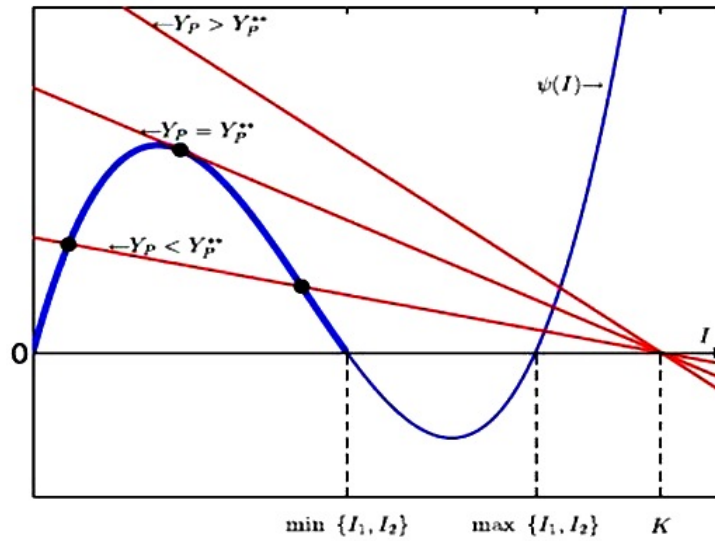


FIGURE 3.2 – Les intersections entre les graphes de $\eta(Y_p, \cdot)$ (en rouge) et ψ (en bleu) pour différentes valeurs de Y_p . Les points noirs représentent les points d'intersection sur l'intervalle $[0, \min\{I_1, I_2\}]$ [14].

Remarque 2

On a déjà montré que pour avoir des équilibre biologiquement viables (positifs), il faut

que $I_{MD} < K(1 - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{brv_I})$, donc seuls les points d'intersection de la droite η avec le

graphe de ψ pour $I \in [0, \min\{I_1, I_2\}]$ sont convenables pour les équilibres du modèle.

En effet, supposons par absurde que $I \in [\max\{I_1, I_2\}, K]$:

- cas 1 : $I_2 > I_1 \iff \max\{I_1, I_2\} = I_2 = K(1 - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{brv_I})$.

Or, par hypothèse $I_{MD} > I_2 = K(1 - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{brv_I})$, contradiction avec

$$I_{MD} < K(1 - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{brv_I}).$$

- cas 2 : $I_1 > I_2 \iff \max\{I_1, I_2\} = I_1$.

Or, par hypothèse $I_{MD} > I_1$, avec, $I_1 > I_2 \implies I_{MD} > I_2 = K(1 - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{brv_I})$,

contradiction avec $I_{MD} < K(1 - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{brv_I})$.

Notons par Y_p^{**} la valeur de Y_p telle que la droite η est **tangente** au graphe de ψ , voir la Figure 3.2.

Alors, il est clair que pour :

- $Y_p > Y_p^{**}$ il n'y a pas de points d'intersection entre η et ψ sur l'intervalle $[0, \min\{I_1, I_2\}]$,

par conséquent, le seul équilibre du modèle est $TE = (0, 0, 0, 0)^T$.

- $0 < Y_p < Y_p^{**}$ il y a deux points d'intersection, par conséquent, le système admet

trois équilibres, TE et deux autres équilibres

positifs, d'où (c).

3.3 Conclusion pour le modèle

Soit $I_{MD}^{(1)}$ et $I_{MD}^{(2)}$ solutions de l'équation (3.4) tel que :

$$I_{MD}^{(1)} < I_{MD}^{(2)} \text{ (quand } 0 < Y_p < Y_p^{**}\text{)}.$$

Notons par $EE_{MD}^{(1)}$ et $EE_{MD}^{(2)}$ les équilibres du modèle respectivement pour $I_{MD}^{(1)}$ et $I_{MD}^{(2)}$.

Nous avons déjà montré que pour :

- $Y_p < Y_p^*$, EE^{**} était un équilibre **régulier** pour le modèle (3.1).
- $Y_p > Y_p^*$, EE^{**} était un équilibre **virtuel** pour le modèle (3.1).

Mais, pour $Y_p = Y_p^*$, nous avons $EE^{**} \in \Sigma(Y_p) = \{X \in \mathbb{R}_+^4; Y_p + Y = \gamma M\}$, avec $\Sigma(Y_p)$

est l'ensemble de discontinuité pour le système (3.1).

Donc, EE^{**} est un équilibre **frontalier** du modèle (3.1), et puisque le second membre du système (3.1) est continu, alors, pour :

- $Y_p = Y_p^*$, EE^{**} est un équilibre du modèle (3.3) (cas de pénurie masculine), par conséquent, $EE^{**} = EE_{MD}^{(2)}$ (voir la Figure 3.3).

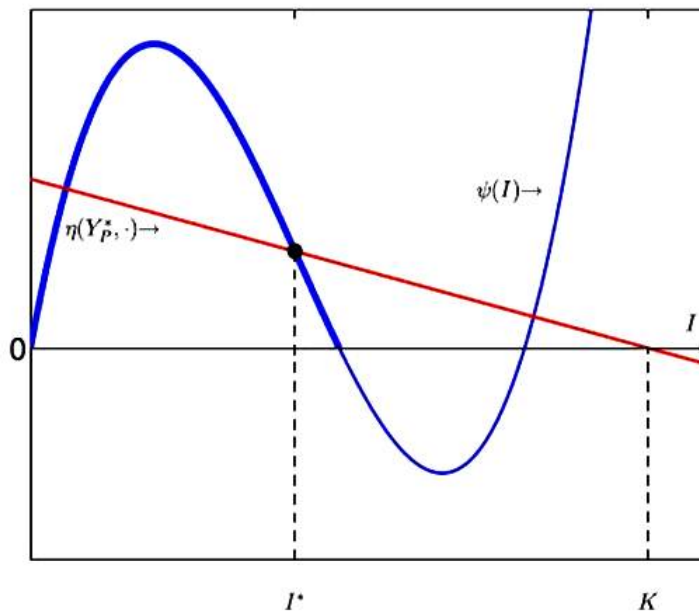


FIGURE 3.3 – Les intersections entre les graphes de $\eta(Y_p^*, \cdot)$ (en rouge) et ψ (en bleu). Le point noir représente l'intersection pour $I = I^*$ [14].

On peut voir sur la Figure 3.3 que pour :

- $0 < Y_p < Y_p^*$, nous avons $I_{MD}^{(1)} < I^* < I_{MD}^{(2)}$.
- $Y_p^* < Y_p < Y_p^{**}$, nous avons $I_{MD}^{(1)} < I_{MD}^{(2)} < I^*$.

Maintenant, l'étude se fait quand les équilibres du modèle (3.2) sont **des équilibres réguliers** du modèle (3.1), i.e, les équilibres appartiennent à **la région de pénurie masculine** ($Y_p + Y_{MD} > \gamma M_{MD}$).

En effet,

$$\begin{aligned} Y_{MD} + Y_p - \gamma M_{MD} &= \left(\frac{rv_I}{\mu_F} - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{\mu_F b \left(1 - \frac{I_{MD}}{K}\right)} \right) I_{MD} + Y_p - \gamma \frac{(1-r)v_I}{\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y_{MD} + Y_p}} I_{MD} \\ &= \left(\frac{\mu_M}{\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y_{MD} + Y_p}} \left(\frac{rv_I}{\mu_F} - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{\mu_F \left(1 - \frac{I_{MD}}{K}\right)} \right) - \gamma(1-r)v_I \right) I_{MD} + (\mu_M + \alpha)Y_p. \end{aligned}$$

Soit $Y_p^* < Y_p < Y_p^{**}$, i.e, $I_{MD}^{(1)} < I_{MD}^{(2)} < I^*$.

Alors,

$$\begin{aligned} Y_{MD} + Y_p - \gamma M_{MD} &\geq \left(\frac{\mu_M}{\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y_{MD} + Y_p}} \left(\frac{rv_I}{\mu_M} - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{\mu_F \left(1 - \frac{I^*}{K}\right)} \right) - \gamma(1-r)v_I \right) I_{MD} + (\mu_M + \alpha)Y_p \\ &= \left(\left(\frac{\mu_M rv_I (\delta + \mu_F)}{v_Y \mu_F + \mu_F \mu_F + \delta \mu_F} \right) - \gamma(1-r)v_I \right) I_{MD} + (\mu_M + \alpha)Y_p, \end{aligned}$$

avec,

$$\frac{Y_p^*}{I^*} (\mu_M + \alpha) = \frac{rv_I (\delta + \mu_F) \mu_M}{(v_Y + \mu_F) (\delta + \mu_F) - \delta v_Y} - \gamma(1-r)v_I.$$

$$\begin{aligned} \implies Y_{MD} + Y_p - \gamma M_{MD} &\geq -(\mu_M + \alpha) \frac{Y_p^*}{I^*} I_{MD} + (\mu_M + \alpha)Y_p \\ &\geq \frac{\mu_M + \alpha}{I^*} (I^* Y_p - Y_p^* I_{MD}) > 0, \end{aligned}$$

car, pour, $Y_p^* < Y_p < Y_p^{**}$, nous avons $I_{MD} < I^*$.

Donc,

$$Y_p^* I_{MD} < I^* Y_p \implies I^* Y_p - Y_p^* I_{MD} > 0.$$

Alors, $Y_{MD} + Y_p > \gamma M_{MD}$.

Par conséquent, pour $Y_p^* < Y_p < Y_p^{**}$, $EE_{MD}^{(1)}$ et $EE_{MD}^{(2)}$ sont tous les deux dans la région de pénurie masculine, i.e, sont **des équilibres réguliers** du modèle (3.1).

Ensuite, pour $Y_p < Y_p^*$, nous avons $I_{MD}^{(2)} > I^*$.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} Y_{MD}^{(2)} + Y_p - \gamma M_{MD}^{(2)} &\leq \left(\frac{\mu_M}{\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y_{MD}^{(2)} + Y_p}} \left(\frac{rv_I}{\mu_M} - \frac{\mu_F(v_I + \mu_I)}{\mu_F(1 - \frac{I^*}{K})} \right) - \gamma(1-r)v_I \right) I_{MD}^{(2)} + (\mu_M + \alpha)Y_p. \\ &\leq \frac{\mu_M + \alpha}{I^*} (I^*Y_p - Y_p^* I_{MD}^{(2)}) < 0. \end{aligned}$$

Alors, $Y_{MD}^{(2)} + Y_p < \gamma M_{MD}^{(2)}$.

Par conséquent, pour $Y_p < Y_p^*$, $EE_{MD}^{(2)}$ est un équilibre qui ne se trouve pas dans la région de pénurie masculine, i.e, c'est **un équilibre virtuel** du modèle (3.1).

Maintenant, en considérant ces résultats obtenus pour les équilibres EE^{**} , $EE_{MD}^{(1)}$ et $EE_{MD}^{(2)}$, on peut énoncer le théorème suivant pour le modèle (3.1) :

Théorème 8 [14]

Soit $Y_p > 0$,

- (a) TE est un équilibre asymptotiquement stable pour le modèle (3.1).
- (b) Si $0 < Y_p < Y_p^*$, le modèle (3.1) admet deux équilibres positifs EE^{**} et $EE_{MD}^{(1)}$.
- (c) Si $Y_p^* < Y_p < Y_p^{**}$, le modèle (3.1) admet deux équilibres positifs $EE_{MD}^{(2)}$ et $EE_{MD}^{(1)}$.
- (d) Si $Y_p > Y_p^{**}$, $TE = (0, 0, 0, 0)^T$ est le seul équilibre du modèle (3.1).

Remarque 3

- $Y_p = Y_p^*$ est une valeur de bifurcation appelée *une bifurcation induite par la discontinuité* [8], et elle est connue pour *les systèmes dynamiques par morceaux*.

Comme pour $Y_p < Y_p^*$, $EE_{MD}^{(2)}$ était un équilibre *virtuel*, tandis que EE^{**} était un équilibre *régulier* pour le modèle(3.1).

Ensuite, pour $Y_p > Y_p^*$ les deux équilibres échangent de propriétés et c'est l'équilibre $EE_{MD}^{(2)}$ qui devient un équilibre *régulier* du modèle, tandis que l'équilibre EE^{**} devient un équilibre *virtuel* du modèle.

- $Y_p = Y_p^{**}$ est une valeur de bifurcation appelée *une bifurcation noeud selle*.

Quand Y_p augmente à travers Y_p^{**} les deux équilibres $EE_{MD}^{(1)}$ et $EE_{MD}^{(2)}$ entrent en collision et disparaîtraient pour $Y_p > Y_p^{**}$.

L'obtention théorique des propriétés de stabilité des équilibres $EE_{MD}^{(1)}$ et $EE_{MD}^{(2)}$ n'est pas facile compte tenu de la complexité du système.

Les simulations numériques indiquent que $EE_{MD}^{(1)}$ est instable tandis que $EE_{MD}^{(2)}$ est asymptotiquement stable, comme le montre la Figure 3.4.

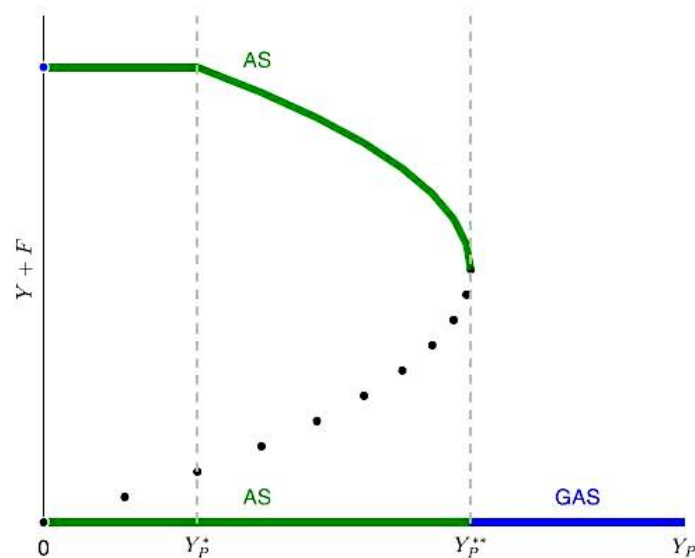


FIGURE 3.4 – Diagramme de bifurcation des valeurs de $Y + F$ à l'équilibre par rapport aux valeurs de Y_p pour le modèle (3.1) [14].

3.3.1 Stabilité asymptotique globale de l'équilibre trivial pour Y_p suffisamment grand

Nous allons établir la stabilité asymptotique globale de l'équilibre $TE = (0, 0, 0, 0)^T$ sous une condition légèrement plus forte $Y_p > \hat{Y}_p^{**}$ où, $\hat{Y}_p^{**} > Y_p^{**}$.

L'analyse asymptotique pour le système (3.1) ne peut pas être menée de la même manière que pour les autres systèmes considérés jusqu'ici, puisqu'il ne s'agit pas d'un système coopératif, plus précisément, le second membre du système (3.1) n'est pas quasi-monotone, en raison du terme $\frac{-v_Y \gamma M Y}{Y + Y_p}$ dans l'équation de Y .

C'est pour cela, qu'on va considérer un système auxiliaire qui est coopératif dont le second membre est supérieure à celui du modèle (3.1), par conséquent ce système fournit des limites supérieures pour les solutions du modèle (3.1).

Plus précisément, il est défini comme suit :

$$\frac{dX}{dt} = h(X) \quad (3.7)$$

où, $X = (I, Y, F, M)^T \in \mathbb{R}_+^4$ et

$$h(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I + \delta F - \mu_F Y \\ v_Y \frac{\gamma M}{Y + Y_p} Y - (\delta + \mu_F)F \\ (1 - r)v_I I - (\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y + Y_p})M \end{pmatrix}.$$

On voit bien que $h(X) > g(X)$ et que $h(X)$ est quasi-monotone sur l'ensemble :

$$\Omega_K = \{X \in \mathbb{R}_+^4 : I \leq K\}.$$

Alors, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 9 [14]

(a) Le système (3.7) définit un système dynamique positif sur \mathbb{R}_+^4 .

(b) TE est un équilibre asymptotiquement stable.

(c) Il existe une valeur de seuil \hat{Y}_p^{**} tel que :

- (i) si $Y_p > \hat{Y}_p^{**}$, TE est globalement asymptotiquement stable sur \mathbb{R}_+^4 .
- (ii) si $0 < Y_p < \hat{Y}_p^{**}$, le système admet trois équilibres, TE et deux équilibres positifs $EE^{(1)}$ et $EE^{(2)}$ ($EE^{(1)} < EE^{(2)}$), tel que :

Le bassin d'attraction de TE contient l'ensemble :

$$\{X \in \mathbb{R}_+^4 : 0 \leq X \leq EE^{(1)}\}$$

et le bassin d'attraction de $EE^{(2)}$ contient l'ensemble :

$$\{X \in \mathbb{R}_+^4 : X \geq EE^{(2)}, I \leq K\}.$$

Preuve

Il est facile de vérifier que le système (3.7) est coopératif sur $\Omega_K = \{X \in \mathbb{R}_+^4 : I \leq K\}$, car la fonction h est quasi-monotone sur Ω_K (voir la définition 4).

Donc, pour démontrer (a) on va utiliser le théorème 1 :

Soit $q \in \mathbb{R}^+$, $q \geq K$, tel que :

$$y_q = \begin{pmatrix} K \\ \frac{1}{\mu_F} \left(r v_I + \frac{\delta v_Y \gamma (1-r) v_I}{(\delta + \mu_F) \mu_M} \right) q \\ \frac{\delta v_Y \gamma (1-r) v_I}{(\delta + \mu_F) \mu_M} q \\ \frac{(1-r) v_I}{\mu_M} q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q \\ Y_q \\ F_q \\ M_q \end{pmatrix}$$

Nous avons $h(0_{\mathbb{R}_+^4}) = 0_{\mathbb{R}_+^4} \geq 0$ et

$$\begin{aligned}
h(y_q) &= \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I)K \\ (K - q)rv_I \\ \frac{v_Y\gamma(1-r)v_Iq^2}{\mu_M(Y_q + Y_p)\mu_F} \left(rv_I + \frac{\delta v_Y\gamma(1-r)v_I}{(\delta + \mu_F)\mu_M} \right) - \frac{v_Y\gamma(1-r)v_Iq}{\mu_M} \\ (1-r)v_I(K - q) - \frac{\alpha Y_p}{Y_q + Y_p} M_q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I)K \\ (K - q)rv_I \\ \frac{-v_Y\gamma(1-r)v_IqY_p}{\mu_M(Y_q + Y_p)} \\ (1-r)v_I(K - q) - \frac{\alpha Y_p}{Y_q + Y_p} M_q \end{pmatrix} \leq 0.
\end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème 1, le modèle (3.7) définit un système dynamique positif sur $[0, y_q]$, ainsi, le modèle (3.7) définit un système dynamique positif sur :

$$\bigcup_{q \geq K} [0, y_q] = \Omega_K, \text{ d'où (a).}$$

Pour démontrer que TE est asymptotiquement stable, on va utiliser la linéarisation :

$$J(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -(v_I + \mu_I) & 0 & b & 0 \\ rv_I & -\mu_F & \delta & 0 \\ 0 & 0 & -(\delta + \mu_F) & 0 \\ (1-r)v_I & 0 & 0 & -(\mu_M + \alpha) \end{pmatrix},$$

avec,

$$\text{Det}J(0, 0, 0, 0) = \mu_F(v_I + \mu_I)(\delta + \mu_F)(\mu_M + \alpha) > 0$$

et

$$\text{Tr}J(0, 0, 0, 0) = -\mu_F - (v_I + \mu_I) - (\delta + \mu_F)(\mu_M + \alpha) < 0.$$

Alors, TE est asymptotiquement stable pour ce système, d'où (b).

Pour montrer le point (c), On doit déterminer les points d'équilibre du modèle (3.7).

Les points d'équilibre :

$$\dot{X} = 0 \iff h(X) = 0 \iff \begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{Y} = 0 \\ \dot{F} = 0 \\ \dot{M} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{I} = 0 \iff F = \frac{v_I + \mu_I}{b(1 - \frac{I}{K})} I \geq 0.$$

$$\dot{M} = 0 \iff M = \frac{(1-r)v_I}{\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y + Y_p}} I = \frac{(Y + Y_p)(1-r)v_I}{\mu_M Y + (\mu_M + \alpha)Y_p} \geq 0.$$

$$\dot{Y} = 0 \iff Y = \frac{rv_I I + \delta F}{\mu_F} \geq 0.$$

En remplaçons l'expression de Y , F et M dans l'équation $\dot{F} = 0$, nous obtenons l'équation en I suivante :

$$\hat{\psi}(I) := I\xi(I)\hat{\phi}(I) = \eta(Y_p, I). \quad (3.8)$$

où,

$$\xi(I) = v_Y \gamma (1-r)v_I b(1 - \frac{I}{K}) - (\delta + \mu_F)(v_I + \mu_I)\mu_M.$$

$$\eta(Y_p, I) = \mu_F(\delta + \mu_F)(v_I + \mu_I)(\mu_M + \alpha)b(1 - \frac{I}{K})Y_p.$$

$$\hat{\phi}(I) = rv_I b(1 - \frac{I}{K}) + \delta(v_I + \mu_I).$$

Donc, les équilibres non triviaux du système (3.7) sont de la forme :

$$\hat{Y} = \frac{1}{\mu_F} \left(rv_I + \frac{\delta(v_I + \mu_I)}{b(1 - \frac{\hat{I}}{K})} \right) \hat{I},$$

$$\hat{F} = \frac{(v_I + \mu_I)}{b(1 - \frac{\hat{I}}{K})} \hat{I},$$

$$\hat{M} = \frac{(1-r)v_I}{\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{\hat{Y} + Y_p}} \hat{I},$$

avec, \hat{I} une racine positive de l'équation (3.8).

Notons que les racines de (3.8) sont les abscisses des points d'intersection entre le graphe de $\hat{\psi}$ et la droite η .

En effet, il est clair que :

$\eta(Y_p, K) = 0$, donc, la droite $\eta(Y_p, I)$ intersecte l'axe des I pour $I = K$.

D'autre part,

$\hat{\psi}(I) = 0 \iff I = 0$ ou $\xi(I) = 0$ ou $\hat{\phi}(I) = 0$.

$$\iff I_0 = 0 \text{ ou } I_1 = K \left(1 - \frac{(\delta + \mu_F)(v_I + \mu_I)\mu_M}{v_Y \gamma (1 - r)v_I b}\right) \text{ ou } \hat{I}_2 = K \left(1 + \frac{\delta(v_I + \mu_I)}{rv_I b}\right).$$

Notons aussi que $0 < I_1 < K$ (déjà démontré) et il est clair que $\hat{I}_2 > K$, donc, seuls les points d'intersection de la droite η avec le graphe de $\hat{\psi}$ pour $I \in [0, I_1]$ sont convenables pour les équilibres du modèle (3.7).

Notons aussi que η est décroissante par rapport à I , croissante par rapport à Y_p .

Par conséquent, le graphe du polynôme cubique $\hat{\psi}$ et de la droite η est comme indiqué sur la Figure 3.5.

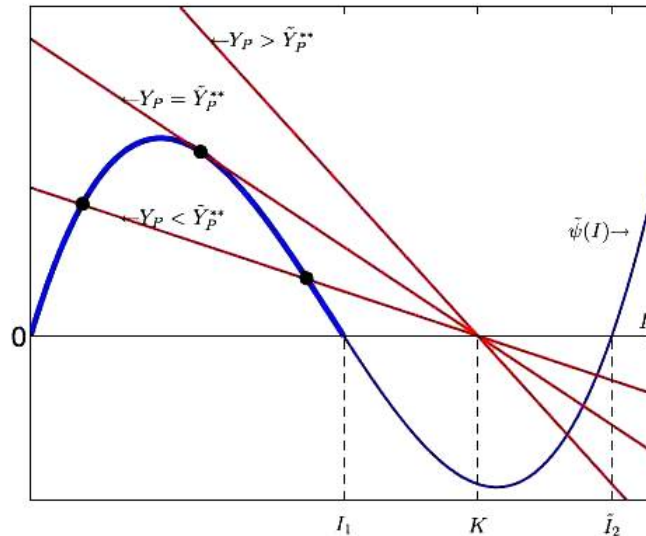


FIGURE 3.5 – Les intersections entre les graphes de $\eta(Y_p, \cdot)$ (en rouge) et $\hat{\psi}$ (en bleu) pour différentes valeurs de Y_p . Les points noirs représentent les points d'intersection sur l'intervalle $[0, I_1]$ [14].

Notons par \hat{Y}_p^{**} la valeur de Y_p telle que la droite η est **tangente** au graphe de $\hat{\psi}$ (voir la Figure 3.5).

Alors, il est clair que pour :

- $Y_p > \hat{Y}_p^{**}$: il n'y a pas de points d'intersection entre η et $\hat{\psi}$ sur l'intervalle $[0, I_1]$.

Par conséquent, le seul équilibre du modèle est $TE = (0, 0, 0, 0)^T$.

Montrons dans ce cas que TE est **G.A.S**.

Puisque le système (3.7) est **coopératif**, on va utiliser le théorème 1 pour montrer la stabilité globale de TE .

En effet, sur l'intervalle $[0, y_q]$, TE est le seul point d'équilibre et puisque nous avons déjà montré que $h(y_q) \leq 0$, il résulte du théorème 1 qu'il est **G.A.S** sur $[0, y_q]$.

Par conséquent, TE est **G.A.S** sur $\cup_{q \geq K} [0, y_q] = \Omega_K$ qui est un ensemble absorbant, alors, TE est **G.A.S** sur \mathbb{R}_+^4 , d'où (i).

- $0 < Y_p < \hat{Y}_p^{**}$: il y a deux points d'intersection (voir Figure 3.5).

Par conséquent, le système admet trois équilibres, TE et deux autres équilibres **positifs**, notés respectivement par :

$$\hat{EE}^{(1)} = (\hat{I}^{(1)}, \hat{Y}^{(1)}, \hat{F}^{(1)}, \hat{M}^{(1)}) \text{ et } \hat{EE}^{(2)} = (\hat{I}^{(2)}, \hat{Y}^{(2)}, \hat{F}^{(2)}, \hat{M}^{(2)}), \text{ tel que } \hat{I}^{(1)} < \hat{I}^{(2)}.$$

On remarque que si $\hat{I}^{(1)} < \hat{I}^{(2)}$, alors, $\hat{EE}^{(1)} < \hat{EE}^{(2)}$, parce qu'à partir des expressions de \hat{Y} , \hat{F} et \hat{M} , on voit bien qu'ils sont croissante par rapport à I .

Donc, on a $0 < \hat{EE}^{(1)} < \hat{EE}^{(2)}$.

En effet, en utilisant le fait que $h(y_q) \leq 0 = h(\hat{EE}^{(2)})$ ($\hat{EE}^{(2)}$ un point d'équilibre), par le théorème 1, on conclut que $\hat{EE}^{(2)}$ est **G.A.S** sur $[\hat{EE}^{(2)}, y_q]$.

Par conséquent, $\hat{EE}^{(2)}$ est **G.A.S** sur $\cup_{q \geq K} [\hat{EE}^{(2)}, y_q] = \{X \in \mathbb{R}_+^4 : X \geq \hat{EE}^{(2)}\}$.

Donc, le bassin d'attraction de $\hat{EE}^{(2)}$ contient l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}_+^4 : X \geq \hat{EE}^{(2)}\}$ (voir Figure 3.6).

D'autre part, sur l'intervalle $[TE, \hat{EE}^{(1)}]$:

Puisqu'on a déjà démontré que TE est asymptotiquement stable, alors

le théorème 2 implique que TE attire toutes les solutions initiées dans $[TE, \hat{EE}^{(1)}]$.

Par conséquent, dans ce cas, le bassin d'attraction de TE contient l'ensemble :
 $\{X \in \mathbb{R}_+^4 : X \leq \hat{E}E^{(1)}\}$, d'où (c) (voir Figure 3.6).

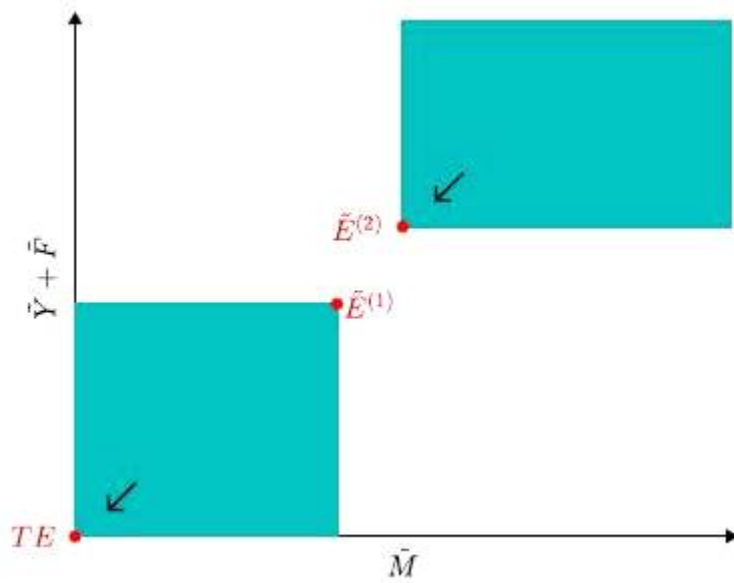


FIGURE 3.6 – Le bassin d'attraction de TE et de $\hat{E}E^{(2)}$ pour $Y_p < \hat{Y}_p^{**}$ [14].

Rappelons que nous avons considéré le système (3.7) comme une approximation du modèle (3.1) dans le but de fournir des conditions pour l'extinction de la population des insectes qui est le résultat le plus souhaitable pour un contrôle.

Le théorème suivant, nous permet de montrer la stabilité globale de l'équilibre trivial :

Théorème 10 [14]

Soit $Y_p > 0$, pour le modèle (3.1) nous avons :

(a) Si $0 < Y_p < \hat{Y}_p^{**}$:

le bassin d'attraction de TE contient l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}_+^4 : X \leq \hat{E}^{(1)}\}$.

(b) Si $Y_p > \hat{Y}_p^{**}$: TE est G.A.S sur \mathbb{R}_+^4 .

Preuve

Le théorème de *monotonocité* pour les équations différentielles ordinaires [19] implique que toutes solutions du système (3.7) sont des bornes supérieures des solutions du système (3.1) pour des conditions initiales qui sont égales.

En effet, soit $X(t)$ la solution du système (3.1) avec $X(t_0)$ la condition initiale et soit $Y(t)$ la solution du système (3.7) avec $Y(t_0)$ la condition initiale, tel que,

$$X(t_0) = Y(t_0),$$

alors, puisque nous avons :

$$\dot{X}(t) = g(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I - v_Y \min\{\frac{\gamma M}{Y + Y_p}, 1\}Y + \delta F - \mu_F Y \\ v_Y \min\{\frac{\gamma M}{Y + Y_p}, 1\}Y - \delta F - \mu_F F \\ (1 - r)v_I I - (\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y + Y_p})M \end{pmatrix}$$

$$\leq \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (v_I + \mu_I)I \\ rv_I I + \delta F - \mu_F Y \\ v_Y \frac{\gamma M}{Y + Y_p} Y - \delta F - \mu_F F \\ (1 - r)v_I I - (\mu_M + \alpha \frac{Y_p}{Y + Y_p})M \end{pmatrix} = h(Y) = \dot{Y}(t).$$

Alors, $X(t) \leq Y(t)$, Cela implique que pour :

- $0 < Y_p < \hat{Y}_p^{**}$: le bassin d'attraction de TE en tant qu'équilibre de (3.1) contient l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}_+^4 : X \leq \hat{E}E^{(1)}\}$, d'où (a) .
- $Y_p > \hat{Y}_p^{**}$: le bassin d'attraction de TE en tant qu'équilibre de (3.1) contient \mathbb{R}_+^4 qui veut dire que TE est *G.A.S* sur \mathbb{R}_+^4 , d'où (b).

Ce théorème nous permet de tirer les affirmations suivante :

- Augmenter l'effort Y_p dans la gamme $0 < Y_p < \hat{Y}_p^{**}$ ne conduit pas à l'élimination d'une population établie.

En fait, comme le montre la Figure 3.5, l'augmentation de Y_p augmente $\hat{I}^{(1)}$ qui conduit à l'augmentation de $\hat{E}E^{(1)}$.

Par conséquent, l'augmentation de Y_p agrandit le bassin d'attraction de TE , offrant de meilleures opportunités pour contrôler la population [des insectes nuisibles](#).

- L'effort Y_p plus grand que \hat{Y}_p^{**} [élimine](#) toute population établie des ravageurs.

Chapitre 4

Simulations numériques

Nous présentons ici des simulations numériques pour illustrer les résultats des théorèmes déjà démontrés.

Les simulations numériques sont effectuées à l'aide de Matlab.

Les valeurs des paramètres utilisés pour les simulations numériques sont celles du tableau 1 qui donnent la valeurs de $R_0 = 122 > 1$.

La Figure 4.1 illustre les résultat du système (2.1) pour $R_0 = 122 > 1$.

On voit bien ici que EE^* est G.A.S sur $\mathbb{R}_+^4 \setminus TE = (0, 0, 0, 0)^T$ qui est instable dans ce cas.

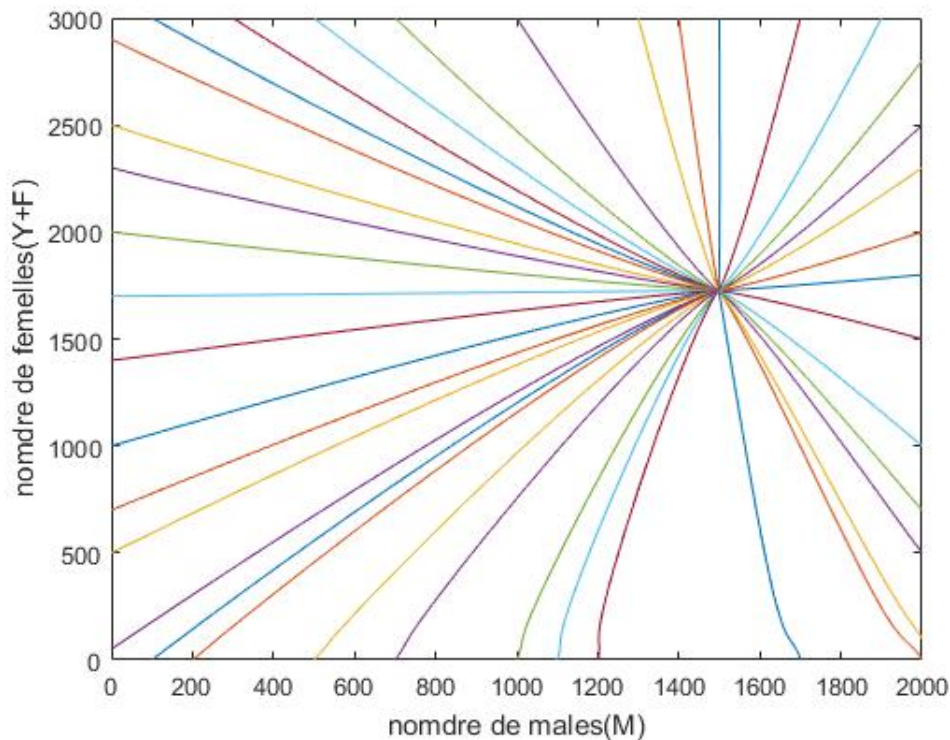


FIGURE 4.1 – Trajectoires d'un ensemble de solutions de système (2.1) dans le plan $M \times (Y + F)$.

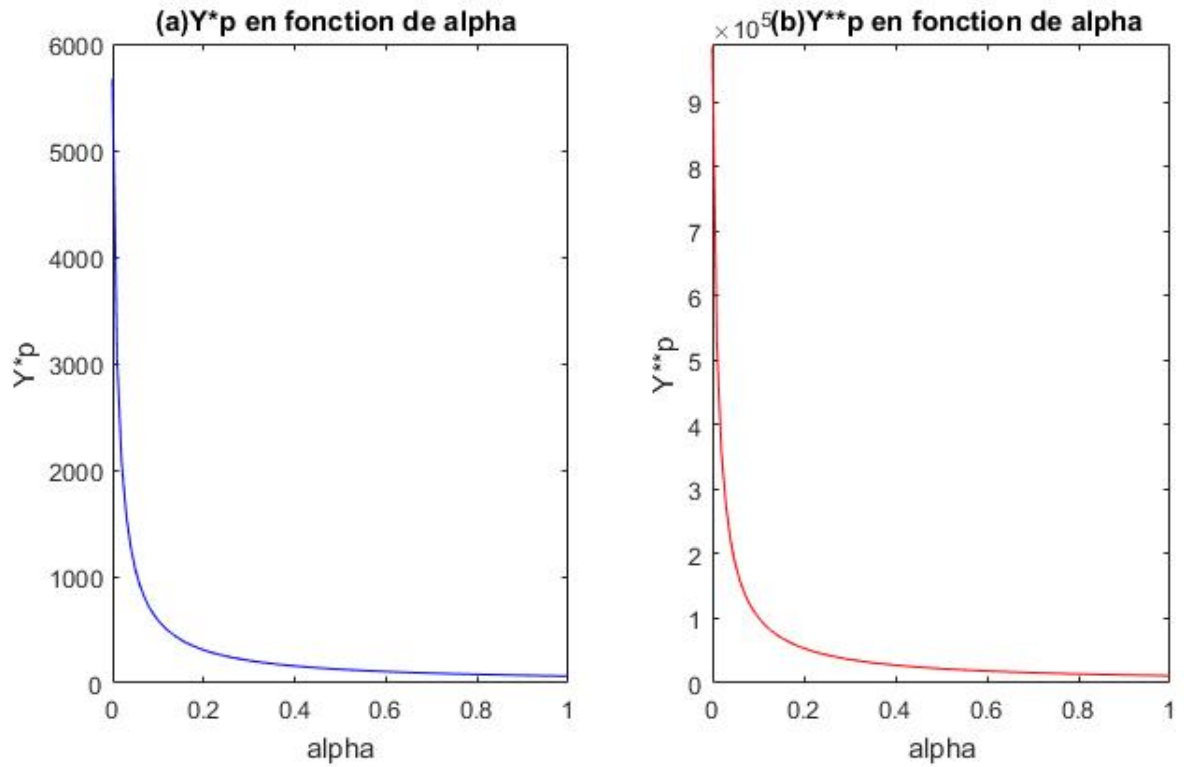


FIGURE 4.2 – Les seuils de phéromones femelles Y_p^* et Y_p^{**} en fonction du paramètre de piégeage α .

La résolution du système système :

$$\begin{cases} \psi(I) = \eta(Y_p, I) \\ \frac{d\psi(I)}{dI} = \frac{d\eta(Y_p, I)}{dI} \end{cases}$$

nous permet de déterminer la valeur seuil Y_p^{**} pour différentes valeurs de α .

Les valeurs seuils Y_p^* et Y_p^{**} sont représentées sur la Figure 4.2 pour différentes valeurs de α .

On peut observer qu'un petit effort de piégeage réduit les valeurs seuils .

Donc, l'ajout du piégeage à la perturbation de l'accouplement est très efficace pour le contrôle de la population des insectes.

En particulier, pour $\alpha = 0$ nous avons $Y_p^* = 5673$ et $Y_p^{**} = 9.8 \times 10^5$, tandis que pour $\alpha = 0.1$, nous avons $Y_p^* = 588$ et $Y_p^{**} = 1.02 \times 10^5$.

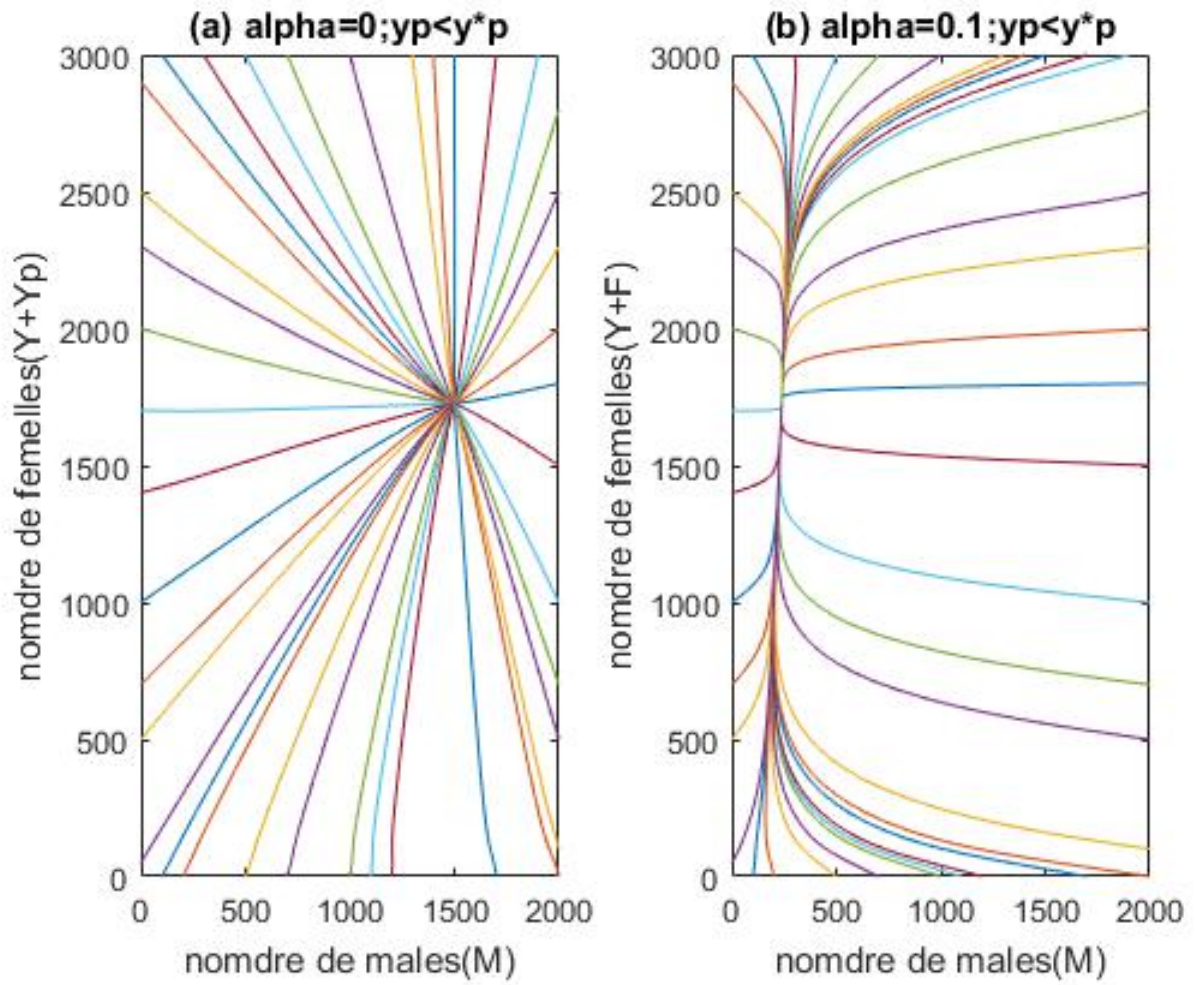


FIGURE 4.3 – Trajectoires d’un ensemble de solutions du système (3.1) dans le plan $M \times (Y + F)$ pour $Y_p < Y_p^*$.

La Figure 4.3 illustre les trajectoires des solutions du système (2.9) (avec contrôle) lorsque le niveau de perturbation d’accouplement est inférieur au seuil Y_p^* pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 0.1$.

Dans ce cas, le système (3.1) admet un équilibre positif EE^{**} .

On peut observer que lorsqu’il n’y a pas de piégeage ($\alpha = 0$) $EE^{**} = EE^*$ (Figure 4.3 (a)).

Cela signifie que l’équilibre endémique positif de la population n’est pas affecté par le contrôle .

Lorsque le piégeage se produit ($\alpha = 0.1$), nous observons sur la Figure 4.3 (b) que l’équilibre positif EE^{**} est décalé vers la gauche.

En effet, le contrôle permet de réduire le nombre de mâles mais pas suffisamment pour perturber la fécondation des femelles.

Par conséquent, le contrôle n’est pas efficace sur une population établie car le nombre de femelles à l’équilibre n’est pas réduit.

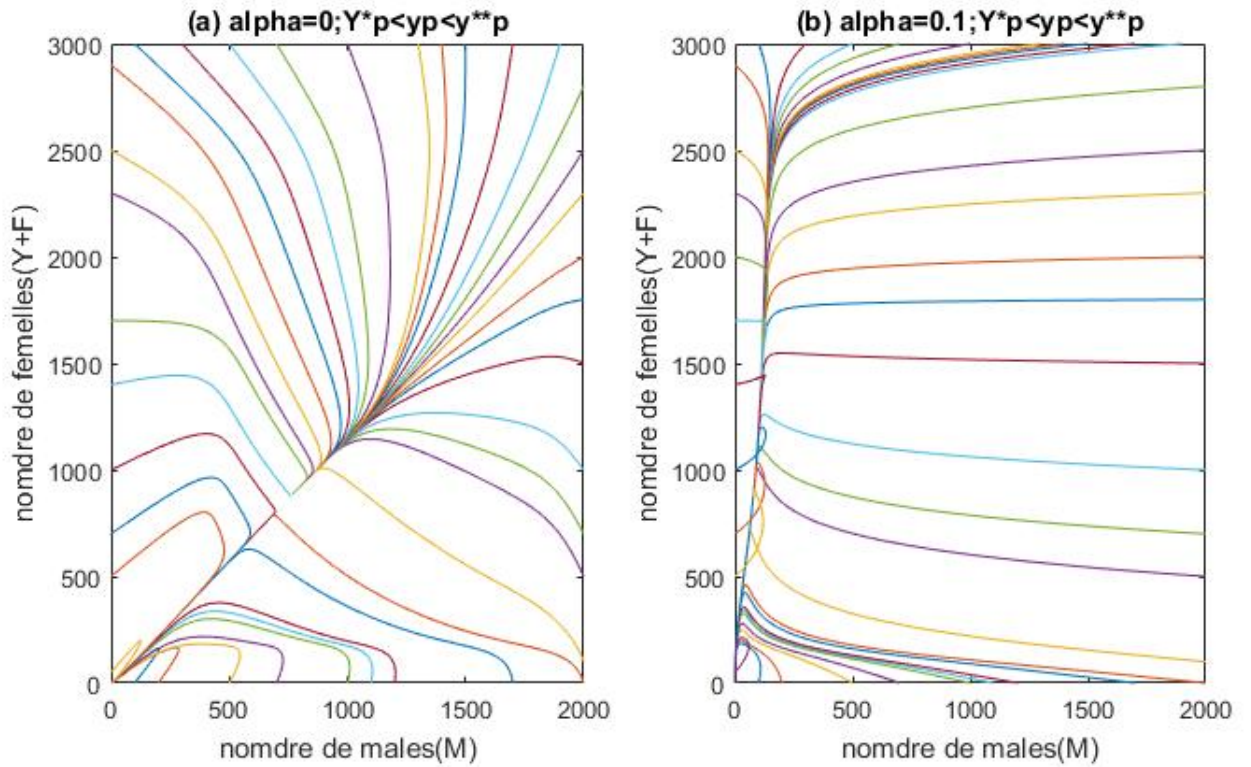


FIGURE 4.4 – Trajectoires d'un ensemble de solutions du système (2.1) dans le plan $M \times (Y + F)$ pour $Y_p^* < Y_p < Y_p^{**}$.

Cependant, lorsque $Y_p > Y_p^*$, nous pouvons voir sur la Figure 4.4 (a) qu'il y a deux équilibres asymptotiquement stables $EE_{MD}^{(2)}$, et $TE = (0, 0, 0, 0)^T$, nous observons qu'il y a un ensemble de solutions, pour lesquelles la population initiale est assez petite, qui convergent vers TE .

Par conséquent, une petite population peut être éradiquée pour $Y_p^* < Y_p < Y_p^{**}$.

On peut remarquer aussi en comparant les deux Figures 4.4 (a) et 4.4 (b) que le bassin d'attraction de l'équilibre trivial devient plus grand quand Y_p augmente.

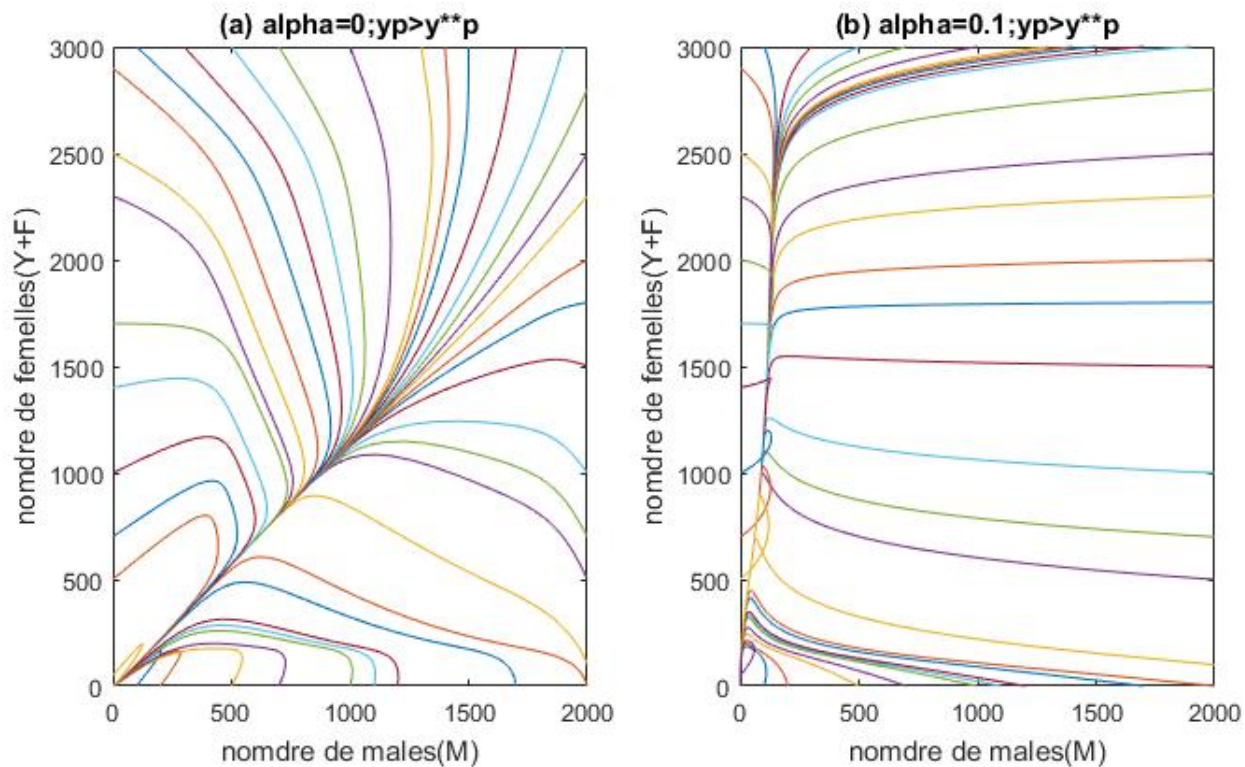


FIGURE 4.5 – Trajectoires d'un ensemble de solutions du système (2.1) dans le plan $M \times (Y + F)$ pour $Y_p > Y_p^{**}$.

Finalement, $Y_p > Y_p^{**}$ permet un contrôle total de la population menant à l'extinction de la population des ravageurs, peu importe sa taille.

Sur la Figure 4.5, nous pouvons voir que toutes les trajectoires convergent vers l'équilibre trivial TE , ce qui montre la stabilité globale de l'équilibre TE pour $Y_p > Y_p^{**}$.

Conclusion

En guise de conclusion, on peut dire que la lutte contre les insectes nuisibles est un défi très important pour protéger la production agricole.

Dans ce mémoire, nous avons étudié un modèle mathématique régi par un système dynamique par morceaux pour simuler la dynamique de la population des ravageurs et voir sa réponse au contrôle de la perturbation de l'accouplement avec le piégeage.

Nous avons pu trouver deux valeurs seuils pour la force du leurre :

Le premier seuil, correspond à une quantité minimale de phéromone nécessaire pour l'efficacité de la perturbation de l'accouplement sur la population.

Cependant, nous avons montré l'existence d'un second seuil de phéromones Y_p^{**} au dessus du quel la stabilité globale de l'équilibre trivial est assurée, c'est à dire le contrôle est pleinement efficace pour toute population d'insectes nuisibles, et on a pu aussi démontrer qu'au dessous du seuil Y_p^{**} , l'équilibre trivial est asymptotiquement stable, en d'autres termes une très petite population des ravageurs peut être contrôlée.

Table des figures

1.1	le bilan de ce qui rentre et de ce qui sort d'un compartiment i	6
2.1	Cycle de vie de l'insecte.	10
3.1	Modèle de contrôle utilisant la perturbation de l'accouplement et le piégeage.	28
3.2	Les intersections entre les graphes de $\eta(Y_p, \cdot)$ (en rouge) et ψ (en bleu) pour différentes valeurs de Y_p . Les points noirs représentent les points d'intersection sur l'intervalle $[0, \min\{I_1, I_2\}]$ [14].	37
3.3	Les intersections entre les graphes de $\eta(Y_p^*, \cdot)$ (en rouge) et ψ (en bleu). Le point noir représente l'intersection pour $I = I^*$ [14].	39
3.4	Diagramme de bifurcation des valeurs de $Y + F$ à l'équilibre par rapport aux valeurs de Y_p pour le modèle (3.1) [14].	42
3.5	Les intersections entre les graphes de $\eta(Y_p, \cdot)$ (en rouge) et $\hat{\psi}$ (en bleu) pour différentes valeurs de Y_p . Les points noirs représentent les points d'intersection sur l'intervalle $[0, I_1]$ [14].	47
3.6	Le bassin d'attraction de TE et de $\hat{EE}^{(2)}$ pour $Y_p < \hat{Y}_p^{**}$ [14].	49
4.1	Trajectoires d'un ensemble de solutions de système (2.1)	52
4.2	Les seuils de phéromones femelles Y_p^* et Y_p^{**}	53
4.3	Trajectoires d'un ensemble de solutions du système (3.1)	54
4.4	Trajectoires d'un ensemble de solutions du système (2.1)	55
4.5	Trajectoires d'un ensemble de solutions du système (2.1)	56

Bibliographie

- [1] G. Delrio A. Cocco, S. Deliperi. Control of tuta absoluta (meyrick) (lepidoptera : Gelechiidae) in greenhouse tomato crops using the mating disruption technique. *Journal of Applied Entomology*, 137(1-2) :16–28, 2013.
- [2] Lima E.R. Sousa-Souto L. Ambrogi, B.G. Efficacy of mating disruption for control of the coffee leaf miner leucoptera coffeella (guérin-méneville) (lepidoptera : Lyonetiidae). *BioAssay*, 1(8) :1–5, 2006.
- [3] Ring T. Cardé and Albert K. Minks. Control of moth pests by mating disruption : Successes and constraints. *Annual Review of Entomology*, 40 :559–585, 1995.
- [4] Mario di BernardoAlan R. ChampneysChristopher J. BuddPiotr Kowalczyk. *Qualitative theory of non-smooth dynamical systems*. Springer London,London, 2008.
- [5] P. Vanden Driessche and J.Watmough. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Math. Bioscience*, 180, 2002.
- [6] P. Van den Driessche H. Barclay. Pheromone trapping models for insect pest control. *Res. Popul. Ecol.*, 25(1) :105–115, 1983.
- [7] J. Hendrichs HJ Barclay. *Models for Assessing the Male Annihilation of Bactrocera spp. with Methyl Eugenol Baits*, volume 107. Ann. Entomol. Soc. Un m., 2014.
- [8] AR Champneys P. Kowalczyk AB Nordmark GO Tost PT Piiroinen M. di Bernardo, CJ Budd. Bifurcations in nonsmooth dynamical systems. *SIAM Rev*, 50(4) :629–701, 2008.
- [9] G. N. Jhamb A. Attygallec A. Svatos d M. Michereff Filhoa, E. F. Vilelaa and J. Meinwaldc. Initial studies of mating disruption of the tomato moth, tuta absoluta (lepidoptera : Gelechiidae) using synthetic sex pheromone. *J.Braz. CHem*, 11(6) :622–628, 2000.
- [10] A. Cork P. Witzgall, P. Kirsch. Sex pheromones and their impact on pest management. *Journal of Chemical Ecology*, 36 :80–100, 2010.
- [11] O.T .Jones P.E .Howse, I.D .Stevens. *Insect Pheromones and their Use in Pest Management*. Chapman and Hall, 1998.
- [12] J. Lubuma R. Anguelov, Y. Dumont. Mathematical modeling of sterile insect technology for control of anopheles mosquito. *Comput. Math. Appl.*, 64(3) :374–389, 2012.
- [13] R.Bartell. Mechanisms of communication disruption by pheromone in the control of lepidoptera : A review. *Physiol.Entomol*, 7(4) :353–364, 1982.
- [14] Yves Dumont Roumen Anguelov, Claire Dufourd. Mathematical model for pest–insect control using mating disruption and trapping. *ELSEVIER*, 2017.
- [15] R.T.Cadre. Behavior-modifying chemicals for pest management : Applications of pheromones and other attractants. *Marcel Dekker,New York*, pages 47–71, 1990.

- [16] I. Rwomushana S. Ekesi, P. Nderitu. Field infestation, life history and demographic parameters of the fruit fly *bactrocera invadens* (diptera : Tephritidae) in africa. *Taureau. Entomol. Res.*, 96(04) :379–386, 2006.
- [17] G. Sallet. cours. *INRIA and IRD EPICASA09*, Avril 2010.
- [18] Hal L. Smith. *Monotone Dynamical Systems : An Introduction to the Theory of Competitive and cooperative systems*, *Mathematical Surveys and Monographs*, volume 41. American Mathematical Society, 2008.
- [19] W. Walter. *Differential and Integral Inequalities*, volume 55. Springer Science and Business Media, 2012.