

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

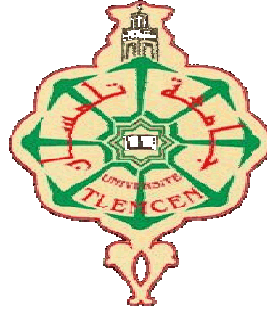
وزارة التعلیم العالی و البحث العلمی

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان -

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



## **THÈSE**

Présentée pour l'obtention du **grade de DOCTORAT** en **Génie Civil**

**Spécialité** : Génie Parasismique

**Par** : **Nassima Aissaoui**

**Sujet**

**Apport de la modélisation mésoscopique dans la prédiction de la fissuration des structures en béton: Aspects énergétiques et effets d'échelle**

Soutenue le 22 mai 2018 devant le jury composé de :

Nadir Boumechra	Professeur	UABB. Tlemcen	Président
Abdellatif Megnounif	Professeur	UABB. Tlemcen	Examinateur
Hadda Hadjab	Professeur	USTHB. Alger	Examinatrice
Frédéric Grondin	Professeur	EC. Nantes France	Examinateur
Mohammed Matallah	Professeur	UABB. Tlemcen	Directeur de Thèse

# Remerciements

Mes premiers remerciements sont pour M. Mohammed Matallah, mon directeur de thèse, Professeur à l'université de Tlemcen, avec qui j'ai eu la chance de travailler. Je le remercie pour ses orientations, sa disponibilité, ses conseils précieux et pour la motivation qu'il m'a insufflée. Ses grandes compétences et exigences ont constitué une aide précieuse tout au long de ce travail. Merci d'avoir guidé mes premiers pas dans la recherche.

J'exprime ma gratitude à M. Nadir Boumechera d'avoir accepté d'endosser le rôle de président du jury.

Mes remerciements vont également aux examinateurs, Madame Hadda Hadjab Professeur à l'université d'Alger ainsi qu'à M. Frédéric Grondin Professeur à l'école centrale de Nantes et M. Abdellatif Megnounif Professeur à l'université de Tlemcen qui ont accepté d'examiner ce travail.

Je dédie ce travail à mes parents qui m'ont toujours encouragé et soutenu à poursuivre dans la voie que je voulais.

Enfin, un grand merci à toute ma famille à l'ensemble de l'équipe RiSAM et mes amis pour leur soutien tout au long de cette thèse.

# Résumé

Le béton reste le matériau de construction le plus utilisé dans le monde. La dégradation de ce matériau quasi-fragile est accompagnée de l'apparition des microfissures qui interagissent entre elles dans une zone souvent non négligeable par rapport à la taille de la structure. Cette zone connue sous l'acronyme anglais *Fracture Process Zone* est la cause principale des effets d'échelles observés expérimentalement.

Cette thèse est une contribution numérique à la compréhension approfondie du processus de fissuration accompagnant la rupture du béton. Une approche de modélisation à l'échelle mésoscopique combinée à un modèle d'endommagement régularisé est utilisée pour étudier l'effet d'échelle sur le comportement global et local du béton. Une attention particulière est accordée à l'évolution de la FPZ.

La technique de régularisation énergétique est employée pour pallier au problème de dépendance au maillage du à la localisation des déformations. Les limites d'application et les sources d'erreurs liées à l'utilisation de cette méthode dans le cas d'un calcul de structure générant des états de contraintes bidimensionnels et tridimensionnels sont discutées. Des recommandations d'utilisation de cette technique sont fournies.

L'évolution de la FPZ lors du processus de rupture est investie en s'inspirant des approches de la mécanique de la rupture avec enrichissement. Les résultats trouvés permettent de comprendre mieux le rôle de la FPZ dans le phénomène d'effet d'échelle.

## Mots clés:

Béton, ouverture de fissure, longueur de fissure, FPZ, endommagement, approche mésoscopique, effet d'échelle, Energie de rupture, Mécanique de la rupture, coefficient d'ordre supérieur.

# Abstract

Concrete remains the most widely used building-material in the world. The degradation of this quasi-brittle material is accompanied by the development of micro-cracks. The interaction of these micro-cracks in the Fracture Process Zone is one of the main causes of the scale effects observed experimentally.

This work is a numerical contribution to the study of the cracking process during the concrete failure. The numerical modeling strategy is based on the use of a non linear damage approach at the mesoscale. The local and the global cracking behaviors are both studied. The FPZ variation is deeply investigated.

The energetic-based-regularization technique is used to overcome the problem of mesh dependency due to the strain localization. The sources of errors related to the use of this practical technique in the case of structural computations (2D/3D) are discussed and new recommendations are addressed.

The evolution of the FPZ during the fracture process is investigated using a fracture-mechanics-based approach with appropriate enrichments. The role of the FPZ in the scale effect phenomenon is further highlighted.

## **Keywords:**

Concrete, crack opening, crack length, FPZ, damage, mesoscale approach, size effect, fracture energy, , fracture mechanics, higher order terms.

# ملخص

تبقى الخرسانة من مواد البناء الأكثر استخداماً في العالم. يرافق تدهور هذه المادة شبه القابلة للكسر ظهور الشوائب الصغيرة التي تتفاعل مع بعضها البعض في منطقة غالباً ما تكون غير مهمة مقارنة بحجم الهيكل. هذه المنطقة المعروفة باسم منطقة عملية الكسر هي السبب الرئيسي لتأثيرات المقياس التي تمت ملاحظتها تجريبياً في المختبر.

الهدف من هذه الدراسة هو المساهمة بشكل عددي في فهم شامل لسلوك تكسير الخرسانة وكسرها من خصائص مكوناتها.

يتم استخدام طريقة نمذجة مقياس الميزوسكوبي جنباً إلى جنب مع نموذج ضار متناظف منتظم لدراسة تأثير الحجم على السلوك الكلي والمحلي للخرسانة ، على اختلاف طول FPZ وعلى منحني المقاومة. يستخدم أسلوب تنظيم الطاقة للتغلب على مشكلة التبعية الشبكية بسبب توطين التشوهات. وتناقش حدود التطبيق ومصادر الأخطاء المتعلقة باستخدام طريقة تنظيم الطاقة في حالة الحساب الهيكلي التي تولد حالات الإجهاد ثنائي الأبعاد وثلاثي الأبعاد. يتم تقديم توصيات لاستخدام تقنية التنظيم هذه.

تظهر مقارنة النتائج العددية مع النتائج التجريبية أن الجمع بين المنهج المجهرى مع نموذج الضرر المنتظم يجعل من الممكن وصف عملية الكسر في الخرسانة بشكل صحيح.

## الكلمات المفتاحية

الخرسانة ، التكسير ، فتح الكراك ، طول الكراك ، الضرر ، المقاربة المخروطية ، تأثير المقياس ، FPZ ، طاقة الكسر ، عامل شدة الإجهاد ، تنظيم الطاقة ، منحني المقاومة ، ميكانيكا الكسر ، معامل أعلى مستوى.

# Table des matières

Remerciements .....	i
Résumé .....	ii
Abstract .....	iii
ملخص .....	iv
Symboles et caractères utilisés .....	xv
Introduction générale.....	1
CHAPITRE 1. Etude Bibliographique .....	5
1.1 Effet d'échelle et rupture des matériaux quasi-fragiles: influence de la FPZ.....	6
1.1.1 Introduction .....	6
1.1.2 Effet d'échelle dans les structures en béton: une explication à l'échelle du matériau6	
1.1.3 Analyse de l'effet d'échelle dans les structures quasi-fragiles: théories de base et lois d'effets d'échelle .....	7
1.1.3.1 La théorie statistique .....	8
1.1.3.2 La théorie déterministe .....	9
1.1.3.3 La théorie fractale de Carpinteri .....	12
1.1.4 Validité des théories d'effet d'échelle pour les matériaux quasi-fragiles .....	12
1.1.5 La rupture des matériaux quasi-fragiles: le rôle de la FPZ .....	13
1.1.6 Modélisation de la FPZ dans le béton .....	15
1.1.6.1 Le modèle de la fissure cohésive .....	15
1.1.6.2 Le modèle Crack band .....	16
1.1.6.3 Le modèle non local.....	17
1.1.7 Caractérisation expérimentale de la FPZ .....	18
1.2 Hétérogénéité du béton & Stratégies de modélisation .....	20
1.2.1 Théorie de l'endommagement et de la plasticité .....	21
1.2.2 Théorie de la mécanique de la rupture .....	23

1.2.3	Modèles numériques adaptés pour la modélisation mésoscopique du béton .....	27
1.2.3.1	Modèles continus en éléments finis .....	27
1.2.3.2	Modèles basés sur l'utilisation des éléments « lattices » .....	28
1.2.3.3	Modèles des éléments discrets .....	28
1.3	Le phénomène de localisation: État du problème et techniques de régularisation...	30
1.3.1	Régularisation énergétique .....	31
1.3.2	Régularisation non locale .....	31
CHAPITRE 2. Aspects Énergétiques .....		34
2.1	Introduction .....	35
2.1.1	Localisation de la déformation unidimensionnelle .....	36
2.2	Application de la régularisation énergétique à un modèle isotrope endommageable	38
2.2.1	Formulation du modèle d'endommagement isotrope .....	38
2.3	Application de la régularisation énergétique au modèle isotrope endommageable.	40
2.4	Adaptation de la technique de régularisation énergétique pour la formulation du modèle plastique-endommageable .....	43
2.5	La théorie de la bande de la fissure pour une analyse bidimensionnelle .....	44
2.6	Aspects théoriques/numériques de l'approche crack band en 3D .....	48
2.7	Illustration du mécanisme de dissipation .....	50
2.7.1	Cas de la traction 1D .....	50
2.7.2	Cas de la traction 2D .....	50
2.7.3	Cas de la traction 3D .....	51
2.8	Limites d'application de la régularisation énergétique.....	53
2.9	Conclusions .....	53
CHAPITRE 3. Investigation de l'effet d'échelle sur les propriétés locales et globales .....		55
3.1	Introduction .....	56
3.2	Application de la modélisation mésoscopique au béton .....	56

3.2.1	Description des poutres testées expérimentalement.....	56
3.2.2	Description de l'approche mésoscopique adoptée & simulation des poutres entaillées.....	58
3.2.3	Maillage Éléments finis et paramètres du modèle .....	58
3.3	Détermination des paramètres de rupture par les lois d'effets d'échelle.....	60
3.3.1	Loi classique de Bazant.....	60
3.3.2	L'approche MMTS .....	60
3.4	Analyse numérique mésoscopique de l'effet d'échelle .....	64
3.4.1	Etude de l'effet d'échelle sur le comportement global.....	64
3.4.2	Effet d'échelle sur la contrainte nominale .....	65
3.4.3	Etude de l'effet d'échelle sur le comportement local.....	67
3.4.3.1	Cas des ouvertures de fissures .....	67
3.4.3.2	Cas de longueur de fissure .....	71
3.5	Effet d'échelle sur la longueur de la FPZ .....	74
3.5.1	Comparaison des différentes formules analytiques d'évolution de la FPZ.....	74
3.5.2	Variation de la FPZ: analyse numérique par l'approche mésoscopique.....	78
3.6	Effet d'échelle sur les courbes de résistances .....	83
3.6.1	Modélisation des poutres entaillées: comportement global .....	84
3.6.2	Construction des courbes de résistances à partir de l'approche mésoscopique..	85
3.6.2.1	Détermination de l'extension de fissure selon l'approche mésoscopique....	86
3.6.2.2	Détermination du taux de restitution d'énergie .....	90
3.6.2.3	Détermination de la longueur élastique équivalente selon Guinea.....	91
3.6.2.4	Courbes-R numériques.....	92
3.6.2.5	Effet d'échelle sur les courbes-R.....	97
3.7	Conclusion du chapitre.....	99
CHAPITRE 4. Evaluation des termes d'ordre supérieur de la série de Williams par une approche mésoscopique.....		100



4.1	Introduction .....	101
4.2	Détermination des paramètres de la série de Williams (Mode I).....	101
4.2.1	Les séries de Williams.....	102
4.2.2	L'approche <i>Over Deterministic Method</i> :.....	105
4.2.3	Etude numérique .....	106
4.2.4	Résultats et comparaison.....	108
4.3	Estimation numérique du Facteur d'intensité de contrainte via Cast3M.....	108
4.3.1	Méthode intégrale de contour $G \theta$ .....	109
4.3.2	La méthode des déplacements:.....	109
4.3.3	Résultats et comparaison.....	110
4.4	Détermination des paramètres de l'expansion de Williams via l'approche mésoscopique .....	110
4.4.1	Methodologie .....	110
4.4.2	Discussion des résultats.....	112
4.5	Conclusion du chapitre.....	113
CHAPITRE 5. Conclusions générales.....		114
Annexe 1 .....		116
Annexe 2 .....		118
Annexe 3 .....		119
Bibliographie.....		126

## Table des figures

Figure 1-1: Réponses contrainte-flèches pour différentes tailles des structures quasi-fragiles (Bažant 2005). .....	7
Figure 1-2: Loi d'effet d'échelle énergétique pour des structures quasi-fragiles entaillées (Bažant 2005). .....	10
Figure 1-3: Transfert d'énergie lors de l'extension de fissure infinitésimale. ....	11
Figure 1-4: Comparaisons: résultats expérimentaux / loi universelle de Bazant (Grégoire et al. 2013).....	11
Figure 1-5: Prédominance des données d'essai dans la gamme de petite taille: Histogramme base de données de ACI-445. ....	13
Figure 1-6: Comparaison entre différentes lois d'effet d'échelle (Van Mier 2012).....	13
Figure 1-7: Différents types de zones de rupture (Karihaloo 1995) avec (L= zone hachurée signifie linéaire), (N= zone rouge signifie non linéaire) et (F= zone verte signifie FPZ).....	14
Figure 1-8: Comportement non-linéaire (relation contrainte-déplacement). ....	15
Figure 1-9: Évolution de la fissure cohésive en mode I et répartition des contraintes. ....	16
Figure 1-10: Fonction adoucissante bilinéaire proposée par Petersson (Petersson 1981). ....	16
Figure 1-11: La zone de processus de rupture selon le modèle de la band de la fissure (Bažant & Oh 1983).....	17
Figure 1-12: Modélisation de la zone de fissuration: comparaison de l'approche continue et discontinue (Bažant & Oh 1983).....	17
Figure 1-13: Évolution de la zone de processus de fissuration avec un modèle non local (Jirásek 2011). ....	18
Figure 1-14: Champ de déplacement et de déformation issus de la CIN selon (Alam et al. 2012). (a) déplacement axial (b) déformation $\epsilon_{xx}$ (c) déformation dans la direction principale. ....	19
Figure 1-15: Influence de la taille des granulats sur la largeur de la FPZ.(a) résultats numériques selon (Benkemoun et al. 2016) et (b) résultats expérimentaux selon (Otsuka & Date 2000). ....	20
Figure 1-16: Échelle de modélisation: a) micro, b) meso, c) macro (selon Wittman).....	21
Figure 1-17: Zone délimitant le voisinage de la pointe d'une fissure dans un milieu fissuré. .	23

Figure 1-18: Représentation schématique de la mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente (Gangnant 2016). .....	26
Figure 1-19: Évaluation de la résistance à la propagation de la fissure (Gangnant 2016). .....	26
Figure 1-20: Approches de modélisations: a) Maillage en élément fini (Qin & Zhang 2011), b) Maillage lattice selon (Grassl et al. 2012), c) Maillage discret (Qin & Zhang 2011).....	27
Figure 2-1:a) Barreau en traction uniaxial, b) comportement bilinéaire, c) réponse post pic pour différentes discrétisations (Jirásek 2011). .....	36
Figure 2-2: a) Les valeurs de déformation pour un état de contrainte donné, b) profile de déformation. ....	37
Figure 2-3:a) Réponses force- déplacement pour différentes valeurs de $M_e$ b) le profile de déformation. ....	37
Figure 2-4: Réponse uniaxiale d'un béton standard pour un cycle traction-compression .....	40
Figure 2-5: Barreau en traction. ....	42
Figure 2-6: Courbes Force-déplacement pour $M_e = 11, 21, 31$ .....	42
Figure 2-7: Courbes Contrainte-Ouverture de fissure pour $M_e = 11, 21, 31$ . ....	42
Figure 2-8: Courbes Force-déplacement pour $M_e = 11, 21, 31$ .....	44
Figure 2-9: Évolution de l'énergie de rupture en fonction du rapport $\sigma_2 / \sigma_1$ .....	46
Figure 2-10: Maillage EF de la poutre entaillée en flexion 3 points.....	47
Figure 2-11: Réponse Force-déplacement.....	47
Figure 2-12: Évolution des composantes du tenseur de contrainte. a) Composantes cartésiennes. b) Composantes principales. ....	47
Figure 2-13: Évolution de la contrainte en fonction de la déformation dans le repère principal. ....	48
Figure 2-14: Courbes contrainte -déformation dans le repère principale.....	52
Figure 2-15: Évolution de l'énergie de rupture en fonction des rapports de contraintes $\sigma_2 / \sigma_1$ et $\sigma_3 / \sigma_1$ .....	52
Figure 3-1: Poutres D1, D2 et D3 avec des tailles géométriquement similaires.....	57
Figure 3-2: Détails de la géométrie des poutres testées. ....	57
Figure 3-3: Maillage Macro/Méso des poutres D1, D2 et D3.....	59

Figure 3-4: Courbes Force-CMOD pour les poutres D1, D2 et D3, (Béton M1). .....	64
Figure 3-5: Courbes Force-CMOD pour les poutres D1 et D2, (Béton M2). .....	65
Figure 3-6: Effet d'échelle sur la contrainte nominale (Exp-Méso).....	66
Figure 3-7: Loi d'effet d'échelle de Bazant-MMTS Vs. résultats expérimentaux et Méso .....	67
Figure 3-8: Carte de fissuration et la représentation 3D du profil d'ouverture de fissure pour D1, D2 et D3 (Béton M1-1er tirage de granulats).....	68
Figure 3-9: Evolution des ouvertures de fissures au pic de chargement-Béton M1. ....	69
Figure 3-10: Evolution des ouvertures de fissures au pic de chargement-Béton M2. ....	69
Figure 3-11: Evolution des ouvertures de fissures au pic. Comparaison M1-M2.....	69
Figure 3-12: Evolution des ouvertures de fissure à la fin de chargement-Béton M1.....	70
Figure 3-13: Evolution des ouvertures de fissure à la fin de chargement-Béton M2.....	70
Figure 3-14: Evolution des ouvertures de fissure à la fin de chargement. Comparaison M1-M2. ....	71
Figure 3-15: Evolution de la longueur de fissure à différentes étapes de chargement, Béton M1. ....	72
Figure 3-16: Evolution de la longueur de fissure à différentes étapes de chargement, Béton M2. ....	72
Figure 3-17: Evolution de la longueur relative de fissure à différentes étapes de chargement, Béton M1.....	73
Figure 3-18: Evolution de la longueur relative de fissure à différentes étapes de chargement, Béton M2.....	73
Figure 3-19: (a) Décomposition de la fissure de traction libre avec une longueur de la FPZ ( $l_p$ ), (b) en une contrainte $\sigma_0(r)$ devant le fond de la fissure et (c) la FPZ avec un champ de contrainte et un déplacement $w(s)$ . (d) $k(s)$ est le facteur d'intensité de contrainte due à une force unitaire en $s$ , $g(s,t)$ est le déplacement correspondant à la position $t$ (Karihaloo et al. 2006).....	75
Figure 3-20: Evolution de la longueur de la FPZ en utilisant la formule analytique de Karihaloo. ....	76
Figure 3-21: Décomposition de la FPZ en $n$ segment.....	77
Figure 3-22: Evolution de la longueur de la FPZ selon le modèle de Bazant, Karihaloo et le modèle MMTS .....	78

Figure 3-23: Evolution de la contrainte tangentielle au pic de chargement.....	80
Figure 3-24: Contrainte tangentielle normalisée Vs distance de la FPZ normalisée. ....	81
Figure 3-25: Evolution de la contrainte tangentielle pour une longueur de la FPZ complètement ouverte. ....	81
Figure 3-26: Contrainte tangentielle normalisée Vs longueur de la FPZ normalisées pour une FPZ complètement ouverte. ....	81
Figure 3-27: Comparaison de la longueur de la FPZ: approche méso et formule analytique (Bazant et karihaloo) .....	82
Figure 3-28: représentation de la courbe de résistance (Kumar & Choubey 2015).....	83
Figure 3-29: Courbe numérique F-CMOD: a) poutres entaillées à 20% de la hauteur, b) poutres entaillées à 50% de la hauteur.....	85
Figure 3-30: Courbes numériques force-déplacement. ....	86
Figure 3-31: Evolution de $\sigma_{\theta\theta}$ pour une FPZ entièrement ouverte a) poutre entaillée à 20%, b) poutre entaillée à 50%.....	87
Figure 3-32: Procédure de détermination de l'extension de fissure. ....	88
Figure 3-33: Longueur de la FPZ selon le principe de l'évolution de $\sigma_{\theta\theta}$ pour les poutres FN. ....	89
Figure 3-34: Courbes-R: comparaison des différentes méthodes de calcul de $G(a)$ .....	92
Figure 3-35: Comparaison entre les extensions de fissure (a) poutres FN et (b) poutres HN. ....	93
Figure 3-36: Courbes de résistance des poutres entaillées à 20% de la hauteur. ....	95
Figure 3-37: Courbes de résistance des poutres entaillées à 50% de la hauteur. ....	96
Figure 3-38: Courbes-R: influence de la taille de poutre HN. ....	97
Figure 3-39: Courbes-R: influence de la taille de poutre FN.....	97
Figure 4-1: Système de coordonnées utilisé à la pointe de la fissure.....	103
Figure 4-2: Translation et rotation du corps rigide par rapport à la pointe de la fissure.....	104
Figure 4-3: (a) Poutre entaillée sous tension uniaxiale et (b) poutre entaillée en flexion 3 points. ....	107
Figure 4-4: Maillage en élément fini pour la moitié .....	107
Figure 4-5: Evolution de la FPZ: comparaison des résultats numériques et théoriques. ....	111
Figure 5-1: Régression linéaire. ....	118

Figure 5-2: Courbes-R numérique pour la série de poutres entaillées: (a) HN400, (b) HN200, (c) HN100 et (d) HN50 mm .....	121
Figure 5-3: Courbes-R numérique pour la série de poutres entaillées: (a) FN400, (b) FN200, (c) FN100 et (d) FN50 mm .....	122
Figure 5-4: Effet d'échelle sur les courbes-R (a) poutres FN, (b) poutres HN.....	123
Figure 5-5: Isovaleurs des champs de contrainte à la fin de chargement pour la poutre entaillée FN 50mm et HN 50mm.....	124
Figure 5-6: Isovaleurs des champs de contrainte à la fin de chargement pour la poutre entaillée FN 100mm et HN 100mm.....	125

## Liste des tableaux

Tableau 2-1: Formules de $G_f$ dans le cas d'une analyse 3D. ....	49
Tableau 2-2: Résultats numériques de $G_f$ dans le cas d'une analyse 1D ( $G_f$ injectée = $150 N/m$ ). ....	50
Tableau 2-3. Résultats numériques de $G_f$ dans le cas d'une analyse 2D ( $G_f$ injectée = $150N/m$ ) .....	51
Tableau 2-4: Résultats numériques de $G_f$ dans le cas d'une analyse 3D ( $G_f$ injectée = $150N/m$ ) .....	52
Tableau 3-1: Détails des formulations du béton M1 et M2.....	56
Tableau 3-2: Dimensions des poutres (en mm).....	57
Tableau 3-3: Paramètres utilisés dans la modélisation mésoscopique.....	59
Tableau 3-4: Paramètres de rupture du béton selon la loi d'effet d'échelle de Bazant .....	63
Tableau 3-5: Paramètres de rupture selon le modèle MMTS.....	63
Tableau 3-6: Dimension de poutre, les charges au pic et contraintes nominales (Expérimentales et Numériques). ....	66
Tableau 3-7: Récapitulation des formulations théoriques de l'évolution de la FPZ. ....	77
Tableau 3-8: Dimension des poutres entaillées HN (en mm) avec ( $\alpha = 0.5$ ).....	84
Tableau 3-9: Dimension des poutres entaillées FN en (mm) avec ( $\alpha = 0.2$ ) .....	84
Tableau 3-10: Paramètres du modèle mésoscopique. ....	84
Tableau 4-1: Les termes A1-A5 pour la flexion 3Points. ....	108
Tableau 4-2: Les termes A1-A5 pour la traction directe.....	108
Tableau 4-3: Comparaison du calcul du KIC .....	110
Tableau 4-4: Les paramètres de rupture ainsi que le facteur d'intensité de contrainte pour les poutres D1, D2 et D3 obtenus en utilisant les données mésoscopiques.....	112
Tableau 4-5: Les paramètres de rupture ainsi que le facteur d'intensité de contrainte pour les poutres D1, D2 et D3 obtenus en utilisant les formules théoriques. ....	112
Tableau 5-1: Valeur de $\Delta a_c$ et $G_{Rc}$ à partir des courbes-R.....	120
Tableau 5-2: Valeur de $\Delta a_c$ et $G_{Rc}$ à partir des courbes-R.....	120

# Symboles et caractères utilisés

$\sigma_{ij}$	Tenseur de contrainte
$\epsilon_{kl}^e$	Tenseur de déformation élastique
$\epsilon_{kl}^p$	Tenseur des déformations plastiques
$C_{ijkl}^{endo}$	Tenseur d'élasticité endommagé
$\epsilon_{kl}$	Tenseur de déformation totale
$C_{ijkl}^0$	Tenseur d'élasticité initiale
$d$	Variable d'endommagement scalaire
$\epsilon_{d0}$	Seuil d'endommagement
$\xi$	Variable d'écrouissage
$B$	Paramètre contrôlant la branche descendante de la courbe adoucissante
$\langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle^+$	Partie positive du tenseur des contraintes effectives
$\langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle^-$	Partie négative du tenseur des contraintes effectives
$W$	Densité d'énergie dissipée par unité de volume
$G_f$	Energie de fissuration
$h$	Largeur de la bande de localisation
$du$	Saut de déplacement
$\epsilon^f$	Déformation de rupture (d'ouverture de fissure)
$f_{twe}$	Contrainte limite de traction pour l'élément avec défaut
$M_e$	Nombre d'élément de discrétisation
$E$	Module de Young
$P$	Déformation plastique effective



$q$	Paramètre du modèle
$w_0$	Domaine élastique dans l'espace des contraintes
$V_{elem}$	Volume de l'élément fini
$\gamma_1$	Rapport de contrainte $\sigma_2 / \sigma_1$
$\gamma_2$	Rapport de contrainte $\sigma_3 / \sigma_1$
$f_t$	Résistance à la traction du matériau
$D_0$	Taille de transition
$D, w, h$	Hauteur de poutres
$P_{max}$	Effort maximal au pic
$\emptyset$	Contrainte d'Airy
$1/\sqrt{r}$	Singularité
$\sigma_N$	Contrainte nominale
$r_c$	Longueur de la FPZ
$A_n, B_n$	Coefficients correspondant au mode I et mode II
$A_1^*, A_3^*$	Coefficients adimensionnels
$c_f, l_{p\infty}$	Longueur de fissure équivalente
$a_0$	Longueur de l'entaille initiale
$c, l_p$	longueur équivalente de la zone non linéaire de la FPZ
$S$	Portée de spécimen
$b$	Epaisseur du spécimen
$P$	Charge
$D'$	Longueur du ligament
$L_{fissure}$	Longueur de fissure
$\sigma_0(r)$	Contrainte devant le fond de la fissure
$k(s)$	Facteur d'intensité de contrainte due à une force unitaire en s

$g(s,t)$	Déplacement correspondant à la position $t$
$w(s)$	Déplacement à travers les lèvres de la FPZ
$s$	Distance mesurée depuis la pointe de la FPZ
$\sigma_{\theta\theta}$	Contrainte tangentielle
$\Delta a$	Extension de fissure
$L_{equ}, a_{eq}$	Longueur élastique équivalente
$G_R(a)$	La résistance à la propagation de fissure
$G(a)$	Taux de restitution d'énergie
$g(\alpha)$	Taux adimensionnel de restitution d'énergie
$C(\alpha)$	Complaisance d'un spécimen
$\beta$	Rapport de la distance entre appuis sur la hauteur de poutre
$\alpha = \frac{a}{D}$	Rapport de la longueur d'entaille sur la hauteur de poutre
$n$	Ordre des termes dans la série infinie de Williams
$r$ et $\theta$	Coordonnées polaires du point M
$A_n$ et $B_n$	Coefficients correspondant respectivement aux mode I et mode II
T	Contrainte-T
$\mu$	Module de cisaillement
$k$	Constante de Kolosov
$f_n^1(r, \theta), g_n^1(r, \theta)$	Fonctions polaires
$x$ et $y$	coordonnées cartésiennes
$u$ et $v$	Déplacements des nœuds $k$ suivant l'axe $Ox$ et $Oy$
$\sigma_{yy}$	Contrainte normale
$K_\alpha$	Facteur d'intensité de contrainte avec ( $\alpha = I, II, III$ )
$\gamma$	Energie de surface

$W_p$	Energie potentielle totale
$W_{el}$	Energie élastique
$W_{ext}$	Energie dû aux efforts extérieurs
<i>FPZ</i>	Zone de rupture (Fracture Process Zone)
<i>CMOD</i>	Ouverture des lèvres d'entaille (Crack mouth opening displacements)
MLER	Mécanique linéaire élastique de la rupture
MLEReq	Mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente
MMTS	Modified Maximum Tangential Stress model
MTS	Maximum Tangential Stress model
OuvFiss	Procédure d'ouverture de fissure

# Introduction générale

## Problématique, contexte de recherche et verrous scientifiques

Le béton fait toujours l'objet de recherches fondamentales et d'investigations expérimentales. Aujourd'hui, une évidence expérimentale largement reconnue pour les structures faites de ce matériau est que les propriétés de rupture (contrainte nominale, ténacité, l'énergie de rupture...) sont fortement affectées par la taille des spécimens. Les effets de changement d'échelle impactent directement le comportement mécanique des structures en béton.

Les caractéristiques mécaniques et les réponses des éprouvettes faites de ce matériau obtenues aux laboratoires ne sont pas nécessairement identiques à ceux des ouvrages en service. Un problème majeur qui se pose vient du fait que l'identification des propriétés mécaniques des structures de génie civil de grande taille se fait sur des éléments de laboratoire qui sont d'une taille nettement plus inférieure. En effet, la gamme de taille de la plupart des essais d'expériences au laboratoire est limitée et ne dépasse pas généralement 1: 32. À l'échelle du laboratoire (éprouvettes, poteau/poutre), le comportement est plutôt quasi-fragile or il est parfaitement fragile à l'échelle des ouvrages (barrage, pile de ponts...).

Le phénomène de l'effet d'échelle peut trouver son explication à une échelle plus fine ; celle du matériau. Si on se place à l'échelle des constituants du béton, on observe que le béton est un matériau fortement hétérogène constitué principalement de granulats, de mortier (avec ses composantes) et d'une zone de transition entre les deux. Le comportement interactionnel est à l'origine du développement d'une zone de micro-fissure à la pointe d'une fissure amorcée. L'accumulation de la microfissuration, leurs interactions et leurs coalescences dans cette zone, appelée *Fracture Process Zone* (la FPZ), entraîne un adoucissement dans le comportement suite à une localisation importante des déformations dans cette zone.

De plus, la FPZ est un lieu de redistribution de contraintes. Le transfert des contraintes est dû à différents mécanismes de durcissement qui se manifestent dans la FPZ. Ce transfert de contraintes à travers les lèvres de la fissure est un phénomène dissipatif. Une fois toute l'énergie stockée dans la structure est libérée, la fissure se trouve dans un *état libre* et une fissure macroscopique est alors amorcée et continue à se propager d'une manière *stationnaire*. On passe d'un comportement *non local*, décrit par des interactions à un comportement local piloté par la propagation de la fissure déjà amorcée. La redistribution des contraintes accompagnant le phénomène de libération d'énergie pour faire progresser une fissure (ou plus généralement pour le développement de la FPZ) associée au caractère du comportement interactionnel (*local /non local*) des déformations dans la FPZ, provoquent des phénomènes complexes tels que les effets d'échelle.

D'une manière générale, on peut constater qu'au cours d'un processus de fissuration où le comportement local est régi par une dissipation d'énergie (par unité de surface) en réponse à une contrainte appliquée, la relation entre ces deux paramètres (énergie/contrainte) révèle une dépendance dimensionnelle qui peut se manifester à différentes échelles.

L'objectif dans cette thèse vise à la caractérisation du comportement de fissuration et de la rupture dans le matériau béton. Le béton est un matériau de nature hétérogène. La modélisation de son comportement impose des arbitrages entre le phénomène d'étude d'intérêt particulier et l'échelle de modélisation selon l'échelle d'observation cible. Lors du processus de fissuration, plusieurs micro-mécanismes prennent place entre les constituants du béton et plus généralement entre les granulats et le mortier conduisant au développement de la zone FPZ. Cette zone s'en trouve assujettie à l'hétérogénéité du béton. Il est donc essentiel de prendre en compte correctement le caractère hétérogène du béton pour prédire avec le plus de réalisme le processus de dégradation dans un calcul numérique. Deux échelles de modélisation sont favorables à l'étude des phénomènes inhérents au caractère hétérogène du béton: l'échelle microscopique qui traite les phénomènes dont la taille est de l'ordre du nanomètre (hydratation du ciment) et l'échelle mésoscopique qui traite les phénomènes dont la taille est de l'ordre du centimètre (interaction particule/granulaire).

Le sujet d'étude d'intérêt principal dans cette thèse est la zone du processus de fissuration (FPZ) qui est de taille d'ordre centimétrique. La modélisation à l'échelle microscopique même si elle permet une description appropriée de la FPZ s'avère très coûteuse en termes de paramètres et de temps de calcul et donc la modélisation mésoscopique lui reste grandement favorable. Cela nous a amenés vers une description explicite de matériau par le biais d'un béton numérique biphasique à une échelle mésoscopique. L'approche de modélisation du béton est faite en éléments finis par l'intermédiaire d'un modèle d'endommagement isotrope.

Le recours à des lois de comportement non linéaire pour la modélisation numérique par éléments finis d'un processus de rupture est toujours rattrapé par la problématique de l'objectivité des résultats de calcul vis-à-vis du maillage. Là encore, le rôle de la FPZ est déterminant. En effet, le caractère non local des interactions au sein de la zone de rupture FPZ devrait être décrit par des processus numériques intégrant des grandeurs non locales permettant ainsi de décrire correctement le processus dissipatif. Pour assurer une bonne dissipation, au moins une solution énergétique devrait être adoptée.

Donc, il nous a paru fondamental de traiter ce problème de perte d'objectivité par des techniques de régularisation afin d'enrichir la description mécanique du milieu pour décrire la rupture. Dans ces travaux de thèse, la méthode énergétique simple (voir simpliste dans certains cas) basée sur le modèle *de bandes de fissures* proposé par Bazant dont le principe est d'assurer que l'énergie dissipée lors de la fissuration du matériau reste constante quelque soit la finesse du maillage en élément fini, est adoptée. Cette méthode est séduisante par sa simplicité de mise en œuvre. Elle a été validée dans le traitement de comportement en traction dans le cas où l'état de contrainte est uniaxial par plusieurs auteurs. Cependant dans le cas où

l'état de contrainte n'est pas uniaxial, son utilisation devrait faire l'objet d'attention particulière.

## **Aspects d'ingénierie pratique et Effets d'échelles**

Un des piliers fondamentaux de l'étude du comportement à la fissuration et à la rupture des structures de génie civil est d'assurer la sécurité et un dimensionnement optimal. Le phénomène de rupture qui peut être abordé par plusieurs branches de la mécanique de la rupture doit être étudié avec précaution dans le cas des matériaux quasi-fragiles. Un problème majeur est que les grandes structures réelles se rompent généralement sous une charge de défaillance plus petite que celles des spécimens de taille de laboratoire.

Pendant un certain temps, la théorie de la résistance basée sur l'analyse limite a continué à ignorer la concentration de contrainte à la pointe d'une discontinuité et prévoyait ainsi une contrainte nominale à la rupture indépendante de la taille de la structure. Fondamentalement, l'analyse limite ne prévoit pas d'effet d'échelle. Elle est donc théoriquement inacceptable vue quelle est en contradiction avec les évidences expérimentales qui montrent une dépendance forte de la contrainte nominale à la taille de spécimen. De toute évidence, ce critère de résistance donne une extrapolation incorrecte et dangereuse aux grandes tailles caractéristiques des structures réelles. Plusieurs catastrophes structurelles (par exemple ; le pont de Malpasset en France, le pont Koror-Babelthap à Palau...), qui sont en partie attribuées à une négligence de l'effet d'échelle, et des évidences expérimentales révèlent la nécessité d'introduire l'effet d'échelle dans les règles du dimensionnement.

D'autre part, la mécanique linéaire de la rupture a été introduite dans certains codes de calcul, cependant cette théorie est favorable uniquement pour l'étude de la rupture de structures de grande échelle caractérisées par une petite taille de la FPZ.

Le dimensionnement qui se fait à l'échelle globale doit évoluer pour intégrer de manière correcte les phénomènes qui se passent à l'échelle du matériau. Cette étape de dimensionnement nécessite le développement de modèles capables de reproduire ces effets de changement d'échelle. Une meilleure compréhension du comportement du béton permettrait a priori de revoir au moins le coefficient de sécurité appliqué dans la conception.

Cette thèse est une contribution numérique à la compréhension de l'origine du phénomène de l'effet d'échelle à une échelle plus fine pour pouvoir l'exploiter, plus tard, à une échelle globale de dimensionnement.

## Structure et méthodologie

Ce mémoire est organisé comme suit:

Le premier chapitre est une étude bibliographique. Premièrement, le phénomène de l'effet d'échelle ainsi que le processus de rupture dans le béton sont abordés en se concentrant sur le rôle de la zone de processus de rupture (FPZ). Différents critères de l'effet d'échelle ainsi que différents modèles pour la simulation de la zone de rupture sont présentés. Les principales approches numériques adaptées à la description de la mésostructure du béton sont discutées. Les concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture et de l'endommagement/plasticité adaptés à l'étude de la rupture du béton sont brièvement présentés.

Dans le deuxième chapitre, la technique de régularisation énergétique basée sur l'approche Crack Band est étudiée. Les sources d'erreurs liées à l'utilisation de cette approche dans le cas d'un calcul de structure générant des états de contraintes bidimensionnels ou tridimensionnels sont identifiées. La prise en compte de la dissipation plastique dans la formulation de l'énergie de fissuration est également discutée. Des développements mathématiques et des simulations numériques sont présentés afin de comprendre les limites d'application de cette méthode.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude numérique de l'effet d'échelle dans les structures en béton. L'étude numérique est basée sur une approche de modélisation à une échelle mésoscopique réalisée sur deux séries de poutres en béton testées expérimentalement en flexion 3 points dans deux laboratoires distincts. Le comportement non linéaire du béton est simulé par l'intermédiaire d'un modèle d'endommagement isotrope régularisé détaillé dans le chapitre précédent. Nous présentons dans un premier temps une étude de l'effet d'échelle sur l'ouverture de fissure et l'évolution de la longueur de fissure en comparant les résultats numériques avec les résultats expérimentaux. Dans un deuxième temps, deux lois analytiques de l'effet d'échelle sont utilisées pour analyser les données expérimentales : la loi d'effet d'échelle de Bazant et le modèle MMTS.

En s'inspirant des approches basées sur les enrichissements des champs de contraintes, nous essayons d'investiguer finement le comportement de la FPZ, son influence sur la rupture et l'effet d'échelle qui lui est associé. Finalement, une étude de l'effet d'échelle sur la courbe-R est réalisée en utilisant la même approche mésoscopique. Les deux paramètres clés de la courbe-R (l'extension de la fissure et l'énergie de fissuration) sont déterminés numériquement.

Dans le quatrième chapitre, les résultats de la modélisation mésoscopique seront exploités pour l'évaluation des termes d'ordres supérieurs dans la série de Williams. Ce chapitre se veut beaucoup plus comme une vérification de la théorie de l'enrichissement qu'une simple exploitation de cette théorie.

# CHAPITRE 1. **Etude Bibliographique**



## **1.1 Effet d'échelle et rupture des matériaux quasi-fragiles: influence de la FPZ**

### **1.1.1 Introduction**

La caractéristique saillante des matériaux quasi fragiles est un effet d'échelle complexe qui se manifeste à l'échelle de la structure. Le comportement à la rupture du béton est régi par sa nature hétérogène; la dégradation par fissuration de ce matériau est caractérisée par le développement d'une zone de dissipation d'énergie de taille non négligeable localisée à la pointe de la fissure communément appelée la zone de fissuration (*Fracture Process Zone* (FPZ)). Cette zone libère une quantité d'énergie à chaque étape de chargement accompagnée d'une redistribution de contrainte dans la structure. De nombreux chercheurs s'accordent à penser que cette zone est la cause principale de la présence d'un effet d'échelle dans les structures faites de matériaux quasi-fragiles comme le béton (Bažant & Planas 1997; Hu & Duan 2008; Ayatollahi & Akbardoost 2012, etc.). Une description réaliste du processus de rupture nécessite donc une prise en compte du rôle de la FPZ tout en prenant en compte le caractère hétérogène du béton. En effet, ces deux notions : hétérogénéité et fissuration sont naturellement liées et extrêmement complémentaires. D'un point de vue de la modélisation numérique, la description matérielle doit s'orienter vers une échelle plus fine qui permettrait de représenter explicitement les hétérogénéités et leurs interactions.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une revue bibliographique qui servira de base à la compréhension des thèmes développés ultérieurement. Le phénomène de l'effet d'échelle ainsi que le processus de rupture dans le béton sont discutés en se focalisant sur le rôle de la FPZ. Différents critères décrivant l'effet d'échelle ainsi que différents modèles de la simulation de la zone de fissuration sont présentés. Les concepts fondamentaux de la mécanique de l'endommagement et de la mécanique de la rupture appliqués à l'étude du comportement du béton sont brièvement discutés.

### **1.1.2 Effet d'échelle dans les structures en béton: une explication à l'échelle du matériau**

Pour les structures faites d'un matériau quasi-fragile comme le béton, des observations expérimentales (Nallathambi et al. 1984; Mindess 1984; Bazant & Pfeiffer 1987) ont montré que les propriétés de rupture (telle que la ténacité, l'énergie de rupture...) sont fortement affectées par la taille des spécimens testés. Le changement d'échelle a une influence importante et directe sur le comportement mécanique du matériau béton. En effet, sous une sollicitation uniaxiale, l'augmentation de la taille du spécimen entraîne une diminution de la contrainte nominale des structures (Figure 1-1) censée être une propriété intrinsèque. La réponse post-pic (ductilité) est également affectée. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet d'échelle. Bien que ce phénomène ait été largement mis en évidence expérimentalement par plusieurs auteurs pour le cas de divers matériaux et géométries, son explication pour le cas du béton (hétérogène) reste toujours un sujet d'actualité.

La gamme dimensionnelle de la plupart des expériences menées au laboratoire est limitée. Elle ne dépasse pas 1:32. Le comportement du béton à l'échelle du laboratoire (poteau/éprouvettes) est quasi-fragile et est parfaitement fragile à l'échelle des ouvrages. Cependant, l'extrapolation des résultats du laboratoire aux dimensions structurelles pratiques est inévitable et nécessite de prendre en compte ces effets de changement d'échelles.

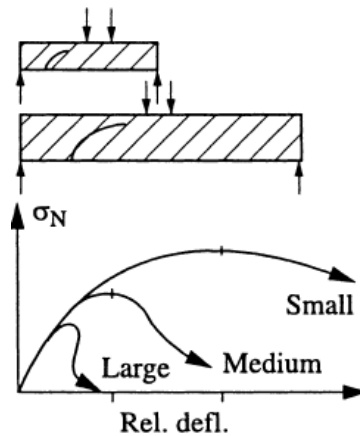


Figure 1-1: Réponses contrainte-flèches pour différentes tailles des structures quasi-fragiles (Bažant 2005).

Ce phénomène peut trouver, en partie, son explication à une échelle plus fine; celle du matériau. En effet, le béton est un matériau fortement hétérogène constitué principalement de granulats, de mortier et d'une zone de transition entre les deux. Lors d'une sollicitation, la fissuration est accompagnée d'interactions entre les constituants donnant lieu à des redistributions de certaines propriétés cinématiques et statiques.

Naturellement, la FPZ est un lieu de redistribution de contraintes. Le transfert des contraintes est dû à différents mécanismes de durcissement qui se manifestent dans la FPZ. Ce transfert de contraintes à travers les lèvres de la fissure est un phénomène dissipatif. Une fois toute l'énergie stockée libérée, la fissure se trouve dans un état libre et une fissure macroscopique est alors amorcée et continue à se propager d'une manière *stationnaire*. On passe d'une phase d'interactions d'un caractère *non local* à une phase de localisation provoquant un adoucissement associé à la rupture. Les phénomènes accompagnant le passage d'une phase *non locale* à une phase de localisation (redistribution des contraintes, libération d'énergie associée à la propagation des fissures ou plus généralement au développement de la FPZ, adoucissement, etc.) sont à l'origine de cette dépendance dimensionnelle qui se manifeste à l'échelle de la structure. De ce point de vue, l'effet d'échelle est considéré comme un phénomène énergétique.

### 1.1.3 Analyse de l'effet d'échelle dans les structures quasi-fragiles: théories de base et lois d'effets d'échelle

Historiquement, différentes approches ont été proposées pour expliquer et prédire les effets d'échelle. Le matériau quasi-fragile qui a fait l'objet des recherches les plus nombreuses

durant la plus longue période est le béton. De par sa nature hétérogène, des théories de nature encore plus hétérogène ont été développées pour décrire cet effet d'échelle, nous citerons :

- La théorie statistique de la distribution aléatoire de la résistance.
- La théorie de la fractalité de la fissure.
- La théorie déterministe de Bazant.

### 1.1.3.1 La théorie statistique

La loi d'effet d'échelle la plus ancienne est celle basée sur la théorie statistique de la résistance aléatoire de Weibull (Weibull 1939), connu aussi sous le nom du *modèle du maillon le plus faible* qui prédit une diminution de la résistance avec augmentation du volume de la structure.

Une généralisation tridimensionnelle du modèle du maillon le plus faible pour une chaîne avec des maillons de résistance aléatoire conduit à la distribution suivante

$$P(\sigma_N) = 1 - \exp\left[- \int_V c[\sigma(x), \sigma_N] dV(x)\right] \quad (1.1)$$

$P$  représente la probabilité pour qu'une structure rompe avec une contrainte nominale  $\sigma_N$  dès que la fissure macroscopique est initiée à partir d'une microfissure ou d'un défaut.  $\sigma$  est le champ de contraintes juste avant la ruine,  $V$  représente le volume de la structure et  $c(\sigma)$  est la fonction donnant la répartition spatiale de la probabilité de ruine du matériau.

La loi d'effet d'échelle probabiliste stipule que la probabilité de rencontrer un défaut est plus importante à mesure que le volume ( $V$ ) du matériau ou de la structure augmente. Ainsi une décroissance de la résistance du volume totale est alors observée. Cet effet d'échelle a été constaté lors des essais de traction sur les éprouvettes de volume du béton par (Rossi et al. 1994) ou ils remarquaient que plus le volume des éprouvettes est important et plus la probabilité de rencontrer un défaut activé à une contrainte faible augmente entraînant une augmentation de la probabilité de ruine.

Il est aujourd'hui largement reconnu (Bažant 1993) que la validité de la théorie de Weibull est limitée aux structures à rupture fragile qui sont caractérisées par la présence d'une petite taille de la FPZ concentrée à la pointe de la fissure causant une redistribution de contrainte négligeable à l'échelle globale.

En effet, la rupture des matériaux quasi-fragiles est marquée par une redistribution de contrainte qui se manifeste dans la FPZ conduisant à la libération de l'énergie stockée dans le matériau nécessaire pour une croissance importante et stable de la fissuration. C'est à l'issue de cette observation locale à l'échelle du matériau que c'est fondée l'explication énergétique de l'effet d'échelle dont le principe est purement déterministe stipulant que l'effet d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles est énergétique plutôt que statistique.

### 1.1.3.2 La théorie déterministe

Leicester (Leicester 1969) est, semble-t-il, le premier à avoir effectué une étude déterministe sur l'effet d'échelle. Il a affirmé que l'effet d'échelle dans les matériaux quasi fragiles comme le béton est dû à deux concepts: l'inhomogénéité du matériau et la présence de défauts géométrique telle que l'existence d'une entaille, fissure, etc. Il a expliqué que la zone locale inélastique à la pointe de la fissure joue un rôle majeur dans la rupture du spécimen.

Plus tard, il a été démontré analytiquement par Bazant (Bazant 1976) que la localisation de l'endommagement due à un comportement adoucissant engendre un effet d'échelle sur la résistance maximale et sur la dissipation d'énergie post-pic des structures. Il supposait que pour les matériaux quasi-fragiles, une bande de fissures est générée devant la pointe de la fissure et que la rupture aura lieu lorsque cette bande se propage causant la libération de l'énergie. Il stipule ainsi que cette énergie libérée est dépendante de la longueur et de l'aire de la bande de fissures, ceci fut le principe du *Crack Band Model* (Bažant & Oh 1983). Ensuite, Bazant (Bažant 1984) a utilisé le critère énergétique de Griffith pour proposer un critère d'effet d'échelle appelé la loi d'effet d'échelle (en anglais *Size Effect Law* (SEL)), montré par un diagramme bi-logarithmique sur la Figure 1-2.

La loi d'effet d'échelle pour les structures avec des entailles ou de grandes fissures est donnée par

$$\sigma_N = \frac{Bf_t}{\sqrt{1+D/D_0}} \quad (1.2)$$

Avec

$\sigma_N$  est la contrainte nominale,  $D$  est la taille caractéristique de la structure,  $B$  et  $D_0$  sont des constantes empiriques qui peuvent être déterminées par calibration des résultats expérimentaux pour des spécimens géométriquement similaires pour différentes tailles, ces deux paramètres dépendent de la géométrie de structure.  $f_t$  est la résistance à la traction du matériau.

Il existe deux comportements asymptotiques de la loi d'effet d'échelle: 1) La théorie de résistance basée sur un critère de résistance (plasticité, analyse limite) et 2) la mécanique linéaire de la rupture (LEFM). Le point d'intersection entre ces deux comportements est représenté par une constante  $D_0$  dépendante de la géométrie, appelée *taille de transition*. Évidemment, pour le cas des structures de petite taille ( $D \ll D_0$ ), la FPZ imprégnerait l'intégralité du volume de ces structures et la rupture se manifeste sans propagation concrète de fissure. Le comportement est prévu d'être ductile induisant un effet d'échelle négligeable.

L'application du critère de résistance (analyse limite) basée sur la plasticité (ou autre mécanisme) est donc convenable pour l'estimation de la contrainte nominale.

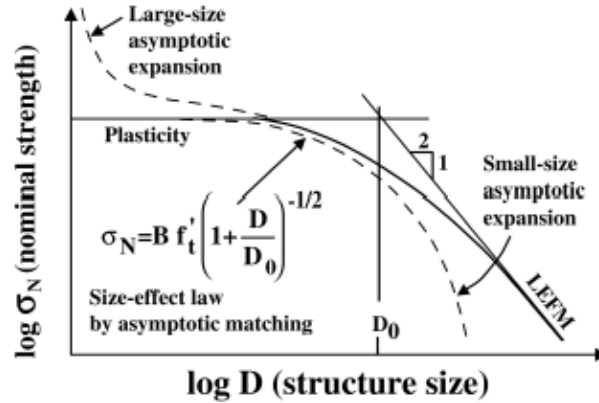


Figure 1-2: Loi d'effet d'échelle énergétique pour des structures quasi-fragiles entaillées (Bažant 2005).

D'autre part, pour les grandes tailles (c.-à-d. pour  $D \gg D_0$ ), la loi prévoit un effet d'échelle décrit par la mécanique linéaire de la rupture (MLER) c'est-à-dire que la contrainte nominale  $\sigma_N$  est inversement proportionnelle à la racine carrée de la dimension structurelle, comme le montre la Figure 1-2. Contrairement aux petites structures, la FPZ occupe une petite fraction négligeable du volume totale d'une structure infiniment grande. Dans ce cas, la majeure partie de la structure est élastique, ce qui implique que la FPZ est exposée à un champ de déplacement et de contrainte élastique asymptotique à la pointe ce qui rend valide l'application de la mécanique linéaire de la rupture.

Pour un matériau quasi-fragile comme le béton, il présente un effet d'échelle de transition entre le critère de résistance et la MLER. Bazant et Planas (Bažant & Planas 1997) ont présenté une approche simple montrant l'effet d'échelle de transition. Ils supposaient que pour une plaque entaillée de largeur ( $D$ ) et d'épaisseur ( $B$ ) (Figure 1-3) avec une extension de fissure infinitésimale  $\Delta a$ , l'approximation du taux de libération d'énergie  $2k(a_0 + c_f)B\Delta a\sigma_N^2 / 2E$  doit être égale à l'énergie requise pour l'extension de fissure  $BG_f\Delta a$ .

$$2k(a_0 + c_f)B\Delta a\sigma_N^2 / 2E = BG_f\Delta a \quad (1.3)$$

La résolution de cette égalité conduit à l'équation (1.2), qui représente l'effet d'échelle de transition applicable pour une gamme de taille de structures de béton les plus pratiques (une taille allant jusqu'à environ 1:20 (Bažant & Kazemi 1990)). Une équation qui est en bon accord avec les deux comportements extrêmes d'effets d'échelle définis par l'analyse plastique et la mécanique linéaire de la rupture MLER.

Analytiquement, la formule proposée par Bazant (équation (1.2)) a été obtenue par d'autres manières : à partir du modèle de fissure cohésive ((Saouma et al. 2003), (Bažant 2005)), par des expansions asymptotiques de la mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente (Bažant 1997). Cette formule a également été vérifiée par des simulations numériques Elément Finis en utilisant des modèles non locaux, des éléments discrets ou encore par le

modèle de la bande de la fissure (Planas et al. 2001). D'autres chercheurs (Kim et al. 1999) et Morel (Morel 2008) ont proposé des modifications à cette loi d'effet d'échelle.

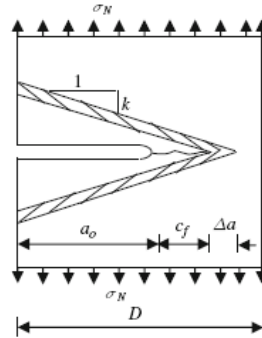


Figure 1-3: Transfert d'énergie lors de l'extension de fissure infinitésimale.

Plus récemment, Bazant a proposé une loi d'effet d'échelle avec une formulation mathématique unique permettant une transition de toutes les propriétés asymptotiques pour les grandes et petites tailles à la fois ; et pour des structures entaillées et non entaillées. Cette loi appelée *loi universelle de l'effet d'échelle* (Bažant & Yu 2009) est définie par

$$\sigma_N = \left[ \frac{EG_f}{g'_0(\alpha_0)c_f + g_0(\alpha_0)D} \right]^{1/2} \left[ 1 - \frac{rc_f^2 g_0'' e^{-k\alpha_0^2}}{4(l_p + D)(g_0(\alpha_0)D + g'_0(\alpha_0)c_f)} \right]^{1/r} \quad (1.4)$$

Avec  $\sigma_N$  est la contrainte nominale à la rupture pour une dimension de structure  $D$ ,  $G_f$  et  $c_f$  sont l'énergie de rupture et la longueur effective de la FPZ respectivement,  $g_0 = g(\alpha_0)$ ,  $g'_0 = g'(\alpha_0)$ ,  $g''_0 = g''(\alpha_0)$  avec  $g$  est une fonction de forme géométrique fonction du rapport entaille/profondeur ( $\alpha_0$ ),  $l_p$  est une longueur caractéristique matérielle,  $r$ ,  $k$  sont des paramètres.

Une validation expérimentale de la loi universelle pour trois géométries différentes pour quatre tailles homothétiques entaillées et non entaillées confectionnées à partir d'une même formulation du béton a été réalisée dans (Grégoire et al. 2013).

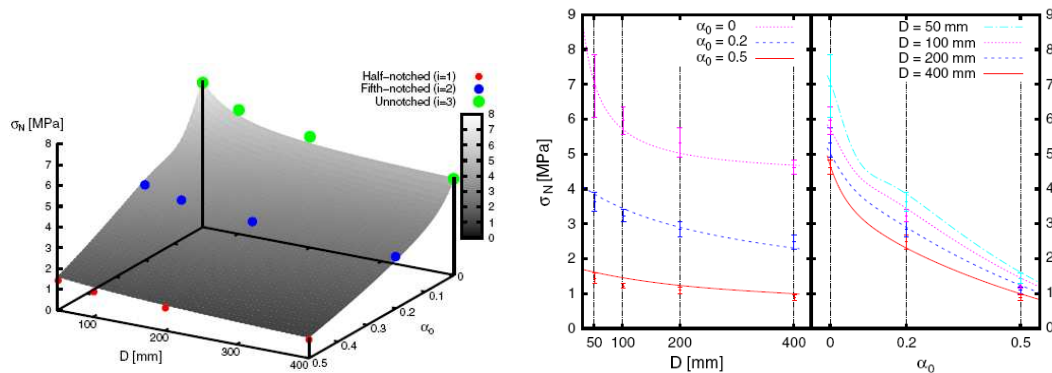


Figure 1-4: Comparaisons: résultats expérimentaux / loi universelle de Bazant (Grégoire et al. 2013).

Les auteurs ont montré clairement que la loi universelle de Bazant permet de décrire correctement la rupture en termes de contraintes maximales au pic (Figure 1-4).

### 1.1.3.3 La théorie fractale de Carpinteri

Carpinteri (Carpinteri 1989) a suggéré un critère d'effet d'échelle pour les spécimens non entaillés en utilisant le théorème fractal de Mandelbort (Mandelbrot 1982). En considérant la nature fractale du processus de rupture, Carpinteri et al (Carpinteri et al. 1994) ont proposé la loi multifractale (*multifractal scaling law (MFSL)*). Toutefois, cette loi n'a pas de base déterministe puisque les argumentations proposées ne sont basées ni sur une analyse mécanique ni sur des considérations énergétiques, mais plutôt sur des arguments strictement géométriques. Selon ces auteurs, la source principale de l'effet d'échelle dans le béton est liée à la distribution des caractéristiques fractales des surfaces de rupture ou de microfissures à différentes échelles d'observation.

La loi d'effet d'échelle proposée par Carpinteri s'écrit:

$$\frac{f_t}{f_t'} = \beta \sqrt{1 + \frac{l_M}{D}} \quad (1.5)$$

avec  $f_t$  la résistance du matériau,  $D$  la taille de la structure,  $f_t'$  la résistance maximale du matériau,  $l_M$  une longueur caractéristique qui dépend du matériau et de la géométrie,  $\beta$  un paramètre de la loi. Bien que prometteuse, l'utilisation de ce type de formulation fait l'objet de nombreuses discussions (Bažant & Yavari 2005; Carpinteri et al. 2007) qui remettent en cause les hypothèses et les champs d'application de la théorie fractale dans le cas de la fissuration.

Il existe d'autres critères d'effet d'échelle proposés par d'autres chercheurs. Par exemple, et pour n'en citer que quelques-uns (Planas et al. 1997; Li & Zhang 2003; Chang et al. 2002; van Vliet & van Mier 2000; Arslan & Ince 1996; Gutiérrez & De Borst 1999; Jenq & Shah 1985; Cornetti et al. 2006; Karihaloo 1999; (Ayatollahi & Akbardoost 2012)). Comme tout critère de rupture, chacun de ces critères offre des avantages et possède des limites d'applications.

### 1.1.4 Validité des théories d'effet d'échelle pour les matériaux quasi-fragiles

Les trois théories d'effets d'échelle citées précédemment, quoi qu'elles soient largement utilisées aujourd'hui, le débat concernant leur pertinence et validité reste un sujet de discussion. Une des raisons principales est l'insuffisance de données expérimentales qui permettent de trancher de manière concrète entre les différentes théories.

Des essais à grandes échelles restent assez difficiles à réaliser (voir par exemple la Figure 1-5 qui illustre bien l'absence de données de grande échelle), ils ont tendance à avoir un comportement plus fragile que les spécimens habituels du laboratoire.

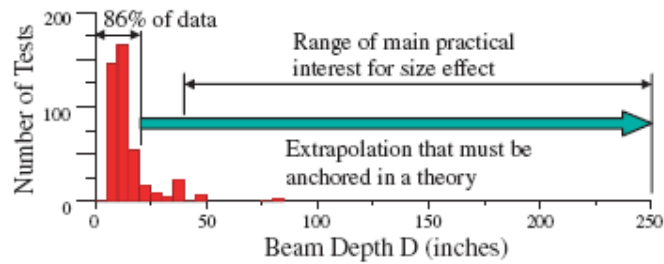


Figure 1-5: Prédominance des données d'essai dans la gamme de petite taille: Histogramme base de données de ACI-445.

La majorité des théories prévoient des résultats similaires pour des gammes d'essais à l'échelle du laboratoire, mais pas pour des structures à grande échelle. La Figure 1-6 montre une comparaison de différents modèles d'effet d'échelle sur un diagramme logarithmique ainsi que la gamme de données expérimentales disponibles. Dans (Karihaloo et al. 2003), plusieurs modèles d'effet d'échelle ont été récemment comparés. Cependant, aucune conclusion n'a été clairement prise.

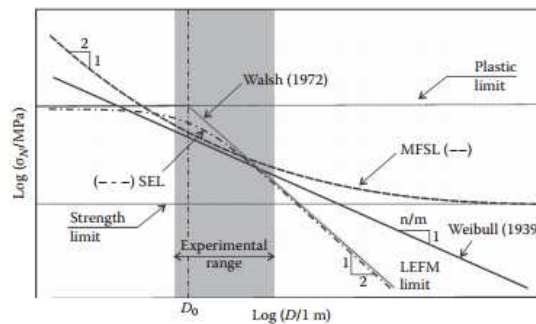


Figure 1-6: Comparaison entre différentes lois d'effet d'échelle (Van Mier 2012).

### 1.1.5 La rupture des matériaux quasi-fragiles: le rôle de la FPZ

La rupture dans les matériaux quasi-fragiles tels que le béton est caractérisée par l'existence d'une large zone non-linéaire à la pointe de la fissure. Cette zone se compose de deux sous-zones non linéaires: la première est une zone de microfissuration appelée en anglais *Fracture process zone* qui est caractérisée par un adoucissement progressif à savoir une décroissance de la contrainte durant l'augmentation de la déformation et une zone plastique non linéaire, mais en l'occurrence non adoucissante. Dans la zone plastique, la contrainte soit elle augmente lors de l'augmentation des déformations, ou bien reste constante.

Le comportement de rupture du matériau est influencé par le rapport de ces deux zones non-linéaires ou plus spécifiquement par le rapport entre la zone non-linéaire et la taille de la structure qui définit la réponse macroscopique d'une structure.

La Figure 1-7 représente les différents types des zones de rupture pour différents matériaux : fragile, ductile et quasi-fragile. La mécanique linéaire de la rupture (MLER) peut être appliquée aux matériaux présentant une taille négligeable de la FPZ (Figure 1-7a). Le



deuxième cas de comportement non linéaire est celui des matériaux ductiles dans lesquels la zone non linéaire caractérisée par des phénomènes de durcissement élasto-plastique parfait ou avec écrouissage est plus importante que la zone dans laquelle la rupture du matériau prend naissance (Figure 1-7b). Ce type de comportement peut être traité par des lois élasto-plastique classiques. Étant donné que la taille de la FPZ dans les matériaux quasi fragiles est souvent considérable comparée à la taille de la structure et qu'elle occupe aussi tout l'espace de la zone non linéaire, les conditions requises pour l'application de la MLER ne sont pas satisfaites et par conséquent, elle ne fournit pas de prédictions fiables pour le comportement de la rupture de ces matériaux (Figure 1-7c). Dans ce cas, le recours à la mécanique non linéaire de la rupture est requis. Par conséquent, pour appliquer la mécanique non linéaire de la rupture au béton, il est nécessaire de bien comprendre et de caractériser la FPZ, en particulier sa taille pour pouvoir établir un modèle approprié (voir section suivante).

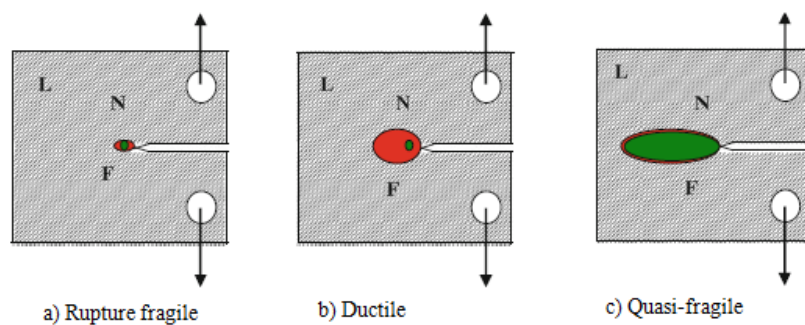


Figure 1-7: Différents types de zones de rupture (Karihaloo 1995) avec (L= zone hachurée signifie linéaire), (N= zone rouge signifie non linéaire) et (F= zone verte signifie FPZ).

Les différents comportements non-linéaires (courbes contrainte-déplacement) sous traction uniaxiale pour le cas des trois types de matériaux cités précédemment sont représentés sur la Figure 1-8.

L'existence de la zone du processus de rupture (FPZ) devant une fissure ouverte pose un défi analytique dans le cadre de la mécanique continue des solides pour l'étude de la rupture du béton, car d'un point de vue macroscopique, cette zone ne peut être caractérisée ni comme une région continue ni comme une région discontinue !

En effet, il s'agit d'une zone partiellement endommagée qui a une capacité de transférer les contraintes dues à diverses activités de microfissuration, c'est donc une zone de transition entre une discontinuité géométrique complète (macro fissure) dans laquelle les contraintes et les déformations sont discontinues et la zone continue intacte du matériau qui reste élastique. La traduction numérique et analytique du comportement de cette zone a donné lieu aux développements de plusieurs modèles et méthodes numériques.

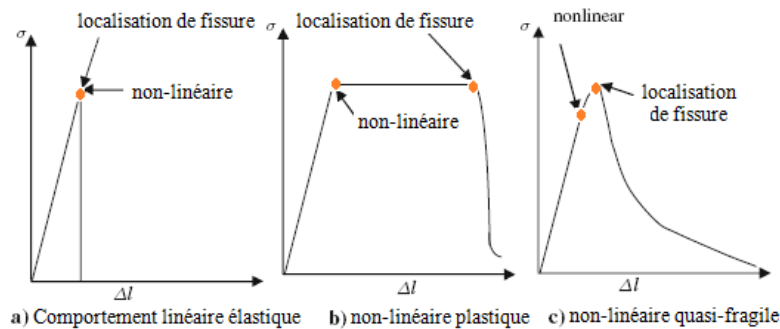


Figure 1-8: Comportement non-linéaire (relation contrainte-déplacement).

### 1.1.6 Modélisation de la FPZ dans le béton

Étant donné qu'il est largement admis que le processus de rupture dans le béton et d'autres matériaux quasi-fragiles provient principalement de la libération progressive des contraintes ou de l'adoucissement dans la zone endommagée (la dite FPZ), une modélisation réaliste de cette zone devient primordiale pour une description correcte du processus de fissuration dans ce matériau. Plusieurs modèles mathématiques et numériques ont été développés pour la simulation de la FPZ sous diverses conditions de chargement. Deux concepts pour la modélisation de la FPZ ont connu de grands succès: l'approche de la fissure cohésive (*discrete-crack*) et l'approche de la fissure continue (*crack band, smeared-crack*).

#### 1.1.6.1 Le modèle de la fissure cohésive

En s'inspirant des modèles de Dugdale-Barenblatt (Barenblatt 1962), Hillerborg (Hillerborg et al. 1976) propose le modèle cohésif ou il représente la rupture du béton en mode I par une transition graduelle des contraintes cohésives entre l'état fissuré et l'état intact du matériau. Pour simuler la FPZ, Hillerborg (Hillerborg et al. 1976) utilise les contraintes cohésives qui sont fonction de l'ouverture de fissure. Dans cette approche, la FPZ est modélisée sous forme d'une fissure fictive qui est soumise à des forces externes équivalentes aux forces cohésives transférées par la FPZ au corps élastique environnant: la fissure cohésive n'est qu'une fissure fictive capable de transférer la contrainte entre les lèvres de fissure.

Dans la FPZ (Figure 1-9), la contrainte cohésive atteint son maximum à la pointe de la fissure, qui est égale à la résistance à la traction  $f_t$ , cette contrainte diminue graduellement jusqu'à zéro lorsque la fissure atteint son ouverture critique.

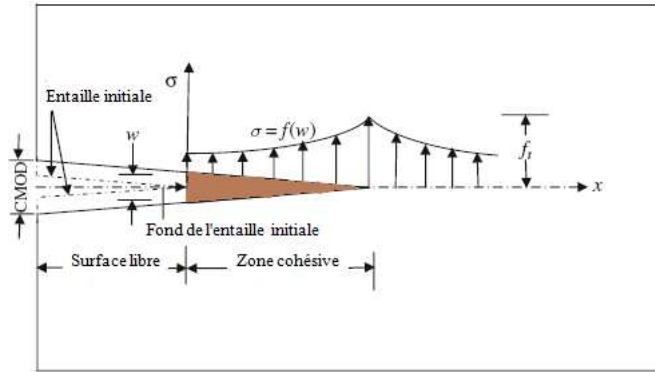


Figure 1-9: Évolution de la fissure cohésive en mode I et répartition des contraintes.

L'aire sous la courbe Contrainte-Ouverture de fissure représente le taux de libération d'énergie  $G_f$  qui s'écrit mathématiquement

$$G_f = \int_0^{w_c} f(w)dw \quad (1.6)$$

Où  $f(w)$  est la fonction d'adoucissement (caractéristique intrinsèque) unique du matériau qui doit être déterminée à partir d'essais de laboratoire. Plusieurs fonctions ont été proposées pour décrire la forme adoucissante, des formes linéaires (Hillerborg et al. 1976), bilinéaires (Petersson 1981) (Figure 1-10) ou exponentielles (Lens et al. 2009).

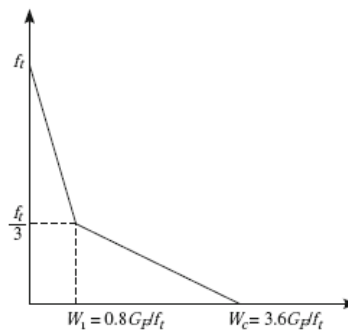


Figure 1-10: Fonction adoucissante bilinéaire proposée par Petersson (Petersson 1981).

### 1.1.6.2 Le modèle Crack band

Pour modéliser la FPZ de manière continue, Bazant (Bažant & Oh 1983) propose un concept de modélisation appelée *Crack Band Theory*, dans lequel les déformations inélastiques localisées dans la FPZ sont étalées (*smear*) sur une bande finie d'une largeur  $h$  (Figure 1-11). Pour un béton normal, la largeur de la bande est supposée être égale à trois fois la taille du plus grand granulats. Le comportement du matériau est caractérisé par la relation contrainte-déformation.

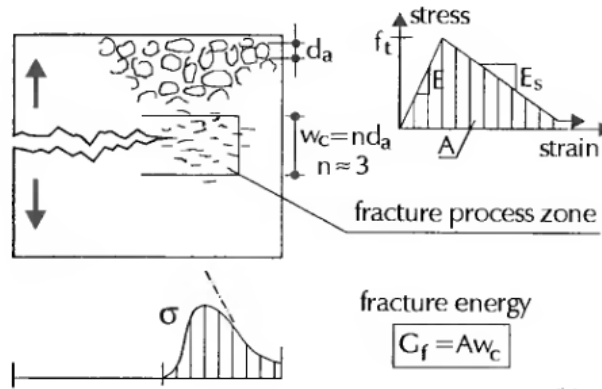


Figure 1-11: La zone de processus de rupture selon le modèle de la bande de la fissure (Bažant & Oh 1983).

Dans son implémentation en élément fini, la rigidité et la résistance du matériau d'un élément fissuré sont réduites en fonction de la relation déformation-adoucissement, ceci est équivalent à étaler une fissure discrète sur un maillage en élément fini pour approximer l'endommagement dû à une seule fissure. Une comparaison entre l'approche continue de la bande de la fissure et de l'approche discontinue avec création d'une fissure discrète macroscopique est montrée sur la Figure 1-12.

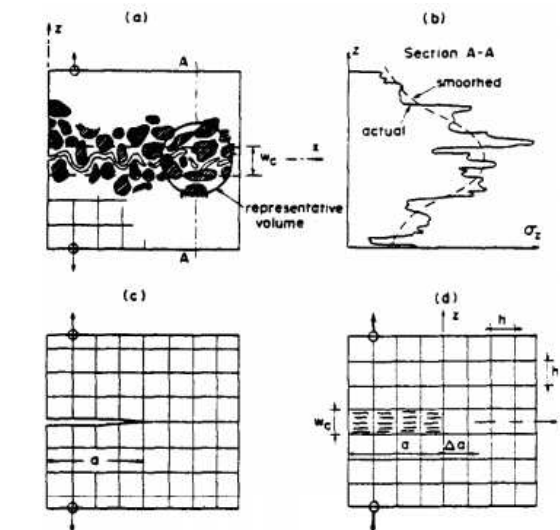


Figure 1-12: Modélisation de la zone de fissuration: comparaison de l'approche continue et discontinue (Bažant & Oh 1983)

### 1.1.6.3 Le modèle non local

Les modèles non locaux intègrent la définition d'une longueur interne caractéristique du matériau qui découle de la nature hétérogène de la méso-structure du béton. Cette longueur interne permet de définir les interactions locales et s'affranchir ainsi d'un processus de localisation. Ainsi, ils peuvent reproduire une répartition des contraintes dans la FPZ continue et lisse (smooth). Ces modèles peuvent être de type intégral (Bažant & Jirásek 2002;

Pijaudier-Cabot & Bažant 1987) ou de type gradient des déformations ou des variables internes (Frémond & Nedjar 1995).

Dans ces modèles, la contrainte en un point est déterminée par une moyenne spatiale pondérée des variables d'état à proximité de ce point. La taille du voisinage dans lequel la moyenne est effectuée est déterminée par le rayon d'interaction non local.

La Figure 1-13 illustre l'évolution de la FPZ dans le cadre d'une modélisation avec une approche non locale.

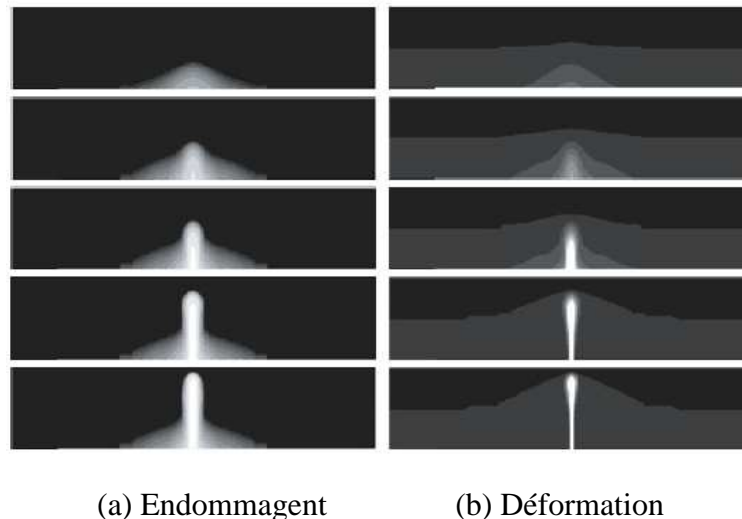


Figure 1-13: Évolution de la zone de processus de fissuration avec un modèle non local (Jirásek 2011).

### 1.1.7 Caractérisation expérimentale de la FPZ

La taille de la FPZ est significative dans le cas des matériaux quasi fragiles. Sa caractérisation est une problématique de nature spatiale. Son identification expérimentale (longueur, largeur, volume..) est d'une importance particulière. La dimension de la FPZ est fortement influencée par la dimension de la structure, la longueur de la fissure initiale (effet de bord), ainsi que par le chargement appliqué et les propriétés matérielles du béton. La longueur de la FPZ présente un intérêt aussi particulier que sa largeur. Les tests de rupture représentent le moyen le plus pratique pour recueillir des informations sur l'évolution spatiale de cette zone.

Expérimentalement, plusieurs techniques directes ou indirectes sont employées pour la caractérisation de la FPZ dans les matériaux quasi-fragiles ; chaque technique à ses propres limites et insuffisances. En effet, des écarts importants dans les résultats expérimentaux ont été observés.

La technique de corrélation d'images (en anglais Digital Image Correlation (DIC)) est une technique robuste avec un degré de précision de mesure élevé qui fournit le champ de déplacement de surface comme sortie principale. Le champ de déplacement peut également être utilisé pour calculer les déformations à l'extérieur de la zone de fissures par le biais de la

mécanique continue standard (voir Figure 1-14) (Wu et al. 2011; Ferreira et al. 2011; Alam et al. 2012).

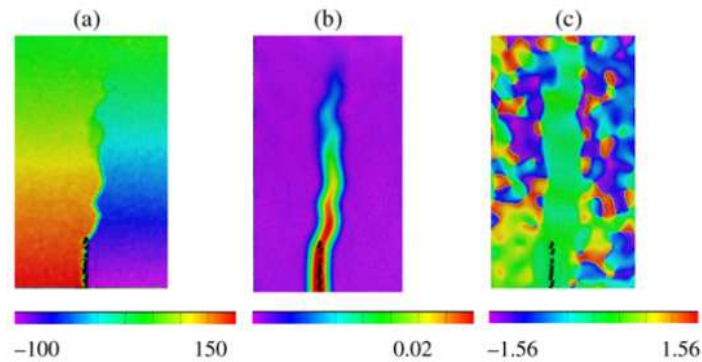
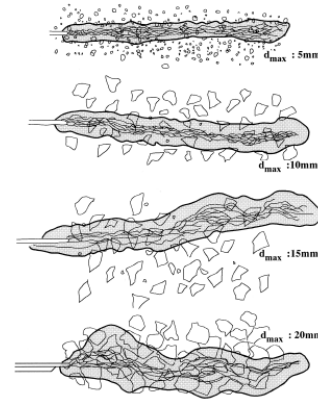
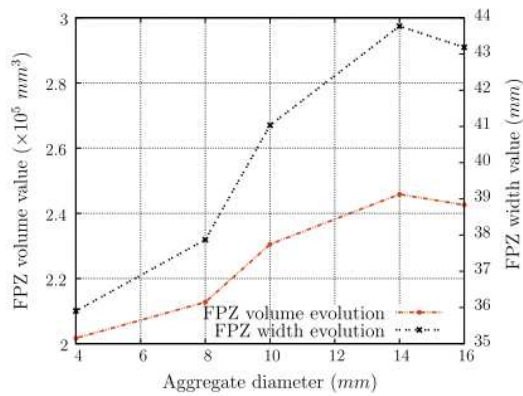


Figure 1-14: Champ de déplacement et de déformation issus de la CIN selon (Alam et al. 2012). (a) déplacement axial (b) déformation  $\varepsilon_{xx}$  (c) déformation dans la direction principale.

D'autre part, les techniques de mesure par émissions acoustiques ont prouvé leur capacité à visualiser et à caractériser la FPZ dans les structures en béton (Landis 1999; Haidar et al. 2005; J. Saliba et al. 2012; Farnam et al. 2015; Hadjab et al. 2007). On peut trouver dans la littérature d'autres techniques qui permettent d'inspecter et de mesurer la FPZ dans la surface de l'échantillon comme les méthodes d'interférométries (Shah 1990)(Cedolin et al. 1983)(Guo et al. 1993), la microscopie à balayage électronique et la technique de pénétration de colorant (Jankowski et al. 1990). La mesure volumique de la FPZ a également fait l'objet de caractérisation par émission acoustique (Muralidhara et al. 2010), imagerie par rayons X (Otsuka & Date 2000), etc. En général, il est préférable de combiner différentes techniques pour pallier les inconvénients d'une seule méthode par exemple le couplage CIN/EA permet de cerner efficacement les mécanismes de fissuration et l'identification de la FPZ dans le béton (Alam et al. 2015; Alam et al. 2014).

L'influence de la taille des granulats sur la taille de la FPZ a été largement étudiée d'un point de vue expérimental et numérique (Figure 1-15). Otsuka et Date (Otsuka & Date 2000) ont démontré, via une campagne expérimentale d'échantillon de béton en combinant à la fois la technique de l'émission acoustique et la technique X-ray, que la largeur de la FPZ augmente avec l'augmentation de la taille maximale des granulats. Ce résultat a été confirmé numériquement avec une approche mésoscopique par (Benkemoun et al. 2016) ou ils montrent que la largeur et le volume de la FPZ sont corrélés à la taille des granulats.

L'effet de bord sur la taille de la FPZ a fait également l'objet d'études de la part de plusieurs auteurs (Hu & Duan 2008; Grégoire et al. 2015; Saliba et al. 2016; Wu et al. 2011).



(a)

(b)

Figure 1-15: Influence de la taille des granulats sur la largeur de la FPZ.(a) résultats numériques selon (Benkemoun et al. 2016) et (b) résultats expérimentaux selon (Otsuka & Date 2000).

## 1.2 Hétérogénéité du béton & Stratégies de modélisation

Le béton est un matériau hiérarchique caractérisé par une microstructure très complexe. En raison de la répartition aléatoire de ses phases multiples à l'échelle nano, micro, méso et macro, le béton est caractérisé par des propriétés mécaniques non linéaires et une hétérogénéité intrinsèque. Les mécanismes de ruine de ce matériau interviennent à différentes échelles et sont intimement liés. De ce fait, avant de choisir un modèle capable de reproduire le comportement mécanique du béton, une attention particulière doit être portée au choix de l'échelle de modélisation pour pouvoir reproduire correctement les différents mécanismes de dégradation de ce matériau sous diverses sollicitations.

La sélection d'une échelle appropriée de modélisation du béton dépend de l'échelle d'observation, des caractéristiques de réponse et du degré de précision recherché, ainsi que du coût de calcul. Les approches multi-échelles sont, certes, essentielles pour une meilleure compréhension des propriétés mécaniques et particulièrement de rupture (Van Mier 2012), mais le coût *computational* pose encore des problèmes.

La modélisation du comportement du béton peut être envisagée selon plusieurs échelles hiérarchiques, les plus couramment utilisées sont l'échelle macroscopique, l'échelle mésoscopique et l'échelle microscopique (Figure 1-16). L'ingénierie pratique s'intéresse généralement à des échelles plus grandes (globale, semi-globale).

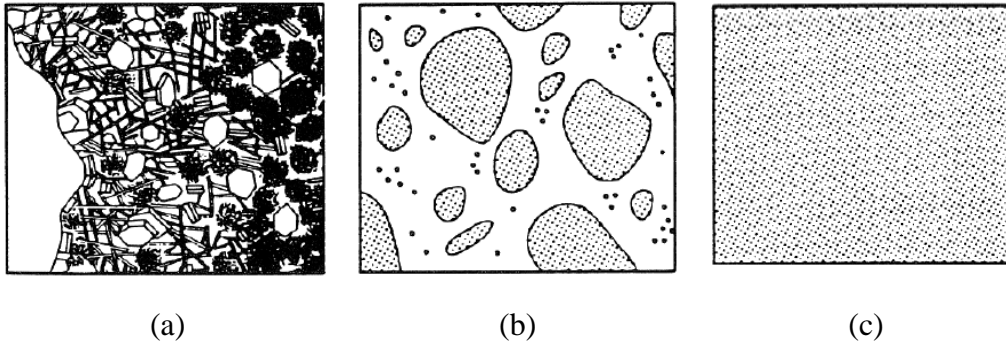


Figure 1-16: Échelle de modélisation: a) micro, b) meso, c) macro (selon Wittman)

À l'échelle microscopique, le béton est modélisé comme une pâte de ciment durcie qui est elle-même fortement hétérogène. Cette échelle permet d'apporter des informations sur les aspects micromécaniques des différents phénomènes de dégradations qui interagissent dans la pâte de ciment. À l'échelle macroscopique, le béton est considéré homogène. L'approche de la modélisation macroscopique nécessite d'employer un nombre important de paramètres pour décrire convenablement la complexité du comportement du matériau béton. La modélisation à l'échelle mésoscopique est médiane entre l'approche macro qui nécessite de travailler avec un Volume Élémentaire Représentatif et l'approche micro qui s'intéresse à l'étude des aspects micromécaniques dans la pâte cimentaire.

Comme nous l'avions mentionnée auparavant, le processus de rupture dans le béton est fortement influencé par le caractère hétérogène de ce matériau, ainsi une modélisation à l'échelle mésoscopique sera l'échelle idéale pour représenter explicitement ce contraste entre le squelette granulaire et la pâte de ciment.

D'autre part, concernant les modèles de calcul, la modélisation du comportement des matériaux quasi-fragiles tels que le béton est une tâche complexe. Cette complexité est due principalement à la présence d'une zone de processus de rupture (FPZ) qui est la source principale de la présence de l'adoucissement. L'étude du comportement du béton peut se faire selon deux théories principales: la théorie de l'endommagement couplé ou non à plasticité et la théorie de la mécanique de la rupture. D'autres théories sont également disponibles, mais nous nous intéressons dans le cadre de la présente étude qu'à ces deux catégories en vue d'expliquer les bases des modèles qui seront utilisés ultérieurement.

### 1.2.1 Théorie de l'endommagement et de la plasticité

La mécanique de l'endommagement permet de décrire la perte progressive de l'intégrité du matériau due à la propagation et à la coalescence des microfissures, des microvides et autres défauts similaires. Ces changements dans la microstructure entraînent une dégradation de la rigidité du matériau à l'échelle macroscopique. La coalescence des défauts distribués dans le matériau peut conduire à la formation d'une fissure macroscopique. Lorsque plusieurs fissures sont présentes, les concentrations de déformation existent près de leurs pointes. La propagation des fissures dépend bien évidemment de ces concentrations. Au-delà d'une



certaine sollicitation, le matériau béton se déforme de manière irréversible: lorsque les microfissures dus à l'endommagement du matériau sont activés de manière quasi diffuse, leurs rugosités empêchent le retour à l'état initial après déchargement induisant l'apparition des déformations permanentes.

La dégradation de la raideur peut être modélisée par des variables d'endommagement de nature scalaire, vectorielle ou tensorielle. Une loi de comportement endommageable peut être écrite comme suit

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.7)$$

$$C_{ijkl} = (C_{pqrs}^0, D_*) \quad (1.8)$$

$C_{ijkl}$  est le tenseur de rigidité fonction de l'état de l'endommagement décrit par la variable  $D_*$ . L'indice (\*) désigne la nature de la variable (ordre 0,1,2,4, 8 !). Ainsi, l'évolution de la dégradation du tenseur de rigidité initiale est pilotée par la loi suivante

$$\dot{C}_{ijkl} = \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial D_*} \dot{D}_* \quad (1.9)$$

L'évolution de l'endommagement (ou des termes du tenseur D) est généralement pilotée par une loi normale similaire à celle utilisée dans le cadre de la plasticité en exploitant la notion de surface de charge.

Les modèles d'endommagement seuls ne sont pas suffisants pour décrire la dégradation du béton. En effet, cette dégradation est associée toujours à l'apparition d'une irréversibilité de l'état mécanique (variables cinématiques principalement). La nature de cette irréversibilité fait débat. Cependant, outre les considérations physiques, certaines théories sont bien adaptées à la description mathématique des irréversibilités.

Dans le cas du matériau béton, l'expérimentation montre qu'au-delà d'une certaine sollicitation, les déformations permanentes apparaissent. Le formalisme de plasticité est bien adapté à la description de ces déformations permanentes. Mathématiquement parlant, la plasticité est nécessaire, ne serait-ce que pour décrire le changement de signe des déformations volumiques lors d'un essai de compression.

Une loi de comportement plastique générale peut être écrite sous la forme suivante

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^p) \quad (1.10)$$

$\epsilon_{kl}^p$  représente le tenseur des déformations plastiques. L'évolution des termes de ce tenseur est décrite par la loi de normalité en utilisant une fonction de charge (Drucker-Prager, Nadai, ..)

Le couplage de l'endommagement et de la plasticité est souvent (voir toujours) nécessaire. Un tel couplage est décrit par

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^D (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (1.11)$$

Où  $C_{ijkl}^D$  est le tenseur de rigidité endommagé. Le produit de la partie élastique de ce tenseur par la composante  $(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p)$  représente la contrainte effective. Un couplage explicite ou implicite peut être adopté. La résolution numérique est souvent réalisée en deux étapes (plasticité à endommagement constant). Les algorithmes de résolution plastique sont de type Return mapping, closest point projection etc.

### 1.2.2 Théorie de la mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture permet d'étudier l'interaction entre une discontinuité géométrique, le milieu continu avoisinant et la propagation de la fissuration. Dans un milieu fissuré, d'un point de vue mécanique, la zone délimitant le voisinage de la pointe de la fissure peut être décomposée en trois zones: la première zone (discontinue) se localise dans le voisinage immédiat de la pointe de la fissure. Théoriquement, cette zone se caractérise par des contraintes qui tendent vers l'infini, elle est considérée ponctuelle d'un point de vue mécanique. La deuxième zone singulière caractérisée par des champs de contraintes, de déplacements et de déformations continus. Il a été démontré que dans cette zone, le champ de contrainte présente une singularité en  $(r^{-1/2})$ . La dernière zone représente les champs lointains, elle raccorde la zone singulière aux conditions aux limites.

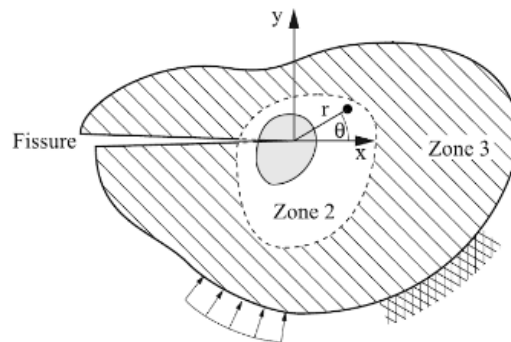


Figure 1-17: Zone délimitant le voisinage de la pointe d'une fissure dans un milieu fissuré.

Pour la zone singulière, deux approches principales sont disponibles pour l'étudier: la première est l'approche locale qui permet d'analyser les champs de contraintes et de déformations au voisinage du front de fissure. La deuxième est l'approche globale énergétique qui permet d'analyser le comportement global d'une structure fissurée sous l'angle des échanges d'énergie qu'elle met en jeu.

L'hypothèse d'un comportement de matériau élastique linéaire conduit à des contraintes infinies à la pointe de fissure. En réalité, cela n'est évidemment pas possible: une déformation plastique se produira dans la région de la pointe de fissure.

Il a été démontré que le champ de contrainte près d'une pointe de fissure présente une variation fondamentale singulière. Dans la zone singulière et pour chaque mode de rupture sont définis des facteurs caractérisant l'état de contrainte dans le voisinage de la pointe de la fissure. Ces facteurs sont appelés facteurs d'intensité des contraintes  $K_\alpha$  ( $Mpa\sqrt{m}$ ) (SIF) avec ( $\alpha = I, II, III$ ). Ils dépendent de la géométrie du corps fissuré de ses dimensions et du chargement appliqué. Le champ de contraintes au voisinage de la pointe de fissure augmente proportionnellement au facteur d'intensité de contrainte. Ce paramètre à caractère local peut être déterminé par différentes méthodes expérimentales ou plus généralement numériques (principe de superposition, introduction des fonctions de poids ou de Green, création d'éléments singuliers, méthode d'extrapolation de déplacement...) (Miannay 1995). Dans certains cas particuliers, des résultats analytiques exacts peuvent être établis (voir (Tada et al. 2000)). Irwin (Irwin 1957) a proposé une solution analytique des champs de contrainte et de déplacement associé à chaque mode dans la zone singulière correspondant au premier ordre d'un développement en série:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_\alpha}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^\alpha(\theta) \quad (1.12)$$

$$u_i = K_\alpha \frac{r}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^\alpha(\mu, k, \theta) \quad (1.13)$$

$\mu$  représente le module de cisaillement défini par:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.14)$$

$k$  est la constante de Kolossov définie par

$$k = \begin{cases} 3-4\nu & \text{en déformation plane} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contrainte plane} \end{cases} \quad (1.15)$$

Quant à l'approche énergétique, les fondements remontent à Griffith (Griffith 1921). Son idée sous-jacente est de faire un bilan des énergies mises en jeu avant et après propagation de la fissure en tenant compte de l'énergie de surface créée par l'avancée de la fissure. L'énergie de surface  $\gamma$  est directement proportionnelle à la quantité de surface créée par la fissure  $dA$  de sorte que:

$$dw = 2\gamma dA \quad (1.16)$$

Le taux de restitution d'énergie noté  $G$  est lié à la variation de l'énergie potentielle totale  $W_p$  nécessaire pour incrémenter une longueur de fissure  $a$  de  $da$  par unité de surface de fissure  $dA$ .

$$G = -\frac{W_p}{dA} \quad (1.17)$$

L'énergie potentielle totale stockée dans une structure comporte un terme d'énergie élastique et un terme dû aux efforts extérieurs.

$$W_p = W_{el} + W_{ext} \quad (1.18)$$

Comme nous l'avons expliqué auparavant, la rupture dans les matériaux quasi-fragiles est caractérisée par le développement d'une zone non linéaire de taille non négligeable, appelée la zone de processus de rupture (FPZ). Par conséquent, la MLER ne peut pas être appliquée. La prise en compte de la FPZ a conduit au développement de la mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente (MLER<sub>eq</sub>).

Irwin (Irwin 1957) est le premier à avoir introduit le terme « longueur de fissure équivalente » pour décrire une augmentation fictive de la fissure lorsqu'une nouvelle répartition de contrainte est considérée dans la FPZ. La mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente permet de suivre l'évolution du processus de rupture des matériaux quasi-fragiles et notamment approximer avec pertinence leur comportement de rupture en faisant appel à la notion de longueur de fissure élastique équivalente. Dans un concept énergétique et en utilisant la MLER<sub>eq</sub>, l'augmentation de la complaisance (ou diminution de la raideur) des spécimens en raison du développement de la zone de processus de fracture (la FPZ) est attribuée à la propagation d'une fissure effective ou dans d'autres termes, une fissure élastique équivalente  $a_{eq}$  (Bazant & Kazemi 1990). La longueur élastique équivalente  $a_{eq}$  est définie comme étant la longueur qui dans un modèle élastique parfait donnerait une complaisance similaire à celle constatée sur une structure réelle fissurée avec sa zone endommagée (la FPZ) (Figure 1-18).

La pointe de cette dernière est située à une certaine distance  $\Delta a$  de la pointe telle que  $a_{eq} = a_0 + \Delta a$  ( $a_0$  est la longueur initiale de la fissure et  $\Delta a$  est l'incrément de longueur de fissure élastique équivalente). L'applicabilité du concept de la fissure élastique équivalente à la rupture du béton et notamment l'évolution de la complaisance sécante en termes de longueur élastique équivalente de fissure doit être vérifiée par des essais de charge/endommagement/propagation/décharge (Morel et al. 2005).

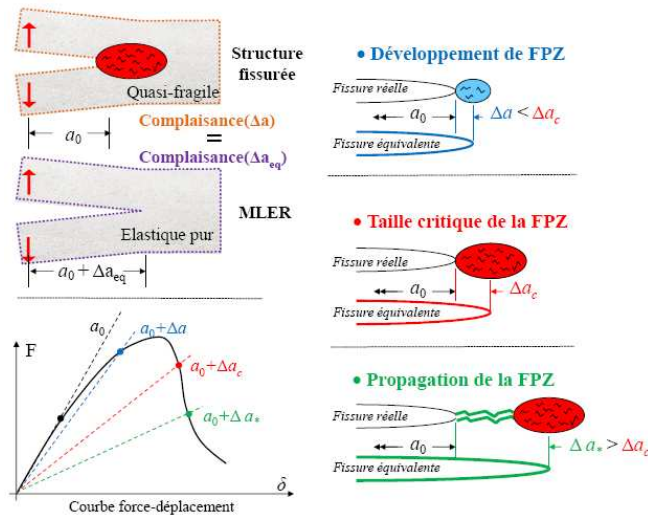


Figure 1-18: Représentation schématique de la mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente (Gangnant 2016).

En parallèle, la notion de courbe de résistance (Figure 1-19) qui décrit la résistance du matériau à la fissuration a été introduite pour caractériser la rupture d'un matériau quasi-fragile. En effet, l'existence de la FPZ est à l'origine de la non-linéarité du processus de propagation de fissuration. L'énergie dissipée dépend de l'extension de la fissure. L'évolution de l'énergie dissipée en fonction de l'extension de la fissure est représentée par la courbe-R (Courbe de résistance). Cette courbe est décrite par un taux de restitution d'énergie considéré comme une force motrice de l'avancée de fissure ou par une variable locale en termes de facteur d'intensité de contrainte, etc.

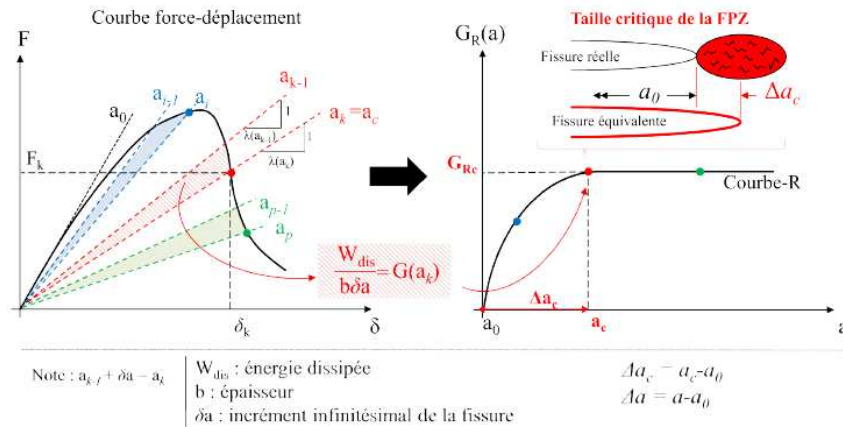


Figure 1-19: Évaluation de la résistance à la propagation de la fissure (Gangnant 2016).

Les notions de FPZ et de courbes de résistance seront largement discutées dans le troisième chapitre.

Pour établir une stratégie de modélisation d'un processus physique dans un matériau donné, deux éléments sont à identifier: la nature de la loi de comportement décrivant le processus mis en jeu et l'échelle de description de ce processus au sein de ce matériau. Depuis les travaux

pionner de Roelfstra (Roelfstra et al. 1985), la modélisation à l'échelle mésoscopique en utilisant *le béton numérique* est apparue comme l'approche la plus efficace pour étudier l'influence des interactions entre les constituants du béton sur le comportement macroscopique.

### 1.2.3 Modèles numériques adaptés pour la modélisation mésoscopique du béton

Trois approches principales sont disponibles dans la littérature pour la modélisation de la mésostructure du béton, à savoir les modèles continus en éléments finis (Figure 1-20(a)), les modèles en éléments lattices (Figure 1-20(b)) et les modèles en éléments discrets (Figure 1-20(c)).

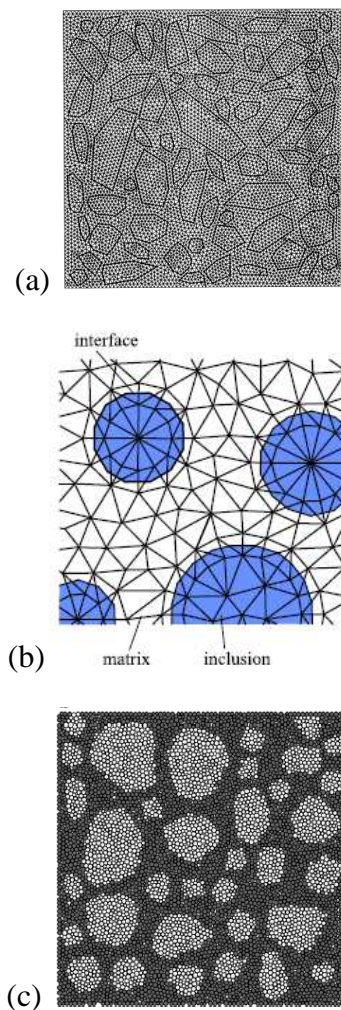


Figure 1-20: Approches de modélisations: a) Maillage en élément fini (Qin & Zhang 2011), b) Maillage lattice selon (Grassl et al. 2012), c) Maillage discret (Qin & Zhang 2011)

#### 1.2.3.1 Modèles continus en éléments finis

La méthode continue en éléments finis est la plus couramment utilisée pour la modélisation mésoscopique du béton. Cette approche permet de représenter explicitement la nature *continue* multiphasique du béton à une échelle mésoscopique. L'avantage principal de ces

modèles est qu'ils permettent une représentation plus réaliste du béton, considérant les champs continus des variables d'état en dehors de la zone de rupture. L'évolution de la discontinuité due à la rupture peut être simulée par des lois de comportements associés à chacun des matériaux constitutifs (granulat, mortier et auréole de transition).

Différentes techniques de maillage sont utilisées pour la discrétisation de la mésostructure complexe du béton. Le maillage aligné est la technique la plus utilisée pour la réalisation d'un béton numérique à l'échelle mésoscopique. Dans ce type de maillage, les limites des éléments finis coïncident avec les interfaces matérielles et, par conséquent, il n'existe pas de discontinuités matérielles dans les éléments (Caballero et al. 2006; Wang et al. 1999; Wriggers & Moftah 2006). D'autres modèles mésoscopiques adoptent un maillage non aligné, dans lequel les interfaces matérielles peuvent être positionnées dans un élément fini (Zohdi & Wriggers 2001). De plus, on peut choisir un maillage structuré (Caballero et al. 2006) ou non structuré basé sur une triangulation de Delaunay (Wang et al. 1999).

Une autre catégorie de modèles utilise un maillage d'éléments finis régulier. Cependant, l'hétérogénéité est créée en associant des éléments adjacents pour former des granulats en formes approximatives en suivant une certaine distribution de taille. Cette approche a été adoptée dans (Dupray et al. 2009) pour créer un modèle mésoscopique biphasique.

### **1.2.3.2 Modèles basés sur l'utilisation des éléments « lattices »**

Les modèles « lattice » ou treillis sont caractérisés par une grille d'armature ou d'éléments de poutre, généralement sous forme triangulaire ou rectangulaire qui représentent le support continu d'une manière simplifiée. L'utilisation d'éléments de poutre permet le transfert de moments, de forces axiales et de cisaillement via les éléments de réseau de base.

Pour la simulation de l'hétérogénéité du béton, la géométrie du granulat peut être superposée au-dessus de la grille (appelée aussi maillage), définissant ainsi les différentes propriétés mécaniques pour les éléments en treillis se trouvant respectivement dans les domaines de granulat, de la matrice ou de l'interface limitant la nature triphasique du béton. La génération d'un réseau avec une longueur d'élément variable est possible avec ce type d'approche (Man & van Mier 2008).

Un problème couramment rencontré dans la représentation d'un modèle treillis est une forme imparfaite des courbes de contrainte-déformation résultantes, affichant des chutes brusques dues à l'élimination des éléments lorsqu'un critère de rupture est atteint, généralement par une limite de résistance à la traction. En outre, la stratégie d'élimination des éléments, qui est habituellement utilisée pour simuler la fissuration, ne tient pas compte de la possibilité de fermeture de fissures et ne garantit pas une consommation constante d'énergie de rupture.

### **1.2.3.3 Modèles des éléments discrets**

Le modèle des éléments discrets (DEM) a été initialement proposé pour l'étude des géomatériaux granulaires (Aydin et al. 2007). Dans cette approche, le matériau est modélisé

comme un assemblage de particules rigides ou déformables à l'aide de fonctions d'interactions de contact et de cohésion. Plus récemment, cette méthode a été étendue pour l'étude de matériau hétérogène quasi-fragile comme le béton (Azevedo et al. 2008) où le comportement continu est décrit par une cohésion accrue et des liens aux contacts. L'avantage de la DEM dans la modélisation des géomatériaux résulte apparemment de sa capacité à s'adapter aux problèmes de rupture, de fragmentation et aux discontinuités associées. Cependant, la détermination de la force de liaison à des points de contact discrets pour représenter ce qui est essentiellement une interface continue, rend les paramètres de modélisation sensiblement dépendant du problème. L'efficacité de l'algorithme de détection de contact dans ce type de modèle dépend fortement de la forme de particule qui peut être circulaire, polygonale, elliptique ou cluster.

En ce qui concerne l'investigation des propriétés de rupture (FPZ, ..) par des modélisations mésoscopiques, plusieurs travaux ont été achevés. En utilisant une approche continue en élément fini à l'échelle mésoscopique, Saliba (Saliba et al. 2016) a étudié les caractéristiques de la zone de fissuration et son évolution durant le processus de rupture sur des poutres entaillées et non entaillées en béton soumises à la flexion trois-points. La comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux issus de l'émission acoustique révèle que l'évolution de la longueur de la fissure est fortement dépendante de la longueur relative de l'entaille. Benkemoun (Benkemoun et al. 2016) a estimé le volume de la FPZ en faisant une étude numérique à l'échelle mésoscopique en 3D sur des essais de traction par fendage. Ils montrent que le volume de la FPZ augmente avec l'augmentation de la taille des granulats.

L'étude du processus de rupture en utilisant le modèle mésoscopique peut aussi se faire en utilisant les modèles Lattice. Pour modéliser la FPZ dans le béton soumis à la traction uniaxiale, Grassl (Grassl & Jirásek 2010) propose un modèle à l'échelle mésoscopique avec une discrétisation de type *lattice*. Ils montrent que les paramètres du modèle du matériau macroscopique peuvent être spécifiés à partir des interactions observées dans la FPZ dans une analyse à l'échelle du grain. Une série de poutres entaillées et non entaillées testée à la flexion trois-points avec enregistrement d'émissions acoustiques dans (Grégoire et al. 2013), est étudiée numériquement par Grassl (Grassl et al. 2012) pour comprendre l'influence de l'effet d'échelle sur la FPZ. Il a été démontré que la largeur de la FPZ dépend de la longueur d'entaille alors que la distribution d'énergie dissipée le long du ligament n'est pas influencée par l'effet de bord. Grégoire (Grégoire et al. 2015) montrent que l'approche méso proposée dans (Grassl & Jirásek 2010) est capable de suivre avec cohérence l'évolution de la FPZ durant le processus de rupture et cela en faisant une comparaison entre la distribution de l'énergie dissipée mesurée expérimentalement par l'émission acoustique et les profils d'énergies de dissipation obtenus numériquement. Les résultats expérimentaux et numériques indiquaient également que plus la longueur du ligament est grande et plus la longueur de la FPZ augmente.

L'approche mésoscopique est également utilisée pour la prédiction du comportement dynamique du béton lorsqu'il est soumis aux chocs, explosions, séismes ou impacts. Erzar et al (Erzar & Forquin 2011) ont adopté l'approche mésoscopique pour simuler des essais



d'écaillage et d'impact sur la tranche afin de prévoir la fragmentation du béton sec et humide sous impact. Du et al (Du et al. 2014) ont étudié la rupture du béton par traction dynamique en simulant des échantillons en L et des échantillons entaillés (single-edge notched specimen) à différentes vitesses de chargement. Pedersen et al (Pedersen et al. 2013) proposent un modèle mésoscopique bidimensionnel en élément fini pour étudier l'influence du taux de vitesse et d'humidité sur le comportement dynamique en béton. L'influence de la distribution et la géométrie des granulats sont aussi étudiées. Ils concluent que le taux de chargement a une influence plus forte que le niveau de saturation sur le processus de rupture et la résistance globale.

L'intérêt de l'utilisation de la modélisation mésoscopique à l'étude du comportement différé du béton au jeune âge a été démontré. Aydin et al (Aydin et al. 2007) ont étudié les déformations du retrait et du fluage en considérant un modèle mésoscopique tri-phasique. Dans (Reolfstra et al. 1985), des simulations de l'effet de paroi ainsi que son influence sur le processus de diffusion ont été effectués à l'aide d'un maillage mésoscopique avec des éléments finis triangulaires. Le phénomène de retrait et le problème des contraintes thermiques ont été aussi étudiés.

D'autres auteurs (J Saliba et al. 2012; Matallah & La Borderie 2016; La Borderie et al. 2007), se sont penchés sur l'étude des phénomènes couplés dans le béton en s'appuyant sur l'approche mésoscopique. En conséquence, l'influence de la forme, la taille, la distribution et les propriétés mécaniques des granulats font encore l'objet de nombreux travaux de recherche.

### **1.3 Le phénomène de localisation: État du problème et techniques de régularisation**

L'adoption d'une stratégie de modélisation est certes une étape cruciale dans un processus de modélisation. Cependant, des problèmes numériques peuvent survenir lors de l'utilisation d'un modèle basé sur une loi de comportement. Ces problèmes numériques peuvent peser sur le choix même de la stratégie de modélisation. Il est largement connu aujourd'hui, que la simulation numérique du comportement non linéaire du béton est confrontée à un problème majeur de localisation dû principalement à la présence de l'adoucissement dans les matériaux étudiés (l'adoucissement est une condition suffisante, mais non nécessaire !). Il s'agit d'un problème d'origine physique, fondé mathématiquement avec des conséquences numériques (perte d'objectivité). Il est donc indispensable de prendre en compte ce phénomène afin d'assurer une analyse numérique objective.

Lors d'une modélisation par éléments finis classique, à l'intérieur de chaque élément, les champs de déplacement et de déformation sont continus et les sauts de déformations sont reportés aux frontières des éléments. Il en résulte une localisation des déformations dans une bande dont l'épaisseur est contrôlée directement par la taille des éléments finis. Si le maillage en élément fini est très raffiné, la taille de la bande de localisation diminue également. Étant donné que l'énergie de rupture est liée au volume de la zone de localisation, si la taille des éléments finis tend vers zéro, une structure peut atteindre la ruine sans dissiper de l'énergie (Needelman & Tvergaard 1984). Mathématiquement parlant, la propriété de l'adoucissement

entraîne une perte d'ellipticité des équations d'équilibre lors d'une analyse statique (ou quasi-statique) et une perte d'hyperbolicité pour une analyse dynamique (sismique ...)

Plusieurs méthodes ont été développées pour remédier à ce problème inhérent au caractère fragile du matériau.

### 1.3.1 Régularisation énergétique

Une des premières techniques simples, mais très utilisées dans le domaine de l'ingénierie pratique est celle basée sur la régularisation énergétique. Cette technique est fondée sur l'utilisation de l'énergie de fissuration  $G_f$  comme paramètre de régularisation afin de remédier numériquement au problème de localisation lors d'un calcul de structure. Ainsi, cette régularisation basée sur le modèle de la bande de fissures proposée par Bazant (Bažant & Oh 1983) pour les comportements en traction ou encore sur le modèle de la fissure fictive de Hillerborg (Hillerborg et al. 1976) consiste à ajuster la partie adoucissante du modèle matériau (et par conséquent ajuster les paramètres matériaux) en fonction de la taille de l'élément fini considéré. Une particularité importante qui concerne l'approche énergétique pour le cas d'un modèle d'endommagement est qu'elle ne peut être utilisée que dans le cas où la formulation de la loi de comportement permet d'établir une relation directe entre le paramètre de la loi contrôlant l'adoucissement et le paramètre de l'énergie de rupture  $G_f$ . Cette relation directe est généralement obtenue pour un cas unidimensionnel, ie, dans un élément fini soumis à un état de contrainte uniaxial. Cependant, il a été mis en évidence dans le cas de la flexion simple (Jirásek & Bauer 2012) (Matallah et al. 2013) que même si l'état de fissuration demeure en mode I (principe de base de l'approche crack band), l'état de contrainte n'est pas toujours uni-axial. Il faut donc s'attendre à ce qu'un état de contraintes non-uniaxial ait une influence sur le calcul et peut conduire à fausser la dissipation dans l'élément fini.

### 1.3.2 Régularisation non locale

L'idée maîtresse de la régularisation non locale consiste à considérer en chaque point  $x$ , en un lieu de la quantité locale, une quantité prenant en compte l'effet du voisinage de ce point  $x$  à travers un ensemble de variables. Dans ce type de méthode, la grandeur locale est remplacée par un opérateur de délocalisation qui peut être exprimé soit sous une forme intégrale, soit sous une forme de type gradient d'ordre deux et parfois d'ordre supérieur. La non-localité dans sa forme intégrale ou gradient est un moyen permettant d'aboutir à une interaction spatiale pour s'affranchir de la localisation.

Pijaudier-Cabot et Bazant (Pijaudier-Cabot & Bažant 1987) ont constaté que certaines formulations non-locales peuvent agir en tant que limiteur de localisation avec un effet de régularisation pour les problèmes avec localisation de déformation. Ils introduisent ce concept pour traiter les problèmes de localisation associés aux lois de comportement adoucissantes de type endommagement. La moyenne non locale  $\bar{f}(x)$  correspondante à la variable locale  $f(x)$  dans un domaine  $V$  est définie par

$$\bar{f}(x) = \int_V \phi(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (1.19)$$

Où  $\phi(x, \xi)$  est une fonction poids. En général, la fonction poids dépend uniquement de la distance entre le point source (où point émetteur)  $\xi$  et le point récepteur  $x$ .

Pour éviter que l'opérateur nonlocale n'altère pas un champ uniforme de déformation, la fonction poids peut être normée tel que

$$\phi(x, \xi) = \frac{\phi_0(x, \xi)}{\int_V \phi_0(x, \xi) d\xi} \quad (1.20)$$

Le plus souvent, la fonction poids est décrite par une distribution gaussienne introduisant une longueur interne du modèle  $l_c$  liée à la taille de la zone du processus de rupture par

$$\phi_0(x, \xi) = \exp\left(-\left(\frac{4\|x - \xi\|^2}{l_c^2}\right)\right) \quad (1.21)$$

Quant à la régularisation en gradient explicite, on ajoute à la quantité locale  $f(x)$  son laplacien  $\nabla^2 f(x)$ .

$$\bar{f}(x) = f(x) + l^2 \nabla^2 f(x) \quad (1.22)$$

Une autre forme implicite de la régularisation en gradient permet d'améliorer les lois constitutives en apportant un champ nonlocale.

En considérant la déformation équivalente comme variable interne  $\bar{\varepsilon}_{eq}$ , Peerlings et al (Peerlings et al. 1996) aboutit à une formulation implicite avec

$$\bar{\varepsilon}_{eq}(x) - l^2 \nabla^2 \bar{\varepsilon}_{eq}(x) = \varepsilon_{eq}(x) \quad (1.23)$$

D'autres catégories de théories non locales, sont basées sur une extension des milieux continus généralisés pour tenir compte des caractéristiques de la microstructure des matériaux sur le comportement macroscopique. Ce sont les milieux de Cosserat également connus sous le nom des milieux micropolaires pour lesquels on suppose que chaque particule (ou microvolume) se comporte comme un corps rigide. Le milieu de Cosserat est caractérisé par une cinématique plus riche qu'un milieu continu classique: chaque point matériel est décrit par 6 degrés de liberté; 3 degrés de liberté de rotation en plus des 3 degrés de liberté de translation d'un milieu continu classique. Le domaine d'application du milieu de Cosserat est très varié. Plus récemment, une modélisation 3D des phénomènes de la localisation de la bande de

cisaillement est réalisée dans (Khoei et al. 2010) par une extension de la théorie 2D de Cosserat.

La difficulté de la modélisation des fissures par une analyse classique en EF provient de ses équations qui nécessitent des dérivées spatiales. Or, par définition, les dérivées spatiales ne sont pas définies sur les fissures. En effet, les approches basées sur le cadre mathématique de la mécanique continue classique ne sont pas directement applicables pour décrire les discontinuités puisque la théorie est formulée avec les équations aux dérivées partielles, et qu'une dérivée spatiale unique n'existe pas sur les singularités. Pour remédier à ce problème, un développement relativement nouveau de la théorie non locale continue est apparu; c'est celui de la théorie *Peridynamic (PD)* proposée par (Silling 2000). Les équations aux dérivées partielles qui apparaissent dans la mécanique continue classique sont remplacées par des équations d'intégrales qui restent valides aux discontinuités. Dans la théorie *PD*, un point matériel interagit avec les points voisins dans un rayon fini. Par cet aspect, la théorie *PD* peut être traitée comme une version à une échelle supérieure (upscaled) de la dynamique moléculaire. Diverses études ont été menées avec une application de la théorie *PD* aux problèmes mécaniques (Madenci & Oterkus 2016; Amani et al. 2016; Fan et al. 2016).

## CHAPITRE 2. **Aspects Énergétiques**

## 2.1 Introduction

La modélisation numérique est un outil incontournable dans le domaine de l'analyse et l'étude des structures/ouvrages de génie civil. Elle contribue à la compréhension du comportement mécanique des matériaux utilisés dans les constructions afin de maîtriser les mécanismes entraînant leur dégradation et permettre ainsi la prédiction de leur comportement sous diverses sollicitations.

L'analyse numérique du comportement non linéaire du béton est complexe en raison de l'apparition d'une localisation de la déformation due principalement à la présence de l'adoucissement (dans certaines situations, la localisation peut apparaître avant le pic). Mathématiquement, ce problème est dû à une perte de la forme originale des équations différentielles (elliptique en statique, hyperbolique en dynamique). Il se traduit numériquement par une dépendance des résultats de simulations vis-à-vis du maillage. Donc, les solutions proposées sont soit d'ordre mathématique permettant ainsi de résoudre l'origine du problème ou d'ordre numérique ne permettant qu'une résolution partielle. Ces techniques sont connues sous le nom de techniques de régularisation.

Dans le cadre des approches continues, la modélisation numérique du comportement à la rupture du béton peut se faire en combinant la mécanique de l'endommagement et la plasticité. En effet, l'endommagement permet de reproduire le caractère adoucissant résultant d'une dégradation de la matière. Quant à la plasticité, elle est nécessaire, ne serait-ce que pour reproduire la dilatation volumique observée lors d'un chargement de compression.

Expérimentalement, le béton présente un comportement fortement adoucissant en traction ce qui se traduit par une forte localisation. Sous compression, la ductilité observée expérimentalement permet de ralentir le phénomène de localisation. Ceci explique pourquoi, dans le cadre d'une modélisation non linéaire du béton, on s'intéresse généralement à régulariser la localisation sous chargement de traction. Bien que le béton soit soumis à des sollicitations complexes, on peut toujours se ramener à travailler dans un repère principal. D'où l'intérêt de s'intéresser à la localisation sous traction ou compression (à ne pas confondre avec la notion d'unidimensionnelle). Dans la suite de cette thèse, une technique de régularisation énergétique est adoptée. Comme son nom l'indique, elle est basée sur le principe de préservation de la dissipation d'énergie. Elle ne permet de remédier qu'aux effets numériques de la localisation.

Ce chapitre consiste à faire le point sur l'étendue du champ d'application et les sources d'erreurs liées à l'utilisation de cette méthode dans un cadre général (1D, 2D et 3D). La prise en compte de la dissipation plastique dans la formulation de l'énergie de fissuration est également discutée. La mise en évidence numérique de l'influence des états de contraintes sur la dissipation d'énergie dans le cas d'une analyse en élément fini (traction, flexion ...) est illustrée par des tests élémentaires à l'aide de code de calcul Cast3m. Avant de s'intéresser à des problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels, le principe de localisation est tout d'abord illustré sur un cas unidimensionnel.

### 2.1.1 Localisation de la déformation unidimensionnelle

Pour mettre en évidence les problèmes liés au phénomène de la localisation dans le cas unidimensionnel, analysant le comportement d'un barreau de longueur  $L$ , de section  $A$  et soumis à la traction uniaxiale (Figure 2-1 (a)).

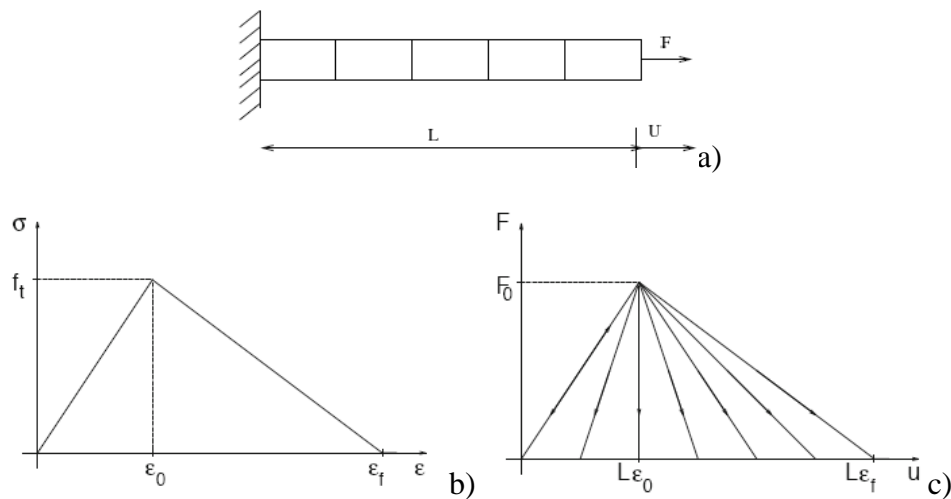


Figure 2-1: a) Barreau en traction uniaxiale, b) comportement bilinéaire, c) réponse post pic pour différentes discrétisations (Jirásek 2011).

Assumons que le matériau soit soumis à une loi de comportement bilinéaire de contrainte-déformation: un comportement élastique linéaire jusqu'à atteindre la résistance à la traction  $f_t$  suivie d'un adoucissement linéaire (Figure 2-1 (b)). La transmission des contraintes disparaît complètement à une déformation notée ici  $\epsilon_f$  (déformation de rupture) et le pic de contrainte est atteint pour une déformation élastique  $\epsilon_0 = \frac{f_t}{E}$ . Si on charge un barreau en traction en appliquant un déplacement  $u$  à l'une des extrémités du support, la réponse reste élastique linéaire jusqu'à un déplacement  $u_0 = L\epsilon_0$ . Dans cette étape, la force transmise par le barreau (ou la réaction du support) atteint sa valeur maximale  $F_0 = Af_t$ , puis la résistance commence à diminuer. À chaque section transversale, la contrainte peut diminuer soit pour une augmentation de la déformation (adoucissement) ou pour une diminution de la déformation (déchargement élastique).

Les équations d'équilibre imposent que le profil de contrainte reste uniforme le long du barreau. Cependant, pour chaque état de contrainte comprise entre 0 et  $f_t$ , il existe deux valeurs de déformation pour lesquelles l'équation constitutive est satisfaite et donc le profil de déformation ne doit pas être uniforme et présente une infinité de solutions (voir Figure 2-2).

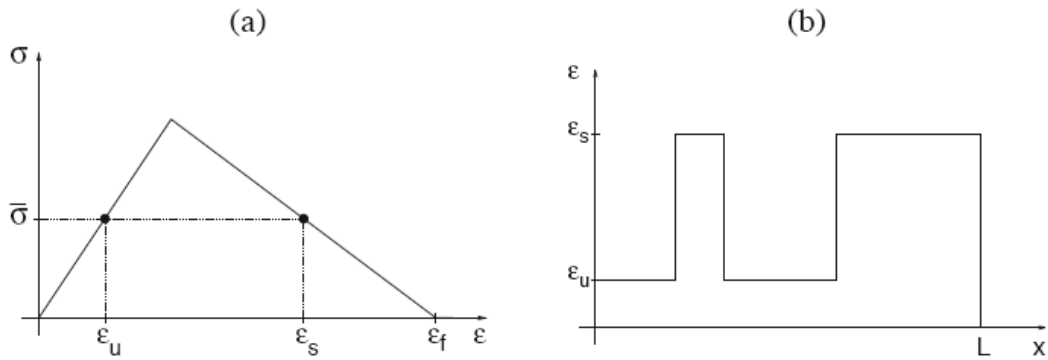


Figure 2-2: a) Les valeurs de déformation pour un état de contrainte donné, b) profil de déformation.

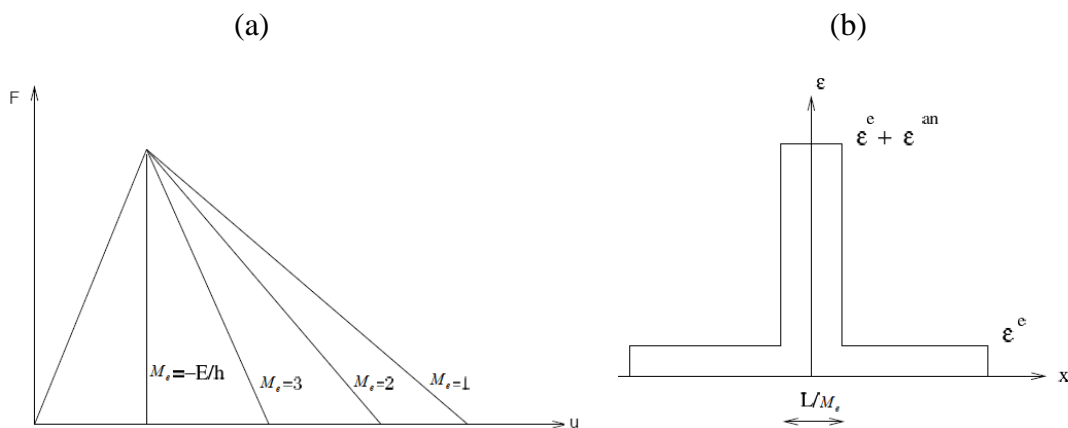


Figure 2-3: a) Réponses force- déplacement pour différentes valeurs de  $M_e$  b) le profil de déformation.

Notons  $L_s$  la longueur de la région adoucissante pour laquelle la déformation augmente et  $L_u = L - L_s$  la longueur de la région de décharge pour laquelle la déformation diminue. On peut écrire l'élongation totale du barreau par  $u_f = L_s \epsilon_s + L_u \epsilon_u$ . À la rupture, lorsque l'état de contrainte s'annule on a  $\epsilon_s = \epsilon_f$  et  $\epsilon_u = 0$ , ceci correspond à  $u_f = L_s \epsilon_f$ .

Cependant, la longueur  $L_s$  de la zone de localisation est indéterminée, elle peut être comprise entre 0 et L. Cela signifie que le problème admet une infinité de solutions. La réponse globale du barreau est délimitée d'un côté par la solution élastique complète ( $u_f = 0$ ) et de l'autre par la solution correspondante à un endommagement complet ( $u_f = L \epsilon_f$ ) (Figure 2-1 (c)). Toutes les solutions, à part celle du déchargement uniforme, décrivent un processus d'endommagement du barreau. Cependant, quelle est parmi toutes ses solutions la plus correcte ?

Comme on l'avait déjà signalé, d'un point de vue mathématique, l'adoucissement est relié à une perte d'ellipticité des équations différentielles d'équilibre. Le problème mathématique devient mal posé et n'admet pas une solution unique.



Numériquement, ce problème se traduit par une perte d'objectivité et présente une réponse post pic non physique, car pathologiquement dépendante de la taille des éléments finis. Pour éclaircir plus ce point, supposons que le barreau est discrétisé en  $M_e$  éléments et que les déformations se localisent dans un seul élément. La déformation moyenne  $\varepsilon_m$  est alors donnée par

$$\varepsilon_m = \frac{u_m}{l} = \varepsilon^e + \frac{1}{M_e} \varepsilon^{an} \quad (2.1)$$

Pour une loi d'écroutissage isotrope linéaire  $\varepsilon^{an} = \frac{\sigma - f_t}{h}$ , la déformation moyenne peut se réécrire

$$\varepsilon_m = \frac{u_m}{l} = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma - f_t}{M_e h} \quad (2.2)$$

avec  $h$  le module d'écroutissage

$$\frac{d\varepsilon_m}{d\sigma} = \frac{1}{E} + \frac{1}{M_e h} \quad (2.3)$$

La Figure 2-3 (b) montre le profil de déformation pour différentes discrétisations de maillage.

La partie post pic est fortement dépendante du nombre d'éléments de discrétisation et lorsque le nombre d'éléments tend vers l'infini, elle s'approche de la partie initiale élastique (Figure 2-3 (a)).

## 2.2 Application de la régularisation énergétique à un modèle isotrope endommageable

### 2.2.1 Formulation du modèle d'endommagement isotrope

Les modèles d'endommagement sont utilisés pour décrire le comportement adoucissant du béton dû à la propagation progressive des microfissures. Dans les modèles d'endommagements, l'apparition et le développement des non-linéarités sont pris en compte en modifiant la raideur élastique du matériau. Une fois implantés dans des codes de calcul, ces modèles permettent de représenter différents mécanismes de dégradation se manifestant dans le béton. Cependant, sans régularisation, ils subissent une dépendance pathologique au maillage à cause du phénomène de localisation.

Le modèle d'endommagement adopté dans la présente étude est le modèle d'endommagement isotrope initialement proposé par Fichant (Fichant 1996). La formulation du modèle, qualifié (à tort) de Microplan, écrite dans le cadre d'une anisotropie générale, se simplifie en adoptant une surface d'endommagement sphérique aboutissant ainsi à une loi d'endommagement isotrope.

La relation tensorielle liant la contrainte à la déformation élastique est donnée par:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{endo} \varepsilon_{kl}^e \quad (2.4)$$

Avec  $C_{ijkl}^{endo}$  est le tenseur d'élasticité endommagé. En l'absence de déformations plastiques, le tenseur de déformation élastique  $\varepsilon_{kl}^e$  est identique à celui des déformations totales ( $\varepsilon_{kl}^e = \varepsilon_{kl}$ ). Le tenseur des contraintes effectives est donné par :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e \quad (2.5)$$

Avec  $C_{ijkl}^0$  est le tenseur d'élasticité initiale.

Pour la version isotrope du modèle et en se basant sur les équations (2.4) et (2.5) la relation entre la contrainte totale et la contrainte effective est donnée par

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{endo} (C_{ijkl}^0)^{-1} \tilde{\sigma}_{mn} = (1-d) \tilde{\sigma}_{mn} \quad (2.6)$$

Avec  $d$  la variable d'endommagement scalaire (le rayon de la sphère d'endommagement)

L'évolution de la variable d'endommagement est contrôlée par la loi de normalité utilisant la fonction de charge décrite par

$$f = \tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0} - \xi \quad (2.7)$$

Avec  $\varepsilon_{d0}$  est le seuil d'endommagement,  $\xi$  est la variable d'écrouissage.

La loi d'évolution de l'endommagement intégrée est donnée par l'expression exponentielle fonction de la déformation équivalente:

$$d = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\tilde{\varepsilon}} \exp(B(\varepsilon_{d0} - \tilde{\varepsilon})), \quad \dot{d} > 0 \quad (2.8)$$

$B$  est le paramètre contrôlant la branche descendante de la courbe adoucissante.

La loi de l'évolution de l'endommagement proposée est valide pour le cas de la traction. Pour le cas d'un chargement en compression, la loi d'évolution de l'endommagement est déduite de l'endommagement de traction

$$d_c = d^\beta \quad (2.9)$$

$\beta$  est ajusté pour obtenir une réponse adéquate du matériau sous des chargements de compression. Pour la version isotrope du modèle, la relation complète reliant la contrainte à la déformation dans le cas d'un chargement cyclique unilatéral est donnée par

$$\sigma_{ij} = (1-d)\langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle^+ + (1-d_c)\langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle^- \quad (2.10)$$

Où  $\langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle^+$  et  $\langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle^-$  sont les parties positives et négatives du tenseur des contraintes effectives. La réponse uniaxiale du modèle pour un cycle traction-compression est présentée sur la Figure 2-4.

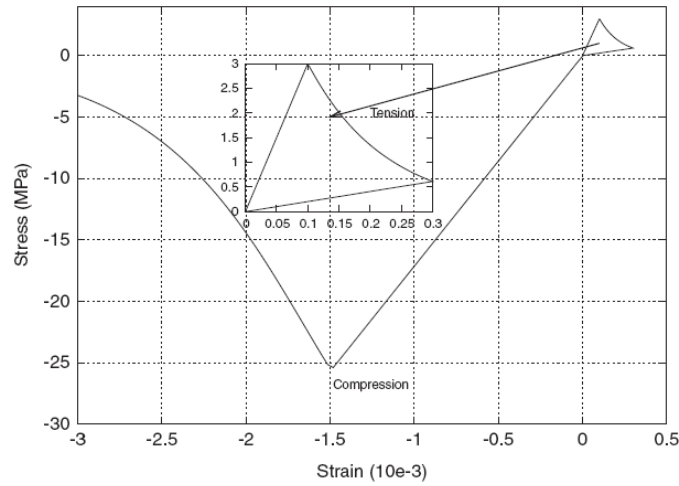


Figure 2-4: Réponse uniaxiale d'un béton standard pour un cycle traction-compression

### 2.3 Application de la régularisation énergétique au modèle isotrope endommageable

Dans une formulation de loi de comportement non linéaire, l'aire sous la courbe contrainte déformation représente la densité d'énergie dissipée par unité de volume

$$W = \int_0^{\infty} \tilde{\sigma}_{ij} d\tilde{\epsilon}_{ij} \quad (2.11)$$

et le produit de cette quantité par la largeur de la zone de localisation  $h$  représente l'énergie de fissuration  $G_f$  nécessaire pour créer une surface unitaire de fissuration (énergie dissipée par unité de surface)

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma du = hW \quad (2.12)$$

Pour représenter le processus de fissuration en mode I, on considère une distribution de fissure constante sur une bande de largeurs  $h$ , ce qui permet de calculer le saut de déplacement  $du$  comme le produit de la déformation de rupture (d'ouverture de fissure)  $\epsilon^f$  par la largeur de la bande  $h$  ce qui permet d'écrire

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma du = h \int_0^{\infty} \sigma d\varepsilon^f \quad (2.13)$$

En utilisant l'approche énergétique, le processus de rupture (de fissuration) dans le béton est ainsi gouverné par l'énergie de fissuration. La valeur de l'énergie de fissuration contrôle le processus de dissipation lors de la dégradation du matériau via un paramètre de la loi de comportement non linéaire qui contrôle l'adoucissement.

Dans ce qui suit, nous introduisons la loi de comportement endommageable du modèle isotrope de Fichant pour le calcul de l'énergie de fissuration.

$$\sigma_{ij} = (1-d) \tilde{\sigma}_{ij} = (1-d) C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} \quad (2.14)$$

L'évolution de l'endommagement est décrite par une loi d'évolution exponentielle fonction de la déformation équivalente. La définition de Mazars (Mazars 1984) est adoptée

$$d = 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_{d0}} \exp(B(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})); \quad \tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon^1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon^2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon^3 \rangle_+^2} \quad (2.15)$$

Pour un cas unidimensionnel avec un mode I de propagation de fissure, on obtient

$$G_f = h \int_0^{\infty} E(1-d) \varepsilon d\varepsilon = h \int_0^{\infty} E \left( \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon} \exp[B(\varepsilon_{d0} - \varepsilon)] \right) \varepsilon d\varepsilon = h \frac{E\varepsilon_{d0}^2}{2} + h \frac{E\varepsilon_{d0}}{B} \quad (2.16)$$

Avec  $h$  la taille de l'élément fini utilisé et  $B$  le paramètre contrôlant l'adoucissement ; il permet de calculer la branche descendante de la courbe et dépend de la taille des éléments de maillage. Le paramètre  $B$  doit être strictement positif, il est donné par:

$$B = \frac{hf_t}{G_f - \frac{hf_t \varepsilon_{d0}}{2}} \quad (2.17)$$

Donc la taille de l'élément fini est paramétrée et ne doit pas dépasser une certaine taille (équation (2.17)). Cette restriction a des conséquences directes sur la modélisation numérique

$$2G_f - hf_t \varepsilon_{d0} > 0 \quad \Rightarrow \quad h < \frac{2G_f}{f_t \varepsilon_{d0}} \quad (2.18)$$

Pour illustrer la performance de la formulation de l'énergie de rupture régularisée 1D, on propose d'étudier un élément soumis à la traction. Il s'agit d'un test de traction uniaxial d'un barreau de longueur  $L=1m$  et de largeur  $b=0.1m$  (voir la figure ci-dessous)

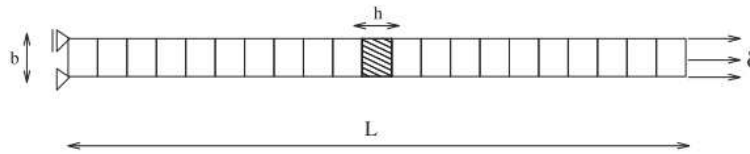


Figure 2-5: Barreau en traction.

Comme le montre la Figure 2-5, le barreau est fixé du côté gauche de la barre. L'allongement total est égal à l'incrément de déplacement appliqué sur l'extrémité droite du barreau selon la direction de l'élément. La rupture est forcée dans l'élément fini situé au centre du barreau avec une faible contrainte de traction noté  $f_{twe}$ . Les calculs sont pilotés en contrainte plane.

Les paramètres du béton utilisés pour la simulation sont:  $G_f = 100 \text{ N/m}$ ,  $E = 30 \text{ GPa}$ ,  $f_t = 3 \text{ MPa}$  et la contrainte limite de traction pour l'élément affaibli est  $f_{twe} = 1 \text{ MPa}$ .

Pour mettre en pratique l'objectivité du maillage, différentes discrétisations ont été utilisées ( $M_e = 11, 21, 31$ ) où  $M_e$  représente le nombre d'éléments. Pour chaque discrétisation, la courbe Force-Déplacement est tracée (Figure 2-6). L'énergie de rupture représentée par l'aire sous les courbes Force-Ouverture de fissure est égale à l'énergie de rupture initialement utilisée pour la simulation. L'objectivité du maillage est belle et bien illustrée sur la Figure 2-7.

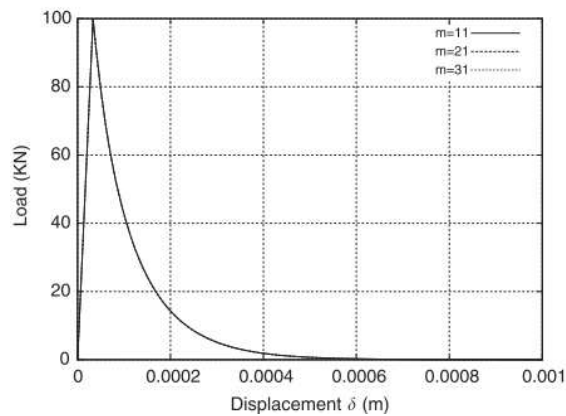


Figure 2-6: Courbes Force-déplacement pour  $M_e = 11, 21, 31$ .

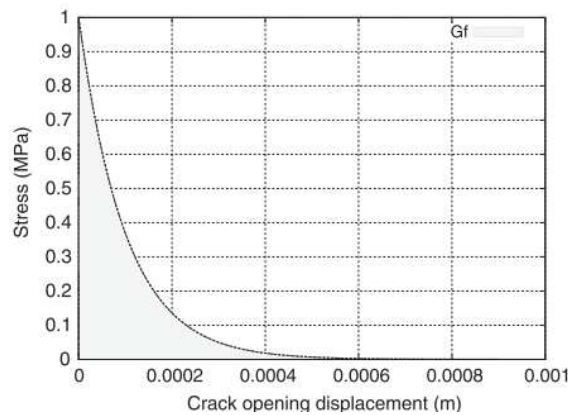


Figure 2-7: Courbes Contrainte-Ouverture de fissure pour  $M_e = 11, 21, 31$ .

## 2.4 Adaptation de la technique de régularisation énergétique pour la formulation du modèle plastique-endommageable

Dans le cadre d'une analyse unidimensionnelle (cas de la traction uniaxiale par exemple). La formulation proposée dans l'équation (2.16) ne permet pas de prendre en compte la dissipation plastique. Afin de simplifier le calcul de l'intégral dans l'équation (2.16), la formulation du critère de rupture duquel dérivent les évolutions des déformations plastiques est modifiée. Le critère de Nadai est remplacé par un double critère de Drucker-Prager

$$\begin{cases} F_t = \alpha_t J_2(\tilde{\sigma}_{ij}) + \beta_t I_1(\tilde{\sigma}_{ij}) - w(p) - w_0 \\ F_c = \alpha_c J_2(\tilde{\sigma}_{ij}) + \beta_c I_1(\tilde{\sigma}_{ij}) - w(p) - w_0 \end{cases} \quad (2.19)$$

L'évolution non linéaire de la variable interne plastique est remplacée par une évolution plastique linéaire:

$$w = p * q + w_0 \quad (2.20)$$

La loi de normalité permet de calculer l'évolution de la déformation plastique. Dans le cas de la traction uniaxial, on obtient :

$$\dot{p} = -\lambda \frac{dF_t}{dw} = -\lambda \frac{d(\tilde{\sigma} - w(p) - w_0)}{dw} = \lambda \quad (2.21)$$

La condition de consistance  $F_t = \tilde{\sigma} - w(p) - w_0 = 0$  nous permet d'écrire

$$\dot{\tilde{\sigma}} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = q\dot{p} = q\lambda = q \left( \frac{\dot{\varepsilon}^p}{dF_t / d\tilde{\sigma}_{ij}} \right) \quad (2.22)$$

L'évolution de la déformation plastique est ainsi donnée par

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E + \frac{q}{dF_t / d\tilde{\sigma}_{ij}}} \dot{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon^p = \frac{E}{E + \frac{q}{dF_t / d\sigma}} (\varepsilon - \varepsilon_{d0}) \quad (2.23)$$

Avec cette évolution, la dissipation plastique peut être prise en compte, et la relation reliant l'énergie de fissuration au paramètre  $B$  contrôlant l'adoucissement s'écrit

$$G_f = h \int_0^\infty E(\varepsilon_{d0} \exp[B(\varepsilon_{d0} - \varepsilon + \varepsilon^p)]) d\varepsilon = h \frac{E\varepsilon_{d0}^2}{2} + h \frac{E\varepsilon_{d0}}{B(1-\zeta)} \quad (2.24)$$

$$\text{Avec } \zeta = E / \left( E + \frac{q}{dF_t / d\sigma} \right)$$

Le paramètre de l'adoucissement est donné par

$$B = \frac{1}{(1-\zeta)} \frac{2Eh\varepsilon_{d0}}{2G_f - hE\varepsilon_{d0}^2} \quad (2.25)$$

L'équation (2.25) impose des restrictions sur la taille de l'élément fini utilisé. Le paramètre  $B$  est strictement positif ce qui limite les valeurs de  $h$ .

$$2G_f - hE\varepsilon_{d0}^2 > 0 \Rightarrow h < \frac{2G_f}{f_t\varepsilon_{d0}} \quad (2.26)$$

Dans le but de montrer l'objectivité du maillage en utilisant le modèle plastique endommageable, la même simulation élémentaire traitée dans la section 2.3 est réalisée, mais cette fois-ci pour le cas où la plasticité est activée. Les mêmes dimensions du barreau sont utilisées. Les paramètres du béton utilisés pour la simulation sont :  $G_f = 100 \text{ N/m}$ ,  $E = 30 \text{ GPa}$ ,  $f_t = 3 \text{ MPa}$ ,  $w_0 = 3 \text{ MPa}$  et la contrainte limite de traction pour l'élément avec défaut  $f_{tve} = 1 \text{ MPa}$ . Le coefficient  $q$  pour un durcissement plastique est choisi égal à la valeur du module de Young ( $q = 30 \text{ GPa}$ ).

La même constatation est faite avec le modèle plastique-endommageable. Comme on peut le voir sur la Figure 2-8, les courbes ne sont pas affectées par le raffinement du maillage. En effet, la surface sous ces diagrammes est équivalente et égale à l'énergie de rupture initialement utilisée.

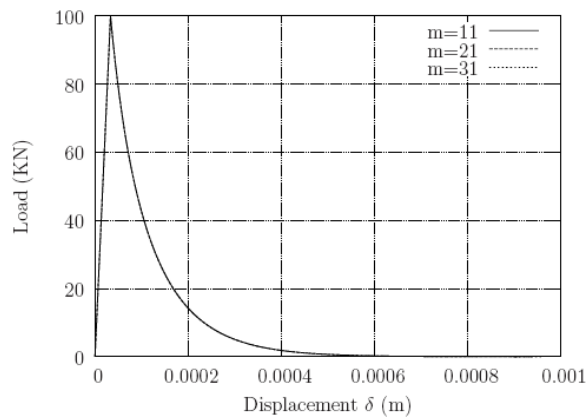


Figure 2-8: Courbes Force-déplacement pour  $M_e = 11, 21, 31$ .

## 2.5 La théorie de la bande de la fissure pour une analyse bidimensionnelle

La technique de régularisation a été adoptée dans cette thèse pour réaliser, plus tard, les simulations numériques à l'échelle mésoscopique. Dans le cas d'un chargement de flexion, on peut toujours se ramener à des configurations uniaxiales (traction et compression). Néanmoins, avec une régularisation énergétique, la présence d'un état de chargement combiné fausse les résultats de dissipation d'énergie. Même si l'état de fissuration est en mode I, la

présence d'un état de contrainte biaxial modifie la dissipation de l'énergie à l'intérieur de l'élément.

Si on ne considère dans la loi de comportement précédemment développée que l'endommagement en désactivant la plasticité et posons  $\gamma$  le rapport des contraintes  $\sigma_2/\sigma_1$ .

Pour un état de traction biaxial pour  $0 < \gamma < 1$ , le rapport de déformation est défini par

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}_1} = \gamma \Rightarrow \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma - \nu}{1 - \nu} \quad (2.27)$$

Pour des valeurs de  $\gamma$  comprises dans l'intervalle  $[0, 1]$ , le rapport des déformations est positif pour  $\gamma \geq 0.2$  est négatif pour  $\gamma < 0.2$ .

Selon le signe du rapport de déformation  $\gamma$ , on obtient deux expressions de la déformation équivalente de Mazars qui s'écrivent:

$$\gamma < 0.2 \Rightarrow \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 \quad (2.28)$$

$$\gamma \geq 0.2 \Rightarrow \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{(1 - \nu)^2 + (\gamma - \nu)^2}{(1 - \nu)^2}} \quad (2.29)$$

L'énergie dissipée est le produit tensoriel doublement contracté des contraintes par les déformations intégré sur un volume. Dans le cas bidimensionnel (contraintes planes), l'énergie de rupture est donnée par

$$G_f = h^* \left( \int_0^\infty (1-d) \tilde{\sigma}_1 d\varepsilon + \int_0^\infty (1-d) \tilde{\sigma}_2 d\varepsilon_2 \right) \quad (2.30)$$

On obtient les formules suivantes pour le  $G_f$  (la valeur du coefficient de poisson est prise égale à 0.2 (cas du béton par exemple)):

$$\gamma < 0.2 \Rightarrow G_f = h\eta_1 E \left( \frac{\varepsilon_{d0}}{B} + \frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} \right) \quad (2.31)$$

$$\gamma \geq 0.2 \Rightarrow G_f = h\eta_2 E \left( \frac{\varepsilon_{d0}}{B} + \frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} \right) \quad (2.32)$$

Avec

$$\eta_1 = \left( \frac{(1 - 2\nu + \gamma^2)}{(1 - \nu)^2} \right), \quad \eta_2 = \left( \frac{(1 - 2\nu + \gamma^2)}{(1 - \nu)^2 + (\gamma - \nu)^2} \right) \quad (2.33)$$



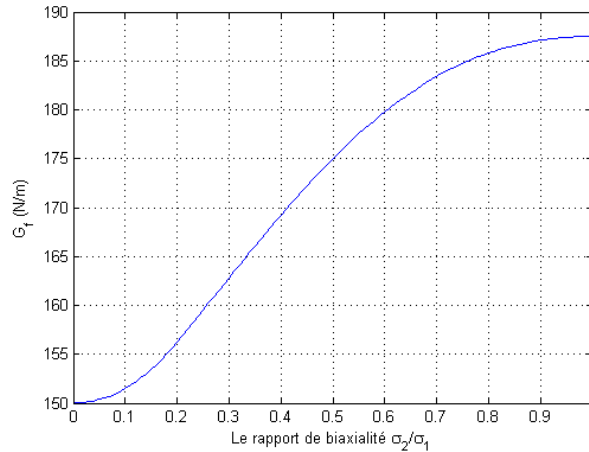


Figure 2-9: Évolution de l'énergie de rupture en fonction du rapport  $\sigma_2/\sigma_1$ .

La Figure 2-9 représente l'évolution de l'énergie de rupture sous un état de contrainte biaxial, cette énergie dépend du rapport de biaxialité ( $\sigma_2/\sigma_1$ ). Ce rapport n'est pas constant au cours du chargement. Il varie d'un élément fini à un autre.

Les formules (2.31) et (2.32) sont valables pour des rapports de contraintes positives. Dans le cas de la présence d'une contrainte négative (de compression), les formules sont plus complexes. La prise en compte de la plasticité complique davantage le calcul de  $G_f$ .

Nous nous intéressons principalement dans cette section à démontrer les erreurs que l'on peut commettre dans le cas d'une analyse 2D (flexion par exemple). On propose donc d'évaluer la théorie de la bande de la fissure sous une configuration bidimensionnelle. Pour ce faire, analysant numériquement une poutre entaillée soumise à la flexion 3 points (Figure 2-10), avec une même géométrie que celle étudiée expérimentalement dans (Matallah et al. 2013).

Notre objectif est d'évaluer l'énergie dissipée dans la zone fissurée et de la comparer avec l'énergie de rupture d'entrée. Les paramètres du modèle considérés sont ( $f_t = 2.5 \text{ MPa}$ ,  $G_f = 100 \text{ N/m}$ ,  $E = 40 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ).

Dans la partie centrale de la poutre, la taille de l'élément fini (à l'avant de l'entaille) est d'environ 1,6 mm. Le paramètre B est calculé en utilisant l'équation (2.17). Le comportement global de la poutre (la courbe Force-Flèche) est représenté sur la Figure 2-11. L'évolution des composantes cartésiennes et des composantes principales du tenseur des contraintes est montrée sur la Figure 2-12 (a) et (b). Ces évolutions sont calculées pour le premier élément fini fissuré situé à l'avant de l'entaille (point de Gauss 2). La Figure 2-13 montre les diagrammes des contraintes principales par rapport aux déformations principales.

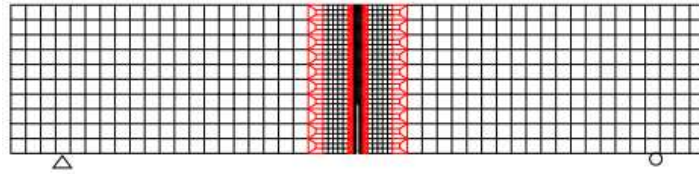


Figure 2-10: Maillage EF de la poutre entaillée en flexion 3 points.

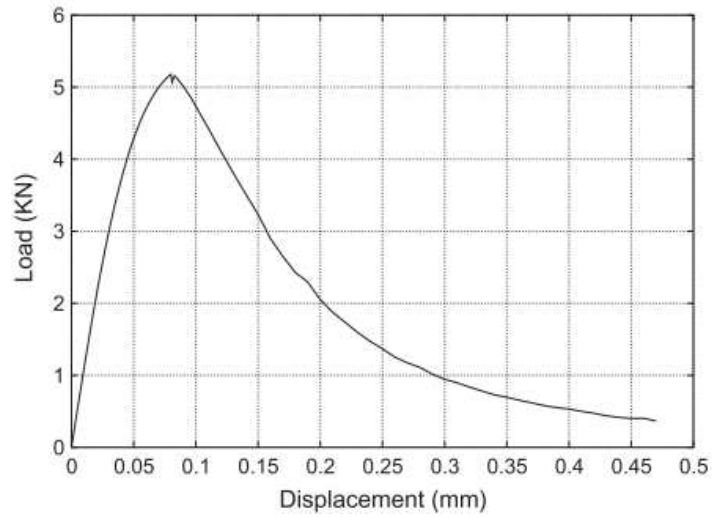


Figure 2-11: Réponse Force-déplacement.

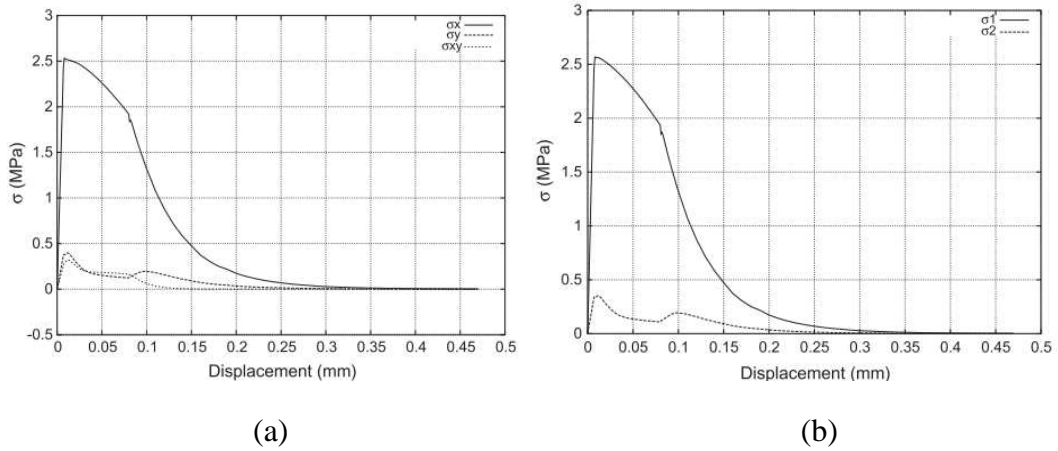


Figure 2-12: Évolution des composantes du tenseur de contrainte. a) Composantes cartésiennes. b) Composantes principales.

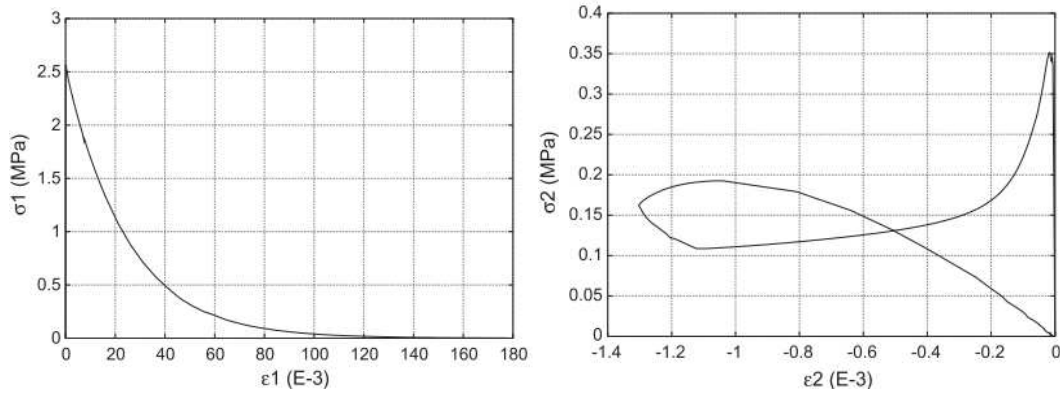


Figure 2-13: Évolution de la contrainte en fonction de la déformation dans le repère principal.

La quantité totale de l'énergie de rupture est estimée par

$$G_f = h \times \left( \int_0^{\infty} \sigma_1 d\varepsilon_1 + \int_0^{\infty} \sigma_2 d\varepsilon_2 \right) = 102.56 \text{ N / m} \quad (2.34)$$

La contribution de la contrainte principale mineure (perpendiculaire à l'axe de la poutre) est d'environ 2,02-2 N/m. La quantité totale d'énergie de rupture dissipée par le modèle est légèrement supérieure à l'énergie de rupture utilisée pour effectuer la simulation numérique. La même constatation est faite dans (Jirásek & Bauer 2012).

Il est important de noter que lorsqu'on utilise la contrainte équivalente de Mazars (équation (2.15)), la présence d'une contrainte principale mineure positive augmente la résistance à la traction (le pic de la contrainte principale est d'environ 2,56 MPa > ft).

Ces constatations sont utiles pour la suite de notre étude, car il est primordial de s'assurer de la bonne dissipation d'énergie dans un calcul éléments finis.

## 2.6 Aspects théoriques/numériques de l'approche crack band en 3D

Afin de mieux comprendre l'influence des états de contraintes sur la dissipation de l'énergie à l'intérieur d'un élément fini dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle, nous proposons de faire une analyse mathématique pour déduire une expression analytique de l'évolution de l'énergie de fissuration dans le cas d'une analyse tridimensionnelle générale.

Soumettons un volume élémentaire à un état de contrainte triaxial de traction, l'énergie de rupture est évaluée par:

$$G_f = h \times \left( \sum_{I=1}^3 \int_0^{\infty} \sigma_I d\varepsilon_I \right) \quad (2.35)$$

Avec  $\sigma_I, \varepsilon_I$  les contraintes et les déformations principales dans la direction  $I$  (avec  $I = 1, 2, 3$ ). Il est bien évidemment possible de l'exprimer en fonction des termes tensoriels.

Dans notre étude nous adoptons  $h = \sqrt[3]{V_{elem}}$  tel que  $V_{elem}$  est le volume de l'élément fini. Notons  $\gamma_1$  le rapport de contrainte  $\sigma_2 / \sigma_1$  et  $\gamma_2$  le rapport de contrainte  $\sigma_3 / \sigma_1$ .

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}_1} = \gamma_1 \Rightarrow \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma_1(1-2\nu) + (\gamma_2 + 1)(2\nu^2 - \nu)}{1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2)} \quad (2.36)$$

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{\tilde{\sigma}_3}{\tilde{\sigma}_1} = \gamma_2 \Rightarrow \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma_2(1-2\nu) + (\gamma_1 + 1)(2\nu^2 - \nu)}{1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2)} \quad (2.37)$$

Selon les signes des rapports de déformations, nous distinguons quatre domaines. Le Tableau 2-1 illustre les quatre différentes zones et les valeurs de  $G_f$  correspondantes.

Tableau 2-1: Formules de  $G_f$  dans le cas d'une analyse 3D.

Zone I	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1$	$G_f = h\eta_1 E \left( \frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{d0}}{B} \right)$
Zone 2	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2))^2 + (\gamma_1(1-2\nu))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2)}$ $+ \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(2\nu^2 - \nu)(\gamma_2 + 1))^2 + (\gamma_2(1-2\nu) + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + 1))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2)}$	$G_f = h\eta_2 E \left( \frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{d0}}{B} \right)$
Zone 3	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2)}$ $+ \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(\gamma_1(1-2\nu) + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_2 + 1))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2)}$	$G_f = h\eta_3 E \left( \frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{d0}}{B} \right)$
Zone 4	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2)}$ $+ \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(\gamma_2(1-2\nu) + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + 1))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2)}$	$G_f = h\eta_4 E \left( \frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{d0}}{B} \right)$

Avec

$$\eta_1 = \frac{(1-3\nu + 4\nu^3)[(1-2\nu)(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + 2(2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2)]}{(1+\nu)(1-2\nu)[1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2)]^2} \quad (2.38)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.39)$$

$$\times \frac{(1-3\nu + 4\nu^3)[(1-2\nu)(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + 2(2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2)]}{[(1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2))^2 + (\gamma_1(1-2\nu) + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_2 + 1))^2 + (\gamma_2(1-2\nu) + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + 1))^2]}$$

$$\eta_3 = \frac{(1-3\nu + 4\nu^3)[(1-2\nu)(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + 2(2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2)]}{(1+\nu)(1-2\nu)[(1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2))^2 + (\gamma_2(1-2\nu) + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + 1))^2]} \quad (2.40)$$

$$\eta_4 = \frac{(1-3\nu + 4\nu^3)[(1-2\nu)(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + 2(2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2)]}{(1+\nu)(1-2\nu)[(1-2\nu + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_1 + \gamma_2))^2 + (\gamma_1(1-2\nu) + (2\nu^2 - \nu)(\gamma_2 + 1))^2]} \quad (2.41)$$

Durant un calcul éléments finis, l'évolution (et la redistribution) des contraintes au sein d'un élément fait que les rapports  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont en variation continue. Pour assurer la bonne dissipation à l'intérieur de l'élément, les expressions de l'énergie de fissuration devraient être adaptées.

## 2.7 Illustration du mécanisme de dissipation

Dans cette section, on présente la réponse obtenue avec le modèle d'endommagement de Fichant lorsqu'on soumet un élément de volume à un chargement statique selon trois états de sollicitations : État de contrainte purement uniaxial, un état de contrainte biaxial ou plane caractérisé par une contrainte principale  $\sigma_3$  nulle et enfin un état de contrainte triaxial. Les calculs sont menés avec le code Cast3M.

### 2.7.1 Cas de la traction 1D

Pour illustrer le mécanisme de dissipation sur un cas 1D, un volume élémentaire est soumis à la traction dans une direction. Les calculs sont réalisés en contrainte plane et les paramètres du modèle utilisés sont  $f_t = 3MPa$ ,  $G_f = 150N/m$ ,  $E = 30GPa$ .

Numériquement, on calcule la densité de dissipation (équation (2.11)) multipliée par la taille de l'élément fini  $h$  que l'on fait varier de 1mm à 10 cm. La valeur de  $G_f$  dissipée réellement dans l'élément est comparée à celle injectée comme paramètre d'entrée. Les résultats de comparaisons sont illustrés dans le Tableau 2-2.

Tableau 2-2: Résultats numériques de  $G_f$  dans le cas d'une analyse 1D ( $G_f$  injectée = 150 N/m).

Dimension L (m)	Sans prise en compte de la dissipation plastique Equa.(2.16)	Avec prise en compte de la dissipation plastique Equa.(2.24)
0.001	2581.6	149.21
0.01	1730.8	150.01
0.1	1669.1	150.10

Ces résultats montrent clairement qu'en utilisant un modèle élasto-plastique, si la dissipation due à la plasticité n'est pas correctement prise en compte, l'énergie dissipée réellement est très différente de celle injectée dans les calculs. Ceci conduit à des résultats de calculs erronés.

### 2.7.2 Cas de la traction 2D

Considérons un volume élémentaire soumis à un état de contrainte biaxial avec un rapport  $\gamma = 1$ . Les simulations sont réalisées avec le même jeu de paramètres utilisé pour la simulation 1D. Deux types d'analyse sont réalisés : une première analyse avec une formule de  $G_f$  1D (équation (2.16)) et l'autre en considérant la formule 2D (équation (2.32)). En réalité, lors d'un calcul de structures, on utilise toujours la formule 1D quel que soit le type d'analyse.

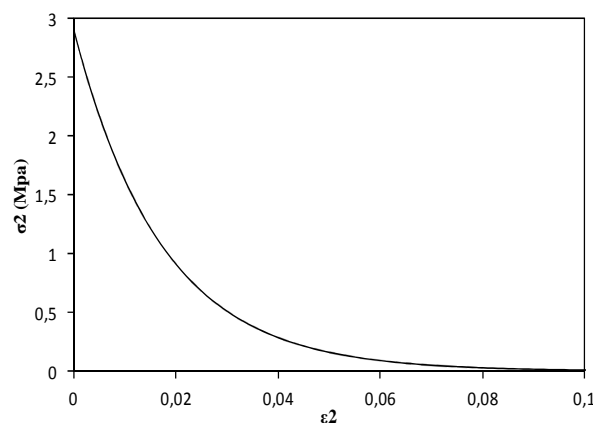
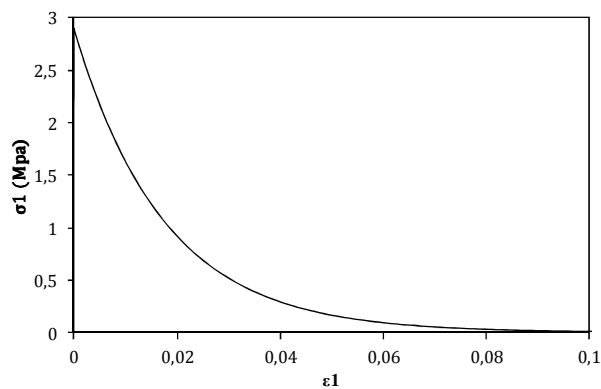
Le Tableau 2-3 illustre la dissipation réelle dans l'élément dans les deux cas d'étude. L'erreur commise en considérant une formulation 1D de l'énergie de fissuration est de l'ordre de 25%.

Tableau 2-3. Résultats numériques de  $G_f$  dans le cas d'une analyse 2D ( $G_f$  injectée =150N/m)

Dimension L (m)	Simulation réalisée avec la formule 2D (équation (2.32))	Simulation réalisée avec la formule 1D (équation (2.16))
0.001	150.01	187.51
0.01	150.01	187.51
0.1	149.99	187.48

### 2.7.3 Cas de la traction 3D

Les résultats de simulations sont présentés dans le Tableau 2-4. La simulation porte sur un élément de volume soumis à un état de contrainte tridimensionnelle avec  $\gamma_1=1$  et  $\gamma_2=1$  ce qui correspond à une formule de  $G_f$  de la Zone 2. La Figure 2-14 représente les courbes contrainte-déformation dans le repère principal.



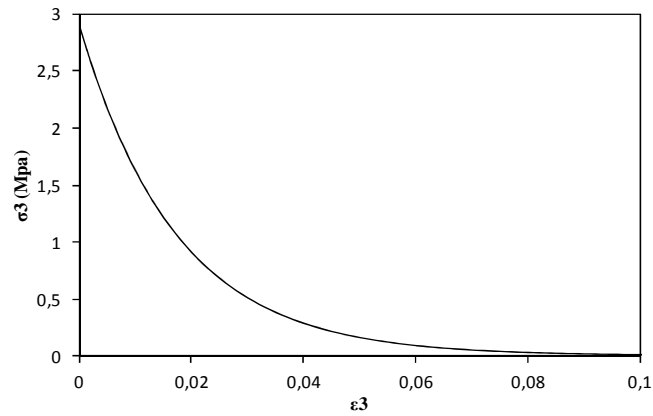


Figure 2-14: Courbes contrainte -déformation dans le repère principale.

Tableau 2-4: Résultats numériques de  $G_f$  dans le cas d'une analyse 3D ( $G_f$  injectée =150N/m)

Dimension L (m)	Simulation réalisée avec la formule 3D (Zone 2)	Simulation réalisée avec la formule 1D (équation (2.16))
0.001	150.00	250
0.01	149.99	250
0.1	149.82	249.85

Le Tableau 2-4 illustre la dissipation réelle dans l'élément dans le cas d'une analyse 3D. En utilisant une formulation  $G_f$  issue d'une analyse unidimensionnelle, l'erreur commise est considérable. L'énergie de fissuration réellement dissipée dans l'élément est très différente de celle injectée dans l'élément contrairement à une formulation 3D qui permet une conservation de l'énergie. La Figure 2-15 représente l'énergie de rupture sous un état de contrainte triaxiale. Cette énergie dépend des rapports de contraintes  $\sigma_2/\sigma_1$  et  $\sigma_3/\sigma_1$  qui ne sont pas constants au cours de chargement. Cette figure est tracée en se servant des expressions mathématiques données dans le Tableau 2-1.

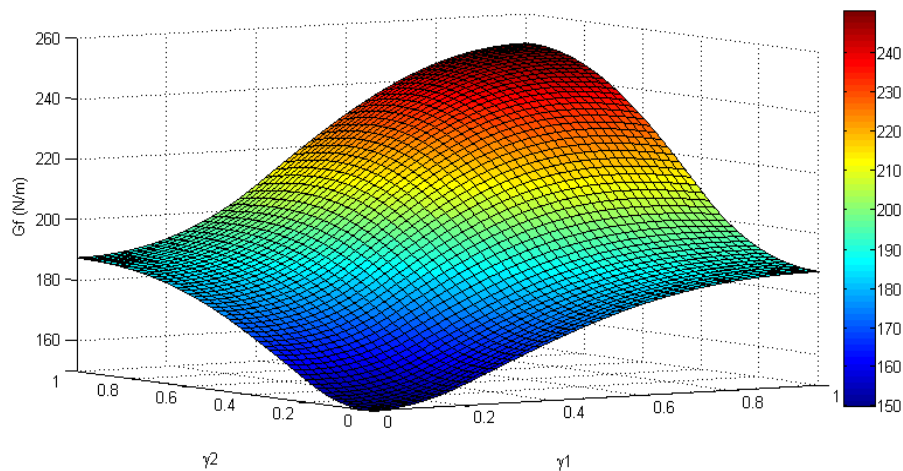


Figure 2-15: Évolution de l'énergie de rupture en fonction des rapports de contraintes  $\sigma_2/\sigma_1$  et  $\sigma_3/\sigma_1$ .

## 2.8 Limites d'application de la régularisation énergétique

La méthode de régularisation énergétique est un outil pratique qui permet de remédier complètement ou partiellement au problème de dépendance aux maillages lors d'un calcul de structures. Cette méthode, qui permet dans certaines situations de faire un gain en temps de calcul considérable, doit être utilisée avec précaution. Dans un calcul de structures générant un état de fissuration en mode I (comme celui de la flexion par exemple), les éléments sont soumis à des états de contraintes très variés. Le paramètre de la loi de comportement qui permet d'ajuster l'adoucissement afin de contrôler la dissipation de chaque élément est calculé en supposant un état de contrainte uniaxial. Ceci conduit à fausser (surestimer ou sous-estimer) la dissipation dans les éléments qui subissent des états de contraintes non uniaxiaux. La prise en compte d'une formulation de  $G_f$  qui tiendrait compte de l'état de contrainte permet de conserver la dissipation ( $G_f$  injectée =  $G_f$  dissipée). Néanmoins, chaque état de contrainte génère une formulation différente et étant donné que l'état de contrainte auquel est soumis l'élément fini varie pendant le calcul, il devient difficile de tenir compte de ces formulations dans un calcul éléments finis. Un autre problème lié à la présence des déformations plastiques (irréversibles) a été discuté. Les aspects 2D et 3D relatifs à ce point n'ont pas été discutés dans ce chapitre. Seul le cas 1D a été étudié. Mathématiquement, l'intégration de la dissipation plastique dans la formule de  $G_f$  n'est pas une tâche facile. Cela dépend principalement de la formulation de la loi de comportement. La non-prise en compte de la dissipation plastique dans la formulation de l'énergie de fissuration conduit à des résultats erronés. Ces erreurs peuvent être amplifiées dans le cas d'un état de contrainte biaxial ou triaxial.

## 2.9 Conclusions

La modélisation numérique du phénomène de localisation reste une question difficile qui n'a pas encore eu une réponse entièrement satisfaisante. L'utilisation de la méthode de régularisation énergétique permet de s'affranchir du problème de dépendance des résultats vis-à-vis du maillage lors d'un calcul 1D, mais ne garantit pas, en revanche, l'obtention d'un résultat satisfaisant pour un calcul de structure dans un contexte 2D et 3D. Cela est dû au fait que la solution numérique dépend non seulement de la taille de l'élément fini, mais aussi de l'état de contrainte auquel la structure est soumise. Des recommandations à l'utilisation de cette technique de régularisation sont fournies:

- La prise en compte d'une formulation de  $G_f$  qui tiendrait compte de l'état de contrainte permet de conserver la dissipation ( $G_f$  injectée =  $G_f$  dissipée).
- Chaque état de contrainte génère une formulation différente et étant donné que l'état de contrainte auquel est soumis l'élément fini varie pendant le calcul, il devient difficile de tenir compte de ces formulations dans un calcul éléments finis.



- Lors de l'utilisation d'un modèle élasto-plastique, la non prise en compte de la dissipation plastique dans la formulation de l'énergie de fissuration conduit à des résultats erronés. Ces erreurs peuvent être amplifiées dans le cas d'un état de contrainte non uniaxial.

## **CHAPITRE 3. Investigation de l'effet d'échelle sur les propriétés locales et globales**

### 3.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de faire une analyse numérique pour étudier l'influence de l'effet d'échelle sur les caractéristiques de rupture (locales et globales) des structures en béton. Pour ce faire, l'étude est réalisée sur la base de deux campagnes expérimentales élaborées sur des poutres entaillées de tailles homothétiques testées à la flexion trois-points : la première série de poutres, réalisée au laboratoire GeM de Nantes par Alam (Alam 2011), contient trois tailles de poutres avec un rapport fixe  $\alpha=0.2$ . La deuxième série d'expériences a été réalisée à L'UPPA par Rojas Solano (Rojas Solano 2012). Elle contient quatre tailles de poutres avec deux géométries différentes ( $\alpha=0.2$  et  $\alpha=0.5$ ).

Dans la première partie de ce chapitre, le modèle d'endommagement isotrope régularisé de fichant dont les limites d'application et les sources d'erreurs liées à sa régularisation ont été mises en évidence dans le chapitre précédent est utilisé dans le cadre d'une modélisation mésoscopique afin de montrer la capacité de cette stratégie de modélisation à prédire le phénomène d'effet d'échelle sur le comportement global (Courbe de capacité). Deux lois d'effet d'échelle seront examinées. Par la suite, l'approche est employée pour explorer l'effet d'échelle sur le comportement local (Ouverture de fissure et longueur de fissure). La variation de la FPZ sur la base de l'évolution de la contrainte tangentielle est explorée ainsi que l'effet d'échelle sur la courbe-R.

### 3.2 Application de la modélisation mésoscopique au béton

Dans le but de proposer une comparaison acceptable aux réponses globales du béton mesurées expérimentalement et notamment du processus de fissuration, nous avons fait le choix d'une modélisation à l'échelle mésoscopique en utilisant le béton numérique. Comme nous l'avons déjà évoqué, cette approche de modélisation, dont les travaux pionniers remontent à (Reolfstra et al. 1985), permet une représentation réaliste de la structure hétérogène du béton ; la matrice et le squelette granulaire du béton sont explicitement représentés ((Nguyen et al. 2010) (J Saliba et al. 2012) (Grondin & Matallah 2014)).

#### 3.2.1 Description des poutres testées expérimentalement

Un programme expérimental a été réalisé par Alam (Alam 2011) au laboratoire GeM dans le cadre de l'ANR MEFISTO. Les essais de flexions trois-points ont été réalisés sur des éléments en béton.

Tableau 3-1: Détails des formulations du béton M1 et M2.

Constituant	M1 (en kg/m <sup>3</sup> )	M2 (en kg/m <sup>3</sup> )
Sable	820	820
Ciment Portland	312	312
Granulats (12.5-20 mm)	784	-
Granulats (5-12.5 mm)	316	1100
Eau	190	190

Deux types de mélanges de béton ont été utilisés : M1 avec une taille de granulat maximale de 20 mm et M2 avec une taille de granulat maximale de 12,5 mm. La formulation des deux mélanges du béton est détaillée dans le Tableau 3-1.

Trois tailles de poutres entaillées homothétiques et géométriquement similaires sont expérimentées (Figure 3-1). La section transversale des éprouvettes est de forme rectangulaire, et le rapport de la travée sur la profondeur est  $l / d = 3:1$  pour tous les échantillons. L'épaisseur  $b$  est maintenue constante égale à 100 mm pour tous les échantillons. L'épaisseur d'entaille est de 3mm (Figure 3-2).



Figure 3-1: Poutres D1, D2 et D3 avec des tailles géométriquement similaires.

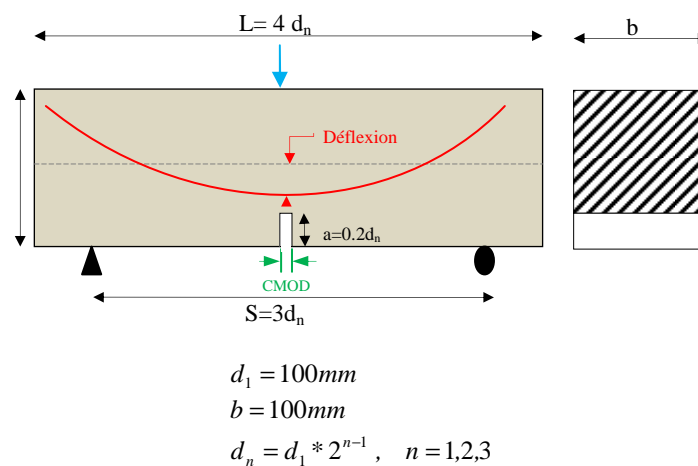


Figure 3-2: Détails de la géométrie des poutres testées.

Les caractéristiques géométriques des poutres sont renseignées dans le tableau Tableau 3-2.

Tableau 3-2: Dimensions des poutres (en mm).

	L	D	S	a	B
D1	400	100	300	20	100
D2	800	200	600	40	100
D3	1600	400	1200	80	100

Le pilotage des essais expérimentaux a été réalisé en ouverture d'entaille (CMOD) dont le but de contrôler la stabilité de la propagation de la fissure dans la phase post-pic. Le chargement a été appliqué avec une vitesse constante de déplacement d'ouverture d'entaille ( $0.05 \mu\text{m} / \text{sec}$ )

afin de provoquer une rupture progressive dans les poutres. La technique de corrélation d'image a été utilisée pour la mesure des champs des déplacements (Alam 2011).

### **3.2.2 Description de l'approche mésoscopique adoptée & simulation des poutres entaillées**

La simulation des poutres testées expérimentalement est élaborée en 2D à l'aide d'un maillage en élément fini sous l'hypothèse des contraintes planes. Le béton est considéré comme un matériau biphasique avec deux phases matériaux (granulats et mortier) distribuées de manière aléatoire. Un maillage discret est adopté où les particules de granulats sont projetées sur une grille fixe dont chaque élément représente soit le granulats ou bien la pâte de ciment.

Au-delà de la phase de mortier, seuls les gros granulats sont représentés explicitement. Chaque classe de granulats est caractérisée par une fraction volumique et un diamètre. La taille minimale des granulats est de 5mm, la distribution des granulats est faite selon la courbe granulométrique expérimentale (voir (Alam 2011)). Les petits granulats et autres composants sont supposés être mélangés avec la phase de mortier constituant ainsi la matrice de mortier. Une procédure numérique appelée (@meso) implantée dans le logiciel Cast3M a été développée. Cette procédure est une combinaison de deux approches de modélisation mésoscopique (une développée initialement au CSTB et l'autre au SIAME (Nguyen et al. 2010) ) pour effectuer une répartition spatiale et aléatoire de ces phases sur la base d'une grille en éléments finis.

Les deux phases du béton numérique (la pâte de ciment et les granulats) sont décrites avec leurs propres caractéristiques mécaniques (Tableau 3-3). Le modèle d'endommagement isotrope décrit dans le deuxième chapitre est utilisé pour décrire le comportement des deux phases. La zone de transition n'est pas considérée dans cette étude. En raison des paramètres mécaniques contrastés (module élastique et autres paramètres de rupture), la concentration des contraintes qui se produit à l'interface granulats-matrice génère de l'endommagement dans cette interface. L'influence de la zone de l'auréole de transition a été largement discutée par Grondin et Matallah dans (Grondin & Matallah 2014).

### **3.2.3 Maillage Éléments finis et paramètres du modèle**

La Figure 3-3 montre le maillage des poutres entaillées. Toutes les simulations sont effectuées en utilisant le code aux éléments finis Cast3M. Le maillage est construit avec des éléments de tailles différentes. Les éléments choisis sont du type quadrangles linéaires (QUA4). Le choix d'une cinématique faible (linéaire) est justifié par le fait que l'objectif primordial est d'étudier l'influence de la représentation méso sur l'enrichissement des variables cinématiques et statiques. La discrétisation du maillage mésoscopique est réduite dans la partie centrale entourant l'entaille ou l'endommagement est susceptible de se produire. La largeur de la « boîte » mésoscopique fait 5cm de part et d'autre de l'entaille et sa hauteur comprend toute la hauteur de la poutre considérée (ligament). Un raccordement est réalisé entre les zones de la poutre macroscopique et mésoscopique avec un maillage progressif permettant une transition en douceur entre les différentes zones de la poutre. Un modèle élastique linéaire est considéré

pour les parties macroscopiques du maillage afin de réduire le temps de calcul. Les paramètres utilisés pour les deux composantes (granulats et mortier) sont renseignés dans le Tableau 3-3.

Tableau 3-3: Paramètres utilisés dans la modélisation mésoscopique.

Constituants	$f_t$ (MPa)	$E$ (GPa)	$G_f$ (N/m)
Mortier	3	20	50
Granulats	6	60	80

Dans le but d'analyser l'effet de la distribution des granulats sur la réponse globale (courbe force-déplacement) et la réponse locale (profil de fissuration), trois tirages aléatoires de la mésostructure des granulats sont réalisés pour chaque taille de poutre en gardant les mêmes propriétés mécaniques de chaque constituant.

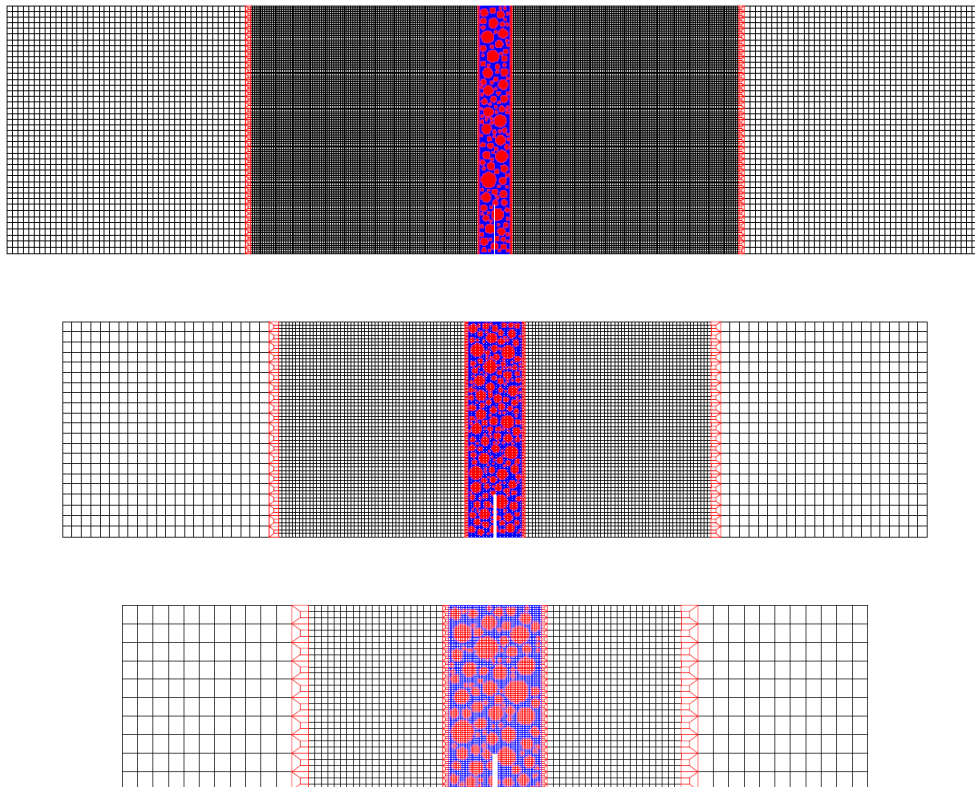


Figure 3-3: Maillage Macro/Méso des poutres D1, D2 et D3.

### 3.3 Détermination des paramètres de rupture par les lois d'effets d'échelle

#### 3.3.1 Loi classique de Bazant

Comme nous l'avons exposé dans la partie bibliographique, la loi d'effet d'échelle de Bazant est une loi déterministe dont les fondements théoriques sont basés sur une approche énergétique-statistique (Bažant 1984) (Bažant & Planas 1997). La loi classique de Bazant pour des structures homothétiques entaillées est donnée par:

$$\sigma_N = \frac{Bf_t}{\sqrt{1 + \frac{D}{D_0}}} \quad (3.1)$$

Où  $f_t$  est la résistance à la traction du matériau,  $B$  est une constante adimensionnelle et  $D_0$  est une longueur constante,  $D$  est la hauteur de la poutre. La contrainte nominale pour une poutre en flexion trois-points entaillée fonction de l'effort au pic  $P_{max}$  est donnée par la formule suivante

$$\sigma_N = \frac{3}{2} \frac{P_{max} S}{bD^2} \quad (3.2)$$

#### 3.3.2 L'approche MMTS

Ayatollahi (Ayatollahi & Akbardoost 2012) propose une nouvelle approche appelée *the Modified Maximum Tangential Stress model* (MMTS) pour étudier l'effet d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles sous le mode I. Les bases théoriques de cette approche sont brièvement discutées dans ce paragraphe. Cette approche est une amélioration du modèle MTS (*Maximum Tangential Stress model*) initialement proposé par Erdogan (Erdogan 1963).

Pour le mode de rupture I, la progression de la fissure débute lorsque la contrainte nominale à la fin de la FPZ dépasse la résistance à la traction  $f_t$  (Hillerborg et al. 1976). En réalité, il est difficile de résoudre les équations différentielles pour un problème de l'élasticité plane pour déterminer analytiquement les distributions de contraintes et de déformations en pointe de la fissure. L'introduction de la fonction de contrainte d'Airy  $\Phi$  simplifie largement les solutions des problèmes de l'élasticité plane et permet de déterminer les expressions des champs de contraintes et de déformations au voisinage du front de fissure. Dans un corps solide fissuré, une série de représentation pour  $\Phi$  a été proposée par (Williams 1952) (Williams 1957) connue sous le nom des Séries de Williams dont la solution a révélé la nature universelle de la singularité  $1/\sqrt{r}$  pour les problèmes de fissure élastique et a joué un rôle important dans le développement de MLER.

Le long de la fissure, la contrainte normale égale à la contrainte tangentielle en système de coordonnées polaires est donnée par

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_n r^{\frac{n}{2}-1} \left[ \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta - \left( \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos\left(\frac{n}{2} + 1\right) \theta \right] \quad (3.3)$$

qui donne pour  $\theta = 0$  (mode I) la relation suivante:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) = \frac{A_1}{\sqrt{r}} + 3A_3\sqrt{r} + 5A_5r^{3/2} + \dots \quad (3.4)$$

Au lieu de tronquer la série de Williams pour n'en garder que le premier terme (comme il a été le cas dans le modèle MTS initialement proposé par Erdogan (Erdogan 1963)), l'approche MMTS emploie le critère de contrainte tangentielle maximale tout en incorporant les ordres supérieurs dans le développement des séries de Williams dans le but d'enrichir la description du champ de contraintes. Le terme  $A_3$  est considéré dans le critère de rupture et aussi dans le calcul de la longueur de la FPZ. Cette notion d'enrichissement de champs de contraintes a été également utilisée par Karihaloo (Karihaloo et al. 2003) pour le développement de sa loi d'effet d'échelle et dont l'équation portant sur l'évolution de la FPZ sera discutée plus tard.

Lorsque la contrainte tangentielle sera égale à la contrainte de traction pour une distance critique  $r_c$ , la fissure prend place. Cette distance est généralement considérée comme la longueur de la FPZ.

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) = f_t \Rightarrow \frac{A_{1c}}{\sqrt{r_c}} + 3A_{3c}\sqrt{r_c} = f_t \quad (3.5)$$

Basé sur la MLER, le premier terme  $A_1$  est relié au facteur d'intensité de contrainte critique  $K_{Ic}$  qui est considéré comme une propriété matérielle (Owen & Fawkers 1983). L'équation (3.5) peut s'écrire alors :

$$\frac{K_{Ic}}{\sqrt{2\pi r_c}} + 3A_{3c}\sqrt{r_c} = f_t \quad (3.6)$$

Afin d'utiliser cette équation pour étudier l'effet d'échelle, les termes  $A_1$  et  $A_3$  doivent être normalisés (grandeurs adimensionnelles) tel que

$$A_1 = \sigma_n \sqrt{D} A_1^* \quad (3.7)$$

$$A_3 = \frac{\sigma_n}{\sqrt{D}} A_3^* \quad (3.8)$$

où  $\sigma_n$  est la contrainte nominale appelée la résistance nominale pour une charge maximale,  $D$  est la hauteur de la poutre,  $A_1^*$  et  $A_3^*$  dépendent du rapport de la longueur de fissure sur la hauteur de la poutre et du rapport de la portée sur la hauteur de la poutre. En remplaçant les termes  $A_1$  et  $A_3$  dans (3.6), on obtient:



$$f_t = \frac{k_c}{\sqrt{2\pi r_c}} \left( 1 + 3 \frac{A_3^* r_c}{A_1^* w} \right) \quad (3.9)$$

En remplaçant les termes  $A_1$  et  $A_3$  dans (3.9), la loi d'effet d'échelle autrement dit la relation entre la résistance nominale et la taille d'échantillon s'écrit

$$\sigma_N = \frac{f_t}{\frac{A_1^* \sqrt{D}}{\sqrt{r_c}} \left( 1 + 3 \frac{A_3^* r_c}{A_1^* D} \right)} \quad (3.10)$$

L'évolution de la longueur de la FPZ  $r_c$  en fonction de la hauteur d'échantillon s'obtient en résolvant l'équation (3.10) qui donne

$$r_c = \left( \frac{f_t \sqrt{2\pi} \pm \sqrt{2\pi f_t^2 - 12 \frac{A_3^* K_c^2}{A_1^* D}}}{6 \frac{A_3^* K_c}{A_1^* D}} \right)^2 \quad (3.11)$$

Comme la longueur de la FPZ tend vers une valeur constante pour de larges échantillons appelée dans la loi de Bazant  $c_f$ , une expression générale de l'évolution de la FPZ est proposée par (Ayatollahi & Akbardoost 2012) qui s'écrit

$$r_c = \frac{A}{1 + \frac{B}{D}} \quad (3.12)$$

Où A et B peuvent être déterminés à partir de l'équation (3.12) en utilisant une régression linéaire. La formulation MMTS proposée pour tenir compte de l'effet d'échelle est donnée par:

$$\sigma_N = \frac{f_t}{A_1^* \sqrt{\frac{D+B}{A}} \left( 1 + 3 \frac{A_3^*}{A_1^*} \frac{A}{D+B} \right)} \quad (3.13)$$

Rappelons encore que la loi d'effet d'échelle proposée par Bazant (Bazant & Kazemi 1990) permet de calculer deux paramètres de rupture: l'énergie de rupture  $G_f$  et la longueur de fissure équivalente  $c_f$ . Selon Bazant et al (Bazant & Kazemi 1990), la longueur de la FPZ correspond à un champ de contrainte et de déplacement dans la zone non linéaire de microfissuration. Ce champ de contrainte correspond à une longueur de contrainte effective. La longueur de fissure *élastique équivalente* est donnée par  $a = a_0 + c$  avec  $a_0$  la longueur de l'entaille initiale et  $c$  correspond à la longueur équivalente de la zone non linéaire de la FPZ.

$c_f$  correspond à la limite de  $c$  pour des échantillons infiniment grands (la distance entre la pointe de l'entaille et la pointe de la fissure équivalente au sens de la mécanique linéaire élastique de la rupture pour un échantillon infiniment large  $c_f = \lim_{d \rightarrow \infty} c$  ).

L'énergie de rupture peut être reliée au facteur d'intensité de contrainte via la relation d'Irwin avec

$$k_{Ic} = \sqrt{G_f \tilde{E}}, \quad (3.14)$$

Les expressions des paramètres de rupture  $G_f$  et  $c_f$  sont données par

$$G_f = \frac{B^2 f_t^2}{c_N^2 E} D_0 g(\alpha_0), \quad c_f = \frac{g(\alpha_0)}{g'(\alpha_0)} D_0 \quad (3.15)$$

$$\text{Avec } g(\alpha_0) = \pi \alpha_0 c_N^2 (F(\alpha_0))^2, \quad c_N = \frac{3S}{2D}$$

En appliquant la loi d'effet d'échelle de Bazant, les paramètres constants  $B$  et  $D_0$  sont déterminés par une régression linéaire (Bažant et al. 1991). Le Tableau 3-4 résume les paramètres de ruptures déterminés par la loi d'effet d'échelle de Bazant.

Tableau 3-4: Paramètres de rupture du béton selon la loi d'effet d'échelle de Bazant

G	g'	B	$D_0$ (mm)	$c_f$ (mm)	$G_f$ (N/m)	$k_{Ic}$ (Mpa.m <sup>0.5</sup> )
11.94	66.30	1	428.17	77.11	56.06	1.51

Ces paramètres de rupture sont ensuite déterminés en utilisant le modèle MMTS. Le facteur d'intensité de contrainte, la valeur critique du terme  $A_3$  et la longueur de la FPZ sont présentés sur le (Tableau 3-5) pour chaque taille de poutre.

Tableau 3-5: Paramètres de rupture selon le modèle MMTS

Poutre	$k_c$ (Mpa.m <sup>0.5</sup> )	$A_{3c}$ (Mpa.m <sup>0.5</sup> )	$r_c$ (mm)
D1	0.636	-1.01	6.145
	0.646	-1.025	6.312
	0.648	-1.029	6.346
D2	0.811	-0.644	10.255
	0.865	-0.687	11.485
	0.947	-0.752	13.425
D3	1.012	-0.402	16.390
	1.031	-0.409	16.952
	1.074	-0.427	18.246

Pour le modèle MMTS, les expressions approximées pour le premier et le troisième termes adimensionnels  $A_1^*$  et  $A_3^*$  sont obtenues en appliquant le principe de la superposition (Timoshenko & Goodier 1951) (pour plus de détaille voir Annexe 1).

Les termes  $A_3$  et  $k_c$  sont calculés par les équations (3.8) et (3.7) respectivement et la longueur de la FPZ ( $r_c$ ) est déterminée par l'équation (3.11). Les valeurs A et B dans l'équation (3.12)) sont déterminés par une régression linéaire (Annexe 2).

### 3.4 Analyse numérique mésoscopique de l'effet d'échelle

Nous proposons dans ce qui suit une analyse numérique de l'effet d'échelle sur des poutres entaillées en flexion trois-points en mode de rupture I. Le programme expérimental réalisé par Alam (Alam 2011) ainsi que les deux lois d'effets d'échelle détaillées dans le paragraphe précédent seront utilisées dans la première phase de cette étude.

#### 3.4.1 Etude de l'effet d'échelle sur le comportement global

Avant d'étudier l'effet d'échelle sur le profil de fissuration, le comportement global des poutres de tailles homothétiques est initialement analysé. Les courbes Force-Ouverture d'entaille obtenues par l'approche mésoscopique sont comparées avec les résultats expérimentaux pour deux types de mélanges de béton M1 et M2 sur la Figure 3-4 et la Figure 3-5 respectivement.

La comparaison montre que le comportement global est bien reproduit. L'effet d'échelle sur le pic de chargement est globalement bien reproduit à l'échelle mésoscopique pour les deux mélanges de béton. Pour le béton de type M1, l'effet d'échelle sur le pic de chargement et sur le comportement post-pic est correctement reproduit. Ces résultats attestent de la capacité de la combinaison du modèle d'endommagement avec l'approche mésoscopique à reproduire le comportement mécanique du béton réel.

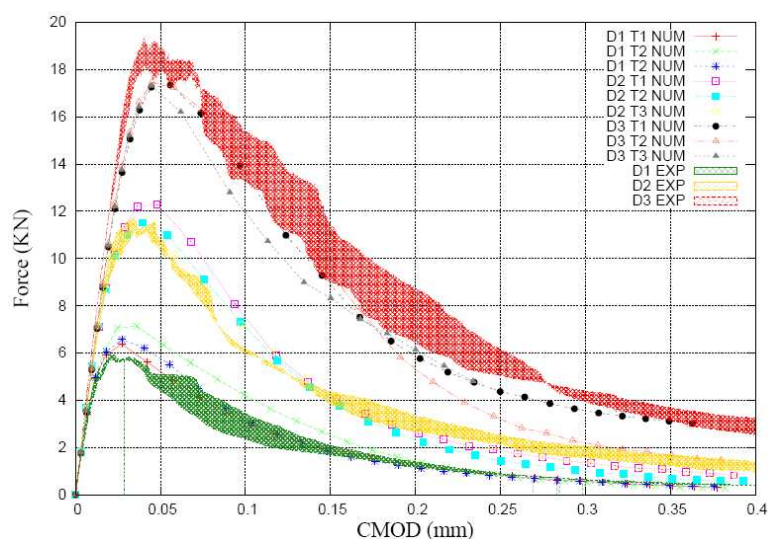


Figure 3-4: Courbes Force-CMOD pour les poutres D1, D2 et D3, (Béton M1).

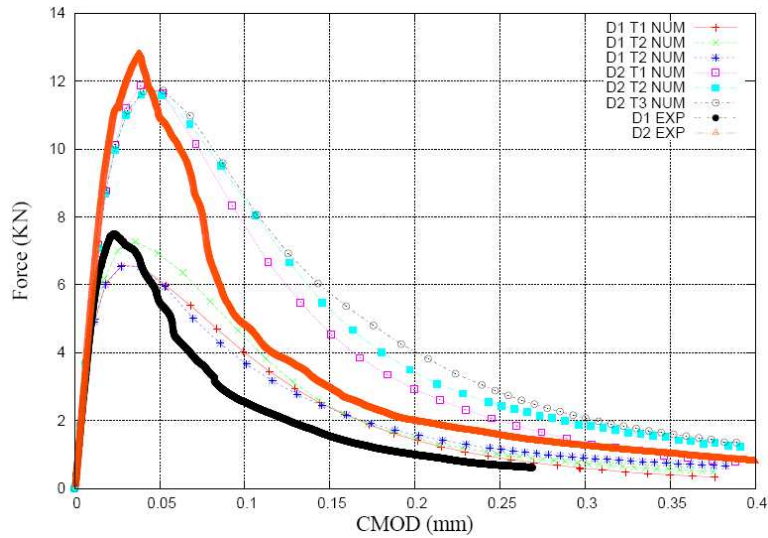


Figure 3-5: Courbes Force-CMOD pour les poutres D1 et D2, (Béton M2).

Pour le béton de type M2, deux poutres ont été testées expérimentalement (D1 et D2). L'effet d'échelle est bien reproduit vis-à-vis de la charge au pic (résistance nominale). Cependant, expérimentalement, les deux poutres montrent un comportement plus fragile que celui constaté pour le type de béton M1. Dans la partie post-pic, le paramètre de l'énergie de rupture contrôle le comportement adoucissant du béton. Numériquement, ce comportement fragile n'est pas bien reproduit en utilisant les mêmes paramètres utilisés pour le béton M1.

D'autres essais expérimentaux supplémentaires sont nécessaires pour clarifier l'influence des diamètres des granulats sur le comportement du béton. Dans la présente étude, seul le béton du type M1 avec les trois tailles D1, D2 et D3 sera considéré pour la comparaison à l'échelle globale. En ce qui concerne la distribution aléatoire des granulats, le comportement global est globalement le même, quelle que soit la distribution aléatoire utilisée, car la dissipation est régie par l'énergie de rupture. Une différence non significative est observée. Cependant, la position des granulats a une influence sur les chemins de fissure.

### 3.4.2 Effet d'échelle sur la contrainte nominale

L'effet d'échelle est défini par la dépendance de la contrainte nominale à la taille d'une structure. La résistance nominale est la valeur de la contrainte nominale au pic de chargement. L'expression de la contrainte nominale par la théorie des poutres d'une poutre en flexion 3 points de hauteur  $D$ , de portée  $S$  et d'épaisseur  $b$  soumise à une charge  $P$  est donnée par

$$\sigma_N = \frac{3PS}{2bh^2} \quad (3.16)$$

La dimension des poutres étudiées et les charges au pic ainsi que les contraintes nominales correspondantes issues des résultats expérimentaux et numériques sont résumées sur le Tableau 3-6.

Tableau 3-6: Dimension de poutre, les charges au pic et contraintes nominales (Expérimentales et Numériques).

Dimension ( $L \times D \times b$ )(mm)	S (mm)	a (mm)	Exp		Meso	
			P(N)	$\sigma_N$ (Mpa)	P(N)	$\sigma_N$ (Mpa)
D1(400×100×100)	300	20	5877	2.64	6374	2.87
			5959	2.68	6900	3.10
			5973	2.69	6569	2.96
D2(800×200×100)	600	40	10578	2.38	11102	2.50
			11307	2.54	11515	2.60
			12372	2.78	12282	2.76
D3(1600×400×100)	1200	80	18660	2.10	17465	1.96
			19066	2.14	17316	1.95
			19830	2.23	17343	1.95

La présence d'un effet d'échelle sur la résistance d'une structure faite d'un matériau quasi-fragile est devenue maintenant une évidence expérimentale. Il est possible de voir d'après cette première analyse simple et directe de l'effet d'échelle que ce phénomène est bien reproduit avec l'approche numérique adoptée dans la présente étude. Comme le montre la (Figure 3-6), la contrainte nominale diminue en fonction de l'augmentation de la hauteur de poutre. En effet, les contraintes nominales issues de la simulation mésoscopique sont globalement proches des contraintes nominales expérimentales.

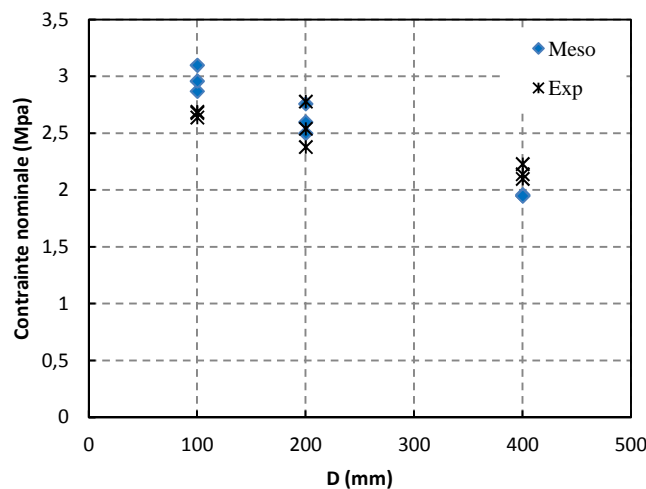


Figure 3-6: Effet d'échelle sur la contrainte nominale (Exp-Méso)

La (Figure 3-7) représente la contrainte nominale en fonction de la hauteur de poutre à l'échelle logarithmique. Les résultats expérimentaux et les résultats de simulations à l'échelle mésoscopique sont comparés aux résultats issus des lois théoriques des effets d'échelle (SEL de Bazant et la loi MMTS).

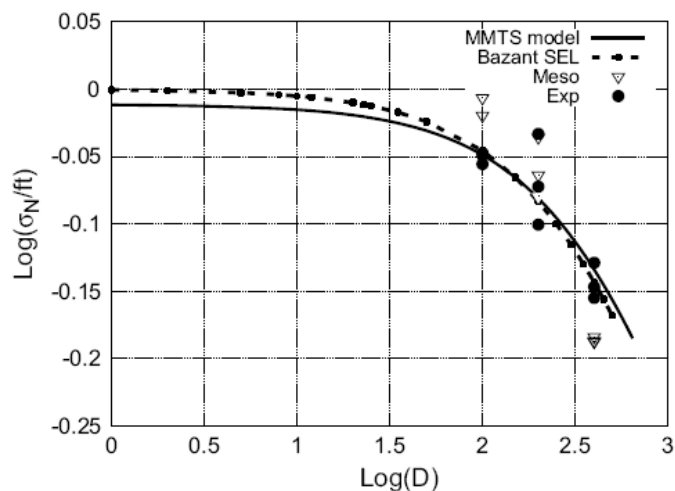


Figure 3-7: Loi d'effet d'échelle de Bazant-MMTS Vs. résultats expérimentaux et Mésos

On peut constater sur la (Figure 3-7) que les deux lois d'effet d'échelle (Bazant et MMTS) sont en bon accord avec les résultats expérimentaux et numériques.

Pour les petites tailles de poutres, les deux lois d'effet d'échelle (Bazant et MMTS) s'approchent d'une ligne droite où la contrainte nominale est indépendante de la dimension des poutres tandis que pour les plus grandes poutres les deux modèles s'approchent d'une droite inclinée de pente -0.5 donnée par la mécanique linéaire de la rupture.

### 3.4.3 Etude de l'effet d'échelle sur le comportement local

#### 3.4.3.1 Cas des ouvertures de fissures

La Figure 3-8 montre les différents profils de fissures obtenus pour les poutres D1, D2 et D3 pour le béton M1. Une représentation 3D des profils des ouvertures de fissures à la rupture est donnée pour chaque taille de poutre. Les valeurs des ouvertures de fissures sont évaluées en utilisant la procédure de post traitement proposée par Matallah (Matallah et al. 2010).

On constate aussi que le chemin des fissures est affecté par les distributions aléatoires des granulats; en revanche, il n'a aucune influence sur le comportement global (les courbes Force-CMOD) puisque le comportement global est gouverné par l'énergie de rupture.

Comme il a été mentionné précédemment, le calcul des ouvertures de fissures est d'un grand intérêt pour la conception des structures de génie civil. Pour cette raison, l'effet d'échelle est également étudié en ce qui concerne l'ouverture des fissures. À l'état limite de service, comme à l'état limite ultime, les valeurs d'ouverture de fissures sont à la base des règles de dimensionnement.

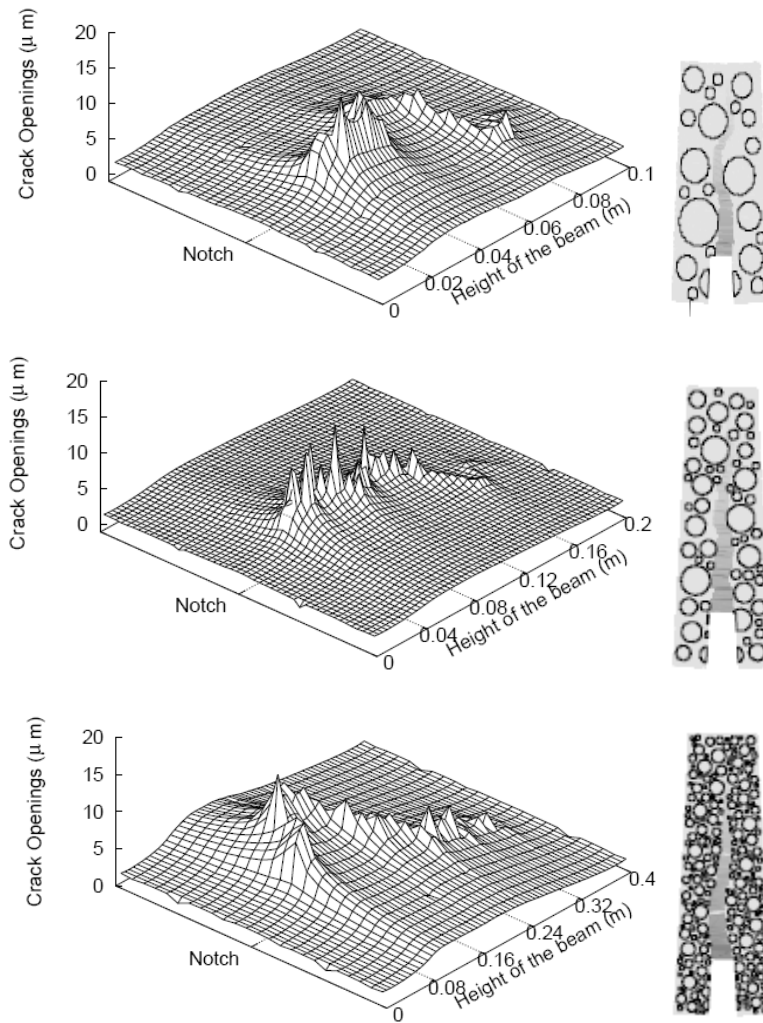


Figure 3-8: Carte de fissuration et la représentation 3D du profil d'ouverture de fissure pour D1, D2 et D3 (Béton M1-1er tirage de granulats)

Une combinaison entre la procédure numérique (OUVFISS) proposée par Matallah (Matallah et al. 2010) et l'approche proposée à l'échelle mésoscopique est utilisée pour évaluer les ouvertures de fissures. Les résultats numériques sont comparés aux résultats expérimentaux. Expérimentalement, les ouvertures de fissure ont été évaluées à l'aide de la technique de corrélation d'image numérique dans (Alam et al. 2012).

La Figure 3-9 et la Figure 3-10 présentent l'évolution de l'ouverture de fissure au pic de charge pour les deux types de béton (M1 et M2).

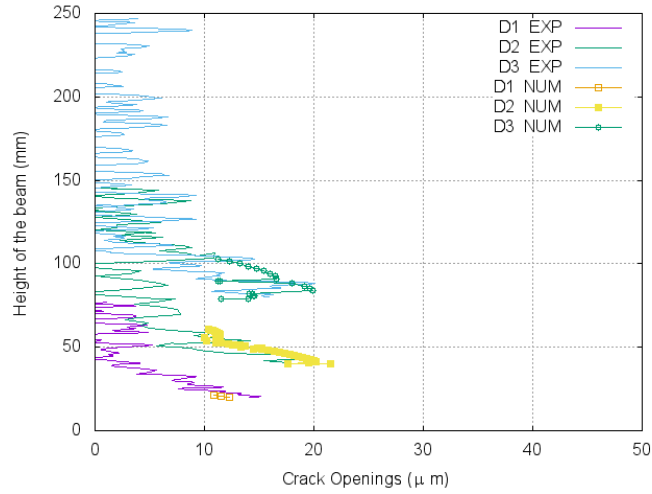


Figure 3-9: Evolution des ouvertures de fissures au pic de chargement-Béton M1.

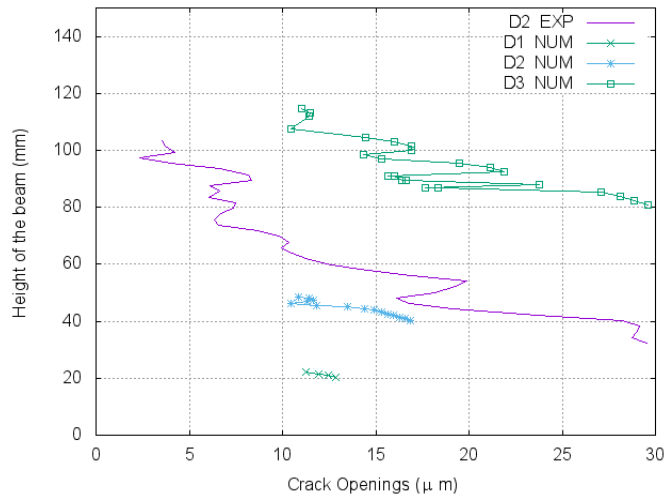


Figure 3-10: Evolution des ouvertures de fissures au pic de chargement-Béton M2.

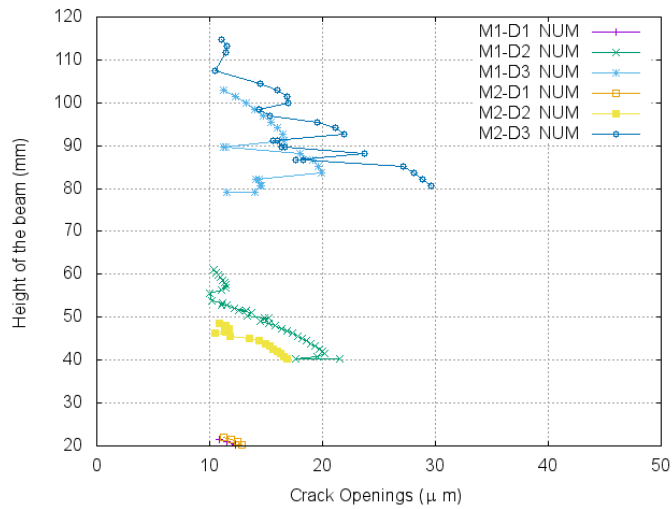


Figure 3-11: Evolution des ouvertures de fissures au pic. Comparaison M1-M2.



Pour le béton M1, la comparaison montre une bonne concordance entre les valeurs expérimentales et les valeurs numériques en ce qui concerne la valeur maximale obtenue à la pointe de l'entaille. Pour le béton de type M2, la comparaison est limitée pour la poutre D2. Concernant cette poutre, l'ouverture de fissure numérique estimée à l'entaille est environ la moitié de celle mesurée expérimentalement.

La Figure 3-11 présente une comparaison entre les valeurs numériques pour les deux types de béton M1 et M2. Les mêmes valeurs d'ouverture de fissure sont obtenues pour les poutres D1 et D2, cependant pour les grandes poutres une différence notable est observée. En revanche, on observe pour le béton M2 un effet d'échelle plus prononcé en ce qui concerne les valeurs d'ouverture de fissure à l'entaille.

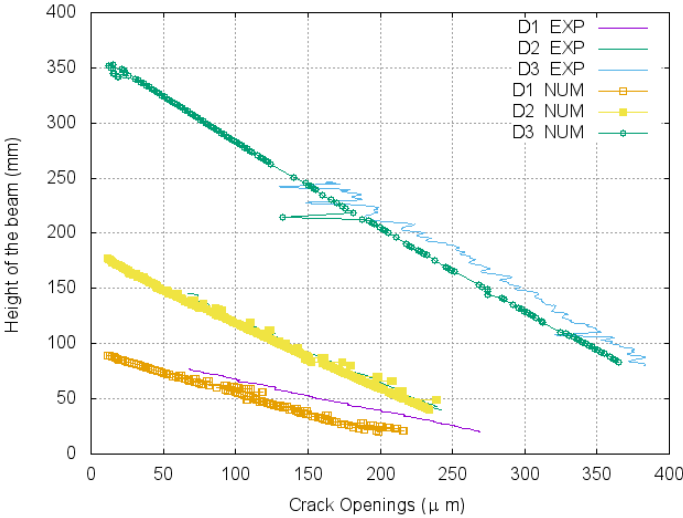


Figure 3-12: Evolution des ouvertures de fissure à la fin de chargement-Béton M1.

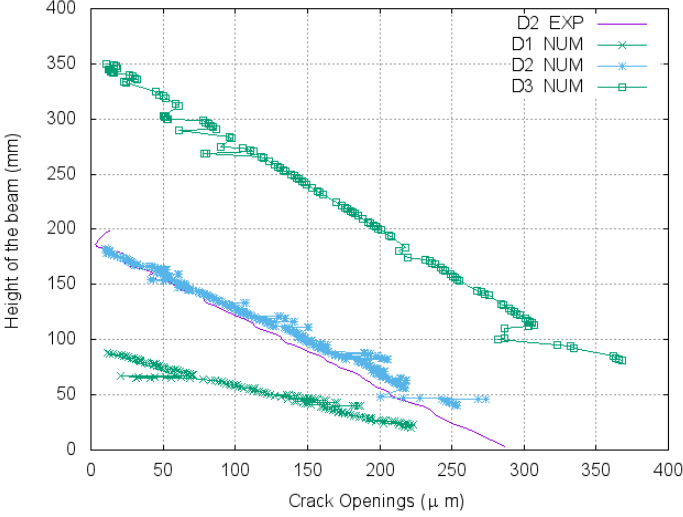


Figure 3-13: Evolution des ouvertures de fissure à la fin de chargement-Béton M2.

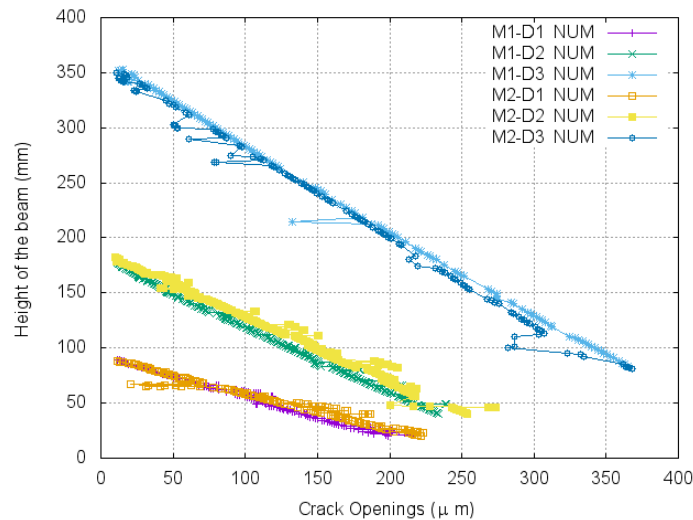


Figure 3-14: Evolution des ouvertures de fissure à la fin de chargement. Comparaison M1-M2.

Numériquement, l'évolution de l'ouverture de fissure sur la hauteur des poutres a la même pente pour les deux types du béton. En ce qui concerne les valeurs d'ouverture des fissures au pic de chargement, il semble que l'effet d'échelle n'est pas trop prononcé.

Les ouvertures de fissure à la fin du processus de rupture sont également étudiées. La Figure 3-12 et la Figure 3-13 montrent l'évolution des ouvertures de fissures à la fin de la courbe Force-CMOD (à 10% du régime post-pic). Les grandes poutres présentent des valeurs plus élevées par rapport aux plus petites. En outre, les deux types de béton M1 et M2 présentent la même tendance d'ouverture de fissure (Figure 3-14).

### 3.4.3.2 Cas de longueur de fissure

La Figure 3-15 et Figure 3-16 représentent l'évolution numérique de la longueur de fissure des trois poutres (D1, D2 et D3) pour les deux types de béton M1 et M2 à différents niveaux de chargement (de 0% du pré-pic à 10% du post pic). La même procédure (OUVFISS) proposée par Matallah (Matallah et al. 2010) est adaptée pour le calcul des longueurs de fissures. Pour les deux types de mélanges du béton, la fissure apparaît dans le régime pré-pic. Au pic de chargement, la longueur de fissure pour le béton M1 est plus élevée que celle constatée pour le béton M2.

Dans le but de clarifier l'effet d'échelle sur la longueur de fissure, l'évolution numérique de la longueur relative de la fissure est montrée sur les (Figure 3-17) et (Figure 3-18). Le rapport  $L_{fissure} / D'$  représente la longueur relative de la fissure qui est définie comme étant le rapport de la longueur de la fissure sur la longueur du ligament.

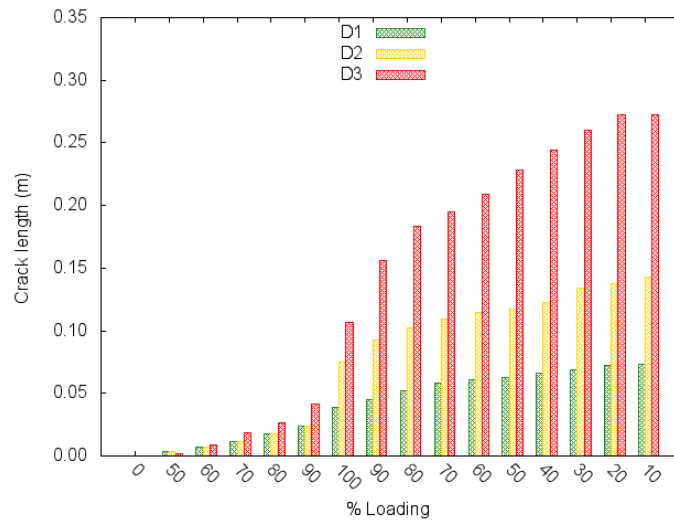


Figure 3-15: Evolution de la longueur de fissure à différentes étapes de chargement, Béton M1.

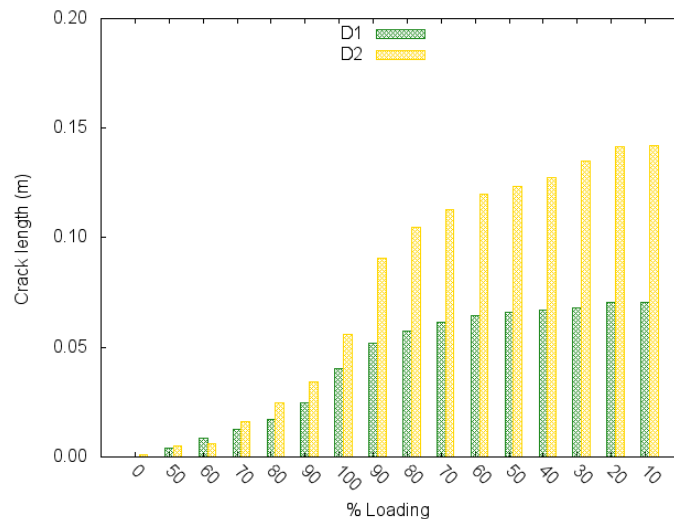


Figure 3-16: Evolution de la longueur de fissure à différentes étapes de chargement, Béton M2.

Pour le béton M1, on constate que les longueurs de fissure relatives au pic de chargement pour la poutre D1 et D2 sont proches. Cependant, un effet d'échelle sur la poutre D3 apparaît clairement. En outre, les trois poutres semblent suivre la même tendance concernant la propagation de fissure.

On observe une valeur inférieure de la longueur de la fissure relative pour la poutre D3. Comme il a été déjà expliqué dans le paragraphe précédent, la plupart des formules des effets d'échelle (Bazant SEL (Bažant 1984), MMTS (Ayatollahi & Akbardoost 2012) ...) basées sur la mécanique de la rupture sont dérivées de la mécanique élastique linéaire équivalente de la rupture où l'on suppose que l'amorçage de la propagation des fissures correspond au point de la charge maximale. Selon ces lois, la longueur de fissure relative doit être la même au pic de

chargement, quelle que soit la taille de la structure. Cette hypothèse n'est pas confirmée par l'approche de calcul de longueurs de fissures adoptée. Ce problème sera discuté plus tard.

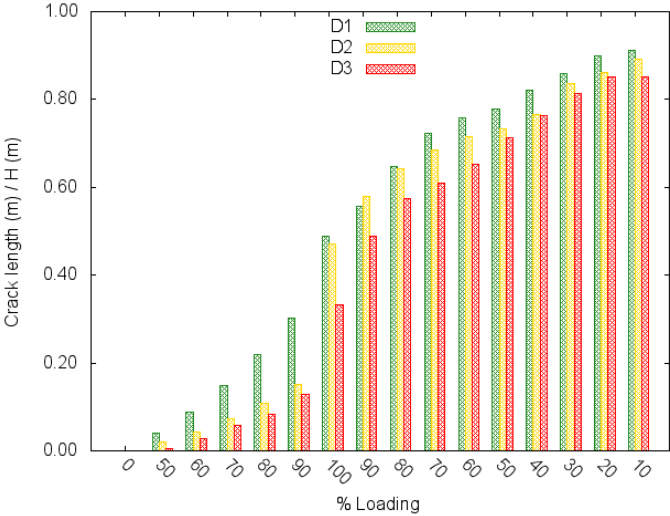


Figure 3-17: Evolution de la longueur relative de fissure à différentes étapes de chargement, Béton M1.

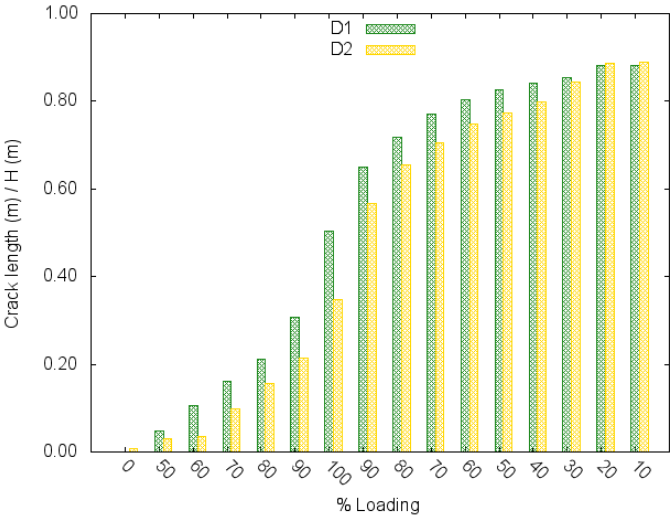


Figure 3-18: Evolution de la longueur relative de fissure à différentes étapes de chargement, Béton M2.

Concernant le béton M2, on observe un effet d'échelle sur la longueur de fissure relative pour les deux poutres D1 et D2. Pour ce type de béton, la poutre D3 n'a pas été testée expérimentalement.

### 3.5 Effet d'échelle sur la longueur de la FPZ

Les résultats de simulations présentés précédemment ont été obtenus par une approche de post-traitement (OuvFiss). Cependant, la notion de FPZ n'a pas été considérée. En effet, si la procédure OuvFiss est bien adaptée au calcul des ouvertures, son utilisation directe pour le calcul des longueurs de fissures n'est pas préconisée. Le calcul d'une longueur de fissure est assez complexe. Cette longueur est fondamentalement liée à la longueur de la FPZ. Numériquement, cette complexité se manifeste principalement lors de la détermination de la pointe de la fissure (critère d'arrêt ?). Dans ce qui suit, afin de proposer des améliorations à la procédure OuvFiss en termes de calcul de longueur, la variation numérique de la FPZ sera examinée. Une comparaison avec les approches théoriques sera également effectuée.

#### 3.5.1 Comparaison des différentes formules analytiques d'évolution de la FPZ

Plusieurs formules théoriques ont été proposées dans la littérature pour déterminer la variation de la longueur de la FPZ en fonction de la taille du spécimen en s'appuyant sur différents critères de rupture. En se basant sur un critère énergétique, Bazant et al (Bazant & Kazemi 1990) proposent une équation qui exprime la variation de la longueur effective de la FPZ en fonction de la dimension de la poutre. En utilisant la loi d'effet d'échelle de Bazant, la valeur limite de la longueur de la FPZ nommée  $c_f$  est obtenue pour des échantillons très grands ( $D \rightarrow \infty$ ).

Dans Bazant et al (Bazant et al. 1991), l'équation qui exprime la variation de la longueur de la FPZ en fonction de la dimension de poutre a été donnée par

$$c = c_f \frac{g'(\alpha_0)}{g(\alpha_0)} \left( \frac{g(\alpha)}{g'(\alpha)} - \frac{c}{D} \right) \quad (3.17)$$

D'autres auteurs, Karihaloo (Karihaloo 1999) et Ayatollahi (Ayatollahi & Akbardoost 2012) proposent d'autres formules pour décrire la variation de la longueur de la FPZ en fonction de la dimension du spécimen. À la base, les deux auteurs exploitent la théorie d'enrichissement du champ de contrainte.

Rappelons l'équation du modèle MMTS pour la variation de longueur de la FPZ qui a été donnée précédemment

$$r_c = \left( \frac{ft\sqrt{2\pi} \pm \sqrt{2\pi f_i^2 - 12 \frac{A_3^*}{A_1^*} \frac{k_c^2}{D}}}{6 \frac{A_3^*}{A_1^*} \frac{k}{A_1^*}} \right) \quad (3.18)$$

Dont  $r_c$  correspond à  $c$  dans l'équation de Bazant.

Karihaloo (Karihaloo 1999) propose de décomposer l'étude du champ de contrainte dans la fissure en traction libre avec une longueur de la FPZ nommé  $l_p$  ( $l_p$  correspond à  $c$  dans l'équation de Bazant) à sa pointe en deux sous-problèmes (Figure 3-19). Cette décomposition a été initialement proposée par Horii et al (Horii et al. 1989).

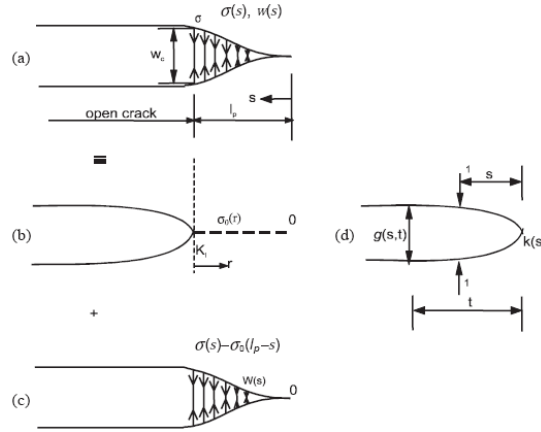


Figure 3-19: (a) Décomposition de la fissure de traction libre avec une longueur de la FPZ ( $l_p$ ), (b) en une contrainte  $\sigma_0(r)$  devant le fond de la fissure et (c) la FPZ avec un champ de contrainte et un déplacement  $w(s)$ . (d)  $k(s)$  est le facteur d'intensité de contrainte due à une force unitaire en  $s$ ,  $g(s,t)$  est le déplacement correspondant à la position  $t$  (Karihaloo et al. 2006).

1- Le premier sous-problème est une fissure de traction libre avec un champ de contrainte à sa pointe caractérisé par plusieurs termes de la série de Williams donné par

$$\sigma_0(r) = \frac{A_1}{\sqrt{r}} + 3A_3\sqrt{r} + 5A_5r^{3/2} + \dots \quad (3.19)$$

2- Dans le second sous-problème, la FPZ est considérée avec un champ de contrainte  $[\sigma(s) - \sigma_0(l_p - s)]$  et un déplacement  $w(s)$  à travers ses lèvres où  $s$  est la distance mesurée depuis la pointe de la FPZ. Il est exprimé par l'équation de l'intégrale singulière suivante

$$\int_0^{l_p} g(s,t) [\sigma(s) - \sigma_0(l_p - s)] ds = w(t) \quad (3.20)$$

Pour tenir compte de la résistance à la traction du matériau, on suppose que les deux lèvres de la FPZ se ferment progressivement.

Pour exprimer le fait que le facteur d'intensité de contrainte diminue graduellement jusqu'à ce qu'il disparaisse à la pointe de la FPZ, une autre équation d'intégrale singulière est adoptée

$$\int_0^{l_p} k(s) [\sigma(s) - \sigma_0(l_p - s)] ds = 0 \quad (3.21)$$

$g(s,t)$  et  $k(s)$  sont respectivement le déplacement de l'ouverture de fissure à la position  $s$  et le facteur d'intensité de contrainte à la pointe d'un spécimen de taille finie avec une seule entaille due à une paire de forces normales unitaires appliquée à la position  $s$ .

Pour obtenir une solution analytique, Karihaloo (Karihaloo 1999), propose des simplifications et résout les deux équations d'intégrales singulières (3.20) et (3.21) analytiquement. Il propose une expression explicite du développement de la FPZ dans un spécimen soumis à la flexion trois-points de taille fini en termes de la longueur de la FPZ pour un spécimen infiniment grand.

$$l_p = l_{p\infty} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{g'(\alpha_0) l_{p\infty}}{g(\alpha_0) D} \right)^{-1} \quad (3.22)$$

Où  $l_p$  correspond à  $c$  et  $l_{p\infty}$  correspond à  $c_f$  dans la formule de Bazant.

Cependant, mathématiquement, cette équation (3.22) montre une dépendance à la valeur  $l_{p\infty}$ . La Figure 3-20 montre cette dépendance.

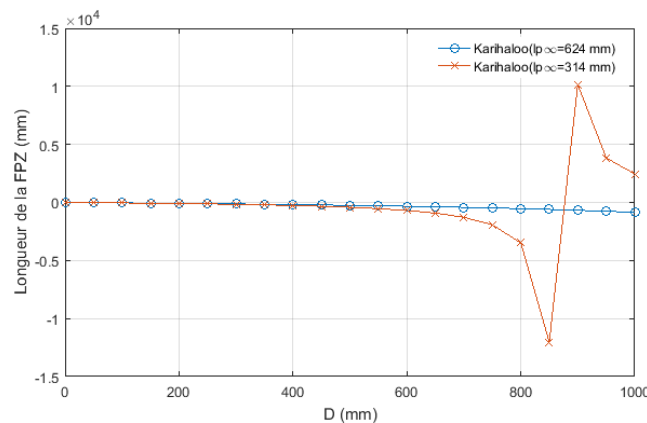


Figure 3-20: Evolution de la longueur de la FPZ en utilisant la formule analytique de Karihaloo.

Pour des valeurs différentes de  $l_{p\infty}$ , l'équation (3.22) donne des variations différentes. Des valeurs négatives sont obtenues pour  $l_{p\infty} = 624mm$ . Un saut est enregistré pour une valeur de  $l_{p\infty} = 314mm$ . Mathématiquement parlant, ce problème survient à cause de l'existence du

terme  $\left( 1 - \frac{1}{2} \frac{g'(\alpha_0) l_{p\infty}}{g(\alpha_0) D} \right)$  qui peut prendre des valeurs négatives. L'utilisation de la formule explicite de Karihaloo pour faire une étude comparative n'est donc pas possible.

Pour assurer une comparaison entre les trois formules théoriques (Bazant, MMTS & Karihaloo), on propose de travailler avec la formulation originale de Horii (Horii et al. 1989) et de résoudre numériquement le système d'équations (3.23). Pour cela, un diagramme contrainte-ouverture de fissure  $\sigma(w)$  doit être utilisé.

Le système d'équations d'intégrales singulières suivant doit être résolu numériquement

$$\begin{cases} \int_0^{l_p} g(s,t)[\sigma(s) - \sigma_0(l_p - s)] ds = w(t_i) \\ \int_0^{l_p} k(s)[\sigma(s) - \sigma_0(l_p - s)] ds = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Pour cela, on divise la zone de la FPZ en  $(n)$  segments avec  $(n+1)$  nœuds (Figure 3-21). Le choix du diagramme d'adoucissement de la loi cohésive est nécessaire pour permettre d'identifier les paramètres cohésifs. Plusieurs formes de diagramme adoucissant non-linéaire ou bi-linéaire peuvent être utilisées. Un total de  $(n+1)$  équations est obtenu,  $n$  équations pour la première équation d'intégrale singulière pour chaque segment  $(i, i=1, n)$  (équation (3.20) et la dernière équation correspond à la deuxième équation d'intégrale singulière (équation (3.21)).

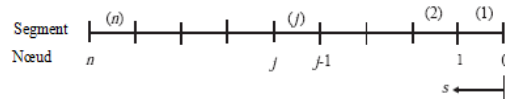


Figure 3-21: Décomposition de la FPZ en n segment.

Le diagramme adoucissant "bi-linéaire" proposé initialement par Petersson (Petersson 1980) est utilisé pour approximer le comportement cohésif du béton. Dans ce modèle, la contrainte cohésive et le déplacement d'ouverture de fissure sont égaux à  $f_t/3$  et  $0.8G_f/f_t$  respectivement.

Dans ce qui suit, on présente une comparaison entre les trois lois théoriques détaillées dans le paragraphe précédent. Ces lois permettent de relier la longueur de la FPZ à la taille des poutres entaillées (Tableau 3-7).

La Figure 3-22 présente la comparaison entre les différentes formules de l'évolution de la FPZ (Bazant - MMTS- Karihaloo). On notera (à tort) la solution obtenue par la résolution du système d'équation ' la solution de Karihaloo' juste pour simplifier la lecture.

Tableau 3-7: Récapitulation des formulations théoriques de l'évolution de la FPZ.

Karihaloo (Karihaloo et al. 2006)	Bazant (Bazant & Kazemi 1990)	Ayatollahi (Ayatollahi & Akbardoost 2012)
Résolution numérique d'un Système d'équations non linéaire $\begin{cases} \int_0^{l_p} g(s,t)[\sigma(s) - \sigma_0(l_p - s)] ds = w(t_i) \\ \int_0^{l_p} k(s)[\sigma(s) - \sigma_0(l_p - s)] ds = 0 \end{cases}$	$c = c_f \frac{g'(\alpha_0)}{g(\alpha_0)} \left( \frac{g(\alpha)}{g'(\alpha)} - \frac{c}{D} \right)$	$r_c = \frac{\left( ft\sqrt{2\pi} \pm \sqrt{2\pi f_t^2 - 12 \frac{A_3^* k_c^2}{A_1^* D}} \right)}{6 \frac{A_3^* k}{A_1^*}}$



Pour utiliser la loi de Bazant (3.17) indiquée dans (Bazant & Kazemi 1990) (Bažant et al. 1991), une série de valeurs de  $\alpha$  doivent être choisies pour lesquelles les longueurs de la fissure élastique équivalente  $c$  sont déterminées en utilisant l'équation (3.17).

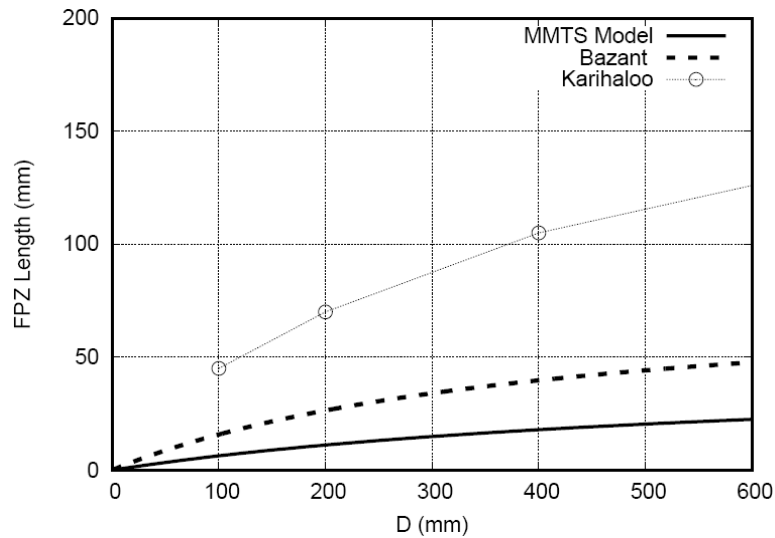


Figure 3-22: Evolution de la longueur de la FPZ selon le modèle de Bazant, Karihaloo et le modèle MMTS

On observe un écart considérable entre les résultats des trois formules. En effet, le modèle MMTS donne les valeurs de la FPZ les plus faibles. Dans le modèle MMTS, la valeur  $r_{\infty}$  correspond à un échantillon infiniment grand et elle est donnée par l'équation (3.12) (pour  $D \rightarrow \infty$   $r_{\infty} = A$ , le coefficient A est obtenu par une régression linéaire, on obtient  $r_{\infty} = 46.083$  mm). Cependant pour la loi d'effet d'échelle de Bazant, on obtient une valeur de  $c_f = 77.11$  mm. La longueur effective de la FPZ définie par Bazant et donnée par l'équation (3.17) correspond à une certaine longueur effective de fissure (i.e. longueur de fissure élastique équivalente) (Bazant & Kazemi 1990) (Bažant 2002) avec

$$a = a_0 + c \quad (3.24)$$

Où  $a_0$  est la longueur initiale de l'entaille.

La valeur de  $c$  est approximativement la moitié de la longueur de la FPZ (Bažant 2002) (Morel 2008) ce qui explique l'écart montré sur la Figure 3-22 entre les résultats obtenus par les approximations des équations de Bazant et Karihaloo.

### 3.5.2 Variation de la FPZ: analyse numérique par l'approche mésoscopique

La plupart des lois d'effets d'échelle basées sur la mécanique de la rupture sont dérivées en se basant sur la mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente ou l'on suppose que la propagation de la fissure s'amorce quand la charge atteint sa valeur maximale. Dans le but d'apporter une étude comprehensive concernant l'évolution de la longueur de la FPZ, on propose de suivre l'évolution de la FPZ par une modélisation mésoscopique. L'objectif est de

commenter les formules analytiques en se basant sur les résultats de la modélisation mésoscopique. En effet, cette modélisation a montré son efficacité quant à la reproduction du comportement du béton à l'échelle globale (Force-Déplacements avec effet d'échelle). Ces résultats à l'échelle globale reflètent une bonne description du comportement à l'échelle locale. Pour cela, nous avons choisi de suivre l'évolution de la FPZ et faire une analyse des formules analytiques par rapport aux résultats numériques obtenus.

Pour ce faire, nous nous inspirons de la mécanique de la rupture et des modèles cohésifs. L'évolution de la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  le long de chemin de fissure constituera l'élément clef de cette investigation.

Le chemin de la fissure est obtenu en utilisant l'approche OuvFiss. Certes, des limites liées à l'utilisation de cette méthode en ce qui concerne le calcul des longueurs de fissures ont été constatées, néanmoins, notre utilisation se limitera aux tracés de chemin de fissuration (aspects qualitatifs). Le calcul quantitatif des longueurs de fissures sera corrélé à celui lié aux calculs de la FPZ.

Numériquement, à partir d'un calcul élément fini, on obtient les valeurs des contraintes perpendiculaires aux lèvres de la fissure, ensuite ce champ de contraintes est exprimé dans le repère de coordonnées polaires pour obtenir les contraintes tangentielles. La valeur maximale de la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  correspond à la résistance à la traction ( $\sigma_{\theta\theta} = f_t$ ). Du point de vue numérique, comme dans le cas des modèles cohésifs (Cusatis & Schaufert 2009), la longueur de la FPZ est définie comme la longueur de la zone cohésive c.-à-d. la distance entre la contrainte à la pointe de la fissure égale à la résistance à la traction et celle d'amorçage de la fissure. En plus, on définit la longueur de la FPZ complètement ouverte comme étant la distance entre la zone de la fissure à contrainte libre (lorsque la contrainte tangentielle s'annule) et la contrainte à la pointe de la fissure égale à la résistance à la traction.

Pour la modélisation mésoscopique au pic de chargement, l'évolution de la contrainte tangentielle le long du chemin de la fissure est représentée sur la (Figure 3-23). La contrainte à l'entaille initiale est de 1.5 MPa pour la poutre D1 et de 1 MPa pour la poutre D2. Pour la poutre D3, la contrainte à la pointe de la fissure est presque nulle ( $\sigma_{\theta\theta} \approx 0.05 \times f_t$ ). Pour chaque hauteur de poutres D1, D2 et D3, les longueurs de la FPZ sont estimées à 25mm, 47mm et 105 mm respectivement.

Sur la Figure 3-24, la contrainte tangentielle est normalisée par rapport à la résistance de traction. Aussi, la longueur de la FPZ (à partir de la pointe de l'entaille ( $x$ )) est normalisée par rapport à la dimension de poutre (la longueur du ligament  $D'$ ). Pour la poutre D1 et D2 au pic de chargement, la fissure n'est pas complètement ouverte. Pour toutes les tailles de poutres, le rapport  $x/D'$  est pratiquement le même au pic de chargement et vaut ( $x/D' \approx 0.3$ ). Ce résultat est très intéressant et sera discuté plus tard.

Les longueurs de la FPZ entièrement ouvertes sont tracées sur la Figure 3-25. Pour la pointe de la fissure initiale et pour toutes les dimensions des poutres, la valeur de la contrainte

tangentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  est d'environ  $0.15\text{Mpa}$  s. Pour chaque poutre, les longueurs de la FPZ entièrement ouvertes sont obtenues à différentes étapes de chargement: le pic pour la poutre D3, 20% du post-pic pour la poutre D2 et 30% du post-pic pour la poutre D1.

Un autre résultat intéressant est présenté sur la Figure 3-26 où la contrainte tangentielle et la distance de la longueur de la FPZ (à partir de la pointe de l'entaille) sont normalisées. On constate que pour la grande poutre, lorsque la FPZ est complètement développée, elle est située loin du bord libre. Cependant, pour les petites tailles de poutres, les interactions entre la limite du bord et la FPZ existe. Le rapport  $x/D'$  pour la poutre D1 et D2 est égal à 0.8 et 0.6 respectivement. Pour la poutre D3 ce rapport est plus petit ( $\approx 0.3$ ).

L'interaction de la FPZ avec le bord d'une structure et le phénomène du confinement ont déjà été discutés par d'autres auteurs (Hu & Duan 2008)(Karihaloo et al. 2003)(Morel & Dourado 2011). La présente étude se concentre sur trois tailles de spécimens. Les résultats confirment que pour une FPZ totalement développée, la longueur relative de la FPZ par rapport à la taille de poutres diminue avec l'augmentation de la dimension de poutre.

Ces interactions sont importantes à prendre en considération, car le confinement joue un rôle important dans le processus énergétique. Nous l'avons déjà vu dans le deuxième chapitre ; la présence d'un état de contraintes biaxial modifie complètement la dissipation. Plus le confinement est grand, plus l'état de fissuration s'éloigne de celui d'un mode I de rupture libre.

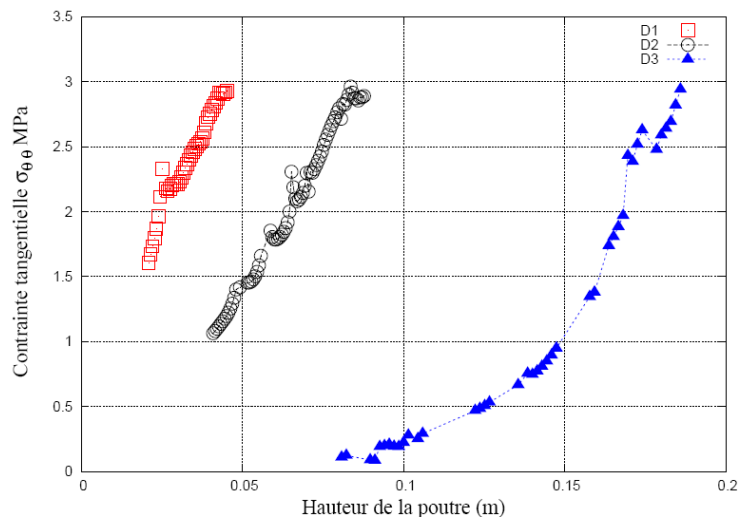


Figure 3-23: Evolution de la contrainte tangentielle au pic de chargement.

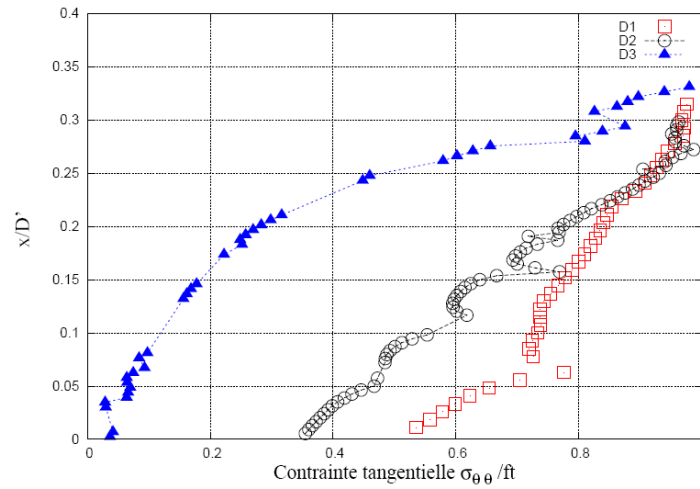


Figure 3-24: Contrainte tangentielle normalisée Vs distance de la FPZ normalisée.

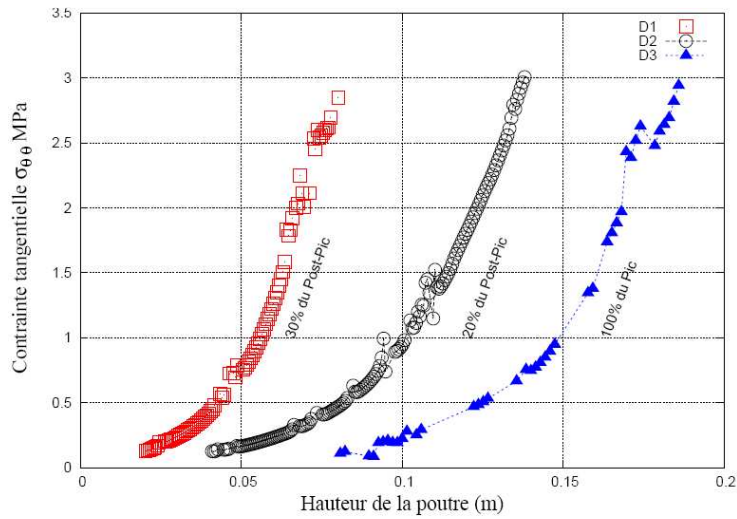


Figure 3-25: Evolution de la contrainte tangentielle pour une longueur de la FPZ complètement ouverte.

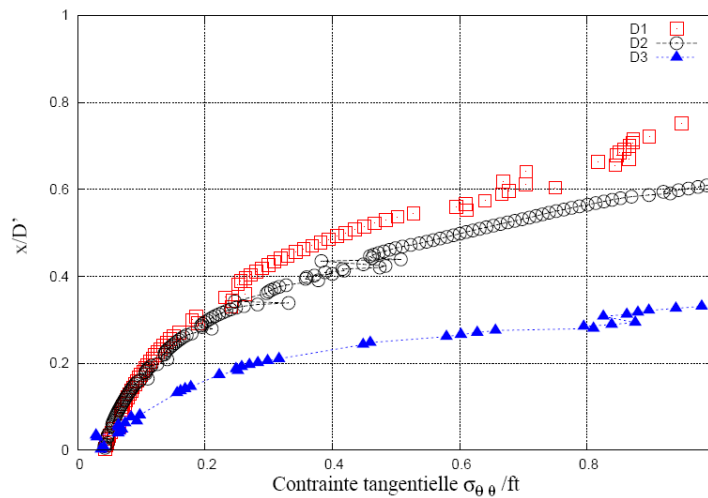


Figure 3-26: Contrainte tangentielle normalisée Vs longueur de la FPZ normalisées pour une FPZ complètement ouverte.

Une comparaison entre la longueur de la FPZ obtenue par l'approche numérique à l'échelle mésoscopique et la longueur de la FPZ obtenue par la formule théorique proposée par karihaloo est montrée sur la Figure 3-27. L'évolution de la valeur double de la FPZ donnée par la formule de bazant est aussi représentée ( $2c$ ).

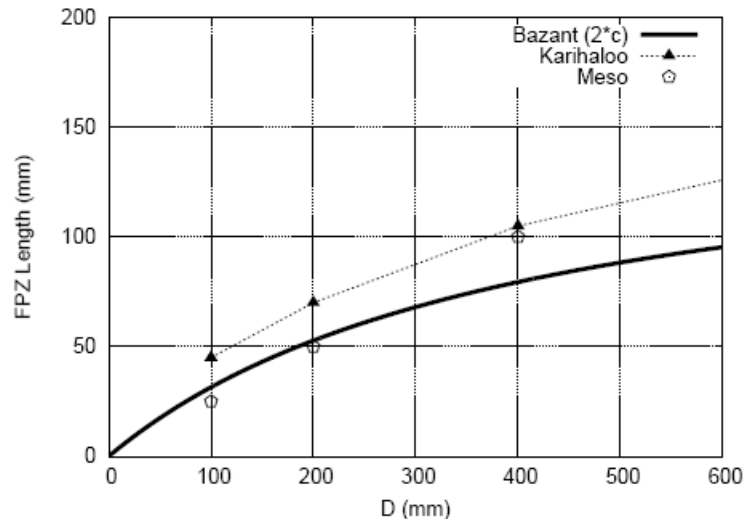


Figure 3-27: Comparaison de la longueur de la FPZ: approche méso et formule analytique (Bazant et karihaloo)

La comparaison montre une bonne concordance entre les longueurs de la FPZ numériques et les longueurs de la FPZ obtenues par la formule de système de décomposition ((Horii et al. 1989), (Karihaloo et al. 2003)). La comparaison confirme aussi que la longueur élastique équivalente de la fissure  $c$  proposée par Bazant est approximativement la moitié de la longueur réelle de la FPZ.

Les longueurs relatives de la FPZ calculées au pic ont montré une indépendance vis-à-vis des effets d'échelles. Ceci est en bonnes concordances avec de nombreuses théories d'effet d'échelles (Bazant entre autres). Sachant que les longueurs de fissures sont proportionnelles aux longueurs de la FPZ (comme montré dans la Figure 3-27), cette analyse fine de l'évolution de la FPZ remet en cause la procédure utilisée auparavant pour le calcul des longueurs de fissures en utilisant une approche assez grossière. En effet, la procédure de post-traitement (OuvFiss) est applicable pour les ouvertures. Néanmoins, pour le calcul des extensions de fissures, la notion de la FPZ devrait être prise en compte.

L'introduction de la taille de la FPZ comme outil de calcul des extensions sera exploitée dans ce qui suit. Une analyse plus étendue du rôle de la FPZ et son rapport avec les extensions de fissures est réalisée via une investigation de l'effet d'échelle sur les courbes de résistance.

### 3.6 Effet d'échelle sur les courbes de résistances

Dans les sections précédentes de ce chapitre (section 0 et 3.5), nous avons montré que le comportement global des poutres est bien reproduit en utilisant l'approche mésoscopique. Ceci n'est pas le fruit du hasard, mais bel et bien la conséquence d'un processus de dissipation d'énergie correctement décrit à l'échelle locale. On a démontré également que l'utilisation de l'approche mésoscopique nous permette de déceler certaines informations à l'échelle locale comme le champ d'endommagement, l'énergie de rupture locale, l'ouverture de fissure ou encore la taille critique de la FPZ. En effet, en utilisant l'approche OuvFiss, les ouvertures de fissures sont bien approximées. Ceci est tout à fait normal, car l'approche est basée sur la représentation du saut de déplacement par des déformations anélastique (d'ouverture de fissures, plastiques, ..). Quant au calcul des longueurs de fissures, cela n'est pas systématique. Le critère permettant de délimiter les longueurs reste à définir. L'exploitation de la notion de la longueur de la FPZ pour le calcul des longueurs de fissures permet de pallier à ce problème.

Pour investiguer davantage cette relation (longueur FPZ - longueur fissure), nous allons nous intéresser à la reproduction numérique des courbes de résistance.

Comme cela a été déjà évoqué auparavant, l'existence de la FPZ est à l'origine de la non-linéarité du processus de propagation de fissures. En effet, l'énergie dissipée dépend de l'extension de la fissure. L'évolution de l'énergie dissipée en fonction de l'extension de la fissure est représentée par la courbe-R ou Courbe de résistance, une courbe qui décrit la résistance à l'extension de la fissure. Cette résistance peut aussi être exprimée en fonction de la ténacité (Facteur d'intensité de contrainte ...). La définition de la courbe-R pour les matériaux quasi-fragiles est illustrée sur la Figure 3-28.

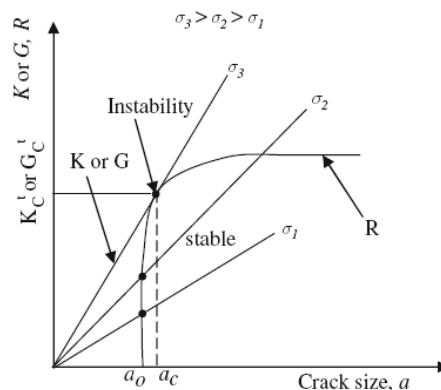


Figure 3-28: représentation de la courbe de résistance (Kumar & Choubey 2015).

Deux paramètres sont essentiels pour étudier le régime de propagation de la fissure : l'énergie de restitution  $G$  et la résistance à la propagation de la fissure  $R$ . L'instabilité se produit lorsque deux conditions sont satisfaites :  $G_c = R_c$  et  $(\partial G / \partial a)_c = (\partial R / \partial a)_c$ .

Dans le but de mieux éclaircir le processus de fissuration réel du béton et vu que les courbes de résistance sont largement utilisées avec succès dans l'analyse de la rupture des matériaux

quasi-fragiles, il nous a paru intéressant d'exploiter les courbes de résistance via l'approche mésoscopique.

Dans cette section, on présente l'analyse de l'effet d'échelle sur les courbes-R pour le cas des poutres homothétiques entaillées à la flexion trois-points testées expérimentalement dans le laboratoire LFC par Rojas Solano B. L (Rojas Solano 2012). En effet, cette campagne de mesures est assez complète (différentes tailles et différentes entailles). Elle va nous permettre d'étudier les courbes de résistance (et par conséquent les extensions de fissures) pour confirmer les résultats trouvés précédemment en utilisant une autre campagne d'essai.

Tout d'abord, les résultats globaux (courbes F-CMOD) obtenus par l'approche mésoscopique sont comparés avec les résultats expérimentaux, ensuite la méthodologie suivie pour la détermination des courbes-R par l'approche mésoscopique est présentée.

### 3.6.1 Modélisation des poutres entaillées: comportement global

Quatre tailles de poutres avec deux rapports ( $\alpha=0.2$ ) et ( $\alpha=0.5$ ) sont simulées par l'approche mésoscopique détaillée dans la section 3.2.2. Les caractéristiques géométriques des poutres sont résumées dans le Tableau 3-8 et Tableau 3-9. Trois tirages aléatoires de granulats sont réalisés pour chaque taille de poutre.

Tableau 3-8: Dimension des poutres entaillées HN (en mm) avec ( $\alpha=0.5$ )

D	b	L	S	a0
400	50	1400	1000	200
200	50	700	500	100
100	50	350	250	50
50	50	175	125	25

Tableau 3-9: Dimension des poutres entaillées FN en (mm) avec ( $\alpha=0.2$ )

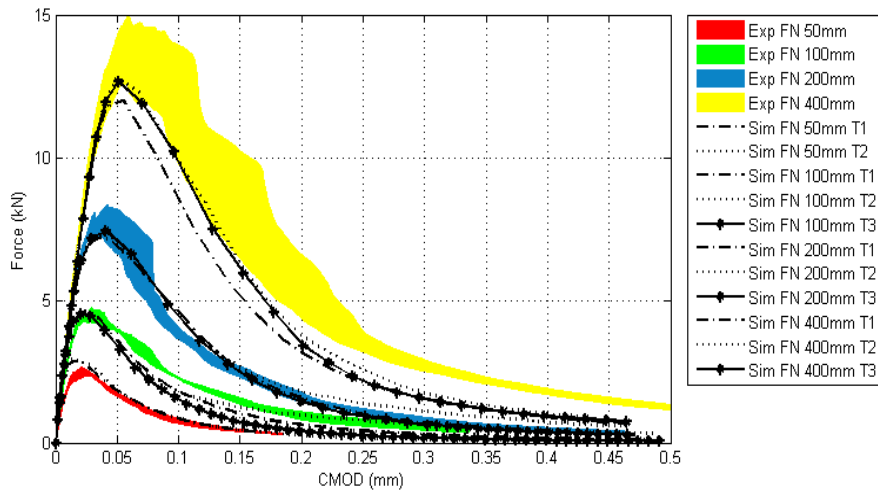
D	b	L	S	a0
400	50	1400	1000	80
200	50	700	500	40
100	50	350	250	20
50	50	175	125	10

Les deux géométries de poutres sont simulées avec le même jeu de paramètres du modèle mésoscopique présentés dans le Tableau 3-10.

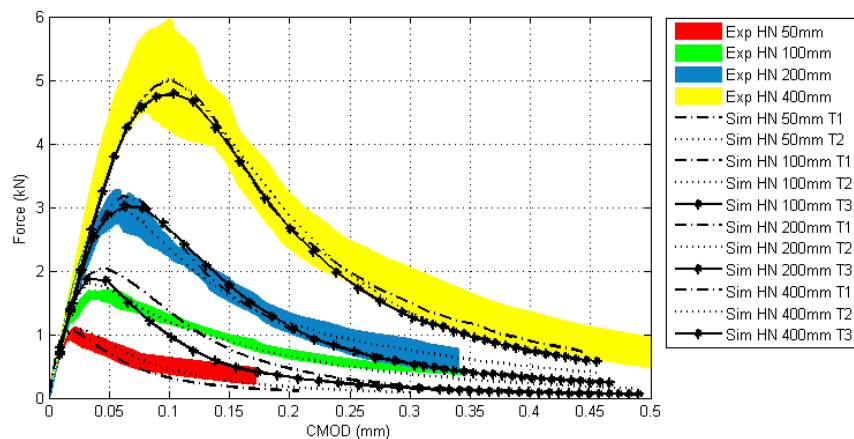
Tableau 3-10: Paramètres du modèle mésoscopique.

Constituants	E (GPa)	Ft (MPa)	Gf (N/m)
Granulat	70	6	85
Mortier	30	3,5	55

Les résultats numériques Force-CMOD obtenus par l'approche mésoscopique pour les deux géométries de poutres FN et HN et pour chaque tirage sont présentés sur la Figure 3-29.



(a)



(b)

Figure 3-29: Courbe numérique F-CMOD: a) poutres entaillées à 20% de la hauteur, b) poutres entaillées à 50% de la hauteur.

Encore une fois, les réponses globales obtenues numériquement pour les deux géométries confirment que le modèle d'endommagement associé à l'échelle mésoscopique est capable de reproduire convenablement la réponse mécanique du béton étudié expérimentalement.

### 3.6.2 Construction des courbes de résistances à partir de l'approche mésoscopique

Afin de tracer les courbes de résistances pour les séries de poutres entaillées décrites dans la section précédente, deux paramètres doivent être déterminés numériquement qui sont: l'énergie de rupture et l'extension de fissure. Ces paramètres sont estimés à chaque instant de



propagation de la fissure jusqu'à la rupture totale de la poutre. Les principales étapes pour la construction d'une telle courbe sont présentées comme suit.

### 3.6.2.1 Détermination de l'extension de fissure selon l'approche mésoscopique

Pour ce faire, on pourrait s'inspirer des résultats trouvés précédemment (relation FPZ/extension). Néanmoins, dans un but de vérifier ces résultats nous allons essayer d'identifier les extensions via une autre approche (en exploitant le principe de la Mécanique Linéaire Élastique Équivalente)

Dans le concept de la mécanique linéaire élastique équivalente de la rupture, toute diminution de la complaisance (où raideur) apparente du spécimen sera accompagnée de la propagation d'une fissure élastique équivalente, autrement dit, la fissure qui, dans un spécimen considéré comme parfaitement élastique, produit conformément à la MLER, la même complaisance (ou raideur) que le spécimen réel fissuré avec sa zone endommagée. La pointe de cette fissure n'est pas située au début de la FPZ, mais à une certaine distance telle que  $a_{eq} = a_0 + \Delta a$  avec  $a_0$  est la longueur de la fissure initiale et  $\Delta a$  est l'incrément de la fissure élastique équivalente. L'objectif est de déterminer numériquement l'extension de fissure pour les poutres entaillées au sens de la mécanique linéaire élastique équivalente de la rupture, ie, chercher la valeur de l'extension de la fissure qui permettra de retrouver la même raideur que la poutre fissurée avec sa longueur de la FPZ.

Les courbes numériques Force-déplacement obtenues via l'approche mésoscopique ont été déjà reproduites (Figure 3-30).

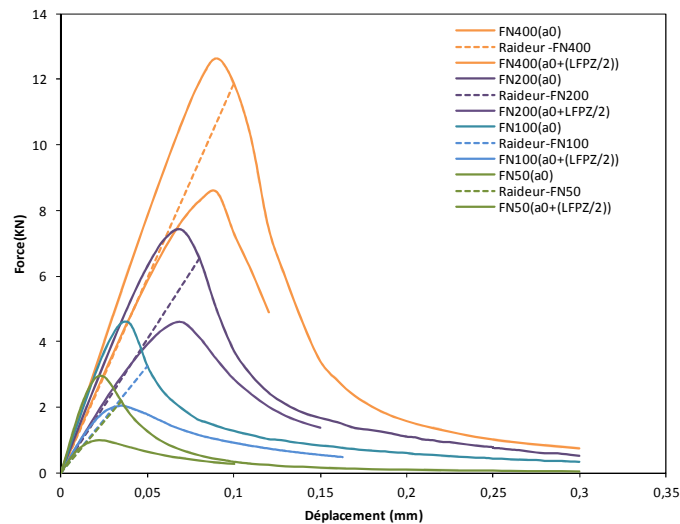
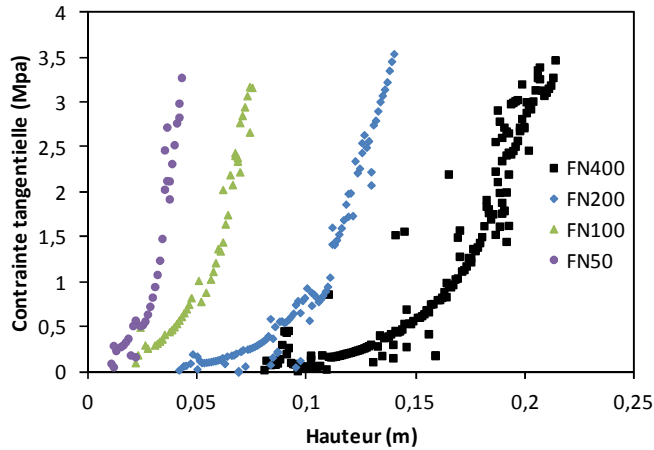
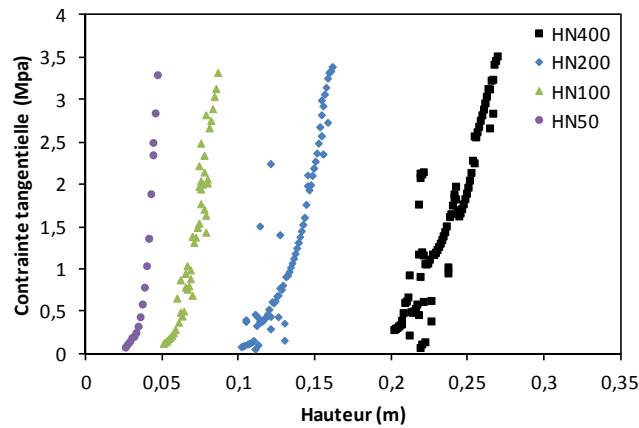


Figure 3-30: Courbes numériques force-déplacement.



(a)



(b)

Figure 3-31: Evolution de  $\sigma_{\theta\theta}$  pour une FPZ entièrement ouverte a) poutre entaillée à 20%, b) poutre entaillée à 50%.

Le point correspondant au développement total de la FPZ est ensuite recherché en utilisant la même approche utilisée dans la section précédente (section 3.5). Selon cette approche, la longueur de la FPZ est considérée comme la longueur entre la contrainte à la pointe de la fissure égale à la résistance à la traction  $f_t$  et la pointe initiale où la contrainte devient nulle. Ainsi, la longueur d'une FPZ entièrement développée correspond à une évolution de la contrainte tangentielle égale à 0 à la pointe de l'entaille jusqu'à atteindre la contrainte de traction  $f_t$  à la pointe de la fissure. La Figure 3-31 illustre l'évolution de la variable  $\sigma_{\theta\theta}$  le long du chemin de fissure pour les différentes géométries de poutres pour des FPZ totalement ouvertes. Ces longueurs correspondent à des taux de chargement de : 100% du pic pour les poutres 400 mm, 20% du post pic pour 200 mm, 30% du post pic pour 100 mm et 40% du post pic pour 50 mm.

Connaissant ces points d'ouverture complète des FPZ de chaque poutre, la raideur de la poutre entaillée; correspondante à la longueur initiale (ou longueur d'entaille)  $a_0$  avec la longueur de la zone endommagée (la FPZ), est estimée. L'étape suivante est de procéder à simuler la même poutre avec des longueurs de fissures différentes jusqu'à trouver la longueur de fissure qui permet de s'approcher (de reproduire) la raideur estimée dans la première étape. Ce processus pourrait être automatisé par une approche d'analyse inverse tel que résumé dans la figure suivante

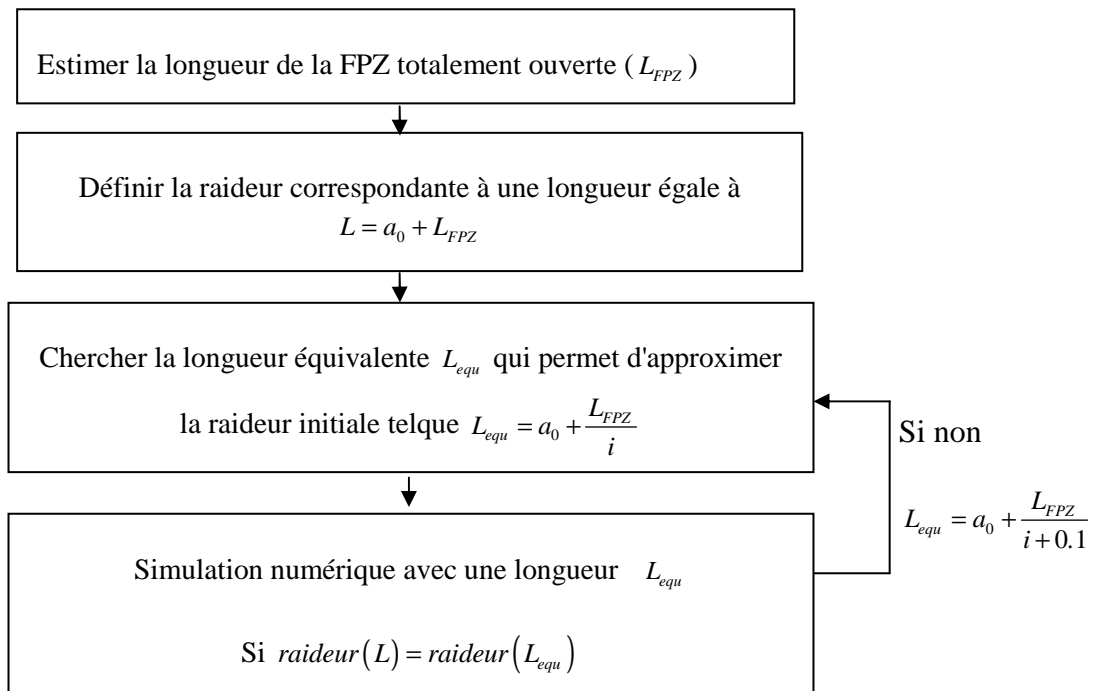
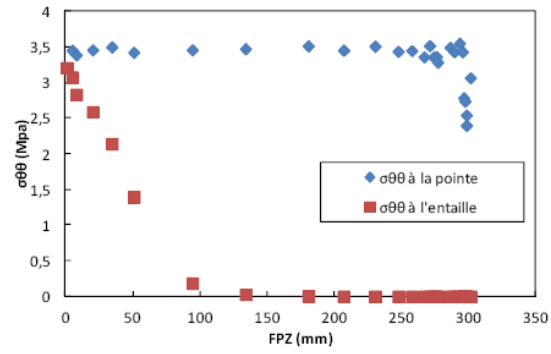


Figure 3-32: Procédure de détermination de l'extension de fissure.

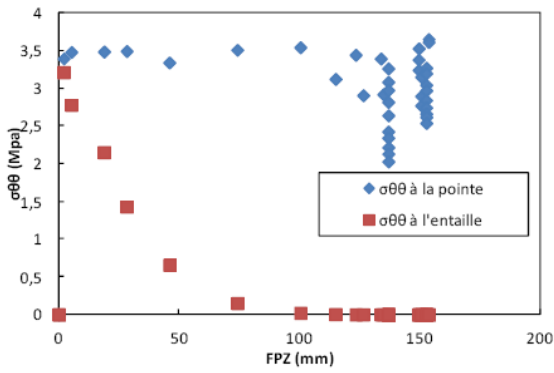
Ces deux étapes sont répétées pour chaque taille de poutre. Les simulations sont faites avec l'approche mésoscopique en utilisant le modèle endommageable de Fichant en désactivant la plasticité afin d'assurer que le phénomène d'endommagement est le seul mécanisme dissipatif (absence des déplacements irréversibles).

Le processus d'optimisation aboutit à une longueur de la fissure équivalente estimée numériquement approximativement égale à  $(a_{eq,Num} = a_0 + (L_{FPZ} / 2))$  pour toutes les tailles de poutres. Donc l'extension de la fissure est approximativement la moitié de la longueur de la FPZ. Ce rapport est proche du résultat trouvé sur la Figure 3-27 où la longueur de la FPZ estimée numériquement en suivant l'évolution de la contrainte tangentielle le long de la fissure a été comparée à l'extension de la fissure proposée par Bazant (Bazant & Kazemi 1990).

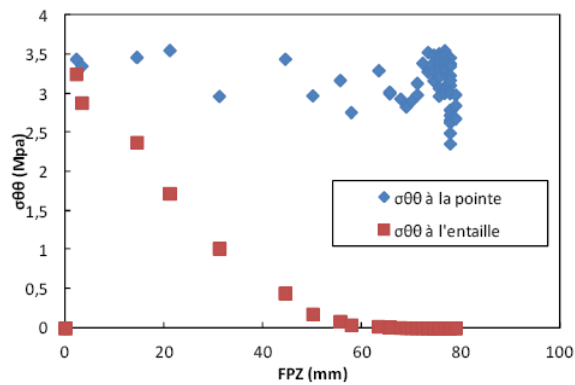
Le même rapport ( $L_{FPZ}/2$ ) est adopté durant toute l'évolution de la FPZ: la mesure numérique de la longueur de la FPZ est basée sur le critère de l'évolution de la contrainte tangentielle. Comme le montre la Figure 3-33, les valeurs de  $\sigma_{\theta\theta}$  au début et à la pointe de la fissure permet de délimiter la longueur de la FPZ.



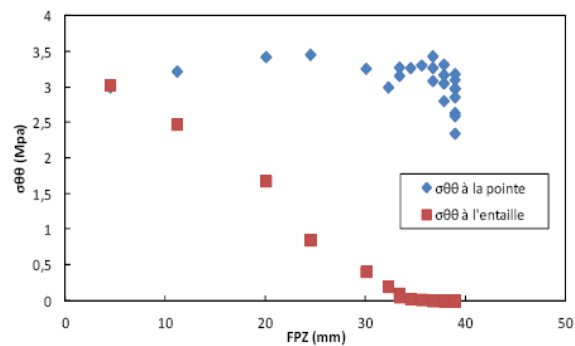
(a) FN400



(b) FN200



(c) FN100



(d) FN50 mm

Figure 3-33: Longueur de la FPZ selon le principe de l'évolution de  $\sigma_{\theta\theta}$  pour les poutres FN.

Le fait de considérer le rapport (FPZ/extension de fissure) constant tout le long du processus de rupture est une approximation qui mérite d'être vérifiée. En effet, on peut généraliser l'approche d'analyse inverse à tous les états de chargement et en déduire ainsi une relation permettant de décrire l'évolution de ce rapport. Dans ce qui suit, nous considérons un rapport (FPZ/extension) constant (égale à 2) pour voir si les courbes de résistances seront bien reproduites.

### 3.6.2.2 Détermination du taux de restitution d'énergie

Conformément à la mécanique linéaire élastique de la rupture, la résistance à la propagation de la fissure  $G_R(a)$  peut être exprimée à partir du taux de restitution d'énergie  $G(a)$ . Ce taux de restitution d'énergie exprime le taux de variation d'énergie pour chaque petit accroissement de fissure  $\delta a$ .

Théoriquement, le calcul du taux de restitution d'énergie peut se faire de plusieurs manières. Parmi les méthodes existantes dans la littérature, la plus simple c'est de chercher l'énergie restituée entre chaque deux instants successifs  $i$  et  $i+1$  d'une courbe par exemple force ouverture des lèvres d'entaille. Cela nécessite donc la connaissance de la force  $F_i$  et  $F_{i+1}$ , l'ouverture d'entaille  $CMOD_i$  et  $CMOD_{i+1}$  et la longueur de fissure  $a_i$  et  $a_{i+1}$ .

$$G(a) = \frac{W_{rest}^{i \rightarrow i+1}}{b \delta a} = G_R(a) \quad (3.25)$$

L'énergie restituée selon la méthode de calcul des aires (ou graphique) peut s'exprimer par:

$$W_{rest}^{i \rightarrow i+1} = \frac{1}{2} (F_i CMOD_{i+1} - F_{i+1} CMOD_i) \quad (3.26)$$

avec

$$\delta a = a_{i+1} - a_i \quad (3.27)$$

Une autre expression du taux de restitution d'énergie est fonction du taux adimensionnel de restitution d'énergie  $g(\alpha)$ :

$$G(a) = \frac{F^2}{Eb^2D} g(\alpha) = G_R(a) \quad (3.28)$$

$g(\alpha)$  dépend de la géométrie du spécimen.

De manière analogue, en connaissant l'expression de la complaisance d'un spécimen en fonction de la longueur relative de fissure  $C(\alpha)$ , l'expression du taux de restitution d'énergie peut également s'écrire de la façon suivante

$$G(a) = \frac{F^2}{2bD} \frac{\partial C(\alpha)}{\partial \alpha} = G_R(a) \quad (3.29)$$

La fonction de complaisance peut être calculée numériquement par exemple par une analyse en élément fini ou choisie directement à partir des formules disponibles dans la littérature.

Pour le cas d'une poutre entaillée soumise à la flexion trois point, Guinea (Guinea et al. 1998) propose une expression de la complaisance fonction de la longueur relative de fissure qui s'écrit:

$$C(\alpha) = \frac{1}{Eb} (c_1(\alpha) + \beta c_2(\alpha) + \beta^2 c_3(\alpha)) \quad (3.30)$$

Ou

$$c_1(\alpha) = -0.378\alpha^3 \ln(1-\alpha) + \alpha^2 \frac{0.29 + 1.39\alpha - 1.6\alpha^2}{1 + 0.54\alpha - 0.84\alpha^2} \quad (3.31)$$

$$c_2(\alpha) = 1.1\alpha^3 \ln(1-\alpha) + \alpha^2 \frac{-3.22 - 16.4\alpha + 28.1\alpha^2 - 11.4\alpha^3}{(1-\alpha)(1 + 4.7\alpha - 4\alpha^2)} \quad (3.32)$$

$$c_3(\alpha) = -0.176\alpha^3 \ln(1-\alpha) + \alpha^2 \frac{8.91 - 4.88\alpha - 0.435\alpha^2 + 0.26\alpha^3}{(1-\alpha)^2(1 + 2.9\alpha)} \quad (3.33)$$

### 3.6.2.3 Détermination de la longueur élastique équivalente selon Guinea

La fonction inverse de l'expression de la complaisance proposée par Guinea (Guinea et al. 1998) (équation (3.30)) permet de déduire les longueurs de fissure à partir des complaisances en fonction de courbe force-déplacement ou force-ouverture des lèvres d'entaille.

L'expression finale de la longueur relative de fissure fonction de la complaisance est donnée par:

$$\alpha = \frac{a}{D} = \frac{(CEb)^{1/2}}{(CEb + q_1(\beta)(CEb)^{1/2} + q_2(\beta)(CEb)^{1/3} + q_3(\beta))^{1/2}} \quad (3.34)$$

Ou

$C$  représente la complaisance calculée ici à partir de la courbe F-CMOD ( $C = \frac{CMOD}{F}$ ),  $E$  est le module élastique,  $b$  et  $D$  sont respectivement la largeur et la hauteur de la poutre et  $\beta$  est le rapport de la distance entre appuis sur la hauteur de poutre.

$$q_1(\beta) = 0.98 + 3.77\beta \quad (3.35)$$

$$q_2(\beta) = \frac{-9.1 + 2.9\beta^2}{1 + 0.168\beta} \quad (3.36)$$

$$q_3(\beta) = -3.2\beta + 8.9\beta^2 \quad (3.37)$$

L'expression (3.34) permet d'obtenir des longueurs de fissure avec une précision de 1% pour une hauteur de poutre  $D$  quelque soit la valeur  $CEb$  et pour chaque valeur de  $\beta$  tel que  $2.5 \leq \beta \leq 16$ .

### 3.6.2.4 Courbes-R numériques

Avant de tracer les courbes de résistance, une comparaison entre les différentes méthodes de calcul du taux de restitution d'énergie est d'abord présentée. La Figure 3-34 représente les courbes-R de la poutre HN100 T3 déterminées avec les différentes méthodes de calcul du taux de restitution d'énergie. La comparaison montre la capacité des différentes méthodes à déterminer  $G(a)$ . Pour les extensions, elles sont calculées avec la formule de Guinea.

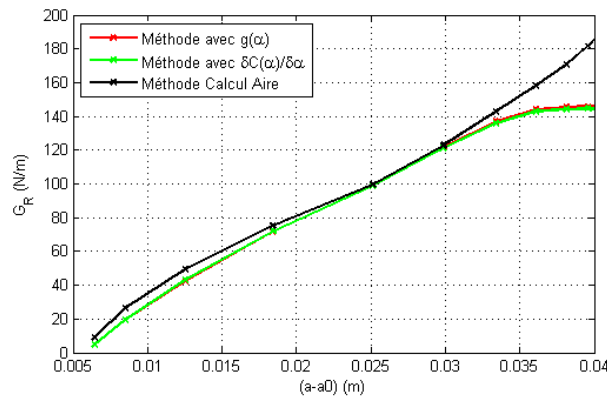
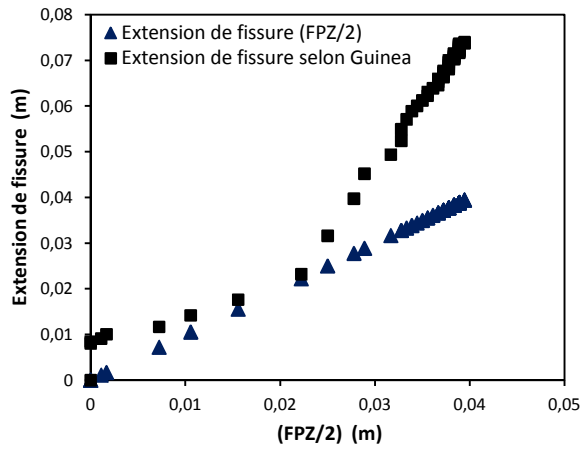


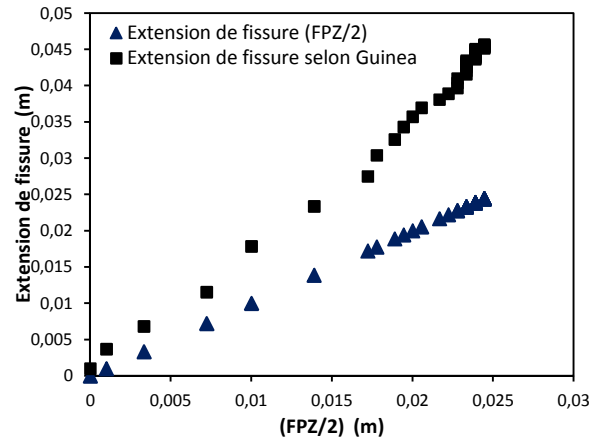
Figure 3-34: Courbes-R: comparaison des différentes méthodes de calcul de  $G(a)$ .

Une comparaison entre les extensions des fissures obtenues numériquement avec celles obtenues par la méthode analytique proposée par Guinea (Guinea et al. 1998) est présentée sur la Figure 3-35. Les extensions obtenues par les deux méthodes ne sont pas identiques. En effet, les extensions numériques sont déduites à partir des longueurs de la FPZ obtenues par l'approche mésoscopique. Un rapport de  $\frac{1}{2}$  est obtenu pour une FPZ totalement ouverte et le même rapport est adopté durant toute l'évolution de la FPZ. La mesure numérique de la longueur de la FPZ, comme expliquer précédemment, est basée sur le critère de l'évolution de la contrainte tangentielle. Les valeurs de  $\sigma_{\theta\theta}$  au début et à la pointe de la fissure permettent de délimiter la longueur de la FPZ complètement ouverte.

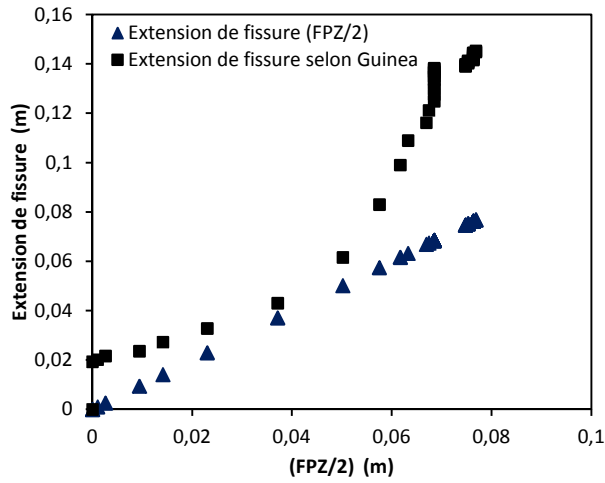
Les longueurs de fissure obtenues par l'expression proposée par Guinea sont déduites par résolution numérique pour la valeur de  $\alpha$  de l'expression de la complaisance. Donc, ces extensions ne sont pas basées sur un critère décisif, mais sur un *data fitting* de points de courbes numériques (pour plus de détail voir (Guinea et al. 1998)).



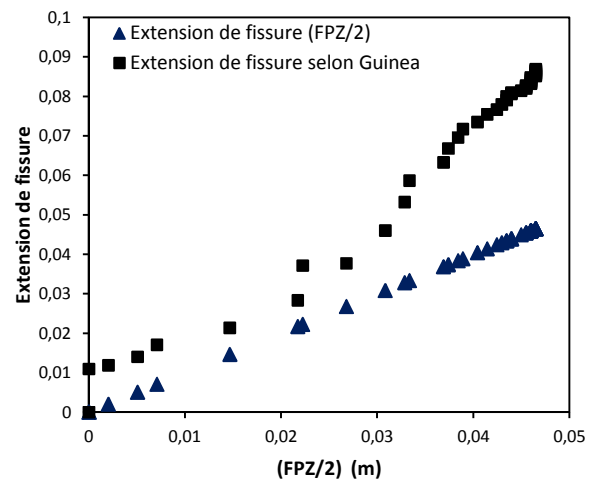
FN100



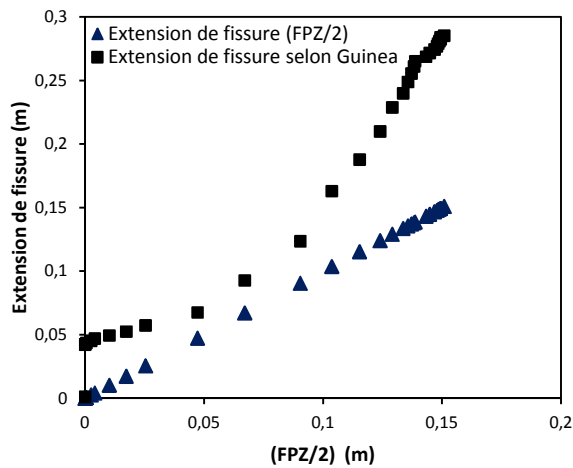
HN 100



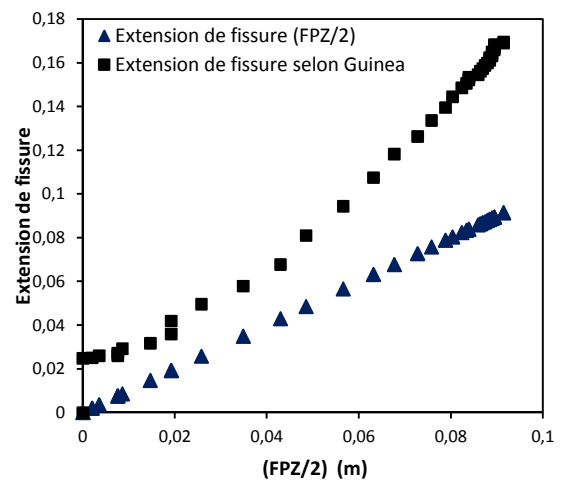
FN200



HN200



FN400



HN400

(a)

(b)

Figure 3-35: Comparaison entre les extensions de fissure (a) poutres FN et (b) poutres HN.

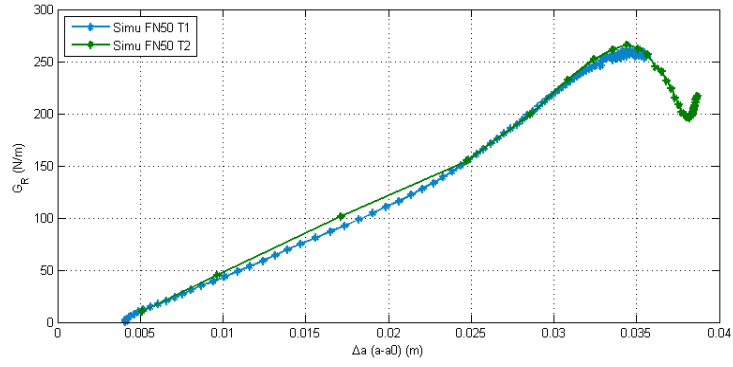


Ce que l'on peut conclure à partir de ces courbes est que l'évolution de l'extension n'est pas linéaire. Ce processus est non-linéaire.

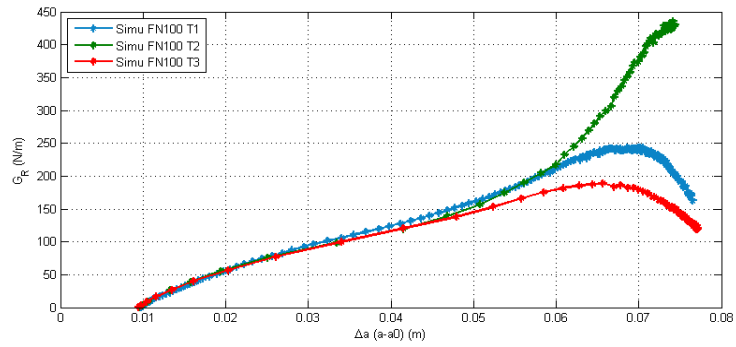
Les courbes de résistance présentées sur la Figure 3-36 et la Figure 3-37 ont été obtenues à partir des réponses globales (courbes Force-CMOD) pour des différents tirages. Le taux de restitution d'énergie est estimé en fonction de la fonction adimensionnelle du taux de restitution d'énergie  $g(\alpha)$  (équation (3.28)). La fonction inverse de la complaisance proposée par (Guinea et al. 1998) est utilisée pour l'estimation des longueurs de fissures élastiques équivalentes (équation (3.34)).

Dans les deux géométries de poutres FN et HN, les deux parties ascendantes et plateau de la courbe-R sont présentes. La première partie ascendante relative au développement du processus de rupture dans laquelle  $G_f$  augmente jusqu'à atteindre une valeur plateau et la deuxième phase équivaut une propagation stationnaire de la fissure ou  $G_f$  atteint sa valeur critique. On constate que les courbes-R des plus petites tailles de poutres (FN et HN 50mm) présentent très peu de régime plateau.

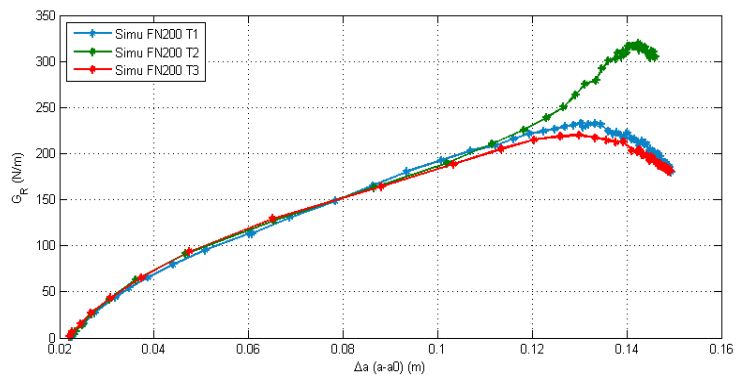
Les courbes-R sont aussi évaluées pour les mêmes géométries de poutre avec les deux composants de la courbe-R estimées à une échelle locale (Voir Annexe 3).



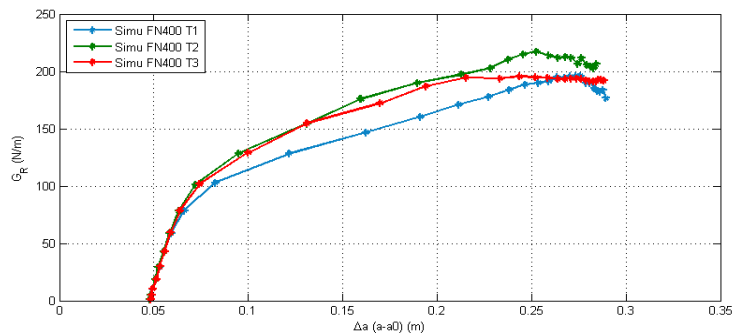
(a) Courbes-R FN50



(b) Courbes-R FN100

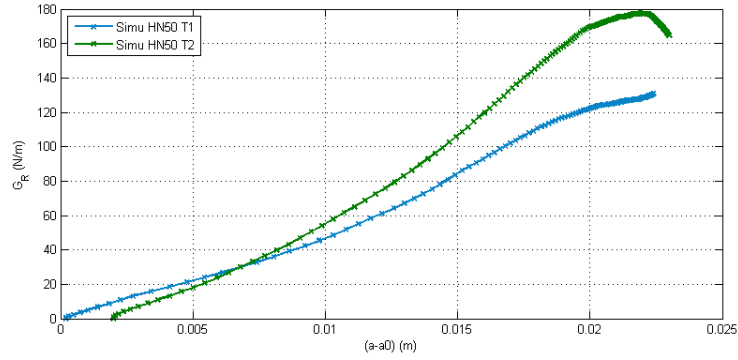


(c) Courbes-R FN200

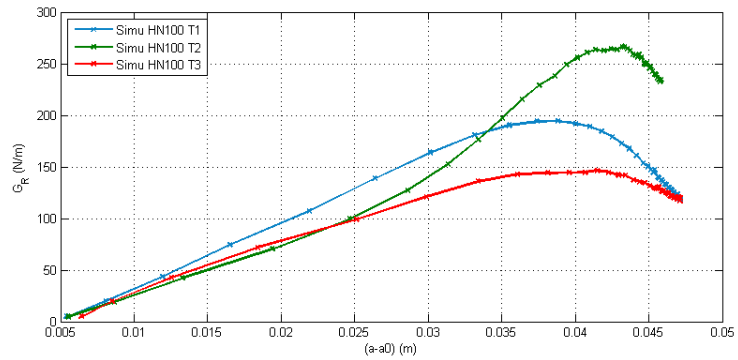


(d) Courbes-R FN400

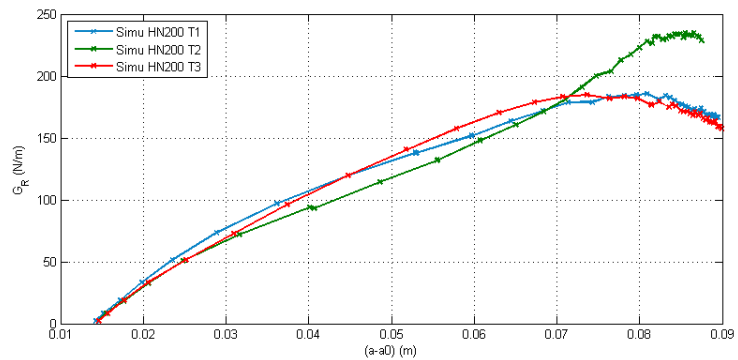
Figure 3-36: Courbes de résistance des poutres entaillées à 20% de la hauteur.



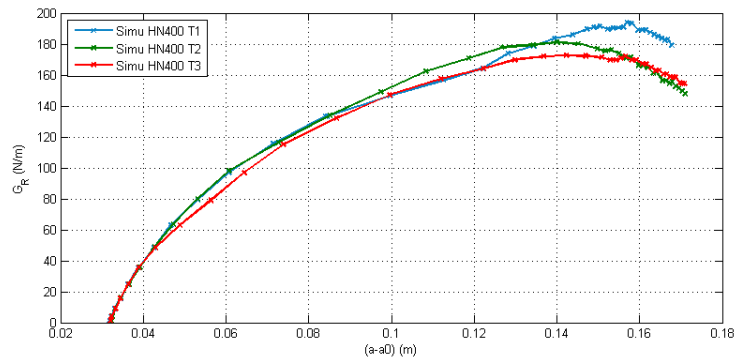
(a) Courbes-R HN50



(b) Courbes-R HN100



(c) Courbes-R HN200



(d) Courbes-R HN400

Figure 3-37: Courbes de résistance des poutres entaillées à 50% de la hauteur.

### 3.6.2.5 Effet d'échelle sur les courbes-R

Les Figure 3-38, Figure 3-39 représentent la superposition des courbes-R (taux de restitution d'énergie en fonction du rapport adimensionnel  $\alpha = \frac{a}{D}$ ).

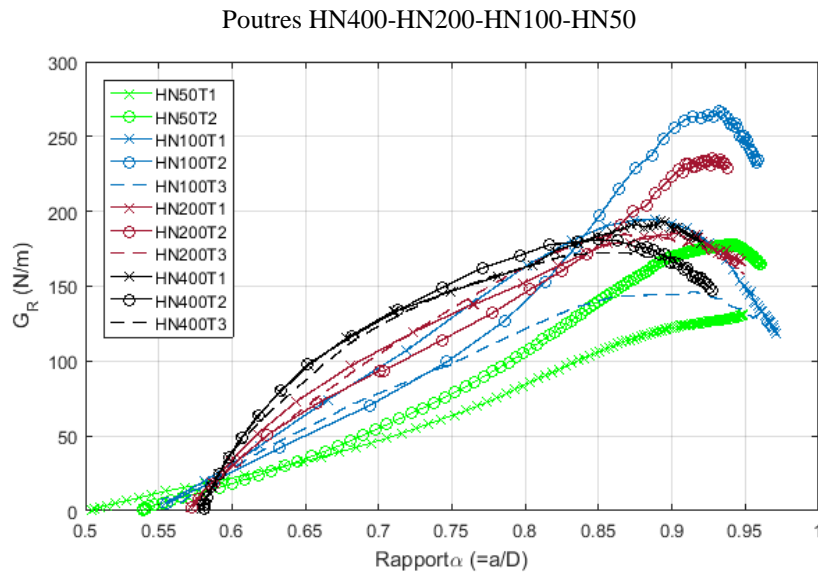


Figure 3-38: Courbes-R: influence de la taille de poutre HN.

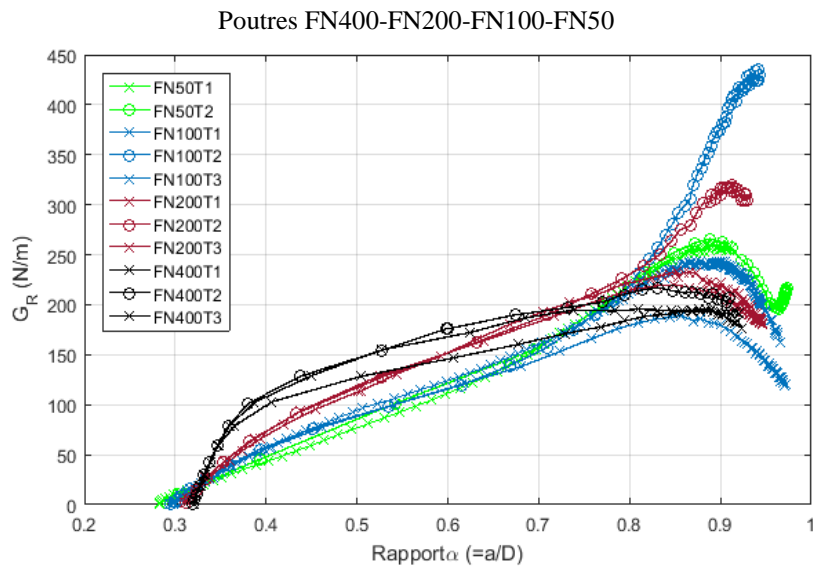


Figure 3-39: Courbes-R: influence de la taille de poutre FN

Pour les deux cas de géométries HN et FN la partie ascendante des courbes-R varie avec la hauteur des poutres; plus la hauteur de poutre est grande et plus la partie ascendante de la courbe-R correspondante est plus importante. Ceci peut s'expliquer par la variation de la distribution de contraintes dans la FPZ pendant la phase du développement et de propagation

de la FPZ avant d'atteindre sa valeur critique (développement libre de la FPZ). Ensuite dans la seconde phase des courbes-R, toutes les courbes aboutissent dans un même intervalle du taux de restitution d'énergie (un intervalle allant de 150 à 250 pour HN et un intervalle allant de 150 à 350 pour FN) traduisant la propagation de la fissure principale avec la longueur critique de la FPZ. In fine, les courbes-R obtenues théoriquement à partir des courbes force-ouverture d'entaille sont dépendantes de la taille de poutres étudiées dans la partie ascendante par contre dans la seconde partie elles sont indépendantes de la taille de poutre.

### 3.7 Conclusion du chapitre

Rappelons que l'objectif de ce chapitre était de faire une étude numérique de l'effet d'échelle sur les caractéristiques de rupture des structures en béton sur la base de simulations numériques élaborées à partir de l'approche de modélisation mésoscopique en utilisant un modèle d'endommagement isotrope régularisé. Pour la réalisation de cette étude, deux campagnes expérimentales ont été exploitées. Dans la première partie de ce chapitre, une mise en évidence de l'effet d'échelle sur la réponse globale puis sur le comportement local (ouverture et longueur de fissure) de la série de poutres entaillées élaborées par Alam a été effectuée. La comparaison entre les courbes Force-ouverture d'entaille a révélé la capacité de l'approche mésoscopique et du modèle d'endommagement à retranscrire la réponse mécanique du béton réel.

Dans la deuxième partie, une étude numérique de la variation de la FPZ sur la base de l'évolution de la contrainte tangentielle a été proposée. Les résultats numériques ont été comparés à différentes formules analytiques proposées dans la littérature décrivant l'évolution de la longueur de la FPZ. Cependant, des divergences remarquables ont été observées. En outre, ces formules analytiques sont dérivées en supposant que la longueur de la FPZ est entièrement développée à la charge maximale. Cependant, cette hypothèse n'est pas validée pour les petits spécimens. L'approche mésoscopique montre que pour les petites dimensions, le confinement de la FPZ existe et la longueur de la FPZ ne correspond pas à la charge maximale.

Dans la troisième partie de ce chapitre, une étude de l'effet d'échelle sur les courbes de résistances a été réalisée sur des poutres entaillées soumises à la flexion trois-points à partir d'une investigation à l'échelle mésoscopique. Dans un premier temps, les deux paramètres qui décrivent les courbes-R; ici le taux de restitution d'énergie et l'extension de fissure, sont déterminés numériquement. Les longueurs des extensions progressives sont calculées à partir des longueurs de la FPZ. Ensuite, l'énergie de fissuration est calculée à chaque instant de propagation de la fissure. Par la suite, les courbes-R ont été déterminées théoriquement à partir des réponses globales des poutres entaillées simulées avec l'approche mésoscopique. Les extensions de fissures ont été obtenues à partir de la fonction inverse de la complaisance proposée par Guinea. Le taux de restitution d'énergie a été calculé en fonction du taux adimensionnel de restitution d'énergie. Les comportements des courbes-R obtenues avec les deux méthodes sont similaires. Les courbes de résistances obtenues montrent l'existence d'un effet d'échelle sur la partie ascendante. Cependant, pour la plus petite dimension de poutre (50mm), la courbe-R ne respecte pas la forme classique obtenue pour les autres poutres. La partie plateau est absente et ceci peut s'expliquer par un confinement non négligeable de la FPZ.

**CHAPITRE 4. Evaluation des termes d'ordre  
supérieur de la série de Williams par une  
approche mésoscopique**

## 4.1 Introduction

L'existence de fissures dans les structures d'ingénierie et ce à différentes échelles modifie la capacité portante de ces dernières; en effet, les fissures influencent la répartition des contraintes dans la zone de rupture et peuvent entraîner une réduction significative de sa résistance et de sa durée de vie.

L'évaluation du comportement de rupture, bien spécifique, des matériaux quasi-fragiles n'est aujourd'hui toujours pas suffisamment cernée. Comme le processus de rupture ne se produit pas essentiellement à proximité du fond de fissure, le champ des contraintes et/ou de déplacement doivent être connus même à une plus grande distance du fond de fissure. Les séries de Williams basées sur l'utilisation des fonctions d'Airy permettent d'exprimer le champ de contrainte et de déplacement au voisinage d'une fissure sous forme d'une somme de série infinie. Il va de soi que la détermination des paramètres du champ asymptotique de l'expansion de Williams, non seulement le premier terme *singulier*, mais également les termes *d'ordre supérieur*, est nécessaire lors de l'analyse du comportement à la rupture des matériaux quasi-fragiles. Souvent, le facteur d'intensité de contrainte a été considéré comme le seul paramètre d'évaluation de la rupture. Néanmoins, comme nous l'avons montré auparavant, des théories d'effet d'échelles, basées sur l'enrichissement du champ de contraintes, ont montré leurs pertinences.

L'objectif de ce chapitre est de contribuer à l'identification des termes d'ordres supérieurs. Ces paramètres sont non seulement importants pour les théories des effets d'échelles évoquées précédemment, mais peuvent aussi contribuer à l'établissement d'une loi d'effet d'échelle permettant de décrire la dépendance dimensionnelle de la FPZ.

Tout d'abord, une étude numérique préliminaire est proposée. Elle consiste à déterminer numériquement les paramètres de la série de Williams pour une géométrie entaillée soumise à des états de chargement différents en mode I (flexion 3 points, traction directe) et cela en utilisant la méthode des éléments finis avec un maillage macroscopique adapté à la pointe de la fissure. Deux autres méthodes numériques implantées dans Cast3M sont utilisées pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte. Une comparaison des résultats numériques est effectuée dans le but de montrer qu'elles permettent d'obtenir des résultats similaires.

Après cette phase de validation, on propose de déterminer les paramètres de rupture à partir des données tirées d'une analyse à l'échelle mésoscopique détaillée dans le chapitre précédent. Pour ce faire, les longueurs de la FPZ déterminées à partir de l'approche mésoscopique sont utilisées comme données d'entrées.

## 4.2 Détermination des paramètres de la série de Williams (Mode I)

Les paramètres de fissure tels que le facteur d'intensité de contrainte, la contrainte-T (*T stress*) et les coefficients des termes d'ordre supérieur dans la série de Williams sont des facteurs importants pour l'analyse de rupture des structures fissurées utilisant la MLER.



Par conséquent, une détermination précise de ces paramètres est primordiale dans le cadre de la mécanique de la rupture.

Les coefficients du champ asymptotique au fond de fissure ne peuvent être calculés analytiquement que pour très peu de cas simples. Par conséquent, l'utilisation de techniques numériques telles que la méthode des éléments finis est inévitable pour les problèmes de fissures plus complexes. Pour cela, une méthode d'éléments finis appropriée doit être choisie. Il existe certaines méthodes applicables dans ce domaine (méthode des éléments hybrides, méthode de collocation et bien d'autres (Karihaloo & Xiao 2001; Su & Fok 2007; Chidgzy & Deeks 2005)), mais toutes ces méthodes nécessitent des éléments spéciaux ou des formulations en EF complexes. De ce point de vue, la méthode surdéterministe (Over Deterministic Method) (Ayatollahi & Nejati 2011) semble être un bon choix, car elle repose sur la formulation des moindres carrés et n'utilise que les résultats d'une analyse d'éléments finis classique, à savoir les déplacements de nœuds autour du fond de fissure.

#### 4.2.1 Les séries de Williams

Williams (Williams 1957) a montré que les champs de contraintes et de déplacements autour de la pointe de fissure pour un corps homogène élastique isotrope soumis à un chargement arbitraire dans le plan peuvent s'exprimer sous la forme d'une série infinie, particulièrement comme une série de puissance, telles qu'elles sont présentées dans les équations suivantes.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_n r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \begin{Bmatrix} \left(2 + \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ \left(2 - \frac{n}{2} - (-1)^n\right) \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta - \left(\frac{n}{2} + (-1)^n\right) \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta \end{Bmatrix} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} B_n r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \begin{Bmatrix} \left(2 + \frac{n}{2} - (-1)^n\right) \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ \left(2 - \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ - \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta + \left(\frac{n}{2} - (-1)^n\right) \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

et

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{2\mu} r^{n/2} \left\{ \left( k + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \cos \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right\} \\ &+ \sum_{n=0}^M \frac{B_n}{2\mu} r^{n/2} \left\{ \left( -k - \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \sin \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right\} \\ u &= f_0 A_0 + \sum_{n=1}^N A_n f_n^1(r, \theta) + \sum_{n=1}^M B_n f_n^2(r, \theta), \end{aligned} \quad (4.2)$$

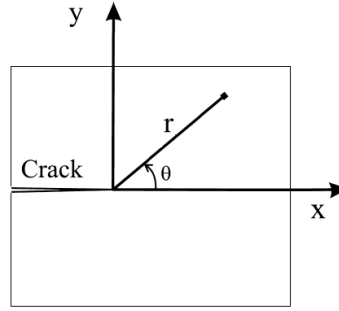


Figure 4-1: Système de coordonnées utilisé à la pointe de la fissure.

$$\begin{aligned}
 v &= \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{2\mu} r^{n/2} \left\{ \left( k - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \sin \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right\} \\
 &+ \sum_{n=0}^M \frac{B_n}{2\mu} r^{n/2} \left\{ \left( k - \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \cos \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right\} \\
 v &= g_0 B_0 + \sum_{n=1}^N A_n g_n^1(r, \theta) + \sum_{n=1}^M B_n g_n^2(r, \theta)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Où  $r$  et  $\theta$  représentent les coordonnées polaires du point M définies par rapport à l'axe OX en supposant l'origine du système de coordonnées à la pointe de fissure (Figure 4-1),  $n$  est l'ordre du terme dans la série infinie de Williams. Comme il a été mentionné plus haut, les développements en série de Williams sont généralement infinis, mais il convient de souligner que dans la présente étude, on considère seulement un nombre limité de termes dans la série de Williams en mode I.

Les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  correspondent respectivement au mode I et mode II, ces paramètres dépendent de la géométrie de l'échantillon et des conditions aux limites; ils sont constants pour une configuration particulière de propagation de fissure et pour une longueur de fissure relative particulière ( $a/w$ ) (avec  $a$  est la longueur de fissure et  $w$  la largeur de l'échantillon).

Il convient de mentionner que les premiers termes singuliers ( $n=1$ ), tel que  $A_1$  et  $B_1$  dans l'équation (4.4) sont liés aux facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  pour le mode I et le mode II, respectivement. Le premier terme non singulier ( $n=2$ ) dans le développement de la série du mode I,  $A_2$ , correspond au terme constant appelé la contrainte -T avec

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sqrt{2\pi} A_1 \\
 K_{II} &= -\sqrt{2\pi} B_1 \\
 T &= 4A_2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dans les équations (4.2) et (4.3),  $u$  et  $v$  représentent les composantes de déplacements dans les directions respectives  $x$  et  $y$ .

$\mu$  est le module de cisaillement défini par ( $\mu = E/2(1-2\nu)$ ) et  $k$  est la constante de Kolosov égale à:

$$\begin{aligned} k &= 3 - 4\nu \text{ en déformation plane} \\ k &= \frac{3-\nu}{1+\nu} \text{ en contrainte plane} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$E$  et  $\nu$  représentent les paramètres du matériau tel que  $E$  est le module de Young et  $\nu$  est le coefficient du poisson et  $f_n^1(r, \theta)$ ,  $f_n^2(r, \theta)$ ,  $g_n^1(r, \theta)$  et  $g_n^2(r, \theta)$  sont les fonctions polaires connues liées aux champs de déplacements.

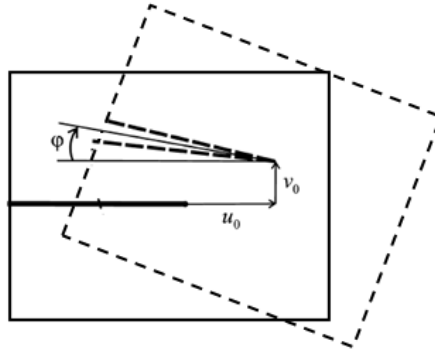


Figure 4-2: Translation et rotation du corps rigide par rapport à la pointe de la fissure.

Les composantes de déplacements correspondant à  $n=0$  exprimées par l'équation (4.6) sont indépendantes de la position des points et peuvent être considérées comme la translation du corps rigide de la pointe de la fissure.

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{k+1}{2\mu} A_0 = f_0 A_0 \\ v_0 &= \frac{k+1}{2\mu} B_0 = g_0 B_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Cependant, les déplacements correspondant au second terme du mode II sont définis par

$$\begin{aligned} u &= -\frac{k+1}{2\mu} B_2 r \sin \theta = -\frac{k+1}{2\mu} B_2 y = \rho y \\ v &= \frac{k+1}{2\mu} B_2 r \cos \theta = -\frac{k+1}{2\mu} B_2 x = -\rho x \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ou  $x$  et  $y$  sont les coordonnées cartésiennes. Le terme  $B_2$  est directement lié à la rotation du corps rigide de la fissure par rapport à la pointe de fissure tel que

$$\rho = -\frac{(k+1)B_2}{2\mu} \quad (4.8)$$

$\rho$  désigne la rotation rigide du corps de la fissure; elle est égale à l'angle entre la direction originale de la fissure et la bissectrice des faces de fissure après déformation. La translation du corps rigide de la fissure dépend des coefficients  $A_0$  et  $B_0$  et la rotation du corps rigide par rapport à la pointe de la fissure dépend du coefficient  $B_2$ .

On propose dans ce qui suit de calculer les paramètres du développement de la série de Williams via la méthode mathématique surdéterminée (ODM) à partir des données numériques (champ de contraintes ou de déplacements). Le principal avantage de cette méthode est que les éléments finis classiques peuvent être utilisés pour la solution et que seule la connaissance du champ de déplacement ou de contrainte près de la pointe de la fissure est requise. Le principe de la méthode est détaillé dans la section suivante.

#### 4.2.2 L'approche *Over Deterministic Method*:

L'approche dite surdéterminée en anglais *Over Deterministic Method (ODM)* est une méthode mathématique basée sur la formulation des moindres carrés linéaires. L'utilisation de cette méthode se base sur un grand nombre de points de données pour calculer un petit ensemble de coefficients d'inconnus à partir d'un large système d'équations.

Le principe de la méthode consiste à utiliser pour un ensemble de nœuds  $k$  à proximité de la pointe de fissure, leurs déplacements  $u$  et  $v$  ainsi que les valeurs numériques des fonctions  $f(r, \theta)$  et  $g(r, \theta)$  aux positions nodales comme des données d'entrées dans l'équation ((4.2) et (4.3)). On obtient alors un système d'équations linéaire avec la forme matricielle définit par

$$[U]_{2k \times 1} = [G]_{2k \times (N+M+2)} [X]_{(N+M+2) \times 1} \quad (4.9)$$

Le vecteur déplacement s'écrit:

$$U^T = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k] \quad (4.10)$$

Avec  $(u_k, v_k)$  sont les coordonnées du vecteur déplacement du  $k^{i\text{ème}}$  nœud dans la direction  $x$  et  $y$  respectivement.

La matrice des fonctions polaires connues  $[G]$  s'écrit

$$[G] = \begin{bmatrix} f_1^1(r_1, \theta_1) \cdots f_N^1(r_1, \theta_1) f_1^2(r_1, \theta_1) \cdots f_M^2(r_1, \theta_1) & f_0 & 0 & f_2^2(r_1, \theta_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^1(r_k, \theta_k) \cdots f_N^1(r_k, \theta_k) f_1^2(r_k, \theta_k) \cdots f_M^2(r_k, \theta_k) & f_0 & 0 & f_2^2(r_k, \theta_k) \\ g_1^1(r_1, \theta_1) \cdots g_N^1(r_1, \theta_1) g_1^2(r_1, \theta_1) \cdots g_M^2(r_1, \theta_1) & 0 & g_0 & g_2^2(r_1, \theta_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1^1(r_k, \theta_k) \cdots g_N^1(r_k, \theta_k) g_1^2(r_k, \theta_k) \cdots g_M^2(r_k, \theta_k) & 0 & g_0 & g_2^2(r_k, \theta_k) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Les paramètres inconnus dans ce système d'équations, écrits dans le vecteur  $[X]$ , sont les coefficients de la série de Williams ainsi que les paramètres liés à la translation du corps rigide et la rotation du corps rigide par rapport à la pointe de fissure. La matrice  $[X]$  s'écrit

$$[X]^T = [A_1 \dots A_N \ B_1 \dots B_M \ A_0 \ B_0 \ B_2] \quad (4.12)$$

Afin de satisfaire le principe d'un système d'équations surdéterminé, le nombre de nœuds  $k$  sélectionnés autour de la pointe de la fissure doit être choisi supérieur au nombre requis pour résoudre le système d'équations; la relation entre le nombre de nœuds  $k$  et le nombre de termes de la série de Williams  $N, M$  doit suivre l'inégalité suivante:

$$2k > N + M + 2 \quad (4.13)$$

En multipliant les deux côtés de l'équation (4.9) par  $[G]^T$ , la solution du système d'équations au sens des moindres carrés s'écrit comme:

$$[X] = ([G]^T [G])^{-1} [G]^T [U] \quad (4.14)$$

Il est généralement admis que le nombre des termes d'ordre supérieur  $N, M$  peut être choisi arbitrairement, mais il existe des restrictions/recommandations empiriques en ce qui concerne l'amélioration des résultats (Šestáková 2012) (Veselý et al. 2013).

### 4.2.3 Etude numérique

Deux géométries d'éprouvettes entaillées soumises à deux types de chargement différents (traction uniaxiale et flexion trois-points) sont utilisées pour vérifier et tester la méthode surdéterminée (ODM) en mode I (Figure 4-3).

La dimension des géométries est choisie afin de vérifier les cinq premiers coefficients d'ordre supérieur de la série de Williams pour les configurations de base disponibles dans la littérature voir ((Ayatollahi & Nejati 2011)(Karihaloo & Xiao 2001a)).

En raison de la symétrie de la géométrie et des conditions de chargement, seule la moitié de spécimen a été modélisée.

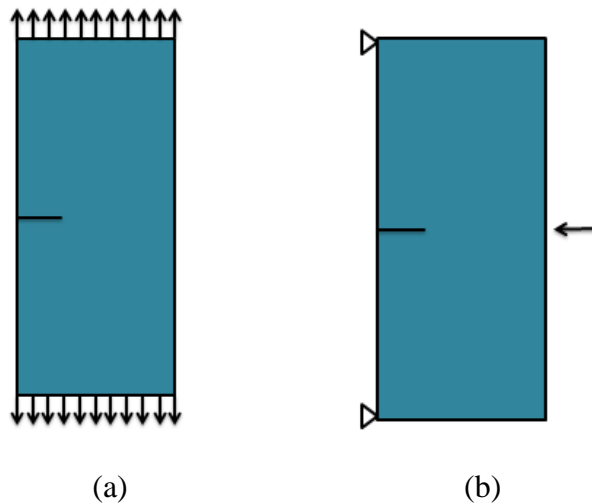


Figure 4-3: (a) Poutre entaillée sous tension uniaxiale et (b) poutre entaillée en flexion 3 points.

Les spécimens sont modélisés et analysés avec le code de calcul Cast3M en utilisant des éléments quadrilatéraux à 4 nœuds en conditions de contrainte plane. Les paramètres du matériau: le module de Young et le coefficient de poisson sont indépendants des paramètres de l'expansion de Williams. Des valeurs arbitraires ont été choisies pour ces paramètres telles que  $E = 1$  et  $\nu = 0.25$ .

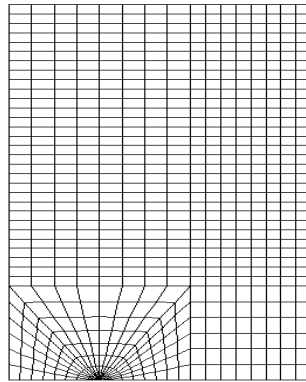


Figure 4-4: Maillage en élément fini pour la moitié

Le maillage est effectué en considérant un anneau centré sur la pointe de la fissure. La position des nœuds  $r$  sur l'anneau est choisie de telle façon à obtenir suffisamment de points sans s'éloigner du domaine de validité de l'étude. La distance de la pointe de la fissure recommandée pour la validité de la solution des paramètres de la série de Williams est comprise entre  $a/4 < r < a/2$ , avec  $a$  égale à la longueur de la fissure. Le maillage en éléments finis utilisé est représenté sur la Figure 4-4.

Une distribution régulière des anneaux concentriques de nœuds autour du fond de fissure est adoptée dont les coordonnées polaires et les déplacements sont les entrées de base pour les équations simultanées résolues par la méthode des moindres carrés.

Dans cette région, on s'attend à ce que le matériau subisse une déformation élastique et par conséquent, l'utilisation des équations ((4.2) et (4.3)) est permise. Les composantes de déplacements des nœuds déterminés numériquement sont utilisées comme données d'entrées pour la procédure ODM servant d'outil pour l'évaluation des coefficients de termes d'ordre supérieur dans la série de Williams via l'équation (4.14).

#### 4.2.4 Résultats et comparaison

Des analyses de base vérifiant la procédure ODM ont été faites sur deux géométries entaillées qui sont représentées sur la Figure 4-3 : poutre à une seule entaille sous traction uniaxiale et poutre en flexion trois-points. Une comparaison des résultats calculés et des résultats de la littérature sont présentés dans le Tableau 4-1 et le Tableau 4-2 pour les cinq premiers coefficients de termes d'ordre supérieur des géométries testées.

Tableau 4-1: Les termes A1-A5 pour la flexion 3Points.

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
Calcul	1.7835	-0.3233	-0.7576	-0.1098	-1.0014
(Karihaloo & Xiao 2001b)	1.8530	-0.3533	-0.7149	-0.0896	-1.3717

Tableau 4-2: Les termes A1-A5 pour la traction directe.

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
Calcul	0.9556	-0.1925	0.155	-0.1291	0.1503
(Ayatollahi & Nejati 2011)	1.0598	-0.1507	0.0795	-0.0476	0.0054
(Karihaloo & Xiao 2001a)	1.0585	-0.1513	0.0815	-0.0478	0.0055

Les résultats de comparaison montrent que la méthode *ODM* peut être considérée comme un outil fiable pour le calcul des coefficients des termes d'ordre supérieur de l'expansion de la série Williams. Une modélisation macroscopique combinée à la méthode *ODM* nous a permis d'obtenir des coefficients proches de ceux fournis dans la littérature.

### 4.3 Estimation numérique du Facteur d'intensité de contrainte via Cast3M

Deux approches numériques sont programmées dans Cast3M pour l'estimation du facteur d'intensité de contrainte: une méthode énergétique basée sur l'intégrale de contour et une méthode basée sur les déplacements des nœuds.

### 4.3.1 Méthode intégrale de contour $G_\theta$

Ici on propose d'utiliser la procédure du calcul du taux de restitution d'énergie (@  $G\_THETA$ ) qui est programmée dans le logiciel de calcul aux éléments finis Cast3M. L'intégrale  $G\_THETA$  transforme l'intégrale  $J$  sur le contour curviligne en une intégrale de contour surfacique à partir du théorème de divergence de Gauss-Ostrogradsky.

Ensuite en s'appuyant sur la relation reliant le facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie proposée par (Irwin 1957) dans le cas d'un milieu élastique isotrope. Le facteur d'intensité de contrainte en contrainte plane est déduit par la formule suivante:

$$K_I = \sqrt{EG} \quad (4.15)$$

L'utilisation de cette procédure de calcul nécessite de fixer un maillage adapté à la pointe de la fissure en précisant le rayon et le nombre de couches.

### 4.3.2 La méthode des déplacements:

La procédure SIF de Cast3M est une autre procédure permettant de calculer le facteur d'intensité de contrainte en mode I et II en utilisant les déplacements locaux des lèvres de la fissure dans les trois points les plus proches de la pointe de la fissure en s'appuyant sur la relation définie par

$$K_I = \frac{E}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r-\alpha}} v \quad (4.16)$$

$$K_{II} = \frac{E}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r-\alpha}} u \quad (4.17)$$

Avec

$u$  et  $v$  sont les déplacements suivant l'axe  $Ox$  et  $Oy$  respectivement.

$r$  est la distance du nœud du calcul de  $K$  à partir de l'origine locale.

$\alpha = -\frac{m}{n}$  et  $\alpha' = -\frac{q}{p}$  avec  $n, m, p$  et  $q$  sont les coefficients des équations des lignes  $v^2 = nr + m$  et  $u^2 = pr + q$  respectivement.

Le résultat du facteur d'intensité de contrainte calculé avec la procédure SIF est une moyenne des trois points les plus proches de la pointe de la fissure.

Il convient de rappeler qu'il existe une relation entre le premier paramètre singulier  $A1$  et  $K_I$  (équation (4.22)).



### 4.3.3 Résultats et comparaison

Le Tableau 4-3 montre le résultat du calcul du facteur d'intensité de contrainte avec trois méthodes numériques différentes. On peut constater que les trois méthodes permettent d'obtenir des résultats similaires.

Tableau 4-3: Comparaison du calcul du KIC

	Méthode $G\theta$ (Equation (4.15))	Procédure SIF (Equation (4.16))	Equation (4.4)
KI (Flexion 3 points)	4.6331	4.6371	4.47057
KI (Traction pure)	2.5366	2.3611	2.3953

Toutes ces approches et méthodes sont capables de calculer avec une précision acceptable les valeurs des termes de la série de Williams. Dans ce qui suit, nous exploiterons l'approche mésoscopique afin de proposer une méthode de calcul de ces coefficients.

## 4.4 Détermination des paramètres de l'expansion de Williams via l'approche mésoscopique

### 4.4.1 Méthodologie

Nous avons démontré dans le chapitre précédent que l'approche mésoscopique permet une bonne estimation du champ de contraintes le long de la fissure durant le processus de rupture.

Dans cette partie, l'objectif est de calculer les paramètres de rupture à savoir les termes d'ordre supérieur de la série de Williams ainsi que le facteur d'intensité de contrainte à partir des données tirées d'une analyse à l'échelle mésoscopique détaillée dans le chapitre précédent (Chapitre 3). Pour ce faire, les longueurs de la FPZ déterminées à partir de l'approche mésoscopique sont utilisées comme données d'entrées.

Rappelons que les longueurs de la FPZ sont mesurées en s'inspirant du modèle cohésif, autrement dit la longueur de la FPZ est la longueur de la zone cohésive. Le long de la ligne de la fissure, la contrainte normale  $\sigma_{yy}$  est la même que la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta\theta}$ .

Notre but est de calculer les trois premiers termes de l'expansion de Williams le premier à savoir le terme singulier  $A_1$  ainsi que les deux premiers paramètres non singuliers qui sont ( $A_3$  et  $A_5$ ) pour  $\theta$  égale à 0 et  $\sigma_{\theta\theta} = f_i$ . Rappelons que selon le développement de la série de Williams pour les contraintes de fond de fissure, la composante de la contrainte tangentielle s'écrit:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_n r^{\frac{n}{2}-1} \left[ \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \left( \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \theta \right] \quad (4.18)$$

À certaines distances de la pointe de la fissure, les termes d'ordre supérieur dans l'équation (4.18) ne sont plus négligeables et doivent caractériser plus précisément la contrainte tangentielle.

On suggère dans la présente étude de chercher trois termes dans l'équation (4.18) pour  $\theta=0$  (mode I d'ouverture), dans le but de fournir des estimations plus précises de ces paramètres.

Pour le mode I et donc pour  $\theta=0$ , on obtient:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta=0) = \frac{A_1}{\sqrt{r}} + 3A_3\sqrt{r} + 5A_5r^{3/2} \quad (4.19)$$

Ce champ de contrainte est issu de la mécanique de la rupture. Ce champ n'est pas censé représenter la zone de la FPZ. Son enrichissement est introduit juste pour approximer la longueur de la FPZ, c.-à-d., pour  $r = L_{fpz} \rightarrow \sigma_{\theta\theta} = f_t$ .

Les longueurs totales de la FPZ ont été approximées par une approche mésoscopique. L'évolution de la FPZ en fonction de la taille du spécimen trouvée précédemment est rappelée dans la figure suivante

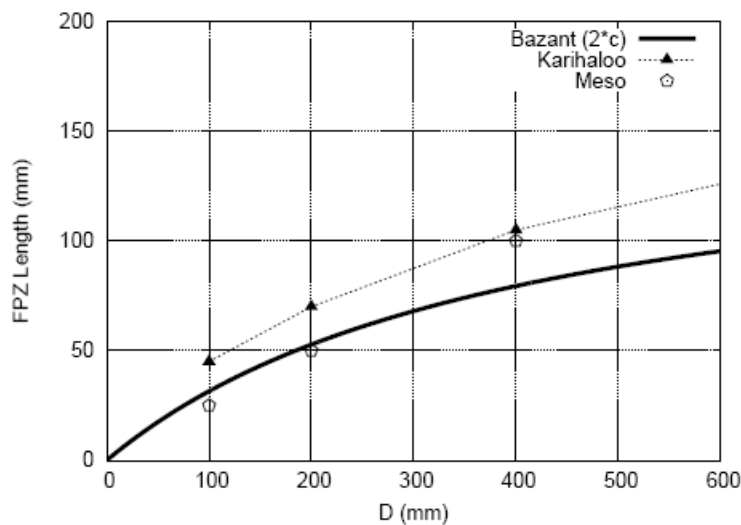


Figure 4-5: Evolution de la FPZ: comparaison des résultats numériques et théoriques.

Pour chaque taille de poutre (D1, D2 et D3), la taille de la FPZ a été calculée. En plus, les tailles correspondantes à d'autres dimensions peuvent être approximées en utilisant la variation présentée dans la Figure 4-5.

En faisant cela, on disposera d'autant de valeurs de FPZ. On peut donc proposer de résoudre un système d'équation composé de plusieurs équations.

On propose donc de résoudre un système d'équations surdéterminé pour 3 inconnus ( $A_1, A_3$  et  $A_5$ ) en utilisant la méthode des moindres carrés détaillée dans le paragraphe (4.2.2).

Une observation de plus devrait être mentionnée à ce stade; au lieu de calculer directement les coefficients  $A_n$ , il est généralement plus pratique de travailler avec les fonctions adimensionnelles  $A_n^*$  définies dans (Karihaloo & Xiao 2001b), ils sont donnés par

$$A_n^*(\alpha) = \frac{A_n(\alpha)}{\sigma} W^{\frac{n-2}{2}} \quad (4.20)$$

En remplaçant l'équation (4.20) dans (4.19) on obtient

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{A_1^* \sigma_i}{\sqrt{r_i}} \sqrt{D_i} + 3A_3^* \sigma_i / \sqrt{D_i} \sqrt{r} + 5A_5^* \sigma (D_i)^{3/2} r^{3/2} = f_i \quad (4.21)$$

Dans l'équation (4.21) les coefficients des termes d'ordre supérieur sont normalisés au moyen de la contrainte nominale  $\sigma$  induite par le chargement et par une puissance de la largeur  $D$ . Ainsi, ces fonctions sont adimensionnelles vis-à-vis du chargement.

Après résolution du système d'équations surdéterminé, on obtient les résultats mentionnés sur le tableau ci-dessous

Tableau 4-4: Les paramètres de rupture ainsi que le facteur d'intensité de contrainte pour les poutres D1, D2 et D3 obtenus en utilisant les données mésoscopiques.

D (m)	$A_1^*$	$A_3^*$	$A_5^*$	$\sigma_{Meso}$ (Mpa)	$A_1$ (Mpa $\sqrt{m}$ )	$A_3$ (Mpa / $\sqrt{m}$ )	$A_5$ (Mpa * $m^{3/2}$ )	$K_I$ (Mpa $\sqrt{m}$ )
0.1	0.2876	0.3859	4.2345	2.87	0.2610	3.5036	384.3	0.6543
0.2				2.5	0.3215	2.1574	118.35	0.8060
0.4				1.96	0.3565	1.196	32.8072	0.8936

En utilisant l'équation (4.21) on obtient les résultats dans le Tableau 4-5.

Tableau 4-5: Les paramètres de rupture ainsi que le facteur d'intensité de contrainte pour les poutres D1, D2 et D3 obtenus en utilisant les formules théoriques.

D (m)	$A_1^*$	$A_3^*$	$A_5^*$	$\sigma_{Exp}$ (Mpa)	$A_1$ (Mpa $\sqrt{m}$ )	$A_3$ (Mpa / $\sqrt{m}$ )	$A_5$ (Mpa * $m^{3/2}$ )	$K_I$ (Mpa $\sqrt{m}$ )
0.1	0.304	-	-	2.64	0.2762	-1.1	-16.989	0.6924
0.2		0.121	0.187	2.38	0.3403	-0.677	-5.2322	0.8530
0.4				2.1	0.3773	-0.376	-1.4503	0.9458

#### 4.4.2 Discussion des résultats

Les résultats numériques et les résultats théoriques sont mentionnés sur le Tableau 4-4 et le Tableau 4-5 respectivement.

Le facteur d'intensité de contrainte est déduit à partir du calcul du paramètre  $A_1$  à partir de l'équation (4.22).

$$K_I = \sqrt{2\pi} * A_1 \quad (4.22)$$

La comparaison des résultats montre qu'une très petite différence est constatée entre les résultats mesoscopiques et théoriques (moins de 5%) pour le premier terme singulier  $A_1$  pour les trois tailles de poutres D1, D2 et D3. Cependant, les deux premiers termes non singuliers du champ de contrainte pour  $\theta=0$  ( $A_3$  et  $A_5$ ), on obtient des résultats un peu différents. Ces paramètres sont fortement dépendants du nombre d'équations utilisées et du nombre de termes utilisés comme pour une approche macroscopique. Cependant, cela permet aussi de remettre en cause l'efficacité des méthodes basées sur l'enrichissement en ce qui concerne leurs capacités à décrire l'évolution de la FPZ. En effet, l'enrichissement permet de retrouver l'effet d'échelle sur la contrainte nominale. Néanmoins, sa capacité à décrire la dépendance dimensionnelle de la FPZ reste à discuter.

#### 4.5 Conclusion du chapitre

Numériquement, la détermination des termes d'ordres supérieurs peut être réalisée en utilisant la méthode ODM en exploitant le champ de déplacement dans le plan obtenu à partir de l'analyse numérique en élément fini. Après analyse numérique, les coefficients de l'expansion de Williams sont calculés avec une simple opération matricielle en extrayant les positions et les déplacements des nœuds sur des anneaux à proximité du fond de fissure. Bien que cette méthode puisse être utilisée pour n'importe quel type de maillage autour au fond de fissure, l'utilisation d'un maillage bien adapté tel qu'un maillage circulaire est préférable, car cela facilite la sélection de données pour le procédé Over Deterministic.

D'autre part, nous avons voulu vérifier la capacité des approches basées sur l'enrichissement à reproduire ces termes via une modélisation mésoscopique. Il est clair que l'enrichissement du champ de contraintes permet de reproduire l'effet d'échelle sur les variables statiques. Cependant, la description de l'effet d'échelle sur les variables cinématiques reste problématique. Une équation permettant de décrire l'évolution de la FPZ avec enrichissement est nécessaire. Le travail entrepris dans ce chapitre reste inachevé, car l'objectif était de proposer une telle équation en se basant sur les résultats de la modélisation mésoscopique qui a montré une fois de plus sa capacité à décrire le processus de fissuration à l'échelle locale et globale.

## CHAPITRE 5. Conclusions générales

Le béton est un matériau quasi-fragile présentant un comportement complexe à l'échelle macroscopique dû principalement au caractère hétérogène de sa microstructure. Les différents mécanismes qui sont à l'origine du comportement bien particulier du béton sont principalement non linéaires. Explorer les mécanismes de dégradation exclusivement par voie expérimentale semble être une tâche lente, voir difficile lorsqu'il s'agit d'étudier des éléments de grandes dimensions. Le phénomène de l'effet d'échelle est un problème fondamental d'une importance considérable pour les structures en béton de grandes échelles.

Dans ce travail, nous avons étudié l'influence des effets d'échelle sur les caractéristiques locales et globales de rupture des structures en béton. Ce problème fondamental qui a une conséquence considérable sur la sécurité des structures/ouvrages en béton de grandes échelles n'est pas encore tout à fait résolu et soulève de plus en plus de questions. De nombreuses approches ont vu les jours. Certaines sont davantage étudiées, d'autres ont sombré dans l'oubli...

Les travaux décrits dans cette thèse ont été consacrés à l'étude de l'effet d'échelle sur les caractéristiques du processus de fissuration (comportement global et comportement local). Ce travail de recherche a été axé fondamentalement sur l'investigation de la FPZ (la longueur principalement). Pour ce faire, nous avons opté pour une approche de modélisation à l'échelle mésoscopique. Le choix d'une telle description a été largement justifié. Le processus de fissuration non linéaire a été décrit par un modèle d'endommagement associé à des outils de post traitement de la fissuration.

Numériquement, la notion de la FPZ a été appréhendée en s'inspirant de la mécanique de la rupture associée à un enrichissement de champs de contraintes. Ainsi, nous avons pu quantifier l'évolution de la contrainte tangentielle le long de la fissure afin d'investir la variation de l'étendue de la zone de rupture durant le processus de fissuration. Deux campagnes de mesures expérimentales réalisées dans deux laboratoires distincts ont été exploitées. Les résultats ont permis de conclure sur certains aspects importants de la rupture : le développement de la FPZ et son lien avec les extensions de fissures. Certains fondements de base de la mécanique de la rupture (Pic de charge associé à l'amorçage de fissure) sont remis en cause.

La complexité du processus de fissuration et de dissipation d'énergie inhérente à un matériau quasi-fragile caractérisé par une FPZ se traduit numériquement par des problèmes de manque d'objectivité du principalement à la pauvreté des outils de la mécanique des milieux continus

et des méthodes numériques classiques associées (éléments finis par exemple). Les interactions dans le béton se passent certainement à une échelle inférieure à celle du mésoscopique. Cependant, cette échelle reste le niveau minimal requis pour une description grossière de ces multiples interactions. Le passage à une échelle macroscopique est lourd, car il devrait *compresser* toutes les informations récoltées à l'échelle en dessous pour les reproduire à l'échelle supérieure. C'est le cas des approches macroscopiques *non local*, qui dans certaines mesures permettent de reproduire les phénomènes d'effet d'échelle. D'autres approches ont vu le jour, la Périodynamique, de par son caractère non local, est un outil puissant qui remplacera certainement plusieurs approches classiques largement utilisées aujourd'hui.

Cela dit, l'ingénierie civile a toujours besoin de réglementation et de méthodes simples pour fonctionner. Partant de cette constatation, les outils sophistiqués seront toujours nécessaires pour comprendre les phénomènes. Les informations récoltées à ces échelles de compréhension devraient être reproduites sous d'autres formes aux échelles supérieures. Un des objectifs principaux de cette thèse était de comprendre la notion de la FPZ et son rôle dans l'effet d'échelle. Cet objectif a été plus au moins atteint. Cependant, nous nous sommes fixés aussi comme objectif de proposer, à la base des observations numériques mésoscopiques, des formules de variations de la FPZ nécessaire pour la mécanique non linéaire de la rupture. Malheureusement, ce volet est resté ouvert ..

D'autres aspects de modélisation numériques ont été discutés dans cette thèse. La méthode de régularisation énergétique a été choisie, d'une part, parce qu'elle est basée sur le principe de dissipation, mais d'autre part, parce que c'est une méthode qui pourrait facilement être utilisée dans le cadre de l'ingénierie pratique. Cette approche a été étudiée dans le but de repérer les sources d'erreurs liées à l'utilisation de cette approche dans le cas d'un calcul de structure générant des états de contraintes 1D, 2D et 3D. La prise en compte de la dissipation plastique dans la formulation de l'énergie de fissuration a été également discutée. Des développements mathématiques et des simulations numériques ont été présentés afin de comprendre les limites d'application de cette méthode pour une bonne application du modèle d'endommagement dans les simulations présentées dans cette thèse.

Le dernier chapitre a montré les limites des méthodes d'enrichissement à décrire les effets d'échelles sur les variables cinématiques. Cependant, ce travail mérite approfondissement pour pouvoir clarifier le rôle des termes d'ordre supérieur dans la reproduction de l'effet d'échelle.

# Annexe 1

## Les expressions de $A_1^*$ et $A_3^*$

considérant une poutre soumise à la flexion trois-points avec un rapport entaille / hauteur  $\alpha = \frac{a}{D}$  et un rapport distance entre appui/ hauteur  $\beta = \frac{S}{D}$ .

Les termes  $A_1$  et  $A_3$  sont normalisées pour être adimensionnels tel que

$$A_1^* = k_\beta(\alpha) = \frac{A_1}{\sigma_n \sqrt{D}} \quad (5.1)$$

$$A_3^* = \frac{A_3 \sqrt{D}}{\sigma_n} \quad (5.2)$$

Selon le principe de superposition (Timoshenko & Goodier 1951), Guinea et al (Guinea et al. 1998) propose une expression approximative générale pour le facteur d'intensité de contrainte qui est valide pour tout rapport  $\beta$  supérieur à 2.5 et pour tout rapport  $\alpha$ , il s'écrit par:

$$k_\beta(\alpha) = k_\infty(\alpha) + \frac{4}{\beta} [k_4(\alpha) - k_\infty(\alpha)] \quad (5.3)$$

Une expression finale du facteur de forme générale déterminée par ajustement des données de référence dans la littérature est introduite par Guinea et al (Guinea et al. 1998) sous la forme suivante

$$k_\beta(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)^{3/2} (1+3\alpha)} \left[ p_\infty(\alpha) + \frac{4}{\beta} [p_4(\alpha) - p_\infty(\alpha)] \right] \quad (5.4)$$

où

$$p_4(\alpha) = 1.9 + 0.41\alpha + 0.51\alpha^2 - 0.17\alpha^3 \quad (5.5)$$

$$p_\infty(\alpha) = 1.99 + 0.83\alpha - 0.31\alpha^2 + 0.14\alpha^3 \quad (5.6)$$

Karihaloo et Xiao (Karihaloo & Xiao 2001b) étendent l'utilisation du principe de superposition pour déterminer les expressions des termes d'ordre supérieur du champ asymptotique au fond de fissure pour une poutre entaillée en flexion trois-points. Pour le terme  $A_3^*$  (appelé  $g_\beta^3$  dans (Karihaloo & Xiao 2001b)), l'expression suivante est donnée

$$A_3^* = g_\beta^3(\alpha) = g_\infty^3(\alpha) + \frac{4}{\beta} [g_4^3(\alpha) - g_\infty^3(\alpha)] \quad (5.7)$$

Les expressions de la fonction de forme adimensionnelle  $g_4^3(\alpha)$  et  $g_\infty^3(\alpha)$  en ajustant les données obtenues par les éléments hybride sont données par

$$g_4^3(\alpha) = -148.73\alpha^5 + 233.48\alpha^4 - 153.97\alpha^3 + 49.515\alpha^2 - 9.2406\alpha + 0.6534 \quad (5.8)$$

$$g_\infty^3(\alpha) = -153.84\alpha^5 + 240.49\alpha^4 - 157.57\alpha^3 + 50.116\alpha^2 - 9.5459\alpha + 0.7136 \quad (5.9)$$

Pour un rapport  $\beta = 3$  et  $\alpha = 0.2$ , en utilisant les équations (5.4) et (5.7), on obtient  $A_1^* = 0.299$  et  $A_3^* = -0.1199$ .



## Annexe 2

### Détermination de A et B par régression linéaire

Dans (Ayatollahi & Akbardoost 2012), l'évolution de la longueur de la FPZ est donnée par

$$r_c = \left( \frac{f_i \sqrt{2\pi} \pm \sqrt{2\pi f_i^2 - 12 \frac{A_3^* K_c^2}{A_1^* D}}}{6 \frac{A_3^* K_c}{A_1^* D}} \right)^2 \quad (5.10)$$

Pour les grandes dimensions de spécimens, la longueur de la FPZ tend vers une valeur constante, une expression générale de l'évolution de FPZ pourrait être écrite comme

$$r_c = \frac{A}{1 + \frac{B}{D}} \quad (5.11)$$

Les coefficients A et B peuvent être déterminés par une régression linéaire des résultats des simulations numériques. L'équation (5.10) donne l'évolution de  $r_c$  par rapport à la dimension de l'échantillon. La courbe de régression linéaire représentée sur la Figure 5-1 donne  $A = 46,083$  et  $B = 629,955$ .

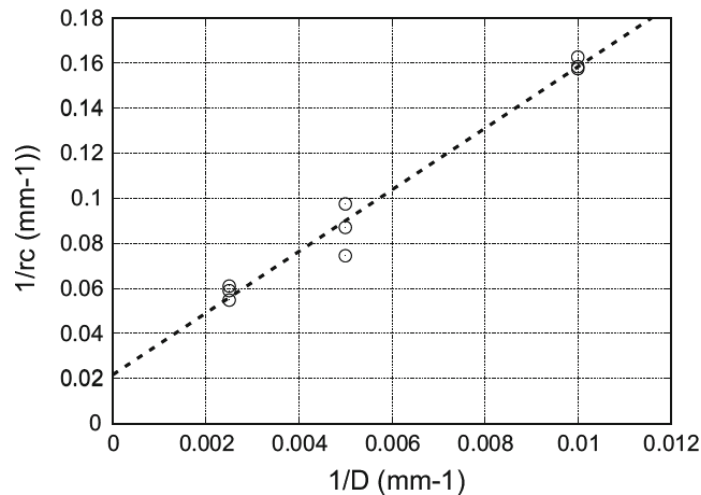


Figure 5-1: Régression linéaire.

## Annexe 3

### Effet d'échelle sur les courbes de résistance

Le deuxième paramètre à calculer en vue de tracer les courbes de résistance est le taux de restitution d'énergie.

L'estimation de la résistance à la propagation de la fissure se fait en mesurant l'énergie de rupture locale c.-à-d. l'énergie dissipée par unité de surface (le produit de l'aire sous la courbe contrainte- déformation dans le repère principal par la largeur de l'élément fini  $h$ ) correspondante à l'avancée graduelle de la zone fissurée au fur et à mesure que l'endommagement se développe en pointe de l'entaille jusqu'à la rupture de la poutre.

L'énergie de rupture est calculée pour le premier élément fini fissuré situé à la pointe de l'entaille pour chaque pas de calcul par l'expression suivante

$$G_f = h * \left( \int_0^{\infty} \sigma_1 d\varepsilon_1 + \int_0^{\infty} \sigma_2 d\varepsilon_2 \right) \quad (5.12)$$

Avec  $h$  la taille de l'élément fini et  $\sigma_1, \sigma_2$  sont les contraintes principales.

Les Figure 5-2 et Figure 5-3 montrent l'évolution numérique des courbes de résistance exprimée par l'énergie de dissipation  $G_f$  en fonction de l'extension de fissure équivalente  $\Delta a$  pour les séries de poutres entaillées HN et FN respectivement.

Expérimentalement, plusieurs études en se basant sur différentes approches ont montré que le processus de rupture dans le béton passe par trois étapes distinguées qui sont: l'initiation de la fissure, la propagation stable de la fissure et la rupture instable.

Les courbes-R estimées numériquement montrent clairement une première partie ascendante relative au développement du processus de rupture dans laquelle  $G_f$  augmente jusqu'à atteindre une valeur plateau. La seconde phase correspond à une propagation stationnaire de la fissure où  $G_f$  atteint sa valeur critique et est égale à l'énergie de rupture du modèle.

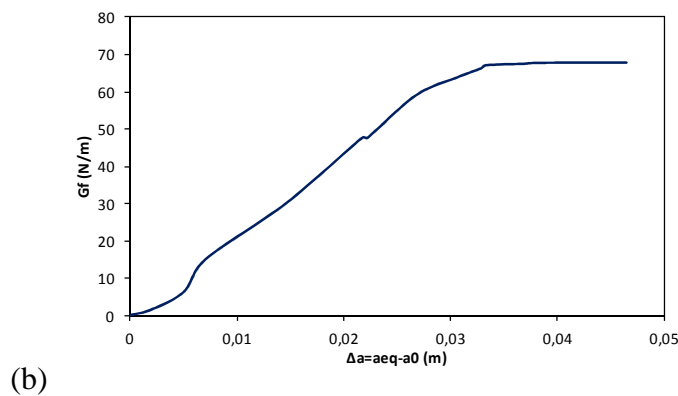
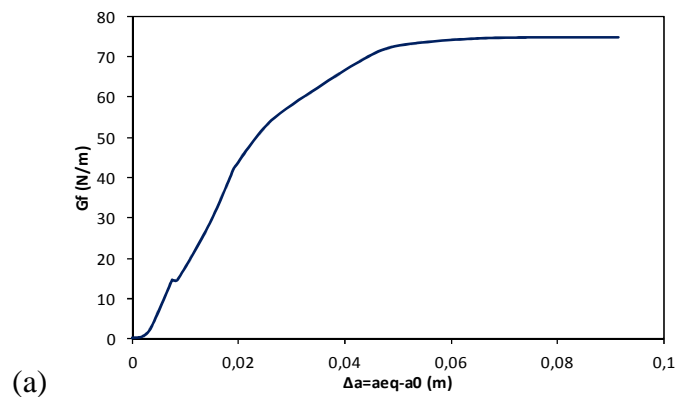
Cependant, pour les plus petites dimensions de poutres (50 mm FN et HN), on observe très peu de propagations de fissures similaires en termes de dissipation d'énergie comparé aux autres tailles de poutres, ceci peut s'expliquer par un confinement non négligeable de la FPZ. Cette constatation a été théoriquement soulignée dans (Morel & Dourado 2011).

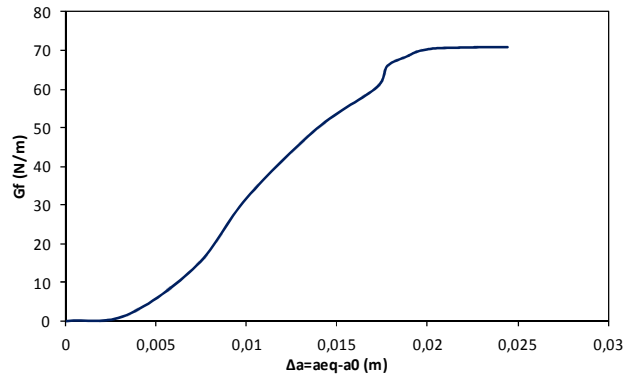
Tableau 5-1: Valeur de  $\Delta a_c$  et  $G_{Rc}$  à partir des courbes-R.

Poutres-FN (mm)	$G_{Rc} (N/m)$	$\Delta a_c (mm)$	$l_{FPZ}$ selon l'évolution $\sigma_{\theta\theta}$
50	68	17	33
100	68,45	28	56
200	72	50	100
400	74	67	134

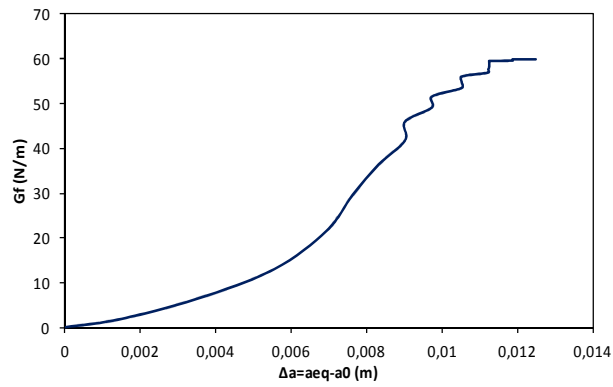
Tableau 5-2: Valeur de  $\Delta a_c$  et  $G_{Rc}$  à partir des courbes-R.

Poutres-HN (mm)	$G_{Rc} (N/m)$	$\Delta a_c (mm)$	$l_{FPZ}$ selon l'évolution $\sigma_{\theta\theta}$
50	57	11	23
100	68	19	38
200	64	31	62
400	72	49	97



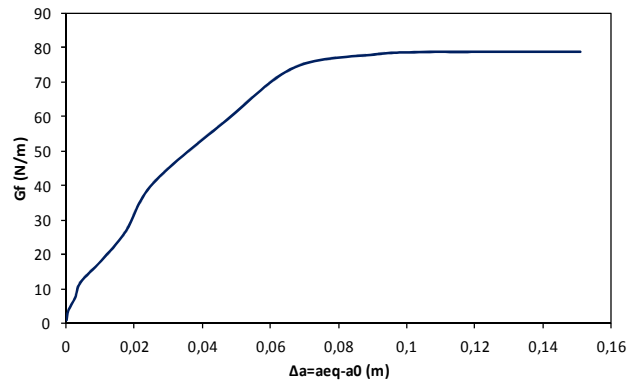


(c)

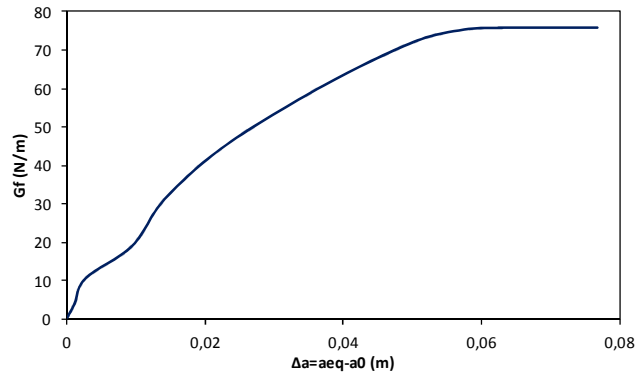


(d)

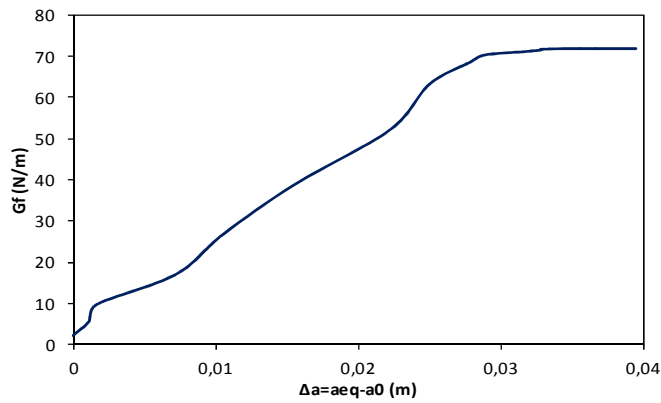
Figure 5-2: Courbes-R numérique pour la série de poutres entaillées: (a) HN400, (b) HN200, (c) HN100 et (d) HN50 mm



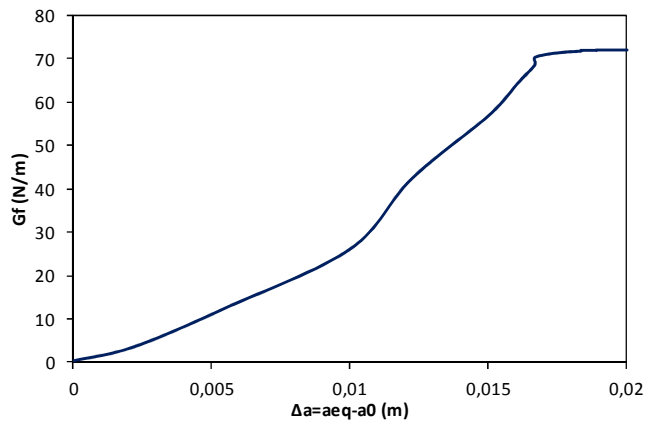
(a)



(b)



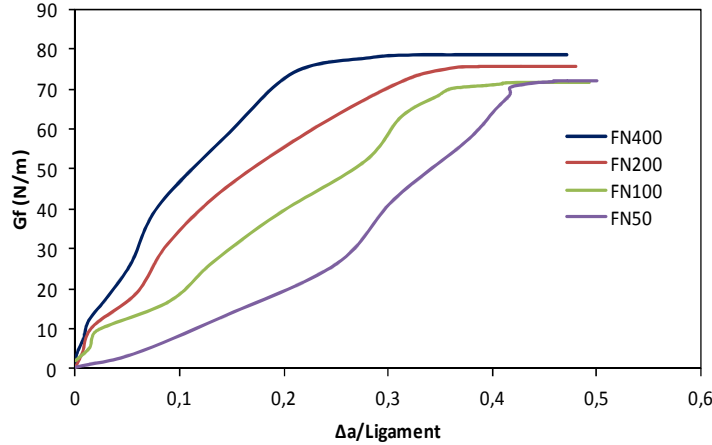
(c)



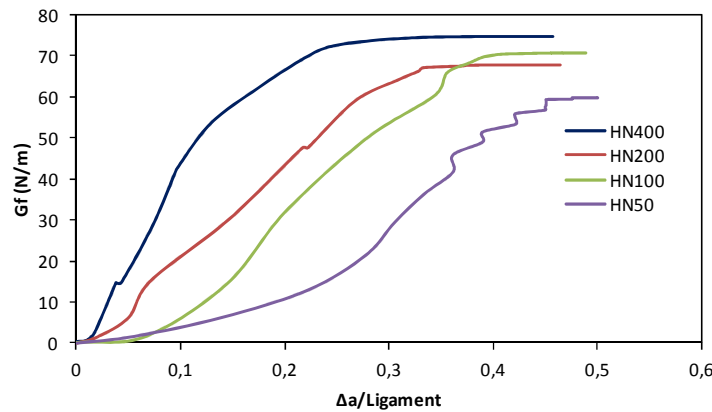
(d)

Figure 5-3: Courbes-R numérique pour la série de poutres entaillées: (a) FN400, (b) FN200, (c) FN100 et (d) FN50 mm

La Figure 5-4 (a) et (b) montrent le résultat des courbes-R (l'énergie de dissipation en fonction du rapport adimensionnel (extension de fissure rapportée à la longueur du ligament)) obtenues numériquement pour le cas des poutres entaillées en flexion trois points.



(a)



(b)

Figure 5-4: Effet d'échelle sur les courbes-R (a) poutres FN, (b) poutres HN.

On constate que la partie ascendante des courbes R varie avec la variation de la hauteur des poutres alors que dans une seconde partie les courbes R s'approchent d'une même valeur plateau notée  $G_{Rc}$  pour lesquelles la résistance devient constante, reflétant la propagation de la fissure principale avec la longueur critique de la FPZ dans toutes les poutres.

Pour la même géométrie et différentes tailles, les plus grandes poutres ont la courbe R la plus élevée, cette variation peut être due à la différence de la distribution FPZ pendant la propagation des fissures dans la longueur du ligament. On constate que la courbe R numérique est affectée par la variation de la FPZ et de la longueur du ligament.

L'étude numérique à l'échelle mésoscopique révèle un effet de taille sur la partie ascendante de la courbe de résistance qui est liée au développement de la zone de processus de rupture.

Cependant, dans la seconde phase des courbes-R où la valeur de l'énergie plateau est égale à l'énergie de rupture est indépendante de la taille de poutre.

Afin de proposer une brève justification du problème du confinement de la FPZ on propose de tracer les isovalues du champ des contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  à la fin de chargement pour deux tailles de poutres 50 et 100 mm.

La Figure 5-5 et la Figure 5-6 montre que la pointe de la fissure dans le cas d'un ligament plus court peut se trouver très vite limitée par un champ de contrainte de compression ce qui explique l'absence de la partie plateau de la courbe-R de la plus petit taille de poutre (Figure 5-2 (d) et Figure 5-3(d)).

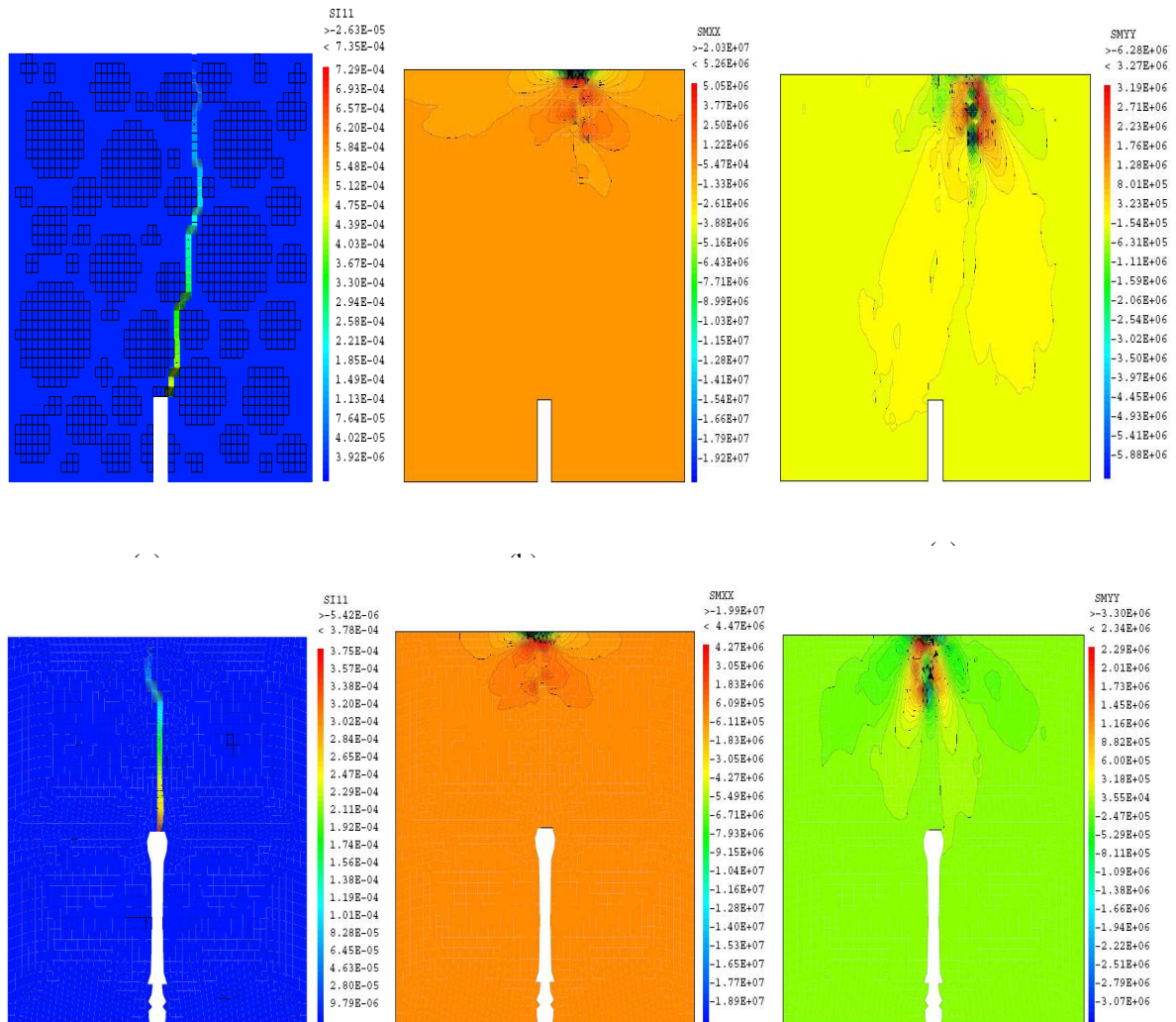


Figure 5-5: Isovalues des champs de contrainte à la fin de chargement pour la poutre entaillée FN 50mm et HN 50mm.

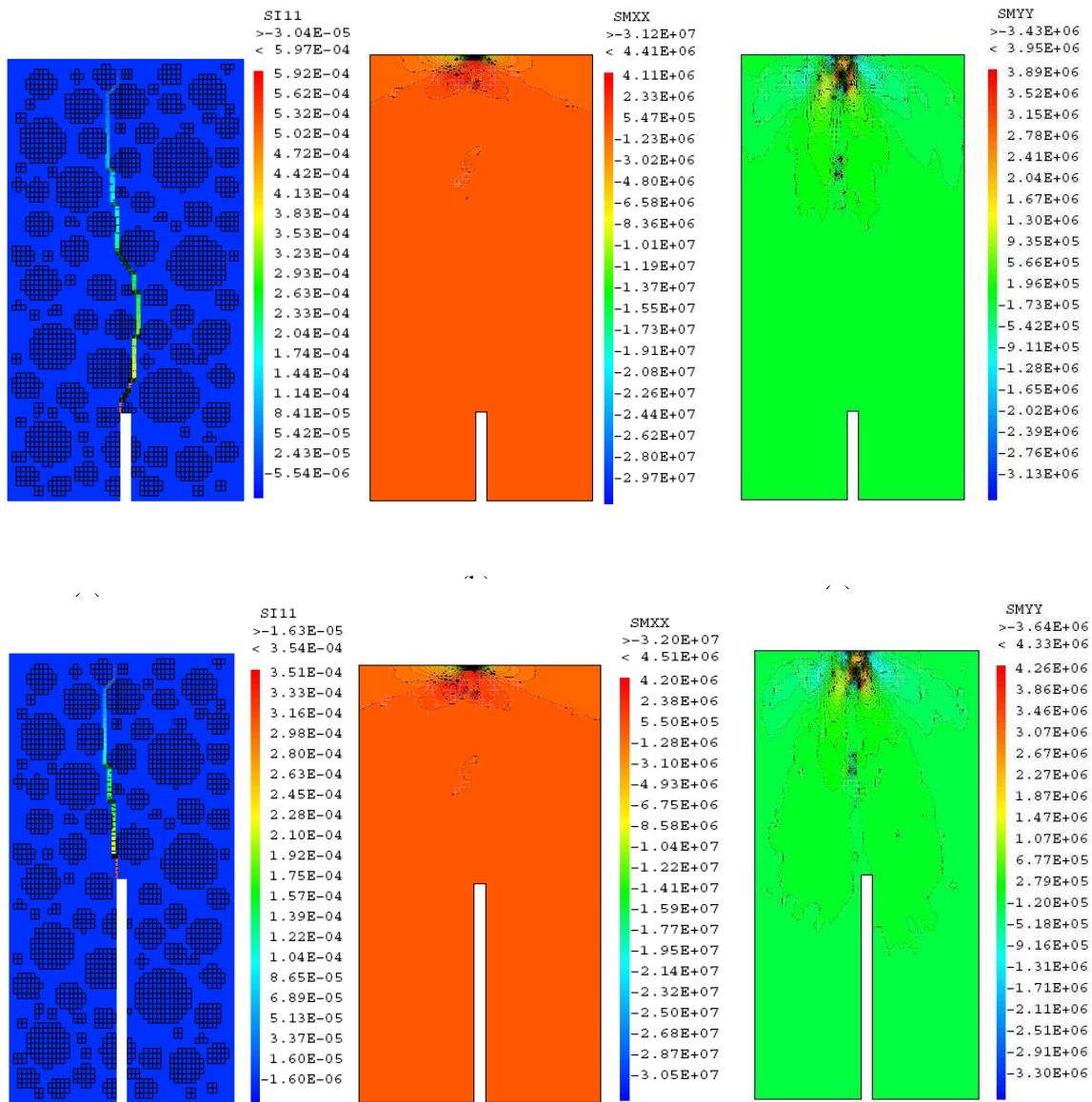


Figure 5-6: Isovaleurs des champs de contrainte à la fin de chargement pour la poutre entaillée FN 100mm et HN 100mm.



# Bibliographie

- Alam, S.Y., 2011. *Experimental study and numerical analysis of crack opening in concrete*. Thèse de Doctorat. Ecole Centrale de Nantes.
- Alam, S.Y. et al., 2015. Use of the digital image correlation and acoustic emission technique to study the effect of structural size on cracking of reinforced concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 143, pp.17–31.
- Alam, S.Y., Loukili, A. & Grondin, F., 2012. Monitoring size effect on crack opening in concrete by digital image correlation. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 16(7), pp.818–836.
- Alam, S.Y., Saliba, J. & Loukili, A., 2014. Fracture examination in concrete through combined digital image correlation and acoustic emission techniques. *Construction and Building Materials*, 69, pp.232–242.
- Amani, J. et al., 2016. A non-ordinary state-based peridynamics formulation for thermoplastic fracture. *International Journal of Impact Engineering*, 87, pp.83–94.
- Ayatollahi, M.R. & Akbardoost, J., 2012. Size effects on fracture toughness of quasi-brittle materials – A new approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 92, pp.89–100.
- Ayatollahi, M.R. & Nejati, M., 2011. An over-deterministic method for calculation of coefficients of crack tip asymptotic field from finite element analysis. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 34, pp.159–176.
- Aydin, A.C., Arslan, A. & Gul, R., 2007. Mesoscale simulation of cement based materials ' time-dependent behavior. *Computational Materials Science*, 41, pp.20–26.
- Azevedo, N.M., Lemos, J.V. & de Almeida, J.R., 2008. Influence of aggregate deformation and contact behaviour on discrete particle modelling of fracture of concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(6), pp.1569–1586.
- Barenblatt, 1962. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advan. Appl. Mech*, (7), pp.55–129.
- Bazant, Z.P., 1976. Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineers*, 102(2), pp.331–344.
- Bazant, Z.P., 2002. Concrete fracture models : testing and practice. *Engineering Fracture Mechanics*, 69, pp.165–205.
- Bazant, Z.P., 1993. Scaling Laws in Mechanics of Failure. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(9), pp.1828–1844.
- Bazant, Z.P., 1997. Scaling of quasibrittle fracture: asymptotic analysis. *International Journal of Fracture*, 83(1), pp.19–40.

- Bažant, Z.P., 2005. *Scaling of structural strength*, London: Hermes-Penton (Kogan Publishing).
- Bažant, Z.P., 1984. Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(4), pp.518–535.
- Bažant, Z.P., Gettu, R. & Kazemi, M.T., 1991. Identification of Nonlinear Fracture Properties From Size Effect Tests and Structural Analysis Based on Geometry-dependent R - curves. *Int J Rock Mech Min Sci*, 28(1), pp.43–51.
- Bažant, Z.P. & Jirásek, M., 2002. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(11), pp.1119–1149.
- Bazant, Z.P. & Kazemi, M.T., 1990. Determination of fracture energy , process zone length and brittleness number from size effect , with application to rock and concrete. *International Journal of Fracture*, 44(2), pp.111–131.
- Bažant, Z.P. & Oh, B.H., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16, pp.155–177.
- Bazant, Z.P. & Pfeiffer, P.A., 1987. Determination of fracture energy from size effect and brittleness number. *ACI Materials Journal*, 84(6), pp.463–480.
- Bažant, Z.P. & Planas, J., 1997. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials.*, New Directions in Civil Engineering. Taylor & Francis.
- Bažant, Z.P. & Yavari, A., 2005. Is the cause of size effect on structural strength fractal or energetic–statistical? *Engineering Fracture Mechanics*, 72(1), pp.1–31.
- Bažant, Z.P. & Yu, Q., 2009. Universal Size Effect Law and Effect of Crack Depth on Quasi-Brittle Structure Strength. *Journal of Engineering Mechanics*, 135(2), pp.78–84.
- Benkemoun, N. et al., 2016. Meso-scale investigation of failure in the tensile splitting test : Size effect and fracture energy analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 168, pp.242–259.
- La Borderie, C., Lawrence, C. & Menou, A., 2007. Approche mésoscopique du comportement du béton. *Revue Européenne de Génie Civil*, 11(4), pp.407–421.
- Caballero, A., Carol, I. & Lopez, C.M., 2006. A meso-level approach to the 3D numerical analysis of cracking and fracture of concrete materials. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures*, 29(12), pp.979–991.
- Carpinteri, A. et al., 2007. Comments on “Is the cause of size effect on structural strength fractal or energetic-statistical?” by Bažant & Yavari [Engng Fract Mech 2005;72:1–31]. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(17), pp.2892–2896.
- Carpinteri, A., 1989. Decrease of apparent tensile and bending strength with specimen size: Two different explanations based on fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 25(4), pp.407–429.
- Carpinteri, A., Chiaia, B. & Ferro, G., 1994. Multifractal scaling law for the nominal strength variation of concrete structures. In H. Mihashi, H. Okamura, & Z. P. Bazant, eds. *Size*

- Effect in Concrete Structures*. London: E & FN Spon, p. 193–206.
- Cedolin, L., Poli, S.D. & Iori, I., 1983. Experimental determination of the fracture process zone in concrete. *Cement and Concrete research*, 13(4), pp.557–567.
- Chidgzev, S.R. & Deeks, A.J., 2005. Determination of coefficients of crack tip asymptotic fields using the scaled boundary finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 72(13), pp.2019–2036.
- Cusatis, G. & Schaufert, E.A., 2009. Cohesive crack analysis of size effect. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(14), pp.2163–2173.
- Du, X., Jin, L. & Ma, G., 2014. Numerical simulation of dynamic tensile-failure of concrete at meso-scale. *International Journal of Impact Engineering*, 66, pp.5–17.
- Dupray, F. et al., 2009. A mesoscopic model for the behaviour of concrete under high confinement. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 33(11), pp.1407–1423.
- Erdogan, F., 1963. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J Basic Engng, Trans ASME*, 85, pp.519–525.
- Erzar, B. & Forquin, P., 2011. Experiments and mesoscopic modelling of dynamic testing of concrete. *Mechanics of Materials*, 43(9), pp.505–527.
- Fan, H., Bergel, G.L. & Li, S., 2016. A hybrid peridynamics–SPH simulation of soil fragmentation by blast loads of buried explosive. *International Journal of Impact Engineering*, 87, pp.14–27.
- Farnam, Y. et al., 2015. Acoustic emission waveform characterization of crack origin and mode in fractured and ASR damaged concrete. *Cement and Concrete Composites*, 60, pp.135–145.
- Ferreira, M.D.C., Venturini, W.S. & Hild, F., 2011. On the analysis of notched concrete beams: From measurement with digital image correlation to identification with boundary element method of a cohesive model. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(1), pp.71–84.
- Fichant, S., 1996. *Endommagement et anisotropie induite du béton de structures: modélisations approchées*. Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachant, France.
- Frémond, M. & Nedjar, B., 1995. Damage in concrete: the unilateral phenomenon. *Nuclear Engineering and Design*, 156(1–2), pp.323–335.
- Gangnant, A., 2016. *Étude de la rupture quasi-fragile d'un béton à l'échelle mésoscopique : aspects expérimentaux et modélisation*. Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux, France.
- Grassl, P. et al., 2012. Meso-scale modelling of the size effect on the fracture process zone of concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 49(13), pp.1818–1827.
- Grassl, P. & Jirásek, M., 2010. Meso-scale approach to modelling the fracture process zone of concrete subjected to uniaxial tension. *International Journal of Solids and Structures*,

47(7–8), pp.957–968.

- Grégoire, D. et al., 2015. Mesoscale analysis of failure in quasi-brittle materials : comparison between lattice model and acoustic emission data. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, 39, pp.1639–1664.
- Grégoire, D., Rojas-Solano, L.B. & Pijaudier-cabot, G., 2013. Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, 37, pp.1434–1452.
- Griffith, A.A., 1921. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 221(582–593).
- Grondin, F. & Matallah, M., 2014. How to consider the Interfacial Transition Zones in the finite element modelling of concrete? *Cement Concrete Res*, 58, pp.67 –75.
- Guinea, G. V et al., 1998. Stress intensity factor , compliance and CMOD for a general three-point-bend beam. *International Journal of Fracture*, 89, pp.103–116.
- Guo, Z.K., Kobayashi, A.S. & Hawkins, N.M., 1993. Further studies on fracture process zone for mode I concrete fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 46(6), pp.1041–1049.
- Hadjab, H.S., Thimus, J.-F. & Chabaat, M., 2007. The use of acoustic emission to investigate fracture process zone in notched concrete beams. *Current Science*, 93(5), pp.648–653.
- Haidar, K. et al., 2005. Correlation between the internal length, the fracture process zone and size effect in model materials. *Materials and Structures*, 38(2), pp.201–210.
- Hillerborg, A., Modéer, M. & Petersson, P.E., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6), pp.773–782.
- Horii, H., Hasegawa, A. & Nishino, F., 1989. Fracture Process and Bridging Zone Model and Influencing Factors in Fracture of Concrete. In S. P. Shah & S. E. Swartz, eds. *Fracture of Concrete and Rock*. Springer New York, pp. 205–219.
- Hu, X. & Duan, K., 2008. Size effect and quasi-brittle fracture : the role of FPZ. *International Journal of Fracture*, 154(1), pp.3–14.
- Hu, X. & Duan, K., 2005. Size Effect on Fracture of MEMS Materials. *Journal of materials science and technology*, 21(Supl.1), pp.47–50.
- Irwin, G.R., 1957. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *J. Applied Mechanics*, 24, pp.361–364.
- Jankowski, L.J. & Styś, D.J., 1990. Formation of the fracture process zone in concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 36(2), pp.245–253.
- Jirásek, M., 2011. Damage and Smearred Crack Models. In G. Hofstetter & G. Meschke, eds. *Numerical Modeling of Concrete Cracking*. CISM International Centre for Mechanical Sciences, vol 532, Springer, Vienna.
- Jirásek, M. & Bauer, M., 2012. Numerical aspects of the crack band approach. *Computers &*

- Structures*, 110, pp.60–78.
- Karihaloo, B.L., 1995. *Fracture mechanics and structural concrete*, Longman Scientific & Technical.
- Karihaloo, B.L., 1999. Size effect in shallow and deep notched quasi-brittle structures. *International Journal of Fracture*, 95, pp.379–390.
- Karihaloo, B.L., Abdalla, H.M. & Xiao, Q.Z., 2006. Deterministic size effect in the strength of cracked concrete structures. *Cement and Concrete research*, 36(1), pp.171–188.
- Karihaloo, B.L., Abdalla, H.M. & Xiao, Q.Z., 2003. Size effect in concrete beams. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, pp.979–993.
- Karihaloo, B.L. & Xiao, Q.Z., 2001a. Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity. *Engineering Fracture Mechanics*, 68(15), pp.1609–1630.
- Karihaloo, B.L. & Xiao, Q.Z., 2001b. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a notched three-point bend beam. *International Journal of Fracture*, 112(2), pp.111–128.
- Khoei, A.R., Yadegari, S. & Biabanaki, S.O.R., 2010. 3D finite element modeling of shear band localization via the micro-polar Cosserat continuum theory. *Computational Materials Science*, 49(4), pp.720–733.
- Kim, J.K. et al., 1999. Size Effect on Compressive Strength of Plain and Spirally Reinforced Concrete Cylinders. *ACI Structural Journal*, 96(1), pp.88–94.
- Kumar, S. & Choubey, R.K., 2015. Further observations on the three-parameter R-curve of concrete-like quasi-brittle materials. *Construction and Building Materials*, 93, pp.857–868.
- Landis, E.N., 1999. Micro–macro fracture relationships and acoustic emissions in concrete. *Construction and Building Materials*, 13(1), pp.65–72.
- Leicester, R., 1969. The size effect of notches. In *Proceedings of the second Australasian conference on mechanics of materials and structures*. Melbourne, pp. 1–12.
- Lens, L.N., Bittencourt, E. & d’Avila, V.M.R., 2009. Constitutive models for cohesive zones in mixed-mode fracture of plain concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(14), pp.2281–2297.
- Madenci, E. & Oterkus, S., 2016. Ordinary state-based peridynamics for plastic deformation according to von Mises yield criteria with isotropic hardening. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 86, pp.192–219.
- Man, H.-K. & van Mier, J.G.M., 2008. Size effect on strength and fracture energy for numerical concrete with realistic aggregate shapes. *International Journal of Fracture*, 154(1–2), pp.61–72.
- Mandelbrot, B.B., 1982. *The fractal geometry of nature*, New York: WH Freeman.
- Matallah, M. et al., 2013. Size-independent fracture energy of concrete at very early ages by inverse analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 109, pp.1–16.

- Matallah, M. & La Borderie, C., 2016. 3D Numerical Modeling of the Crack-Permeability Interaction in Fractured Concrete. In *Proceedings of the 9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*. IA-FraMCoS.
- Matallah, M., La Borderie, C. & Maurel, O., 2010. A practical method to estimate crack openings in concrete structures. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, 34, pp.1615–1633.
- Mazars, J., 1984. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de Doctorat, Paris VI, France.
- Miannay, D.P., 1995. *Mécanique de la rupture*, Editions de Physique.
- Van Mier, J.G.M., 2012. *Concrete fracture : a multiscale approach*, CRC Press.
- Mindess, S., 1984. The effect of specimen size on the fracture energy of concrete. *Cement and Concrete Research*, 14(3), pp.431–436.
- Morel, S., 2008. Size effect in quasibrittle fracture: derivation of the energetic Size Effect Law from equivalent LEFM and asymptotic analysis. *International Journal of Fracture*, 154(1), pp.15–26.
- Morel, S. & Dourado, N., 2011. Size effect in quasibrittle failure : Analytical model and numerical simulations using cohesive zone model. *International Journal of Solids and Structures*, 48(10), pp.1403–1412.
- Morel, S., Dourado, N. & Valentin, G., 2005. Wood : a quasibrittle material R-curve behavior and peak load evaluation. *International Journal of Fracture*, 131(4), pp.385–400.
- Muralidhara, S. et al., 2010. Fracture process zone size and true fracture energy of concrete using acoustic emission. *Construction and Building Materials*, 24(4), pp.479–486.
- Nallathambi, P., Karihaloo, B.L. & Heaton, B.S., 1984. Effect of specimen and crack sizes, water/cement ratio and coarse aggregate texture upon fracture toughness of concrete. *Magazine of Concrete Research*, 36(129), pp.227–236.
- Needelman, A. & Tvergaard, N., 1984. *Finite Element Analysis of Localisation in Plasticity* Finite Ele. J. Oden and G. Carey, ed., Prentice Hall Inc.
- Nguyen, D. et al., 2010. A mesoscopic model for a better understand understanding of the transition from diffuse damage to localized damage. *Eur J Environ Civ En*, 14, pp.751–775.
- Otsuka, K. & Date, H., 2000. Fracture process zone in concrete tension specimen. *Engineering Fracture Mechanics*, 65, pp.111–131.
- Owen, D.R.J. & Fawkers, A.J., 1983. *Engineering fracture mechanics: Numerical methods and applications* Ltd Press Pineridge, ed., Swansea, U.K.
- Pedersen, R.R., Simone, A. & Sluys, L.J., 2013. Mesoscopic modeling and simulation of the dynamic tensile behavior of concrete. *Cement and Concrete Research*, 50, pp.74–87.
- Peerlings, R. et al., 1996. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, pp.3391–3403.

- Petersson, P.-E., 1981. *Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials*. Division of Building Materials, Lund Institute of Technology.
- Petersson, P.E., 1980. Fracture energy of concrete: practical performance and experimental results. *Cem Concr Res*, 10(1), pp.91–101.
- Pijaudier-Cabot, G. & Bažant, Z.P., 1987. Nonlocal Damage Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10), pp.1512–1533.
- Planas, J., Bažant, Z.P. & Jirásek, M., 2001. Reinterpretation of Karihaloo's size effect analysis for notched quasibrittle structures. *International Journal of Fracture*, 111(1), pp.17–28.
- Qin, C. & Zhang, C., 2011. Numerical study of dynamic behavior of concrete by meso-scale particle element modeling. *International Journal of Impact Engineering*, 38(12), pp.1011–1021.
- Reolfstra, P.E., Sadouki, H. & Wittmann, F.H., 1985. Le béton numérique. *Matériaux et Constructions*, 18, pp.327–335.
- Rojas Solano, L.B., 2012. *Endommagement non-local, interactions et effets d'échelle*. Thèse de Doctorat. Université de Pau. France.
- Rossi, P. et al., 1994. Scale effect on concrete in tension. *Materials and Structures*, 27(8), pp.437–444.
- Saliba, J. et al., 2016. Experimental and numerical analysis of crack evolution in concrete through acoustic emission technique and mesoscale modelling. *Engineering Fracture Mechanics*, 167, pp.123–137.
- Saliba, J. et al., 2012. Experimental study of creep-damage coupling in concrete by acoustic emission technique. *Materials and Structures*, 45(9), pp.1389–1401.
- Saliba, J. et al., 2012. Relevance of a mesoscopic modeling for the coupling between creep and damage in concrete. *Mech Time-Depend Mater*, 17(3), pp.481–499.
- Saouma, V.E., Natekar, D. & Hansen, E., 2003. Cohesive stresses and size effects in elasto-plastic and quasi-brittle materials. *International Journal of Fracture*, 119(3), pp.287–298.
- Šestáková, L., 2012. How to Enhance Efficiency and Accuracy of the Over-Deterministic Method Used for Determination of the Coefficients of the Higher-Order Terms in Williams Expansion. *Applied Mechanics and Materials*, 245, pp.120–125.
- Shah, S.P., 1990. Experimental methods for determining fracture process zone and fracture parameters. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(1-3), pp.3–14.
- Silling, S.A., 2000. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(1), pp.175–209.
- Su, R.K.L. & Fok, S.L., 2007. Determination of coefficients of the crack tip asymptotic field by fractal hybrid finite elements. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(10), pp.1649–1664.

- Tada, H., Paris, P.C. & Irwing, G.R., 2000. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Hellertown, Pennsylvania: Del Research Corporation.
- Timoshenko, S. & Goodier, J.N., 1951. *Theory of elasticity* McGraw-Hill, ed., New York.
- Vesely, V. et al., 2013. Accurate Description of Near-Crack-Tip Fields for the Estimation of Inelastic Zone Extent in Quasi-Brittle Materials. *Key Engineering Materials*, 525–526, pp.529–532.
- Wang, Z.M., Kwan, A.K.H. & Chan, H.C., 1999. Mesoscopic study of concrete I: generation of random aggregate structure and finite element mesh. *Computers & Structures*, 70(5), pp.533–544.
- Weibull, W., 1939. The phenomenon of rupture in solids. In Handlingar, ed. *Proceedings of the Royal Swedish Institute of Engineering Research, IngenioersVetenskaps Akad.* Stockholm, Vol 153, pp. 1–55.
- Williams, M.L., 1957. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Applied Mechanics*, 24, pp.109–114.
- Williams, M.L., 1952. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Applied Mechanics*, 19, pp.526–528.
- Wriggers, P. & Moftah, S.O., 2006. Mesoscale models for concrete: Homogenisation and damage behaviour. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(7), pp.623–636.
- Wu, Z. et al., 2011. An experimental investigation on the FPZ properties in concrete using digital image correlation technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(17), pp.2978–2990.
- Zohdi, T.I. & Wriggers, P., 2001. Computational micro-macro material testing. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 8(2), pp.131–228.



## Résumé

Le béton reste le matériau de construction le plus utilisé dans le monde. La dégradation de ce matériau quasi-fragile est accompagnée de l'apparition des microfissures qui interagissent entre elles dans une zone souvent non négligeable par rapport à la taille de la structure. Cette zone connue sous l'acronyme anglais *Fracture Process Zone* est la cause principale des effets d'échelles observés expérimentalement.

Cette thèse est une contribution numérique à la compréhension approfondie du processus de fissuration accompagnant la rupture du béton. Une approche de modélisation à l'échelle mésoscopique combinée à un modèle d'endommagement régularisé est utilisée pour étudier l'effet d'échelle sur le comportement global et local du béton. Une attention particulière est accordée à l'évolution de la FPZ. La technique de régularisation énergétique est employée pour pallier au problème de dépendance au maillage due à la localisation des déformations. Les limites d'application et les sources d'erreurs liées à l'utilisation de cette méthode dans le cas d'un calcul de structure générant des états de contraintes bidimensionnels et tridimensionnels sont discutées. Des recommandations d'utilisation de cette technique sont fournies.

L'évolution de la FPZ lors du processus de rupture est investie en s'inspirant des approches de la mécanique de la rupture avec enrichissement. Les résultats trouvés permettent de comprendre mieux le rôle de la FPZ dans le phénomène d'effet d'échelle.

---

## Abstract

Concrete remains the most widely used building-material in the world. The degradation of this quasi-brittle material is accompanied by the development of micro-cracks. The interaction of these micro-cracks in the Fracture Process Zone is one of the main causes of the scale effects observed experimentally.

This work is a numerical contribution to the study of the cracking process during the concrete failure. The numerical modeling strategy is based on the use of a non linear damage approach at the mesoscale. The local and the global cracking behaviors are both studied. The FPZ variation is deeply investigated.

A mesoscopic scale modeling approach combined with a regularized isotropic damage model is used to investigate the effect of scale on the overall and local behavior of concrete, on variation of FPZ length and on the resistance curve.

The energetic-based-regularization technique is used to overcome the problem of mesh dependency due to the strain localization. The sources of errors related to the use of this practical technique in the case of structural computations (2D/3D) are discussed and new recommendations are addressed.

The evolution of the FPZ during the fracture process is investigated using a fracture-mechanics-based approach with appropriate enrichments. The role of the FPZ in the scale effects phenomenon is further highlighted.