REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: *Analyse Mathématiques*

Par :

Mr KHEDIM Tewfik

Sur le thème

Etude de certaines classes d'équations différentielles avec conditions aux limites nonlocales.

Soutenue publiquement le 02/07/2018 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr YEBDRI Mustapha	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr DERHAB Mohammed	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr MESSIRDI Bachir	M- C- B	Université de Tlemcen	Co-Directeur de thèse
Mr BENCHOHRA Mouffak	Professeur	Université de S-B-abbès	Examinateur
Mme HADJ-SLIMANE Djamila	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur
Mr OUAHAB Abdelghani	Professeur	Université de S-B-abbès	Examinateur

Laboratoire Systèmes Dynamiques et Applications (SDA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mon défunt père et ma défunte mère.

Ma femme et mes deux enfants Fatiha et Mohammed.

Ma grande famille.

Et à tous ceux qui m'ont aidé et encouragé pour faire ce travail, en particulier à mes anciens élèves Bachir et Mohammed .

Remerciements

Je tiens, à exprimer ma reconnaissance et ma profonde gratitude à Monsieur DERHAB MOHAMMED, Professeur au département de Mathématiques à la faculté des sciences de Tlemcen, pour m'avoir proposé un sujet de recherche intéressant, pour ses conseils et ses recommandations qui m'ont été bénéfiques.

Je tiens aussi, à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Messirdi Bachir, Maitre de conférence à la faculté des sciences de Tlemcen, qui m'a poussé à faire ce travail.

Je remercie Monsieur Yebdri MUSTAPHA , Professeur au département de Mathématiques à la faculté des sciences de Tlemcen, de bien vouloir accepter de présider le jury d' examen de notre travail.

Que Monsieur Mouffak Benchohra, Professeur à l'université de Sidi Bel-Abbès pour l'intérêt qu'il porte à notre travail et de bien vouloir le juger.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Ouahab Abdelghani, Professeur à l'Université de Sidi Bel-Abbès pour avoir accepté de juger cette thèse en qualité d'examinateur

Mes remerciements vont à Mme Hadj-Slimane Djamila, Professeur à l'université de Tlemcen pour l'intérêt qu'elle porte à notre travail et de bien vouloir le juger.

Un énorme merci à tous les enseignants, les collègues de l'université de Tlemcen.

حفظكم الله جميعا ووفي لكم ما فيه الخير في الدنيا وفي الآخرة وجعله في ميزان الحسنات

Table des Matières

Introduction

L'objectif de ce travail est d'étudier l'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles avec des conditions aux limites nonlocales.

Les équations différentielles avec conditions initiales non locales ou conditions aux limites non locales interviennent dans l'ingénierie statique (voir [44]), l'hydrodynamique (voir [62]), la détermination des orbites (voir [4, Chapitre 6] et [5]), la pharmacocinétique et les réseaux de neurones (voir [43, Chapitre 10]), la modélisation de la qualité des flux (voir [64]) et la dynamique des populations (voir [13] et [16]).

Ce travail est constitué de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'existence des solutions pour une classe d'équations différentielles d'ordre 1 avec des conditions initiales nonlocales. Plus précisément on étudie le problème initial suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ t \in J = [0, T], \\ x(0) = \int_0^T g(s)x(s)ds, \end{cases}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et $T > 0$.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [22].

Le seconde chapitre est une généralisation du premier et il est consacré à l'étude de l'existence des solutions pour une classe de systèmes d'équations différentielles d'ordre 1 avec des conditions initiales nonlocales. Plus précisement, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u,v), \ t \in J, \\ v'(t) = g(t,u,v), \ t \in J, \\ u(0) = \int_0^T g_1(s)u(s)ds, \\ v(0) = \int\limits_0^T g_2(s)\, v(s)\, ds, \end{cases}$$

où $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, f est croissante en v, g est décroissante en u, $g_i : J \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ sont des fonctions continues qui changent de signe dans $J = [0, T]$ avec $T > 0$.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [23].

Le troisième chapitre est consacré à l'existence des solutions pour le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x,u), \ x \in (0,1), \\ u(0) - a_0 u'(0) = \int_0^1 h_1(s)\, u(s)\, ds, \\ u(1) + a_1 u'(1) = \int_0^1 h_2(s)\, u(s)\, ds, \end{cases}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2$ sont des fonctions continues et a_0, a_1 sont deux nombres réels positifs.

Le dernier chapitre est une généralisation du troisième chapitre et il est consacré à l'étude de l'existence d'un couple de quasi-solutions pour le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x,u,v), \ x \in (0,1), \\ -v''(x) = g(x,u,v), \ x \in (0,1), \\ u(0) - a_0 u'(0) = \int_0^1 h_1(s)\, u(s)\, ds, \\ u(1) + a_1 u'(1) = \int_0^1 h_2(s)\, u(s)\, ds, \\ v(0) - a_2 v'(0) = \int_0^1 h_3(s)\, v(s)\, ds, \\ v(1) + a_3 v'(1) = \int_0^1 h_4(s)\, v(s)\, ds, \end{cases}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, f est croissante en v, g est décroissante en u, $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, ..., 4$ sont des fonctions continues qui changent de signe dans $[0,1]$ et a_i sont des nombres réels positifs pour $i = 0, ..., 4$.

Chapitre 1

Résultats d'existence des solutions d'équations différentielles du premier ordre avec des conditions initiales nonlocales à résonance.

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'existence des solutions pour une classe d'équations différentielles de premier ordre sous des conditions initiales nonlocales. Considérons le problème initial suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = f\ (t, x(t)),\ t \in J = [0, T], \\ x(0) = \int_0^T g(s)x(s)ds, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et $T > 0$.

Si $\int_0^T g(s)ds \neq 1$, le problème (1.1) est dit non-résonnant, alors le problème suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = 0,\ t \in J = [0, T], \\ x(0) = \int_0^T g(s)x(s)ds, \end{cases} \tag{1.2}$$

admet qu'une seule solution $x(t) = 0$, pour tout $t \in J$.

Dans ce chapitre, nous étudions le cas où $\int_0^T g(s)ds = 1$. on dit que le problème (1.2) est à résonance. Dans ce cas le problème (1.2) admet une infinité de solutions $x(t) = c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Les équations différentielles avec des conditions aux limites non locales à résonnance ont été étudiées par plusieurs auteurs (voir [24], [29], [32], [34], [42], [61], [70] et [76]). D'autres part, les équations différentielles du premier ordre avec des conditions initiales non locales ont été étudiées par plusieurs auteurs en utilisant la méthode des sur et sous solutions, les techniques itératives, la théorie du degré de coïncidence de Mawhin et les théorèmes du point fixe dans les cônes. (voir [3]-[12], [31]-[32], [41], [45] et [54]).

Dans [32], l'auteur a étudié le problème suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ t \in J = [0, T], \\ x(0) = \int_0^T x(s) dA(s), \end{cases} \tag{1.3}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $A : J \to \mathbb{R}$ est une fonction à variation bornée.

En utilisant la méthode des sur et sous solutions couplée avec les techniques itératives, l'auteur a montré l'existence des solutions minimales et maximales pour le problème (1.3) lorsque la mesure dA est positive et il a montré l'existence de quasi-solutions pour le problème (1.3) lorsque la mesure dA change de signe.

Le but de ce chapitre est d'améliorer les résultats obtenus dans [32]. En effet, on montre l'existence des solutions minimales et maximales pour le problème (1.1) lorsque la fonction g est positive et l'existence d'au moins une solution pour le problème (1.1) lorsque la fonction g change de signe. On note que les suites de fonctions utilisées dans la construction des solutions pour le problème (1.1) sont différentes de celles utilisées dans [32] et par conséquent certaines conditions utilisées dans [32] pour l'existence des solutions du problème (1.3) ne sont pas nécessaires.

Le plan de ce chapitre est organisé comme suit: dans la section 2, on donne quelques lemmes préliminaires. Les principaux résultats sont présentés et prouvés dans les section 3 et 4, suivit de quelques exemples dans la section 5 pour illustrer l'application de nos résultats.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [22].

1.2 Lemmes préliminaires

Dans ce paragraphe on donne quelques résultats préliminaires qui sont utiles par la suite.

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)\,,\ t \in J \\ x(0) = a_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

où $a : J \to \mathbb{R}$, $b : J \to \mathbb{R}$ sont continues et a_0 est un nombre réel.

Lemme 1 *Le problème de Cauchy (1.4) admet une unique solution donnée par*

$$x(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)\left[a_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau a(s)\,ds\right) b(\tau)\,d\tau\right],\ t \in J.$$

Lemme 2 *Soit $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ et supposons que*

$$\begin{cases} x'(t) \leq a(t)\,x(t)\,,\ t \in J \\ x(0) \leq 0, \end{cases}$$

alors $x(t) \leq 0$, pour tout $t \in J$.

Preuve: La preuve du lemme est une conséquence du lemme 1. ■

Maintenant on considère le problème suivant

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\,x(t) + b\ (t)\,,\ t \in J \\ x(0) = -\int_0^c g(s)\,x(s)\,ds + \int_c^T g(s)\,x(s)\,ds, \end{cases}$$

où $g : J \to \mathbb{R}$ est continue telle que

$$g\ (t) \leq 0,\ t \in [0, c]\ \text{ et } g\ (t) \geq 0,\ t \in [c, T]\,,$$

avec $0 < c < T$.

On a le résultat suivant

Lemme 1.1 *Soit $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ et supposons que*

$$\begin{cases} x'(t) \leq a(t)\, x(t)\,,\ t \in J \\ x(0) \leq -\int\limits_0^c g(s)\, x(s)\, ds + \int\limits_c^T g(s)\, x(s)\, ds, \end{cases} \tag{1.5}$$

et

$$-\int\limits_0^c \exp\left(\int\limits_0^s a(\tau)\, d\tau\right) g(s)\, ds + \int\limits_c^T \exp\left(\int\limits_0^s a(\tau)\, d\tau\right) g(s)\, ds < 1, \tag{1.6}$$

alors $x(t) \leq 0$, pour tout $t \in J$.

Preuve: Soit $t \in J$, on a

$$x(t) \leq \exp\left(\int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau\right) x(0). \tag{1.7}$$

Alors d'aprés la seconde inégalité dans (1.5), on a

$$x(0) \leq -x(0) \int\limits_0^c \exp\left(\int\limits_0^s a(\tau)\, d\tau\right) g(s)\, ds + x(0) \int\limits_c^T \exp\left(\int\limits_0^s a(\tau)\, d\tau\right) g(s)\, ds.$$

C'est-à-dire

$$x(0)\left(1 + \int\limits_0^c \exp\left(\int\limits_0^s a(\tau)\, d\tau\right) g\ (s)\, ds - \int\limits_c^T \exp\left(\int\limits_0^s a(\tau)\, d\tau\right) g(s)\, ds\right) \leq 0.$$

Alors d'aprés (1.6), on obtient

$$x(0) \leq 0,$$

et par conséquent d'aprés (1.7), il en résulte que

$$x(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in J.$$

■

1.3 Existence des solutions minimales et maximales pour le problème (1.4) dans le cas où g est positive.

Dans cette section on va étudier l'existence des solutions minimales et maximales pour le problème (1.4) dans le cas où g est positive.

Définition 1.1 *On dit que $\underline{u} \in C^{1}(J, \mathbb{R})$ est une sous solution de (1.1) si*

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) \leq f(t, \underline{u}(t)), \ t \in J, \\ \underline{u}(0) \leq \int_0^T g(s) \underline{u}(s) \, ds. \end{cases}$$

Définition 1.2 *on dit que $\overline{u} \in C^1(J, \mathbb{R})$ est une sur solution de (1.1) si:*

$$\begin{cases} \overline{u}'(t) \geq f(t, \overline{u}(t)), \ t \in J, \\ \overline{u}(0) \geq \int_0^T g(s) \overline{u}(s) \, ds. \end{cases}$$

Sur les fonctions f et g on ajoute les conditions suivantes:

(H1) Il existe une fonction continue $h : J \to \mathbb{R}$ telle que

$x \longmapsto f(t, x) + h(t)x$ est croissante pour $\underline{u} \leq x \leq \overline{u}$.

(H2) $\int_0^T g(s) \, ds = 1.$

Alors on a le résultat suivant:

Théorème 1.1 *Supposons que les hypothèses **(H1)** et **(H2)** sont satisfaites et soit $\underline{u}$ et $\overline{u}$ les sous et sur solutions respectivement du problème (1.1) telle que $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans J. Alors le problème (1.1) admet une solution minimale u_* et une solution maximale u^* telle que pour toute solution u du problème (1.1) avec $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ dans J, on a:*

$$\underline{u} \leq u_* \leq u \leq u^* \leq \overline{u} \text{ dans } J.$$

Preuve: La preuve est donnée en plusieurs étapes .

On pose $\underline{u}_0 = \underline{u}$, et on définit la suite $(\underline{u}_n)_{n\geq 1}$ par

$$\begin{cases} \underline{u}'_{n+1}(t) + h(t)\,\underline{u}_{n+1}(t) = f\,(t, \underline{u}_n(t)) + h(t)\,\underline{u}_n(t)\,, & t \in J, \\ \underline{u}_{n+1}(0) = \int_0^T g\,(s)\underline{u}_n(s)ds. \end{cases} \tag{1.8}$$

De même, on prend $\overline{u}_0 = \overline{u}$ et on définit la suite $(\overline{u}_n)_{n\geq 1}$ par

$$\begin{cases} \overline{u}'_{n+1}(t) + h(t)\,\overline{u}_{n+1}(t) = f\,(t, \overline{u}_n(t)) + h(t)\,\overline{u}_n(t)\,, & t \in J, \\ \overline{u}_{n+1}(0) = \int_0^T g\,(s)\overline{u}_n(s)ds. \end{cases} \tag{1.9}$$

Etape 1: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \text{ dans } J.$$

Posons

$$w_0(t) := \underline{u}_1(t) - \underline{u}_0(t)\,,\; t \in J.$$

D'aprés (1.8) et la définition 1.1, on a

$$\begin{cases} w'_0(t) + h\;(t)\,w_0(t) \geq 0,\; t \in J, \\ w_0(0) \geq 0. \end{cases}$$

Par suite d'aprés le lemme 2, on obtient

$$w_0(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in J.$$

C'est-à-dire

$$\underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \text{ dans } J. \tag{1.10}$$

D'une manière similaire, on montre que

$$\overline{u}_1 \leq \overline{u}_0 \text{ dans } J. \tag{1.11}$$

Maintenant, on pose par définition

$$p_1(t) = \underline{u}_1(t) - \overline{u}_1(t), \, t \in J.$$

D'aprés (1.8) et (1.9), on a

$$\begin{cases} p_1'(t) + h(t)\, p_1(t) \\ = f\left(t, \underline{u}_0(t)\right) + h(t)\, \underline{u}_0(t) - f\left(t, \overline{u}_0(t)\right) - h(t)\, \overline{u}_0(t), \quad t \in J, \\ p_1(0) = \int_0^T g(s) \left(\underline{u}_0(s) - \overline{u}_0(s)\right) ds, \end{cases}$$

Comme $\underline{u}_0 = \underline{u} \leq \overline{u} = \overline{u}_0$ dans J et en utilisant l'hypothèse **(H1)**, on obtient

$$\begin{cases} p_1'(t) + h(t)\, p_1(t) \leq 0, \quad t \in J, \\ p_1(0) = \int_0^T g(s) \left(\underline{u}_0(s) - \overline{u}_0(s)\right) ds \leq 0, \end{cases}$$

alors d'aprés le lemme 2, on a

$$p_1(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in J.$$

C'est-à-dire

$$\underline{u}_1 \leq \overline{u}_1 \text{ dans } J. \tag{1.12}$$

Par suite d'aprés (1.10), (1.11) et (1.12), on a

$$\underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \leq \overline{u}_1 \leq \overline{u}_0 \text{ dans } J.$$

On suppose, pour un $n \geq 1$ fixé, que

$$\underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \text{ dans } J,$$

et on montre que

$$\underline{u}_{n+1} \leq \underline{u}_{n+2} \leq \overline{u}_{n+2} \leq \overline{u}_{n+1} \text{ dans } J.$$

On pose par définition

$$w_{n+1}(t) := \underline{u}_{n+2}(t) - \underline{u}_{n+1}(t), \; t \in J.$$

D'aprés (1.8) , on a

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) + h(t)\, w_{n+1}(t) \\ = f\ (t, \underline{u}_{n+1}(t)) + h\ \ (t)\, \underline{u}_{n+1}(t) - f\ (t, \underline{u}_n(t)) - h(t)\, \underline{u}_n(t), \quad t \in J, \\ w_{n+1}(0) = \int_0^T g\ (s) \left(\underline{u}_{n+1}(s) - \underline{u}_n(s)\right) ds, \end{cases}$$

Puisque par l'hypothèse de récurrence, on a $\underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1}$ dans J et en utilisant l'hypothèse **(H1)**, on obtient

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) + h\ \ (t)\, w_{n+1}(t) \geq 0, \quad t \in J, \\ w_{n+1}(0) \geq 0. \end{cases}$$

Alors d'aprés le lemme 2, on obtient

$$w_{n+1}(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in J.$$

C'est-à-dire

$$\underline{u}_{n+1}(t) \leq \underline{u}_{n+2}(t) \ \text{ pour tout } t \in J. \tag{1.13}$$

D'une manière similaire on montre que

$$\overline{u}_{n+2}(t) \leq \overline{u}_{n+1}(t) \ \text{ dans } J, \tag{1.14}$$

et

$$\underline{u}_{n+2}(t) \leq \overline{u}_{n+2}(t) \ \text{ dans } J. \tag{1.15}$$

Alors d'aprés (1.13), (1.14) et (1.15), on a

$$\underline{u}_{n+1}(t) \leq \underline{u}_{n+2}(t) \leq \overline{u}_{n+2}(t) \leq \overline{u}_{n+1}(t) \ \text{ dans } J.$$

En conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \text{ dans } J.$$

Ce qui achève la preuve.

Etape 2: La suite $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution minimale du problème (1.1).

Par **l'étape 1**, la suite $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u_*.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underline{u}_{n+1}(t) = \int_0^T g(s)\underline{u}_n(s)ds + \int_0^t \big(f(s, \underline{u}_n(s)) + h(s)\big(\underline{u}_n(s) - \underline{u}_{n+1}(s)\big)\big)\, ds,$$

Si on fait tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$f\ (s, \underline{u}_n(s)) + h\ (s)\big(\underline{u}_n(s) - \underline{u}_{n+1}(s)\big) \rightarrow f\ (s, u_*(s)),$$

De plus, on a

$$\exists c_1 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in J,\ |g\ (s)\underline{u}_n(s)| \leq c_1,$$

et

$$\exists c_2 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in J,\ \big|f\ (s, \underline{u}_n(s)) + h(s)\big(\underline{u}_n(s) - \underline{u}_{n+1}(s)\big)\big| \leq c_2.$$

Par suite d'aprés le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$u_*(t) = \int_0^T g\ (s)\underline{u}_*(s)ds + \int_0^t f\ (s, u_*(s))ds. \tag{1.16}$$

Maintenant on va montrer que u_* est une solution de (1.1).

Premièrement, il n'est pas difficile de vérifier que

$$u_*(0) = \int_0^T g(s)\underline{u}_*(s)ds. \tag{1.17}$$

D'autre part comme f est une fonction continue et $\underline{u} \leq u_* \leq \overline{u}$, $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont continues, alors il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $s \in [0, T]$, on a

$$|f(s, u_*(s))| \leq K \tag{1.18}$$

Alors d'aprés (1.16) et (1.18), on a

$$\forall t_1 \in [0, T], \ \forall t_2 \in [0, T], \ |u_*(t_1) - u_*(t_2)| \leq K |t_1 - t_2|.$$

Ce qui implique que u_* est continue dans $[0, T]$ et par conséquent d'aprés (1.16) il résulte que u_* est dérivable dans $[0, T]$ et on a

$$u_*'(t) = f(t, u_*(t)), \text{ pour tout } t \in J. \tag{1.19}$$

Alors d'aprés (1.17) et (1.19) Il s'ensuit que u_* est une solution de (1.1).

Maintenant, on montre que si u est une autre solution de (1.1) telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$, alors $u_* \leq u$.

Puisque u est une sur solution de (1.1), alors d'aprés **l'étape 1** on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \underline{u}_n \leq u.$$

Si on fait tendre $n \to +\infty$, on obtient

$$u_* = \lim_{n \to +\infty} \underline{u}_n \leq u.$$

C'est-à-dire u_* est une solution minimale de (1.1).

La preuve de **l'étape 2** est terminée.

D'une manière similaire, on montre que $(\overline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une solution maximale u^* de (1.1).

La preuve de notre résultat est terminée. ■

Remarque 1.1 *On considère le problème*

$$\begin{cases} x\,'(t) = f\ (t, x\,(t)),\ t \in J = [0, T]\,, \\ x\ \ (0) = \int_0^T x(s)dB\,(s)\,, \end{cases} \tag{1.20}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue et* $B : J \to \mathbb{R}$ *est une fonction croissante telle que* $\int_0^T dB\,(s) = 1$.

En utilisant une preuve similaire à celle du théorème 1.1, on obtient le résultat suivant

Théorème 1.2 *Supposons que l'hypothèse **(H1)** est satisfaite et soient* $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$ *les sous et sur solutions respectivement du problème (1.20) telle que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *dans* J. *Alors le problème (1.20) admet une solution minimale* u_* *et une solution maximale* u^* *sachant que pour tout solution* u *de (1.20) avec* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *dans* J, *on a*

$$\underline{u} \leq u_* \leq u \leq u^* \leq \overline{u} \ \text{dans } J.$$

Remarque 1.2 *Les résultats du théorème 1.2 demeurent valables si* B *est une fonction à variation bornée et la mesure* dB *est positive sachant que* $\int_0^T dB\,(s) = 1$ *et par conséquent ce résultat est une généralisation du **Théorème 1** obtenu dans [32].*

1.4 Existence des solutions pour le problème (1.4) dans le cas où g change de signe.

Dans cette section on va étudier l'existence des solutions du problème (1.1) dans le cas où g change de signe.

On suppose que

(H3) $g\,(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, c]$ et $g\ (t) \geq 0$ pour tout $t \in [c, T]$ avec $0 < c < T$.

Définition 1.3 *On dit que* $(\underline{U}, \overline{U})$ *est un couple de sous et sur solution du problème (1.1) si*

i) $(\underline{U}, \overline{U}) \in (C^1\,(J, \mathbb{R}))^2$.

$$ii)\ \begin{cases} \underline{U}'(t) \leq f\ (t, \underline{U}\ (t)),\ t \in J, \\ \overline{U}'(t) \geq f\ (t, \overline{U}\ (t)),\ t \in J, \\ \underline{U}(0) \leq \int_0^c g(s)\overline{U}(s)ds + \int_c^T g(s)\underline{U}(s)ds, \\ \overline{U}(0) \geq \int_0^c g(s)\underline{U}(s)ds + \int_c^T g(s)\overline{U}(s)ds. \end{cases}$$

Définition 1.4 *Une paire de fonctions* (x_*, x^*) *est dite quasi-solution de (1.1) si*

i) $(x_*, x^*) \in (C^1(J, \mathbb{R}))^2$.

$$ii)\ \begin{cases} x_*'(t) = f\ (t, x_*\ (t)), t \in J, \\ x^{*\prime}(t) = f\ (t, x^*\ (t)), t \in J, \\ x_*(0) = \int_0^c g(s)x^*(s)ds + \int_c^T g(s)x_*(s)ds, \\ x^*(0) = \int_0^c g(s)x_*(s)ds + \int_c^T g(s)x^*(s)ds. \end{cases}$$

Dans cette section on impose la condition suivante sur la non linéarité de f

(H4) Il existe une fonction continue $\widehat{h} : J \to \mathbb{R}$ telle que $x \longmapsto f\ (t, x) + \widehat{h}(t)x$ est croissante si $\underline{U} \leq x \leq \overline{U}$.

On a le résultat suivant:

Théorème 1.3 *Soit* $(\underline{U}, \overline{U})$ *un couple de sous et sur solution du problème (1.1) telle que* $\underline{U} \leq \overline{U}$ *dans* J *et supposons que les hypothèses (H2), (H3) et (H4) sont satisfaites. Alors le problème (1.1) admet un couple de quasi solution* (x_*, x^*) *telle que*

$$\underline{U} \leq x_* \leq x^* \leq \overline{U} \ \text{dans } J.$$

Preuve: On pose $U_0 = \overline{U}$, $U_1 = \underline{U}$, et on définit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ comme suit

$$\begin{cases} U_{n+2}'(t) + h(t) U_{n+2}(t) = f(t, U_n(t)) + h(t) U_n(t), \ t \in J, \\ U_{n+2}(0) = \int_0^c g(s)U_{n+1}(s)ds + \int_c^T g(s)U_n(s)ds \end{cases}$$

En utilisant une preuve similaire de l'étape 1 du théorème 1.1, on obtient

$$\underline{U} = U_1 \leq U_3 \leq ... \leq U_{2n+1} \leq .... \leq U_{2n} \leq ... \leq U_2 \leq U_0 = \overline{U} \text{ dans } J.$$

Les inégalités ci-dessus montrent que les suites de fonctions $(U_{2n})_{n\geq 0}$ et $(U_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers x^* et x_* et en utilisant une preuve similaire à l'étape 2 du théorème 1.1, on montre que (x_*, x^*) est une paire de quasi solution du problème (1.1). ■

Comme les quasi-solutions ne sont pas des vraies solutions, il est nécessaire d'ajouter d'autre conditions sur les fonctions f et g qui assurent que $x^* = x_*$ et par conséquent le problème (1.1) admet au moins une solution.

Sur les fonctions f et g on met les hypothèses suivantes

(H5) Il existe une fonction continue $\widetilde{h} : J \to \mathbb{R}$ telle que la fonction $x \longmapsto f(t,x) + \widetilde{h}(t)x$ est décroissante si $\underline{U} \leq x \leq \overline{U}$.

(H6) $-\int\limits_0^c \exp\left(-\int\limits_0^s \widetilde{h}(\tau)d\tau\right) g(s)\,ds + \int\limits_c^T \exp\left(-\int\limits_0^s \widetilde{h}(\tau)d\tau\right) g(s)\,ds < 1.$

On a le résultat suivant:

Théorème 1.4 *Supposons que les hypothèses (Hi) (i=2,...,6) sont satisfaites et soit* $\left(\underline{U}, \overline{U}\right)$ *un couple de sous et sur solution du problème (1.1) telle que* $\underline{U} \leq \overline{U}$ *dans J. Alors le problème (1.1) admet au moins une solution.*

Preuve: D'aprés le théorème 1.3, le problème (*1.1*) admet une paire de quasi-solution (x_*, x^*) telle que

$$\underline{U} \leq x_* \leq x^* \leq \overline{U} \text{ dans } J. \tag{1.21}$$

Maintenant on pose par définition

$$z^*(t) = x^*(t) - x_*(t),\ t \in J.$$

On a

$$z^*(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in J. \tag{1.22}$$

Maintenant on va montrer que

$$z^*(t) \leq 0 \text{ pour tout } \in J.$$

On a

$$\begin{cases} z^{*\prime}(t) = f(t, u^*(t)) - f\ (t, u_*(t)),\ t \in J, \\ z^*(0) = -\int_0^c g(s) z^*(s) ds + \int_c^T g(s) z^*(s) ds. \end{cases} \tag{1.23}$$

D'aprés (1.21) et l'hypothèse **(H5)**, on a

$$\begin{aligned} & z^{*\prime}(t) + \widetilde{h}(t) z^*(t) \\ & = f(t, x^*(t)) + \widetilde{h}(t) x^*(t) - f(t, x_*(t)) - \widetilde{h}(t) x_*(t) \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$z^{*\prime}(t) + \widetilde{h}(t) z^*(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in J. \tag{1.24}$$

Alors on a

$$\begin{cases} z^{*\prime}(t) + \widetilde{h}(t) z^*(t) \leq 0,\ t \in J, \\ z^*(0) = -\int_0^c g(s) z^*(s) ds + \int_c^T g(s) z^*(s) ds. \end{cases} \tag{1.25}$$

Par suite d'aprés l'hypothèse (H6) et le Lemme 1.1, on obtient

$$z^*(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in J,$$

et par conséquent d'aprés l'inégalité (1.21),il en résulte que

$$z^*(t) = 0 \text{ pour tout } t \in J.$$

C'est-à-dire

$$x^*(t) = x_*(t) \text{ pour tout } t \in J,$$

et par conséquent le problème (1.1) admet au moins une solution. ■

Remarque 1.3 *On considère le problème initial suivant*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)),\ t \in J = [0, T], \\ x(0) = \int_0^T x(s) dF(s), \end{cases} \tag{1.26}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $F : J \to \mathbb{R}$ est une fonction décroissante dans $[0, c]$ et *croissante dans* $[c, T]$ *avec* $0 < c < T$ *et* $\int_0^T dF(s) = 1$.*En utilisant une preuve similaire à celle du théoème 1.3, on obtient le résultat suivant*

Théorème 1.5 *Soit* $(\underline{U}, \overline{U})$ *une paire de sous et sur solutions de (1.26) sachant que* $\underline{U} \leq \overline{U}$ *dans* J *et supposons que l'hypothèse* ***(H4)*** *est satisfaite. Alors le problème (1.26) admet une paire de quasi-solution* (x_*, x^*) *telle que*

$$\underline{U} \leq x_* \leq x^* \leq \overline{U} \ \textit{dans } J.$$

Maintenant si on ajoute la condition suivante

$$\text{(H7)} \quad -\int_0^c \exp\left(-\int_0^s \widetilde{h}(\tau)d\tau\right) dF(s) + \int_c^T \exp\left(-\int_0^s \widetilde{h}(\tau)d\tau\right) dF(s) < 1,$$

alors en utilisant une preuve similaire à celle du **Théorème** 1.4, on a le résultat suivant:

Théorème 1.6 *Supposons que les hypothèses (H4), (H5) et (H7) sont satisfaites et soit* $(\underline{U}, \overline{U})$ *une paire de sous et sur solutions de (1.26) telle que* $\underline{U} \leq \overline{U}$ *dans J. Alors le problème (1.26) admet au moins une solution.*

Remarque 1.4 *Les* ***Théorèmes*** *(1.5) et (1.6) demeurent valides si on suppose que la fonction* F *est à variation bornée et la mesure* dF *change son signe de négatif en positif et* $\int_0^T dF(s) = 1$ *et par conséquent notre résultat améliore le* ***Théorème 3*** *obtenu dans [32].*

1.5 Applications

Dans cette section on donne deux exemples d'applications.

1.5.1 Exemple 1

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} x'(t) = x^{k_1}(t) - x^{k_2}(t) - a_1(t), \ t \in J, \\ x(t) > 0 \text{ dans } J, \\ x(0) = \int_0^T \widetilde{g}(s)x(s)ds, \end{cases} \tag{1.27}$$

où $a_1 : J \to \mathbb{R}_+$ est continue, $0 < k_1 < 1$, $k_2 > 1$ et $\widetilde{g} : J \to \mathbb{R}_+$ est continue telle que $\int_0^T \widetilde{g}(s)ds = 1$.

Pour tout $t \in J$, on pose par définition $\underline{u}(t) = 0$ et $\overline{u}(t) = L$, où L est une constante positive.

Il n'est pas difficile de vérifier que $\underline{u}$ est une sous solution du problème (1.27).

Maintenant $\overline{u}$ est une sur solution du problème (1.27) si on a

$$\begin{cases} 0 \geq L^{k_1} - L^{k_2} - a_1(t), \ t \in J, \\ L \geq \int_0^T \widetilde{g}(s)Lds, \end{cases}$$

Puisque $0 < k_1 < 1$ et $k_2 > 1$, alors si on choisit $L \geq 1$, on obtient L une sur solution du problème (1.27).

D'autre part il n'est pas difficile de vérifier que la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(t, x(t)) = x^{k_1}(t) - x^{k_2}(t) - a_1(t)$$

satisfait aux conditions du théorème 1.1 et par conséquent le problème (1.27) admet une solution minimale u_* et une solution maximale u^*.

1.5.2 Exemple 2

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 \cos(x(t)) - 2x(t), \ t \in [0,1], \\ x(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 (3s-1)\, x(s)ds, \end{cases} \tag{1.28}$$

On pose $(\underline{U}(t), \overline{U}(t)) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, pour tout $t \in [0,1]$.

$\left(\underline{U}, \overline{U}\right)$ est sous et sur solution du problème (1.28) si on a

$$\begin{cases} \underline{U}'(t) \leq f(t, \underline{U}(t)), \ t \in [0,1], \\ \overline{U}'(t) \geq f(t, \overline{U}(t)), \ t \in [0,1], \\ \underline{U}(0) \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{3}} (3s-1)\, \overline{U}(s)\, ds + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^1 (3s-1)\, \underline{U}(s)ds, \\ \overline{U}(0) \geq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{3}} (3s-1)\, \underline{U}(s)ds + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^1 (3s-1)\, \overline{U}(s)ds. \end{cases}$$

et si

$$\begin{cases} 0 \leq t^{\ 2} \cos\left(-\frac{1}{2}\right) + 1,\ \ t \in [0,1]\,, \\ 0 \geq t^{\ 2} \cos\left(\frac{1}{2}\right) - 1,\ \ t \in [0,1]\,, \\ -1 \leq \int_0^{\frac{1}{3}} \dfrac{(3s-1)}{2} ds + \int_{\frac{1}{3}}^{1} \dfrac{(1-3s)}{2} ds = -\frac{5}{12}, \\ 1 \geq \int_0^{\frac{1}{3}} \dfrac{(1-3s)}{2} ds + \int_{\frac{1}{3}}^{1} \dfrac{(3s-1)}{2} ds = \frac{5}{12}. \end{cases}$$

Alors $\left(\underline{U}, \overline{U}\right)$ est un couple de sous et sur solution du problème (1.28).

D'autre part il n'est pas difficile de vérifier que la fonction $\widehat{f}$ définie par

$$\widehat{f}\,(t, x\,(t)) = t^2 \cos(x\,(t)) - 2x\,(t)\,,$$

satisfait aux conditions du théorème 1.4 et par conséquent le problème (1.28) admet au moins une solution.

Chapitre 2

Résultats d'existence de solutions d'un système d'équations différentielles du premier ordre avec des conditions initiales nonlocales

2.1 Introduction

Le but de ce travail est l'étude de l'existence des solutions pour une classe de systèmes d'équations différentielles d'ordre 1 avec des conditions initiales non locales. Plus précisement, on considère le système aux limites non linéaire suivant:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u,v),\ t \in J, \\ v'(t) = g(t,u,v),\ t \in J, \\ u(0) = \int_0^T g_1(s)u(s)ds, \\ v(0) = \int\limits_0^T g_2\left(s\right) v\left(s\right) ds, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, f est croissante en v, g est décroissante en u, $g_i : J \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ sont des fonctions continues qui changent de signe sur $J = [0, T]$ avec $T > 0$.

Les systèmes d'équations différentielles du premier ordre avec des conditions initiales non locales ont été étudiés par plusieurs auteurs en utilisant: la méthode des sous et sur solutions, les techniques itératives, la théorie du degré de coïncidence de MAWHIN, les théorèmes du point fixe dans les cônes, le théorème de continuation de LERAY-SHAUDER, la théorie de perturbation et les méthodes numériques (voir [[4]-[5]], [[8]-[10]], [15], [19], [[22]-[25]], [[30]-[35]], [39], [[44]-[45]], [[49]-[53]], [55], [59], [67] et [[72]-[73]]).

les équations différentielles avec conditions aux limites non locales apparaissent naturellement dans l'ingénierie statique (voir [44]), la détermination des orbites (voir [4, Chapitre 6] et [5]), la pharmacocinétique et les réseaux de neurones (voir [43, Chapitre 10]) et dans la modélisation de la qualité des flux (voir [64]).

Il est déja bien connu que, la méthode de sous et sur solution couplé avec des itérations monotones ont été utilisées pour montrer l'existence des solutions minimales et maximales ou quasi-solutions, par plusieurs auteurs (voir [18], [[20]-[22]], [[27]-[28]], [[31]-[32]], [[37]-[38]], [[47]-[48]], [[57]-[58]], [65], [[69]-[71]] et [75]).

Le but de ce travail est de généraliser les résultats obtenus en [22] et [32] (voir Remarque 1.20).

Notons aussi, qu'à notre connaissance, que c'est pour la première fois que la méthode des sous et sur solutions couplée avec les techniques itératives monotones a été utilisée pour montrer l'existence des solutions pour un système mixte quasi-monotone avec des conditions initiales intégrales.

Le plan de ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2 on donne certaines résultats préliminaires, ainsi que les principaux résultats avec preuve, suivie par un exemple, présenté dans la section 3, pour illustrer nos résultats.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [23].

2.2 Résultats principaux

Dans cette section, on présente et on montre nos résultats principaux.

Sur les fonctions f et g, nous imposerons les conditions suivantes:

(H1) $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et il existe une fonction continue $h_1 : J \to \mathbb{R}$

telle que $u \longmapsto f(t,u,v)+h_1(t)u$ est croissante pour tout $t\in J$, $u\in\mathbb{R}$ et $v\in\mathbb{R}$.

(H2) $g : J\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et il existe une fonction continue $h_2 : J\to\mathbb{R}$ telle que $v \longmapsto g(t,u,v)+h_2(t)v$ est croissante pour tout $t\in J$, $u\in\mathbb{R}$ et $v\in\mathbb{R}$.

(H3) $f\ (t,u,v)$ est croissante en v pour tout $t\in J$ fixé , et $u\in\mathbb{R}$.

(H4) $g(t,u,v)$ est décroissante en u pour tout $t\in J$ fixé et $v\in\mathbb{R}$.

(H5) $g_1(t)\le 0$ pour tout $t\in[0,c_1]$ et $g_1(t)\ge 0$ pour tout $t\in[c_1,T]$ avec $0<c_1<T$.

(H6) $g_2(t)\le 0$ pour tout $t\in[0,c_2]$ et $g_2(t)\ge 0$ pour tout $t\in[c_2,T]$ avec $0<c_2<T$.

Définition 2.1 *On dit que (u,v) est une solution de (2.1) si*

i) $(u,v)\in(C^1(J))^2$.

ii) (u,v) *satisfait (2.1).*

Définition 2.2 *On dit que (u_*,u^*), (v_*,v^*) sont un couple de quasi-solution de (2.1) si*

i) $(u_*,u^*)\in(C^1(J))^2$ et $(v_*,v^*)\in(C^1(J))^2$.

ii) $$\begin{cases} u_*'(t)=f(t,u_*(t),v_*(t)),\ t\in J,\\ u^{*\prime}(t)=f(t,u^*(t),v^*(t)),\ t\in J,\\ v_*'(t)=g(t,u^*(t),v_*(t)),\ t\in J,\\ v^{*\prime}(t)=g(t,u_*(t),v^*(t)),\ t\in J,\\ u_*(0)=\int_0^{c_1}g_1(s)u^*(s)ds+\int_{c_1}^T g_1(s)u_*(s)ds,\\ u^*(0)=\int_0^{c_1}g_1(s)u_*(s)ds+\int_{c_1}^T g_1(s)u^*(s)ds,\\ v_*(0)=\int_0^{c_2}g_2(s)v^*(s)ds+\int_{c_2}^T g_2(s)v_*(s)ds,\\ v^*(0)=\int_0^{c_2}g_2(s)v_*(s)ds+\int_{c_2}^T g_2(s)v^*(s)ds.\end{cases}$$

Définition 2.3 *On dit que $(\underline{u},\overline{u})$, $(\underline{v},\overline{v})$ est un couple de sous et sur solution de (2.1) si*

i)$(\underline{u},\overline{u})\in(C^1(J))^2$ et $(\underline{v},\overline{v})\in(C^1(J))^2$.

$$
\text{ii)}\begin{cases}
\underline{u}^{'}(t) \leq f(t,\underline{u},\underline{v}),\ t\in J,\\
\overline{u}'(t) \geq f(t,\overline{u},\overline{v}),\ t\in J,\\
\underline{v}'(t) \leq g(t,\overline{u},\underline{v}),\ t\in J,\\
\overline{v}'(t) \geq g(t,\underline{u},\overline{v}),\ t\in J,\\
\underline{u}(0) \leq \int_0^{c_1} g_1(s)\overline{u}(s)ds + \int_{c_1}^T g_1(s)\underline{u}(s)ds,\\
\overline{u}(0) \geq \int_0^{c_1} g_1(s)\underline{u}(s)ds + \int_{c_1}^T g_1(s)\overline{u}(s)ds,\\
\underline{v}(0) \leq \int_0^{c_2} g_2(s)\overline{v}(s)ds + \int_{c_2}^T g_2(s)\underline{v}(s)ds,\\
\overline{v}(0) \geq \int_0^{c_2} g_2(s)\underline{v}(s)ds + \int_{c_2}^T g_2(s)\overline{v}(s)ds.
\end{cases}
$$

Théorème 2.1 *On suppose que les hypothèses $(H_i)_{i=1,..,6}$ sont satisfaites et soit $(\underline{u},\overline{u})$, $(\underline{v},\overline{v})$ deux couples de sous et sur solutions de (2.1) au sens de la définition 2.3 sachant que $\underline{u}\leq\overline{u}$ et $\underline{v}\leq\overline{v}$ dans J. Alors le problème (2.1) admet deux couples de quasi-solutions (u_*,u^*), (v_*,v^*) telle que*

$$\underline{u}\leq u_*\leq u^*\leq\overline{u} \text{ dans } J,$$

et

$$\underline{v}\leq v_*\leq v^*\leq\overline{v} \text{ dans } J.$$

Preuve: La preuve est donnée en plusieurs étapes.

On pose $u_0=\underline{u}$,, $u_1=\overline{u}$, $v_0=\underline{v}$, $v_1=\overline{v}$ et on définit les suites de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ par

$$\begin{cases}
u'_{n+2}(t)+h_1(t)\,u_{n+2}(t)=f(t,u_n(t),v_n(t))+h_1(t)\,u_n(t)\,,\ t\in J,\\
u_{n+2}(0)=\int_0^{c_1} g_1(s)u_{n+1}(s)ds+\int_{c_1}^T g_1(s)u_n(s)ds,
\end{cases}\tag{2.2}$$

$$\begin{cases}
v'_{n+2}(t)+h_2(t)\,v_{n+2}(t)=g(t,u_{n+1}(t),v_n(t))+h_2(t)\,v_n(t)\,,\ t\in J,\\
v_{n+2}(0)=\int_0^{c_2} g_2(s)v_{n+1}(s)ds+\int_{c_2}^T g_2(s)v_n(s)ds,
\end{cases}\tag{2.3}$$

1$^{\text{ère}}$ étape : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$u_{2n}\leq u_{2n+2}\leq u_{2n+3}\leq u_{2n+1} \text{ dans } J,$$

et

$$v_{2n}\leq v_{2n+2}\leq v_{2n+3}\leq v_{2n+1} \text{ dans } J.$$

Soit

$$w_0\,(t) := u_2\,(t) - u_0\,(t) \;\text{ et } z_0\,(t) := v_2\,(t) - v_0\,(t)\,,\; t \in J.$$

D'aprés (2.2), (2.3) et en utilisant la Définition 2.3, on a

$$\begin{cases} w_0'\,(t) + h_1\,(t)\,w_0\,(t) \geq 0,\; t \in J, \\ w_0\,(0) \geq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} z_0'\,(t) + h_2\,(t)\,z_0\,(t) \geq 0,\; t \in J, \\ z_0\,(0) \geq 0. \end{cases}$$

D'aprés le Lemme 2 du **chapitre1**, on obtient

$$w_0\,(t) \geq 0 \text{ et } z_0\,(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in J.$$

C'est-à-dire

$$u_0 \leq u_2 \text{ et } v_0 \leq v_2 \text{ dans } J. \tag{2.4}$$

D'une manière similaire on montre que

$$u_3 \leq u_1 \text{ et } v_3 \leq v_1 \text{ dans } J. \tag{2.5}$$

Maintenant on pose

$$p_1\,(t) = u_2\,(t) - u_1\,(t) \;\text{ et } q_1\,(t) = v_2\,(t) - v_1\,(t)\,,\; t \in J.$$

D'aprés (2.2) et (2.3), on a

$$\begin{cases} p_1'\,(t) + h_1\,(t)\,p_1\,(t) \\ \leq f(t, u_0\,(t)\,, v_0\,(t)) + h_1\,(t)\,u_0\,(t) - f(t, u_1\,(t)\,, v_1\,(t)) - h_1\,(t)\,u_1\,(t)\,,\; t \in J, \\ p_1(0) \leq \int_0^{c_1} g_1(s)\,(u_1\,(s) - u_0\,(s))\,ds + \int_{c_1}^{T} g_1(s)\,(u_0\,(s) - u_1\,(s))\,ds, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} q_1'(t) + h_2(t)\, q_1(t) \\ \leq g(t, u_1(t), v_0(t)) + h_2(t)\, v_0(t) - g(t, u_0(t), v_1(t)) - h_2(t)\, v_1(t), \ t \in J, \\ q_1(0) \leq \int_0^{c_2} g_2(s)\, (v_1(s) - v_0(s))\, ds + \int_{c_2}^{T} g_2(s)\, (v_0(s) - v_1(s))\, ds. \end{cases}$$

Puisque $u_0 = \underline{u} \leq \overline{u} = u_1$ et $v_0 = \underline{v} \leq \overline{v} = v_1$ dans J et en utilisant les hypothèses $(\mathrm{H_i})_{\mathrm{i}=1,..,6}$, on obtient

$$\begin{cases} p_1'(t) + h_1(t)\, p_1(t) \leq 0, \ t \in J, \\ p_1(0) \leq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} q_1'(t) + h_2(t)\, q_1(t) \leq 0, \ t \in J, \\ q_1(0) \leq 0. \end{cases}$$

Alors d'aprés le **Lemme** 2 du **chapitre1**, on a

$$p_1(t) \leq 0 \text{ et } q_1(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in J.$$

C'est-à-dire

$$u_2 \leq u_1 \text{ et } v_2 \leq v_1 \text{ dans } J. \tag{2.6}$$

Maintenant on montre que

$$u_2 \leq u_3 \text{ et } v_2 \leq v_3 \text{ dans } J.$$

Pour cela on pose

$$p_3(t) = u_2(t) - u_3(t) \ \text{ et } q_3(t) = v_2(t) - v_3(t), \ t \in J.$$

D'aprés (2.2) et (2.3), on a

$$\begin{cases} p_3'(t) + h_1(t)\, p_3(t) \\ = f(t, u_0(t), v_0(t)) + h_1(t)\, u_0(t) - f(t, u_1(t), v_1(t)) - h_1(t)\, u_1(t), \ t \in J, \\ p_3(0) = \int_0^{c_1} g_1(s)\, (u_1(s) - u_2(s))\, ds + \int_{c_1}^{T} g_1(s)\, (u_0(s) - u_1(s))\, ds, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} q_3'(t) + h_2(t) q_3(t) \\ = g(t, u_1(t), v_0(t)) + h_2(t) v_0(t) - g(t, u_2(t), v_1(t)) - h_2(t) v_1(t), \ t \in J, \\ q_3(0) = \int_0^{c_2} g_2(s) (v_1(s) - v_2(s)) ds + \int_{c_2}^T g_2(s) (v_0(s) - v_1(s)) ds. \end{cases}$$

Puisque $u_0 \leq u_2 \leq u_1$ et $v_0 \leq v_2 \leq v_1$ dans J et en utilisant les hypothèses $(\mathrm{H_i})_{\mathrm{i}=1,..,6}$, on obtient

$$\begin{cases} p_3'(t) + h_1(t) p_3(t) \leq 0, \ t \in J, \\ p_3(0) \leq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} q_3'(t) + h_2(t) q_3(t) \leq 0, \ t \in J, \\ q_3(0) \leq 0. \end{cases}$$

Par suite d'aprés le **Lemme** 2 du **chapitre1**, on a

Preuve:

$$p_3(t) \leq 0 \text{ et } q_3(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in J.$$

C'est-à-dire

$$u_2 \leq u_3 \text{ et } v_2 \leq v_3 \text{ dans } J. \tag{2.7}$$

En conclusion d'aprés (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7), on obtient

$$u_0 \leq u_2 \leq u_3 \leq u_1 \text{ dans } J \text{ et } v_0 \leq v_2 \leq v_3 \leq v_1 \text{ dans } J.$$

On suppose pour un $n \geq 1$ fixé, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } J, \tag{2.8}$$

et

$$v_{2n} \leq v_{2n+2} \leq v_{2n+3} \leq v_{2n+1} \text{ dans } J, \tag{2.9}$$

et on montre que

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } J,$$

et

$$v_{2n+2} \leq v_{2n+4} \leq v_{2n+5} \leq v_{2n+3} \text{ dans } J.$$

On pose

$$w_{n+1}(t) := u_{2n+4}(t) - u_{2n+2}(t), \ t \in J,$$

et

$$z_{n+1}(t) := v_{2n+4}(t) - v_{2n+2}(t), \ t \in J.$$

D'aprés (2.2) et (2.3), on a

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) + h_1(t) w_{n+1}(t) \\ = f(t, u_{2n+2}(t), v_{2n+2}(t)) + h_1(t)(u_{2n+2}(t) - u_{2n}(t)) - f(t, u_{2n}(t), v_{2n}(t)), \ t \in J, \\ w_{n+1}(0) = \int_0^{c_1} g_1(s)(u_{2n+3}(s) - u_{2n+1}(s))\, ds + \int_{c_1}^{T} g_1(s)(u_{2n+2}(s) - u_{2n}(s))\, ds, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} z'_{n+1}(t) + h_2(t) z_{n+1}(t) \\ = g(t, u_{2n+3}(t), v_{2n+2}(t)) + h_2(t)(v_{2n+2}(t) - v_{2n}(t)) - g(t, u_{2n+1}(t), v_{2n}(t)), \ t \in J, \\ z_{n+1}(0) = \int_0^{c_2} g_2(s)(v_{2n+3}(s) - v_{2n+1}(s))\, ds + \int_{c_2}^{T} g_2(s)(v_{2n+2}(s) - v_{2n}(s))\, ds, \end{cases}$$

En utilisant les deux hypothèses de récurrences (2.8) et (2.9) et les hypothèses $(\mathrm{H_i})_{\mathrm{i}=1,..,6}$, on obtient

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) + h_1(t) w_{n+1}(t) \geq 0, \ t \in J, \\ w_{n+1}(0) \geq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} z'_{n+1}(t) + h_2(t) z_{n+1}(t) \geq 0, \ t \in J, \\ z_{n+1}(0) \geq 0. \end{cases}$$

Alors par le **Lemme** 2 du **chapitre1**, on a

$$w_{n+1}(t) \geq 0 \text{ et } z_{n+1}(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in J.$$

C'est-à-dire

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \text{ et } v_{2n+1} \leq v_{2n+4} \text{ dans } J. \tag{2.10}$$

D'une manière similaire on montre que

$$u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } J \text{ et } v_{2n+5} \leq v_{2n+3} \text{ dans } J, \tag{2.11}$$

et

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \text{ dans } J \text{ et } v_{2n+4} \leq v_{2n+5} \text{ dans } J. \tag{2.12}$$

Alors d'aprés (2.10), (2.11), (2.13) et (2.12), on a

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } J,$$

et

$$v_{2n+2} \leq v_{2n+4} \leq v_{2n+5} \leq v_{2n+3} \text{ dans } J.$$

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+3} \text{ dans } J \text{ et } v_{2n+4} \leq v_{2n+3} \text{ dans } J, \tag{2.13}$$

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } J,$$

et

$$v_{2n} \leq v_{2n+2} \leq v_{2n+3} \leq v_{2n+1} \text{ dans } J.$$

La preuve de la $\mathbf{1^{ère}}$ **étape** est achevée. ■

$\mathbf{2^{ème}}$ **étape:** Les suites des fonctions $(u_{2n}, v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}, v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converges vers une quasi-solutions de (2.1).

D'aprés la $\mathbf{1^{ère}}$ **étape** les suites des fonctions $(u_{2n}, v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}, v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers (u_*, v_*) et (u^*, v^*).Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in J$, on a

$$u_{2n}(t) = \int_0^{c_1} g_1(s)u_{2n-1}(s)ds + \int_{c_1}^T g_1(s)u_{2n-2}(s)ds + \int_0^t \widetilde{f_n}\,(s)\,ds,$$

$$u_{2n+1}(t) = \int_0^{c_1} g_1(s)u_{2n}(s)ds + \int_{c_1}^T g_1(s)u_{2n-1}(s)ds + \int_0^t \widehat{f_n}\,(s)\,ds,$$

$$v_{2n}(t)=\int_0^{c_2} g_2(s)v_{2n-1}(s)ds+\int_{c_2}^{T} g_2(s)v_{2n-2}(s)ds+\int_0^{t}\widetilde{g}_n\left(s\right)ds,$$

et

$$v_{2n+1}(t)=\int_0^{c_2} g_2(s)v_{2n}(s)ds+\int_{c_2}^{T} g_2(s)v_{2n-1}(s)ds+\int_0^{t}\widehat{g}_n\left(s\right)ds,$$

où

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_n\left(s\right) &: = f(s,u_{2n-2}\left(s\right),v_{2n-2}\left(s\right))+h_1\left(s\right)\left(u_{2n-2}\left(s\right)-u_{2n}\left(s\right)\right),\\
\widehat{f}_n\left(s\right) &: = f(s,u_{2n-1}\left(s\right),v_{2n-1}\left(s\right))+h_1\left(s\right)\left(u_{2n-1}\left(s\right)-u_{2n+1}\left(s\right)\right),\\
\widetilde{g}_n\left(s\right) &: = g(s,u_{2n-1}\left(s\right),v_{2n-2}\left(s\right))+h_2\left(s\right)\left(v_{2n-2}\left(s\right)-v_{2n}\left(s\right)\right),
\end{aligned}$$

et

$$\widehat{g}_n\left(s\right):=g(s,u_{2n}\left(s\right),v_{2n-1}\left(s\right))+h_2\left(s\right)\left(v_{2n-1}\left(s\right)-v_{2n+1}\left(s\right)\right).$$

Maintenant si on fait tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_n\left(s\right) &\rightarrow f(s,u_*\left(s\right),v_*\left(s\right)),\\
\widehat{f}_n\left(s\right) &\rightarrow f(s,u^*\left(s\right),v^*\left(s\right)),\\
\widetilde{g}_n\left(s\right) &\rightarrow g(s,u^*\left(s\right),v_*\left(s\right))
\end{aligned}$$

et

$$\widehat{g}_n\left(s\right)\rightarrow g(s,u_*\left(s\right),v^*\left(s\right)).$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
\exists\ c_1 &> 0,\ \forall\ n\in\mathbb{N},\forall\ s\in J,\ \left|\widetilde{f}_n\left(s\right)\right|\leq c_1,\\
\exists\ c_2 &> 0,\ \forall\ n\in\mathbb{N},\forall\ s\in J,\ \left|\widehat{f}_n\left(s\right)\right|\leq c_2,\\
\exists\ c_3 &> 0,\ \forall\ n\in\mathbb{N},\forall\ s\in J,\ \left|\widetilde{g}_n\left(s\right)\right|\leq c_3,\\
\exists\ c_4 &> 0,\ \forall\ n\in\mathbb{N},\forall\ s\in J,\ \left|\widehat{g}_n\left(s\right)\right|\leq c_4.
\end{aligned}$$

d'où, le théorème de convergence dominée de LEBESGUE entraîne que,

$$u_*(t) = \int_0^{c_1} g_1(s)u^*(s)ds + \int_{c_1}^{T} g_1(s)u_*(s)ds + \int_0^t f(s, u_*(s), v_*(s))ds, \tag{2.14}$$

$$u^*(t) = \int_0^{c_1} g_1(s)u_*(s)ds + \int_{c_1}^{T} g_1(s)u^*(s)ds + \int_0^t f(s, u^*(s), v^*(s))ds, \tag{2.15}$$

$$v_*(t) = \int_0^{c_2} g_2(s)v^*(s)ds + \int_{c_2}^{T} g_2(s)v_*(s)ds + \int_0^t g(s, u^*(s), v_*(s))ds, \tag{2.16}$$

et

$$v^*(t) = \int_0^{c_2} g_2(s)v_*(s)ds + \int_{c_2}^{T} g_2(s)v^*(s)ds + \int_0^t g(s, u_*(s), v^*(s))ds. \tag{2.17}$$

Maintenant on va montrer que (u_*, u^*), (v_*, v^*) est une paire de quasi-solutions de (2.1). Tout d'abord il n'est pas difficile de vérifier que

$$\begin{cases} u_*(0) = \int_0^{c_1} g_1(s)u^*(s)ds + \int_{c_1}^{T} g_1(s)u_*(s)ds, \\ u^*(0) = \int_0^{c_1} g_1(s)u_*(s)ds + \int_{c_1}^{T} g_1(s)u^*(s)ds, \\ v_*(0) = \int_0^{c_2} g_2(s)v^*(s)ds + \int_{c_2}^{T} g_2(s)v_*(s)ds, \\ v^*(0) = \int_0^{c_2} g_2(s)v_*(s)ds + \int_{c_2}^{T} g_2(s)v^*(s)ds. \end{cases} \tag{2.18}$$

D'autre part puisque f est continue, $\underline{u} \leq u_* \leq \overline{u}$, $\underline{v} \leq v_* \leq \overline{v}$ et $\underline{u}$, $\overline{u}$, $\underline{v}$ et $\overline{v}$ sont continues, alors il existe une constante $K_1 > 0$ telle que pour tout $s \in J$, on a

$$|f\ (s, u_*(s), v_*(s))| \leq K_1. \tag{2.19}$$

Par suite d'aprés (2.14) et (2.19), on a

$$\forall\ t_1 \in J,\ \forall\ t_2 \in J,\ \ |u_*(t_1) - u_*(t_2)| \leq K\,|t_1 - t_2|\,.$$

Ce qui entraîne que u_* est continue sur J et par conséquent d'aprés (2.14) il résulte que u_* est dérivable sur J.

Preuve: D'une manière similaire, on peut montrer que les fonctions u^*, v_* et v^* sont dérivables sur J et par conséquent d'aprés (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17), on obtient

$$\begin{cases} u_*'(t) = f\ (t, u_*(t), v_*(t)),\ t \in J, \\ u^{*\prime}(t) = f\ (t, u^*(t), v^*(t)),\ t \in J, \\ v_*'(t) = g\ (t, u^*(t), v_*(t)),\ t \in J, \\ v^{*\prime}(t) = g\ (t, u_*(t), v^*(t)),\ t \in J, \end{cases}$$

et par conséquent d'aprés (2.18), il résulte que (u_*, u^*), (v_*, v^*) sont deux paires de quasi-solutions de (2.1).

Ainsi, la preuve de **l'étape 2** est terminée. D'où la preuve du **Théorème** 2.1 est terminée.

■ ■

Comme les quasi-solutions ne sont pas des vraies solutions; alors il est nécéssaire d'imposer des conditions additionnelles sur f, g et g_i pour $i = 1, 2$ pour avoir $u^* = u_*$ et $v^* = v_*$ et par conséquent le problème (2.1) admet au moins une solution.

Sur la non linéarité de f et g et les fonctions g_i pour $i = 1, 2$, on impose les conditions additionnelles suivantes:

(H7) Il existe une fonction continue $\widetilde{h}_1 : J \to \mathbb{R}_-$ telle que $u \longmapsto f\ (t, u, v) + \widetilde{h}_1(t)u$ est décroissante si $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$.

(H8) Il existe une fonction continue $\widetilde{h}_2 : J \to \mathbb{R}_-$ telle que $v \longmapsto f(t, u, v) + \widetilde{h}_2(t)v$ est décroissante si $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$.

(H9) Il existe une fonction continue $\widetilde{h_3} : J \to \mathbb{R}_+$ telle que $u \longmapsto g(t, u, v) + \widetilde{h_3}(t)u$ est croissante si $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$.

(H10) Il existe une fonction continue $\widetilde{h}_4 : J \to \mathbb{R}_-$ telle que $v \longmapsto g(t, u, v) + \widetilde{h}_4(t)v$ est décroissante si $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$.

(H11) $A + B < 1$,

où

$$A = -\int_0^{c_1} \exp\left(\int_0^s \widetilde{M}(\tau)d\tau\right) g_1(s)\, ds + \int_{c_1}^T \exp\left(\int_0^s \widetilde{M}(\tau)d\tau\right) g_1(s)\, ds,$$

$$B=-\int_{0}^{c_2}\exp\left(\int_{0}^{s}\widetilde{M}(\tau)d\tau\right)g_2\left(s\right)ds+\int_{c_2}^{T}\exp\left(\int_{0}^{s}\widetilde{M}(\tau)d\tau\right)g_2\left(s\right)ds,$$

avec

$$\widetilde{M}\left(t\right)=\max\left(-\widetilde{h}_1\left(t\right)+\widetilde{h_3}\left(t\right),-\widetilde{h}_2\left(t\right)-\widetilde{h_4}\left(t\right)\right),\text{ pour tout } t\in J.$$

On a le résultat suivant:

Théorème 2.2 *On suppose que les hypothèses **(Hi)** for i=1,...,11 sont satisfaites et soient* $(\underline{u},\overline{u})$, $(\underline{v},\overline{v})$*deux couples de sous et sur solutions de (2.1) tels que* $\underline{u}\leq\overline{u}$ *et* $\underline{v}\leq\overline{v}$. *Alors le problème (2.1) admet au moins une solution.*

Preuve: D'après le **Théorème** 2.1, le problème (*2.1*) admet un couple de quasi-solutions (u_*,u^*), (v_*,v^*) tel que

$$\underline{u}\leq u_*\leq u^*\leq\overline{u}\text{ dans } J, \tag{2.20}$$

et

$$\underline{v}\leq v_*\leq v^*\leq\overline{v}\text{ dans } J. \tag{2.21}$$

Maintenant on pose

$$z^*\left(t\right)=u^*\left(t\right)-u_*\left(t\right)\text{ et } w^*\left(t\right)=v^*\left(t\right)-v_*\left(t\right),\ t\in J.$$

D'aprés (2.20) et (2.21), on a

$$z^*\left(t\right)\geq 0\text{ et } w^*\left(t\right)\geq 0,\text{ pour tout } t\in J. \tag{2.22}$$

Maintenant on va montrer que

$$z^*\left(t\right)\leq 0\text{ et } w^*\left(t\right)\leq 0,\text{ pour tout } t\in J.$$

On a

$$\begin{cases} z^{*\prime}(t) = f(t, u^*(t), v^*(t)) - f(t, u_*(t), v_*(t)), \ t \in J, \\ w^{*\prime}(t) = g(t, u_*(t), v^*(t)) - g(t, u^*(t), v_*(t)), \ t \in J, \\ z^*(0) = -\int_0^{c_1} g_1(s) z^*(s) ds + \int_{c_1}^T g_1(s) z^*(s) ds, \\ w^*(0) = -\int_0^{c_2} g_2(s) w^*(s) ds + \int_{c_2}^T g_2(s) w^*(s) ds. \end{cases} \tag{2.23}$$

D'après les hypothèses (H7) et (H8), on a

$$\begin{aligned} & z^{*\prime}(t) + \widetilde{h}_1(t) z^*(t) + \widetilde{h}_2(t) w^*(t) \\ = \ & f(t, u^*(t), v^*(t)) - f(t, u_*(t), v_*(t)) + \widetilde{h}_1(t) z^*(t) + \widetilde{h}_2(t) w^*(t) \\ \leq \ & f(t, u_*(t), v^*(t)) - f(t, u_*(t), v_*(t)) + \widetilde{h}_2(t) w^*(t) \\ \leq \ & 0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$z^{*\prime}(t) + \widetilde{h}_1(t) z^*(t) + \widetilde{h}_2(t) w^*(t) \leq 0. \tag{2.24}$$

D'une manière similaire en utilisant les hypothèses (H9) and (H10), on obtient

$$w^{*\prime}(t) - \widetilde{h_3}(t) z^*(t) + \widetilde{h}_4(t) w^*(t) \leq 0. \tag{2.25}$$

Par suite d'aprés (2.24) et (2.25), on a

$$(z^* + w^*)'(t) - \widetilde{M}(t)(z^* + w^*)(t) \leq 0,$$

ce qui implique que

$$(z^* + w^*)(t) \leq \exp\left(\int_0^t \widetilde{M}(\tau) d\tau\right)(z^* + w^*)(0). \tag{2.26}$$

D'autre par puisque $z^*(t) \geq 0$ et $w^*(t) \geq 0$, pour tout $t \in J$, alors en utilisant les conditions initiales de (2.23), on obtient

$$z^*(0) \leq -\int_0^{c_1} g_1(s)(z^* + w^*)(s) ds + \int_{c_1}^T g_1(s)(z^* + w^*)(s) ds,$$

et

$$w^*(0) \leq -\int_0^{c_2} g_2(s)\left(z^* + w^*\right)(s)\, ds + \int_{c_2}^{T} g_2(s)\left(z^* + w^*\right)(s)\, ds.$$

Alors, en utilisant l'inégalité (2.26), on obtient

$$z^*(0) \leq A.\left(z^* + w^*\right)(0),$$

et

$$w^*(0) \leq B.\left(z^* + w^*\right)(0).$$

Ce qui donne

$$\left(z^* + w^*\right)(0) \leq (A+B).\left(z^* + w^*\right)(0).$$

Alors d'aprés (H11), on a

$$\left(z^* + w^*\right)(0) \leq 0.$$

Ce qui implique que

$$\left(z^* + w^*\right)(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in J,$$

et par conséquence d'aprés (2.22), il s'ensuit que+

$$z^*(t) = 0 \text{ et } w^*(t) = 0, \text{ pour tout } t \in J.$$

Ce qui donne

$$u^*(t) = u_*(t) \text{ et } v^*(t) = v_*(t), \text{ pour tout } t \in J.$$

Par conséquent d'aprés les égalités précédentes, il s'ensuit que le problème (2.1) admet au moins une solution. ■

Remarque 2.1 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t), v(t)), \; t \in J, \\ v'(t) = g(t, u(t), v(t)), \; t \in J, \\ u(0) = \int_0^T u(s) dF_1(s), \\ v(0) = \int_0^T v(s) dF_2(s), \end{cases} \tag{2.27}$$

où $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $F_1 : J \to \mathbb{R}$ est une fonction décroissante dans $[0, c_1]$ et croissante dans $[c_1, T]$ avec $0 < c_1 < T$ et $F_2 : J \to \mathbb{R}$ est une fonction décroissante dans $[0, c_2]$ et croissante dans $[c_2, T]$ avec $0 < c_2 < T$.

*En utilisant une démonstration similaire à celle du **Théorème** 2.1, on obtient le résultat suivant:*

Théorème 2.3 *On suppose que les hypothèses $(H_i)_{i=1,..,4}$ sont satisfaites et soient $(\underline{u}, \overline{u})$, $(\underline{v}, \overline{v})$ deux couples de sous et sur solutions de (2.27) au sens de la Définition 2.3 tels que $\underline{u} \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq \overline{v}$ dans J. Alors le problème (2.27) admet deux couples de quasi-solutions (u_*, u^*), (v_*, v^*) tels que*

$$\underline{u} \leq u_* \leq u^* \leq \overline{u} \text{ dans } J,$$

et

$$\underline{v} \leq v_* \leq v^* \leq \overline{v} \text{ dans } J.$$

Maintenant supposons que la condition suivante est satisfaite

(H12) $\widetilde{A} + \widetilde{B} < 1$, où

$$\widetilde{A} = -\int_0^{c_1} \exp\left(\int_0^s \widetilde{M}(\tau)d\tau\right) dF_1(s) + \int_{c_1}^T \exp\left(\int_0^s \widetilde{M}(\tau)d\tau\right) dF_1(s),$$

et

$$\widetilde{B} = -\int_0^{c_2} \exp\left(\int_0^s \widetilde{M}(\tau)d\tau\right) dF_2(s) + \int_{c_2}^T \exp\left(\int_0^s \widetilde{M}(\tau)d\tau\right) dF_2(s),$$

Alors en utilisant une démonstration similaire à celle du Théorème 2.2, on obtient le résultat suivant:

Théorème 2.4 *On suppose que les hypothèses (Hi) pour i=1,..., 4, (Hi) pour i=7,..., 10 et (H12) sont satisfaites et soient $(\underline{u}, \overline{u})$, $(\underline{v}, \overline{v})$ deux couples de sous et sur solutions de (2.27) tels que $\underline{u} \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq \overline{v}$. Alors le problème (2.27) admet au moins une solution.*

Remarque 2.2 *Les théorèmes 2.3 et 2.4 sont valides si on suppose que les fonctions F_1 et F_2 sont à variations bornées et les mesures dF_1 et dF_2 changent de signe du négatif vers le positif et par conséquence ce résultat généralise le Theorem 3 obtenu dans [32].*

2.3 Application

Dans cette section, on donne un exemple pour illustrer l'application de nos résultats.

2.3.1 Exemple

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u'(t) = \sin(u(t)) - 4u(t) + v(t) + (2+t)^2, \ t \in [0,1], \\ v'(t) = \cos(v(t)) - 4v(t) - u(t) + t^2 + 2t + 5, \ t \in [0,1], \\ u > 0 \text{ et } v > 0 \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = \dfrac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(s - \frac{1}{2}\right) s \ u(s) ds + \dfrac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) u(s) ds, \\ v(0) = \dfrac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(s - \frac{1}{2}\right) s \ v(s) ds + \dfrac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) v(s) ds. \end{cases} \tag{2.28}$$

Pour tout $t \in [0,1]$, $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(t,u,v) = \sin u - 4u + v + (2+t)^2,$$

$$g(t,u,v) = \cos v - 4v - u + t^2 + 2t + 5.$$

et

$$g_1(t) = g_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{2}\right) t & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Tout d'abord il n'est pas difficile de vérifier que les fonctions f, g, g_1 et g_2 vérifient les hypothèses ($\mathrm{H_i}$) i=1,...,6.

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$ on pose

$$(\underline{u}(t), \overline{u}(t)) = (\underline{v}(t), \overline{v}(t)) = (t, 4).$$

$(\underline{u}, \overline{u})$, $(\underline{v}, \overline{v})$ sont deux couples de sous et sur solutions de (2.28) si on a

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) \leq f(t, \underline{u}, \underline{v}), \ t \in J, \\ \overline{u}'(t) \geq f(t, \overline{u}, \overline{v}), \ t \in J, \\ \underline{v}'(t) \leq g(t, \overline{u}, \underline{v}), \ t \in J, \\ \overline{v}'(t) \geq g(t, \underline{u}, \overline{v}), \ t \in J, \\ \underline{u}(0) \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_1(s)\overline{u}(s)ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 g_1(s)\underline{u}(s)ds, \\ \overline{u}(0) \geq \int_0^{\frac{1}{2}} g_1(s)\underline{u}(s)ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 g_1(s)\overline{u}(s)ds, \\ \underline{v}(0) \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_2(s)\overline{v}(s)ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 g_2(s)\underline{v}(s)ds, \\ \overline{v}(0) \geq \int_0^{\frac{1}{2}} g_2(s)\underline{v}(s)ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 g_2(s)\overline{v}(s)ds. \end{cases}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} 1 \leq \sin t - 4t + t + (2+t)^2 = 4 + t + t^2 + \sin t, \ t \in [0,1], \\ 0 \geq \sin 4 - 16 + 4 + (2+t)^2 = -8 + 4t + t^2 + \sin 4, \ t \in [0,1], \\ 1 \leq \cos t - 4t - 4 + t^2 + 4t + 5 = 1 + t^2 + \cos t, \ t \in [0,1], \\ 0 \geq \cos 4 - 16 - t + t^2 + 4t + 5 = -11 + 3t + t^2 + \cos 4, \ t \in [0,1], \\ 0 \leq \dfrac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(s - \frac{1}{2}\right) s \ ds + \dfrac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) s \ ds = 2,6042 \quad 10^{-3}, \\ 4 \geq \dfrac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(s - \frac{1}{2}\right) s^2 ds + \dfrac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) ds = 6,1849 \quad 10^{-2}, \\ 0 \leq \dfrac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(s - \frac{1}{2}\right) s \ ds + \dfrac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) s \ ds = 2,6042 \quad 10^{-3}, \\ 4 \geq \dfrac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(s - \frac{1}{2}\right) s^2 ds + \dfrac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) ds = 6,1849 \quad 10^{-2}. \end{cases}$$

Alors $(\underline{u}(t), \overline{u}(t))$ et $(\underline{v}(t), \overline{v}(t))$ sont deux couples de sous et sur solutions de (2.28) et par suite d'aprés le Théorème 2.1, il résulte que le problème (2.28) admet deux couples de quasi-solutions (u_*, u^*), (v_*, v^*) tels que

$$t \leq u_* \leq u^* \leq 4 \text{ dans } [0,1],$$

et

$$t \leq v_* \leq v^* \leq 4 \text{ dans } [0,1].$$

Maintenant, si on pose

$$\tilde{h}_1(t) = \tilde{h}_4(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0,1],$$

et

$$\tilde{h}_2(t) = -2 \text{ et } \tilde{h}_3(t) = 2, \text{ pour tout } t \in [0,1],$$

alors les fonctions f et g vérifient les hypothèses additionnelles (H_i), i=7,...,10.

D'autre part, on a

$$A = B = -\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(s-\frac{1}{2}\right) s \quad \exp(2s)\, ds + \frac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(s-\frac{1}{2}\right) s \quad \exp(2s)\, ds = 8,9348 \quad 10^{-2}.$$

Ce qui entraîne que

$$A + B = 0,178696 < 1,$$

et par conséquent d'aprés le théorème 2.2 , il s'ensuit que le problème (2.28) admet au moins une solution.

Chapitre 3

Résultats d'existence de solutions pour certaines classes d'équations différentielles du second ordre avec conditions aux limites nonlocales.

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la construction des solutions pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \quad -u''(x) = f(x,u), \; x \in (0,1), \\ u(0) - a_0 u'(0) = \int_0^1 h_1(s)\, u(s)\, ds, \\ u(1) + a_1 u'(1) = \int_0^1 h_2(s)\, u(s)\, ds, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2$ sont des fonctions continues et a_0, a_1 sont deux nombres réels positifs.

Ce chapitre est divisé comme suit: dans la section 2, on donne quelques résultats préliminaires. Les principaux résultats sont présentés et prouvés dans la section 3 et dans la dernière section on donne un exemple pour illustrer l'application de nos résultats.

3.2 Résultats préliminaires

On considère le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -u''(x) + Mu(x) = g(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) - a_0 u'(0) = \alpha_1, \\ u(1) + a_1 u'(1) = \alpha_2, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, a_0 et a_1 sont deux nombres réels positifs et $M \geq 0$, α_1 et α_2 sont deux nombres réels.

On a les résultats suivants

Proposition 1 ***Principe du maximum***

Soit $u \in C^2([0,1])$ *satisfaisant*

$$\begin{cases} -u''(x) + Mu(x) \geq 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) - a_0 u'(0) \geq 0, \\ u(1) + a_1 u'(1) \geq 0, \end{cases}$$

alors $u(x) \geq 0$, *pour tout* $x \in [0,1]$.

Preuve: La preuve est une conséquence immédiate du Théorème 10 Chapitre 1 dans [60]. ■

Proposition 2 *Le problème (3.2) admet une unique solution* $u \in C^2([0,1])$.

3.3 Résultats principaux

On considère le problème:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x,u), \quad t \in (0,1), \\ u(0) - a_0 u'(0) = \int_0^1 h_1(s) u(s) ds, \\ u(1) + a_1 u'(1) = \int_0^1 h_2(s) u(s) ds. \end{cases}$$

Sur les fonctions f, h_1 et h_2 on met les hypothèses suivantes:

(H$_1$) $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue.

(H$_2$) $\exists M\geq 0$ telle que la fonction $u\mapsto f(x,u)+Mu$ est une fonction croissante.

(H$_3$) $h_i:[0,1]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue pour $i=1,2$ avec $h_i(t)\geq 0$,pour $t\in[0,r_i]$ et $h_i(t)\leq 0$, pour $t\in[r_i,1]$ pour $i=1,2.$

Définition 3 *On dit que u est une solution du problème* ***(3.1)*** *si*

(i) $u\in C^1([0,1])\cap C^2(0,1).$

(ii) u vérifie ***(3.1).***

Définition 4 (α,β) *est dit un couple de sous et sur solution du problème* ***(3.1)*** *si*

(i) $(\alpha,\beta)\in C^1([0,1])\cap C^2(0,1)\times C^1([0,1])\cap C^2(0,1).$

$$(ii)\begin{cases}-\alpha''(x)\leq f(x,\alpha), & x\in(0,1),\\ -\beta''(x)\geq f(x,\beta), & x\in(0,1),\\ \alpha(0)-a_0\alpha'(0)\leq\int_0^{r_1}h_1(s)\alpha(s)\,ds+\int_{r_1}^1h_1(s)\beta(s)\,ds,\\ \alpha(1)+a_1\alpha'(1)\leq\int_0^{r_2}h_2(s)\alpha(s)\,ds+\int_{r_2}^1h_2(s)\beta(s)\,ds,\\ \beta(0)-a_0\beta'(0)\geq\int_0^{r_1}h_1(s)\beta(s)\,ds+\int_{r_1}^1h_1(s)\alpha(s)\,ds,\\ \beta(1)+a_1\beta'(1)\geq\int_0^{r_2}h_2(s)\beta(s)\,ds+\int_{r_2}^1h_2(s)\alpha(s)\,ds.\end{cases}$$

Définition 5 *Le couple* (u_*,u^*) *est dit quasi-solution du problème* ***(3.1)*** *si*

(i) $(u_*,u^*)\in C^1([0,1])\cap C^2(0,1)\times C^1([0,1])\cap C^2(0,1).$

$$(ii)\begin{cases}-u_*''(x)=f(x,u_*), & x\in(0,1),\\ -u^{*\prime\prime}(t)=f(x,u^*), & x\in(0,1),\\ u_*(0)-u_*{}'(0)=\int_0^{r_1}h_1(s)u_*(s)\,ds+\int_{r_1}^1h_1(s)\beta(s)\,ds,\\ u_*(1)+a_1u_*{}'(1)=\int_0^{r_2}h_2(s)u_*(s)\,ds+\int_{r_2}^1h_2(s)\beta(s)\,ds,\\ u^*(0)-a_0'u^{*\prime}(0)=\int_0^{r_1}h_1(s)u^*(s)\,ds+\int_{r_1}^1h_1(s)u_*(s)\,ds,\\ u^*(1)+a_1'u^{*\prime}(1)=\int_0^{r_2}h_2(s)u^*(s)\,ds+\int_{r_2}^1h_2(s)u_*(s)\,ds.\end{cases}$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 3.1 *Supposons que les hypothèses* (H_i) *soient satisfaites pour* $i = 1, 2, 3$ *et supposons que le problème (3.1) admet un couple de sous et sur solution* (α, β)*. Alors le problème (3.1) admet un couple de quasi-solution* (u_*, u^*) *vérifiant:*

$$\alpha(x) \le u_*(x) \le u^*(x) \le \beta(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Preuve: On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0(x) = \alpha(x),\ u_1(x) = \beta(x), \\ -u''_{n+2}(x) + Mu_{n+2}(x) = f(x, u_n) + Mu_n(x),\ \ x \in (0,1) \\ u_{n+2}(0) - a_0 u'_{n+2}(0) = \int_0^{r_1} h_1(s) u_n(s)\, ds + \int_{r_1}^1 h_1(s) u_{n+1}(s)\, ds \\ u_{n+2}(1) + a_1 u'_{n+2}(1) = \int_0^{r_2} h_2(s) u_n(s)\, ds + \int_{r_2}^1 h_2(s) u_{n+1}(s)\, ds \end{cases} \tag{3.3}$$

On procède par étapes.

1$^{\text{ère}}$ étape.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\alpha(x) \le u_{2n}(x) \le u_{2n+2}(x) \le u_{2n+3}(x) \le u_{2n+1}(x) \le \beta(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Pour cela on procède par récurrence.

Pour $n = 0$ vérifions que:

$$\alpha(x) = u_0(x) \le u_2(x) \le u_3(x) \le u_1(x) = \beta(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Pour tout $x \in [0,1]$, on pose

$$v(x) = u_2(x) - \alpha(x),\ w(x) = \beta(x) - u_3(x) \text{ et } z(x) = u_3(x) - u_2(x).$$

Pour tout $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned} -v''(x) + Mv(x) &= \alpha''(x) - u_2''(x) + M\ (u_2(x) - \alpha(x)) \\ &= -u_2''(x) + M\ u_2(x) + \alpha''(x) - M\alpha(x) \\ &= f(x, \alpha(x)) + M\alpha(x) + \alpha''(x) - M\alpha(x) \\ &\geq f(x, \alpha(x)) - f(x, \alpha(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$-v''(x) + Mv(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \in (0,1). \tag{3.4}$$

D'autre part, on a

$$v(0) - a_0 v'(0) = u_2(0) - a_0 u_2'(0) - \alpha(0) + a_0 \alpha'(0) \geq 0, \tag{3.5}$$

et

$$v(1) + a_1 v'(1) = u_2(1) + a_1 u_2'(1) - \alpha(1) - a_1 \alpha'(1) \geq 0. \tag{3.6}$$

Alors d'après (3.4), (3.5), (3.6) et en utilisant la Proposition 1, on obtient

$$v(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

C'est-à-dire

$$u_2(x) \geq u_0(x) = \alpha(x) \text{ pour tout } x \in [0,1]. \tag{3.7}$$

De même on montre que

$$u_3(x) \leq u_1(x) = \beta(x) \text{ pour tout } x \in [0,1]. \tag{3.8}$$

Vérifions maintenant que

$$u_2(x) \leq u_3(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Pour cela, on montre d'abord que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n}(x) \leq \beta(x) \text{ et } \alpha(x) \leq u_{2n+1}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

La preuve se fait par récurrence Pour $n = 0$, on a

$$u_0(x) = \alpha(x) \leq \beta(x) \text{ et } \alpha(x) \leq \beta(x) = u_1(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ fixé on a

$$u_{2n}(x) \leq \beta(x) \text{ et } \alpha(x) \leq u_{2n+1}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1],$$

et montrons que

$$u_{2n+2}(x) \leq \beta(x) \text{ et } \alpha(x) \leq u_{2n+3}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Pour cela on pose

$$p(x) = \beta(x) - u_{2n+2}(x) \text{ et } q(x) = u_{2n+3}(x) - \alpha(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Pour tout $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
-p''(x) + Mp(x) &= u''_{2n+2}(x) - \beta''(x) + M\beta(x) - Mu_{2n+2}(x) \\
&= -\left(-u''_{2n+2}(x) + Mu_{2n+2}(x)\right) - \beta''(x) + M\beta(x) \\
&= -\beta''(x) + M\beta(x) - \left(f(x, u_{2n}(x)) + Mu_{2n}(x)\right) \\
&\geq f(x, \beta(x)) + M\beta(x) - \left(f(x, u_{2n}(x)) + Mu_{2n}(x)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses de récurrence et l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$, on obtient

$$-p''(x) + Mp(x) \geq 0. \tag{3.9}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
p(0) - a_0 p'(0) &= \beta(0) - u_{n+2}(0) - a_0\beta'(0) + a_0 u'_{2n+2}(0) \\
&= \beta(0) - a_0\beta'(0) - \big(u_{n+2}(0) - a_0 u'_{2n+2}(0)\big) \\
&\geq \int_0^{r_1} h_1(s)\,\beta(s)\,ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\,\alpha(s)\,ds \\
&\quad - \left(\int_0^{r_1} h_1(s)\,u_{2n}(s)\,ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\,u_{2n+1}(s)\,ds\right) \\
&= \int_0^{r_1} h_1(s)\,(\beta(s) - u_{2n}(s))\,ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\,[\alpha(s) - (u_{2n+1}(s))]\,ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses de récurrence et l'hypothèse (H_3), on obtient

$$p(0) - a_0 p'(0) \geq 0. \tag{3.10}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
p(1) + a_1 p'(1) &= \beta(1) - u_{2n+2}(1) + a_1\beta'(1) - a_1 u'_{2n+2}(1) \\
&= \beta(1) + a_1\beta'(1) - \big(u_{2n+2}(1) + a_1 u'_{2n+2}(1)\big) \\
&\geq \int_0^{r_2} h_2(s)\,\beta(s)\,ds + \int_{r2}^1 h_2(s)\,\alpha(s)\,ds \\
&\quad - \left(\int_0^{r_2} h_2(s)\,u_{2n}(s)\,ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)\,u_{2n+1}(s)\,ds\right) \\
&= \int_0^{r2} h_2(s)\,(\beta(s) - u_{2n}(s))\,ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)\,[\alpha(s) - (u_{2n+1}(s))]\,ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses de récurrence et l'hypothèse (H_3), on obtient

$$p(1) + a_1 p'(1) \geq 0. \tag{3.11}$$

Alors d'après (3.9), (3.10), (3.11) et en utilisant la Proposition 1, on obtient

$$p(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

C'est-à-dire

$$u_{2n}(x) \leq \beta(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

D'une façon similaire, on a

$$\alpha(x) \leq u_{2n+1}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Posons maintenant

$$z(x) = u_3(x) - u_2(x), \text{pour tout } x \in [0,1],$$

alors pour tout $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
-z''(x) + Mz(x) &= \big(-u_3''(x) + Mu_3(x)\big) - \big(-u_2''(x) + Mu_2(x)\big) \\
&= (f(x,\beta(x)) + M\beta(x)) - (f(x,\alpha(x)) + M\alpha(x)). \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_2), on obtient

$$-z''(x) + Mz(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in (0,1). \tag{3.12}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
z(0) - a_0 z'(0) &= \big(u_3(0) - a_0 u_3'(0)\big) - \big(u_2(0) - a_0 u_2'(0)\big) \\
&= \int_0^{r_1} h_1(s)\,\beta(s)\,ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\,u_2(s)\,ds \\
&\quad - \left(\int_0^{r_1} h_1(s)\,\alpha(s)\,ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\,\beta(s)\,ds\right) \\
&\geq \int_0^{r_1} h_1(s)\,(\beta(s) - \alpha(s))\,ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\,[u_2(s) - (\beta(s))]\,ds.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3), on obtient

$$z(0) - a_0 z'(0) \geq 0. \tag{3.13}$$

D'une façon similaire, on montre on a

$$z\ (1) + a_1 z'(1) \geq 0. \tag{3.14}$$

Alors d'après (3.12), (3.13), (3.14) et en utilisant la Proposition 1, on obtient

$$z(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

C'est-à-dire

$$u_2(x) \leq u_3(x) \text{ pour tout } x \in [0,1]. \tag{3.15}$$

En conclusion d'aprés (3.7), (3.8) et (3.15), on a

$$\alpha(x) = u_2(x) \leq u_3(x) \leq u_1(x) = \beta(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Maintenant pour $n \in \mathbb{N}$ fixé on suppose que

$$u_{2n}(x) \leq u_{2n+2}(x) \leq u_{2n+3}(x) \leq u_{2n+1}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1],$$

et montrons que

$$u_{2n+2}(x) \leq u_{2n+4}(x) \leq u_{2n+5}(x) \leq u_{2n+3}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Pour cela on pose

$$v(x) = u_{2n+4}(x) - u_{2n+2}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Pour tout $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned} -v''(x) + Mv(x) &= -u''_{2n+4}(x) + u''_{2n+2}(x) + Mu_{2n+4}(x) - Mu_{2n+2}(x) \\ &= \left(-u''_{2n+4}(x) + Mu_{2n+4}(x)\right) - \left(-u''_{2n+2}(x) + Mu_{2n+2}(x)\right) \\ &= f(x, u_{2n+2}) + Mu_{2n+2}(x) - (f(x, u_{2n}) + Mu_{2n}(x)). \end{aligned}$$

D'aprés les hypothèses de réccurence et (H_2), on obtient

$$-v''(x) + Mv(x) \geq 0. \tag{3.16}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
v(0) - a_0 v'(0) &= \left(u_{2n+4}(0) - a_0 u'_{2n+4}(0)\right) - \left(u_{2n+2}(0) - a_0 u'_{2n+2}(0)\right) \\
&= \int_0^{r_1} h_1(s)\, u_{2n+2}(s)\, ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\, u_{2n+3}(s)\, ds \\
&\quad - \left(\int_0^{r_1} h_1(s)\, u_{2n}(s)\, ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\, u_{2n+1}(s)\, ds\right) \\
&= \int_0^{r_1} h_1(s)\left(u_{2n+2}(s) - u_{2n}(s)\right) ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\left[u_{2n+3}(s) - \left(u_{2n+1}(s)\right)\right] ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses de réccurence et (H_3), on obtient

$$v(0) - a_0 v'(0) \geq 0. \tag{3.17}$$

De même, on a

$$v(1) + a_1 v'(1) \geq 0. \tag{3.18}$$

En conclusion d'aprés (3.16), (3.17) et (3.18), on a

$$v(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

C'est-à-dire

$$u_{2n+2}(x) \leq u_{2n+4}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

D'une manière similaire on montre que

$$u_{2n+5}(x) \leq u_{2n+3}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1],$$

et

$$u_{2n+4}(x) \leq u_{2n+5}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1],$$

En conclusion, on a

$$u_{2n+2}(x) \leq u_{2n+4}(x) \leq u_{2n+5}(x) \leq u_{2n+3}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1],$$

et par suite, il résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ on a } \alpha(x) \leq u_{2n}(x) \leq u_{2n+2}(x) \leq u_{2n+3}(x) \leq u_{2n+1}(x) \leq \beta(x) \text{ pour } x \in [0,1].$$

La preuve de **l'étape** 1 est terminée.

2$^{\text{ème}}$ **étape**: Il existe une constante positive C_1 indépendante de $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\left|u_n'\right|_0 := \max_{x\in[0,1]} \left|u_n'(x)\right| \leq C_1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Puisque u_n est dérivable sur $[0,1]$, alors d'aprés le Théorème de la moyenne, ils existent $\tau_n \in [0,1]$ tel que

$$u_n(1) - u_n(0) = u_n'(\tau_n).$$

Alors, on a

$$u_{n+2}'(x) = u_{n+2}'(\tau_{n+2}) - \int_{\tau_{n+2}}^{x} f(t, u_n(t))\, dt + M \int_{\tau_{n+2}}^{x} (u_{2n+1}(t) - u_n(t))\, dt$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \left|u_{n+2}'(x)\right| &\leq \left|u_{n+2}'(\tau_n)\right| + \int_{\tau_{n+2}}^{x} |f(t, u_n(t))|\, dt + M \int_{\tau_{n+2}}^{x} |(u_{2n+1}(t) - u_n(t))|\, dt \\ &\leq c_1 + c_2 + c_3, \end{aligned}$$

où

$$c_1 = 2 \max_{x\in[0,1]} (|\alpha(x)|, |\beta(x)|)$$

$$c_2 = \max\{|f(x,u)| : x \in [0,1] \text{ et } \alpha \leq u \leq \beta\},$$

et

$$c_3 = 2M \max_{x\in[0,1]} \left(\left|\alpha\left(x\right)\right|, \left|\beta\left(x\right)\right|\right).$$

Si on pose par définition

$$C_1 = \max\left(\max_{x\in[0,1]}\left|\alpha'\left(x\right)\right|, \max_{x\in[0,1]}\left|\beta'\left(x\right)\right|, c_1 + c_2 + c_3\right),$$

on obtient

$$\left|u_n'\right|_0 \leq C_1.$$

La preuve de la $\mathbf{2}^{\text{ème}}$ **étape** est terminée.

$\mathbf{3^{ème}}$ **étape :** La suite de fonctions (u_n') est équicontinue dans $[0,1]$.

Soient $\varepsilon > 0$ et t, $s \in [0,1]$ tel que $t < s$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|u_{n+2}'\left(s\right) - u_{n+2}'\left(t\right)\right| \leq L\left|s-t\right|,$$

où

$$L = \max\left\{\left|f(x,u)\right| : x \in [0,1] \text{ et } \alpha \leq u \leq \beta\right\} + 2M \max_{x\in[0,1]} \left(\left|\alpha\left(x\right)\right|, \left|\beta\left(x\right)\right|\right).$$

Par suite si on choisit

$$\left|s-t\right| < \frac{\varepsilon}{L+1},$$

on obtient

$$\left|u_{n+2}'\left(s\right) - u_{n+2}'\left(t\right)\right| < \varepsilon.$$

Par conséquent, la suite de fonctions (u_n') est équicontinue dans $[0,1]$.

La preuve de la $\mathbf{3}^{\text{ème}}$ **étape** est terminée.

$\mathbf{4^{ème}}$ **étape:** La suite de fonctions $(u_{2n}, u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une quasi-solution de (3.1)**.**

D'aprés les **Etapes 2 et 3** les suites de fonctions $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées dans $C^1([0,1])$ et équicontinues dans $[0,1]$. Alors d'aprés le Théorème d'Arzéla-Ascoli il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^1([0,1])$ et une sous-suite $(u_{\psi(n)})$ de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^1([0,1])$, Par suite il existe des fonctions $\underline{U}$ et $\overline{U}$ de classe $C^1([0,1])$ telles que

$$\lim_{\varphi(n)\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \underline{U} \text{ et } \lim_{\varphi(n)\to+\infty} u'_{\varphi(n)} = \underline{U}',$$

et

$$\lim_{\psi(n)\to+\infty} u_{\psi(n)} = \overline{U} \text{ et } \lim_{\psi(n)\to+\infty} u'_{\psi(n)} = \overline{U}'$$

Mais d'aprés la $\mathbf{1}^{\text{ère}}$ **étape** la suite de fonction $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée et la suite de fonction $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = u_*,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = u^*.$$

Par unicité de la limite, on a

$$(u_*,u^*) = \left(\underline{U},\overline{U}\right).$$

Pour tout $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned} -u'_{2n}(x) &= u'_{2n}(a) + \int_a^x (f(t,u_{2n-2}(t)) + M(u_{2n-2}(t) - u_{2n}(t)))dt, \\ -u'_{2n+1}(x) &= u'_{2n+1}(a) + \int_a^x (f(t,u_{2n-1}(t)) + M(u_{2n-1}(t) - u_{2n+1}(t)))dt. \end{aligned}$$

Maintenat si on fait faire tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} f(t,u_{2n-2}(t)) + M(u_{2n-2}(t) - u_{2n}(t)) &\to f(t,u_*(t)), \\ f(t,u_{2n-1}(t)) + M(u_{2n-1}(t) - u_{2n+1}(t)) &\to f(t,u^*(t)). \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \exists K_1 &> 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \ |f(t,u_{2n-2}(t)) + M(u_{2n-2}(t) - u_{2n}(t))| \leq K_1, \\ \exists K_2 &> 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \ |f(t,u_{2n-1}(t)) + M(u_{2n-1}(t) - u_{2n+1}(t))| \leq K_2. \end{aligned}$$

Alors d'aprés le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned}
-u_*'(x) &= u_\star'(a) + \int_a^x f(t, u_*(t))\, dt, \\
-u^{*\prime}(x) &= u^{*\prime}(a) + \int_a^x f(t, u^*(t))\, dt
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
-u_*''(x) &= f(x, u_*),\ x \in (0,1), \\
-u^{*\prime\prime}(x) &= f(x, u^*),\ x \in (0,1).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

De même d'aprés les conditions aux limites dans (3.3) et en utilisant le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned}
u_*(0) - a_0 u_*'(0) = \textstyle\int_0^{r_1} h_1(s)\, u_*(s)\, ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\, u^*(s)\, ds, \\
u_*(1) + a_1 u_*'(1) = \textstyle\int_0^{r_2} h_2(s)\, u_*(s)\, ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)\, u^*(s)\, ds, \\
u^*(0) - a_0 u^{*\prime}(0) = \textstyle\int_0^{r_1} h_1(s)\, u^*(s)\, ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\, u_*(s)\, ds, \\
u^*(1) + a_1 u^{*\prime}(1) = \textstyle\int_0^{r_2} h_2(s)\, u^*(s)\, ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)\, u_*(s)\, ds,
\end{aligned}$$

et par conséquent d'aprés (3.19), il résulte que *le couple* (u_*, u^*) *est quasi-solution solution pour le problème* (3.1).

La preuve de l'étape 4 est terminée.

La preuve du Théorème est terminée. ■

Comme les quasi-solutions ne sont pas des vraies solutions, il est nécessaire d'ajouter d'autre conditions sur les fonctions f, h_1 et h_2 qui assure que $u_* = u^*$ et par conséquent le problème (3.1) admet au moins une solution.

Sur les fonctions f et h_1 et h_2 on met les hypothèses suivantes

(H_4) La fonction $u \mapsto f(x, u)$ est décroissante.

(H_5) $\int_0^{r_1} h_1(s)\, ds - \int_{r_1}^1 h_1(s)\, ds < 1$.

(H_6) $\int_0^{r_2} h_2(s)\, ds - \int_{r_2}^1 h_2(s)\, ds < 1$.

On a le résultat suivant

Théorème 3.2 *Supposons que les hypothèses (Hi) (i=1,...,6) sont satisfaites et soit* (α, β) *un couple de sous et sur solution du problème (3.1) telle que* $\alpha \leq \beta$ *dans* $[0,1]$. *Alors le problème (3.1) admet au moins une solution*

Preuve: D'aprés le théorème 3.1, le problème (*3.1*) admet une paire de quasi-solution (u_*, u^*) telle que

$$\alpha \leq u_* \leq u^* \leq \beta \text{ dans } [0,1].$$

Maintenant on pose par définition

$$z^*(x) = u^*(x) - u_*(x), \ x \in [0,1].$$

On a

$$z^*(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in [0,1]. \tag{3.20}$$

Maintenant on va montrer que

$$z^*(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Pour tout $x \in (0,1)$, on a

$$-z^{*\prime\prime}(x) = f(x, u^*) - f(x, u_*).$$

D'aprés (3.20) et l'hypothèse (H_4), on a

$$-z^{*\prime\prime}(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in (0,1).$$

Alors

$$z^*(x) \leq \max(z^*(0), z^*(1)).$$

On distingue deux cas

Premier cas: $\max\limits_{x \in [0,1]} z^*(x) = z^*(0)$.

On a

$$\begin{aligned} z^{*}(0) - a_0 z^{*\prime}(0) &= \int_0^{r_1} h_1(s)\, z^{*}(s)\, ds - \int_{r_1}^{1} h_1(s)\, z^{*}(s)\, ds \\ &\leq \left(\int_0^{r_1} h_1(s)\, ds - \int_{r_1}^{1} h_1(s)\, ds \right) z^{*}(0)\,. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\left(1 - \int_0^{r_1} h_1(s)\, ds + \int_{r_1}^{1} h_1(s)\, ds \right) z^{*}(0) - a_0 z^{*\prime}(0) \leq 0.$$

Comme $z^{*\prime}(0) \leq 0$, on obtient

$$\left(1 - \int_0^{r_1} h_1(s)\, ds + \int_{r_1}^{1} h_1(s)\, ds \right) z^{*}(0) \leq 0.$$

Par suite d'aprés l'hypothèse (H_5), on obtient

$$z^{*}(0) \leq 0.$$

Ce qui entraîne que

$$z^{*}(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in [0,1]\,,$$

et par conséquent d'aprés l'inégalité (3.20), il résulte que

$$z^{*}(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [0,1]\,.$$

C'est-à-dire

$$u^{*}(x) = u_{*}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1]\,,$$

et par conséquent le problème (3.1) admet au moins une solution.

Deuxième cas: $\max\limits_{x \in [0,1]} z^{*}(x) = z^{*}(1)\,.$

On a

$$\begin{aligned} z^*(1) + a_1 z^{*\prime}(0) &= \int_0^{r_2} h_2(s)\, z^*(s)\, ds - \int_{r_2}^1 h_2(s)\, z^*(s)\, ds \\ &\leq \left(\int_0^{r_2} h_2(s)\, ds - \int_{r_2}^1 h_2(s)\, ds \right) z^*(1). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\left(1 - \int_0^{r_2} h_2(s)\, ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)\, ds\right) z^*(1) + a_1 z^{*\prime}(1) \leq 0.$$

Comme $z^{*\prime}(1) \geq 0$, on obtient

$$\left(1 - \int_0^{r_2} h_2(s)\, ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)\, ds\right) z^*(1) \leq 0.$$

Par suite d'aprés l'hypothèse (H_5), on obtient

$$z^*(1) \leq 0.$$

Ce qui entraîne que

$$z^*(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in [0,1],$$

et par conséquent d'aprés l'inégalité (3.20), il résulte que

$$z^*(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

C'est-à-dire

$$u^*(x) = u_*(x) \ \text{ pour tout } x \in [0,1],$$

et par conséquent le problème (3.1) admet au moins une solution.

La preuve du Théorème 3.2 est terminée. ■

3.4 Application

Dans cette partie, on donne un exemple pour illustrer l'application de nos résultats.

Exemple 3.1 *On considère le problème suivant:*

$$\begin{cases} \quad -u''(x) = f(x,u), \ x \in (0,1), \\ u \ (0) - a_0 u'(0) = \int_0^1 h_1(s) u(s) ds, \\ u \ (1) + a_1 u'(1) = \int_0^1 h_2(s) u(s) ds, \end{cases} \tag{3.21}$$

avec

$$f(x,u) = \sin u - 2(x+1) u \ \textit{avec} \ x \in (0,1).$$

et

$$h_1(x) = \frac{1}{2} - x \ \textit{et} \ h_2(x) = \frac{1}{3} - x.$$

Tout d'abord il n'est pas difficile de vérifier que les fonctions f, h_1 et h_2 vérifient les hypothèses (H_i) i=1,2,3.

D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$ on prend

$$\alpha(x) = -L \text{ et } \beta(x) = L.$$

(α, β) est un couple de sous et sur solutions pour le problème (3.21) si on a

$$\begin{cases} -\alpha''(x) \leq f \ (x,\alpha), \quad x \in (0,1), \\ -\beta''(x) \geq f \ (x,\beta), \quad x \in (0,1), \\ \alpha(0) - a_0\alpha'(0) \leq \int_0^{\frac{1}{2}} h_1(s)\alpha(s) ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 h_1(s)\beta(s) ds, \\ \alpha(1) + a_1\alpha'(1) \leq \int_0^{\frac{1}{3}} h_2(s)\alpha(s) ds + \int_{\frac{1}{3}}^1 h_2(s)\beta(s) ds, \\ \beta(0) - a_0\beta'(0) \geq \int_0^{\frac{1}{2}} h_1(s)\beta(s) ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 h_1(s)\alpha(s) ds, \\ \beta(1) + a_1\beta'(1) \geq \int_0^{\frac{1}{3}} h_2(s)\beta(s) ds + \int_{\frac{1}{3}}^1 h_2(s)\alpha(s) ds. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} 0 \leq \sin(-L) + 2(x+1)L, \quad x \in (0,1), \\ 0 \geq \sin L - 2(x+1)L, \quad x \in (0,1), \\ -L \leq -L\int_0^{\frac{1}{2}} h_1(s)\,ds + L\int_{\frac{1}{2}}^1 h_1(s)\,ds, \\ -L \leq -L\int_0^{\frac{1}{3}} h_2(s)\,ds + L\int_{\frac{1}{3}}^1 h_2(s)\,ds, \\ L \geq L\int_0^{\frac{1}{2}} h_1(s)\,ds - L\int_{\frac{1}{2}}^1 h_1(s)\,ds, \\ L \geq L\int_0^{\frac{1}{3}} h_2(s)\,ds - L\int_{\frac{1}{3}}^1 h_2(s)\,ds. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} 0 \leq \sin(-L) + 2(x+1)L, \quad x \in (0,1), \\ 0 \geq \sin L - 2(x+1)L, \quad x \in (0,1), \\ 1 \geq \int_0^{\frac{1}{2}} h_1(s)\,ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 h_1(s)\,ds, \\ 1 \geq \int_0^{\frac{1}{3}} h_2(s)\,ds - \int_{\frac{1}{3}}^1 h_2(s)\,ds, \\ 1 \geq \int_0^{\frac{1}{2}} h_1(s)\,ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 h_1(s)\,ds, \\ 1 \geq \int_0^{\frac{1}{3}} h_2(s)\,ds - \int_{\frac{1}{3}}^1 h_2(s)\,ds. \end{cases}$$

Si on choisit

$$h_1(x) = \frac{1}{2} - x \text{ et } h_2(x) = \frac{1}{3} - x,$$

on obtient que (α, β) est un couple de sous et sur solutions, alors d'aprés le théorème 3.1 le problème (3.21) admet un couple de quasi-solution (u_*, u^*) telle que

$$-L \leq u_* \leq u^* \leq L \text{ dans } [0,1].$$

De plus les hypothèses (Hi); i=1...6 sont satisfaites et par conséquent d'aprés le théorème 3.2, il résulte que le problème (3.21) admet au moins une solution.

Chapitre 4

Existentce des quasi-solutions pour certaines classes de systèmes d'équations différentielles avec des conditions aux limites nonlocales.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intérèsse a l'existentce des solutions pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x,u,v),\ x \in (0,1)\,, \\ -v''(x) = g(x,u,v),\ x \in (0,1)\,, \\ u\,(0) - a_0 u'\,(0) = \int_0^1 h_1\,(s)\,u\,(s)\,ds, \\ u\,(1) + a_1 u'\,(1) = \int_0^1 h_2\,(s)\,u\,(s)\,ds, \\ v\,(0) - a_2 v'\,(0) = \int_0^1 h_3\,(s)\,v\,(s)\,ds, \\ v\,(1) + a_3 v'\,(1) = \int_0^1 h_4\,(s)\,v\,(s)\,ds, \end{cases}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, f est croissante en v, g est décroissante en u, $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, ..., 4$ sont des fonctions continues qui changent du signe dans $[0,1]$ et a_i sont des nombres réels positifs pour $i = 0, ..., 4$.

Ce chapitre est divisé comme suit: dans la section 2 on donne quelques définitions, on énonce et on montre le résultat principal de ce chapitre et dans la dernière section on donne un exemple d'application.

4.2 Résultat principal

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x,u,v), \; x \in (0,1)\,, \\ -v''(x) = g(x,u,v), \; x \in (0,1)\,, \\ u\,(0) - a_0 u'\,(0) = \int_0^1 h_1\,(s)\,u\,(s)\,ds, \\ u\,(1) + a_1 u'\,(1) = \int_0^1 h_2\,(s)\,u\,(s)\,ds, \\ v\,(0) - a_2 v'\,(0) = \int_0^1 h_3\,(s)\,v\,(s)\,ds, \\ v\,(1) + a_3 v'\,(1) = \int_0^1 h_4\,(s)\,v\,(s)\,ds, \end{cases} \tag{4.1}$$

Sur les fonctions f, g, h_1, h_2, h_3 et h_4 on met les hypothèses suivantes:

(H_1) $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

(H_2) $\exists M_1 \geq 0$ telle que la fonction $u \mapsto f\,(x,u,v) + M_1 u$ est une fonction croissante.

(H_3) $\exists M_2 \geq 0$ telle que la fonction $v \mapsto g\,(x,u,v) + M_2 v$ est une fonction croissante.

(H_4) La fonction f est croissante par rapport à v et la fonction g est décroissante par rapport à u.

(H_5) $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue pour $i = 1, ..., 4$ avec $h_i\,(t) \geq 0$,pour $t \in [0, r_i]$ et $h_i\,(t) \leq 0$, pour $t \in [r_i, 1]$ pour $i = 1, ..., 4$.

Définition 4.1 *On dit que (u,v) est une solution de (4.1) si*

(i) $(u,v) \in \left(C^1\,([0,1]) \cap C^2\,(0,1)\right)^2$.

(ii) (u,v) *vérifie* *(4.1)*.

Définition 4.2 *On dit que (u_*, u^*), (v_*, v^*) sont deux couples de quasi-solutions de (4.1) si* *(i)* $(u_*, u^*) \in \left(C^1([0,1]) \cap C^2(0,1)\right)^2$ *et* $(v_*, v^*) \in \left(C^1([0,1]) \cap C^2(0,1)\right)^2$.

$$(ii)\begin{cases} -u_*''(x) = f(x, u_*(x), v_*(x)),\ x \in (0,1), \\ -u^{*\prime\prime}(x) = f(x, u^*(x), v^*(x)),\ x \in (0,1), \\ -v_*''(x) = g(x, u^*(x), v_*(x)),\ x \in (0,1), \\ -v^{*\prime\prime}(x) = g(x, u_*(x), v^*(x)),\ x \in (0,1), \\ u_*(0) - a_0 u_*'(0) = \int_0^{r_1} h_1(s)u_*(s)ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)u^*(s)ds, \\ u_*(1) + a_1 u_*'(1) = \int_0^{r_2} h_2(s)u_*(s)ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)u^*(s)ds, \\ u^*(0) - a_0 u^{*\prime}(0) = \int_0^{r_1} h_1(s)u^*(s)ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)u_*(s)ds, \\ u^*(1) + a_1 u^{*\prime}(1) = \int_0^{r_2} h_2(s)u^*(s)ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)u_*(s)ds, \\ v_*(0) - a_2 v_*'(0) = \int_0^{r_3} h_3(s)v_*(s)ds + \int_{r_3}^1 h_3(s)v^*(s)ds, \\ v_*(1) + a_3 v_*'(1) = \int_0^{r_4} h_4(s)v_*(s)ds + \int_{r_4}^1 h_4(s)v^*(s)ds, \\ v^*(0) - a_2 v^{*\prime}(0) = \int_0^{r_3} h_3(s)v^*(s)ds + \int_{r_3}^1 h_3(s)v_*(s)ds, \\ v^*(1) + a_3 v^{*\prime}(1) = \int_0^{r_4} h_4(s)v^*(s)ds + \int_{r_4}^1 h_4(s)v_*(s)ds. \end{cases}$$

Définition 4.3 *On dit que* $(\underline{u}, \overline{u})$, $(\underline{v}, \overline{v})$ *sont deux couples de sous et sur solutions de (4.1) si*

i) $(\underline{u}, \overline{u}) \in \left(C^1([0,1]) \cap C^2(0,1)\right)^2$ et $(\underline{v}, \overline{v}) \in \left(C^1([0,1]) \cap C^2(0,1)\right)^2$.

$$\text{ii)}\begin{cases} -\underline{u}''(x) \le f(x, \underline{u}, \underline{v}),\ x \in (0,1), \\ -\overline{u}''(x) \ge f(x, \overline{u}, \overline{v}),\ x \in (0,1), \\ -\underline{v}''(x) \le g(x, \overline{u}, \underline{v}),\ x \in (0,1), \\ -\overline{v}''(x) \ge g(x, \underline{u}, \overline{v}),\ x \in (0,1), \\ \underline{u}(0) - a_0 \underline{u}'(0) \le \int_0^{r_1} h_1(s)\underline{u}(s)ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\overline{u}(s)ds, \\ \underline{u}(1) + a_1 \underline{u}'(1) \le \int_0^{r_2} h_2(s)\underline{u}(s)ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)\overline{u}(s)ds, \\ \overline{u}(0) - a_0 \overline{u}'(0) \ge \int_0^{r_1} h_1(s)\overline{u}(s)ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\underline{u}(s)ds, \\ \overline{u}(1) + a_1 \overline{u}'(1) \ge \int_0^{r_2} h_2(s)\overline{u}(s)ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)\underline{u}(s)ds, \\ \underline{v}(0) - a_2 \underline{v}'(0) \le \int_0^{r_3} h_3(s)\underline{v}(s)ds + \int_{r_3}^1 h_3(s)\overline{v}(s)ds, \\ \underline{v}(1) + a_3 \underline{v}'(1) \le \int_0^{r_4} h_4(s)\underline{v}(s)ds + \int_{r_4}^1 h_4(s)\overline{v}(s)ds, \\ \overline{v}(0) - a_2 \overline{v}'(0) \ge \int_0^{r_3} h_3(s)\overline{v}(s)ds + \int_{r_3}^1 h_3(s)\underline{v}(s)ds, \\ \overline{v}(1) + a_3 \overline{v}'(1) \ge \int_0^{r_4} h_4(s)\overline{v}(s)ds + \int_{r_4}^1 h_4(s)\underline{v}(s)ds. \end{cases}$$

On a le résultat suivant

Théorème 4.1 *On suppose que les hypothèses* $(H_i)_{i=1,..,5}$ *sont satisfaites et soit* $(\underline{u}, \overline{u})$, $(\underline{v}, \overline{v})$ *deux couples de sous et sur solutions de (4.1) sachant que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *et* $\underline{v} \leq \overline{v}$ *dans* $[0,1]$. *Alors le problème (4.1) admet deux couples de quasi-solutions* (u_*, u^*), (v_*, v^*) *tels que*

$$\underline{u} \leq u_* \leq u^* \leq \overline{u} \text{ dans } [0,1]\,,$$

et

$$\underline{v} \leq v_* \leq v^* \leq \overline{v} \text{ dans } [0,1]\,.$$

Preuve: La preuve est donnée en plusieurs étapes.

On définit les suites de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ comme suit

$$u_0 = \underline{u}, , u_1 = \overline{u}, v_0 = \underline{v}, v_1 = \overline{v}$$

et

$$\begin{cases} -u''_{n+2}(x) + Mu_{n+2}(x) = f(x, u_n, v_n) + Mu_n(x)\,, \quad x \in (0,1)\,, \\ u_{n+2}(0) - a_0 u'_{n+2}(0) = \int_0^{r_1} h_1(s)\, u_n(s)\, ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\, u_{n+1}(s)\, ds, \\ u_{n+2}(1) + a_1 u'_{n+2}(1) = \int_0^{r_2} h_2(s)\, u_n(s)\, ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)\, u_{n+1}(s)\, ds, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} -v''_{n+2}(x) + Mv_{n+2}(x) = g(x, u_{n+1}, v_n) + Mv_n(x)\,, \quad x \in (0,1)\,, \\ v_{n+2}(0) - a_2 v'_{n+2}(0) = \int_0^{r_3} h_3(s)\, v_n(s)\, ds + \int_{r_3}^1 h_3(s)\, v_{n+1}(s)\, ds, \\ v_{n+2}(1) + a_3 v'_{n+2}(1) = \int_0^{r_4} h_4(s)\, v_n(s)\, ds + \int_{r_4}^1 h_4(s)\, v_{n+1}(s)\, ds. \end{cases} \tag{4.3}$$

1$^{\text{ère}}$ étape : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [0,1]\,,$$

et

$$v_{2n} \leq v_{2n+2} \leq v_{2n+3} \leq v_{2n+1} \text{ dans } [0,1]\,.$$

Soit

$$w_0(x) := u_2(x) - u_0(x) \text{ et } z_0(x) := v_2(x) - v_0(x)\,, x \in [0,1]\,.$$

D'aprés (4.2), (4.3) et en utilisant la définition 4.3, on a

$$\begin{cases} -w_0''(x) + M_1 w_0(x) \geq 0,\ x \in (0,1), \\ w_0(0) - a_0 w_0'(0) \geq 0, \\ w_0(1) + a_1 w_0'(1) \geq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -z_0''(x) + M_2 z_0(x) \geq 0,\ x \in (0,1), \\ z_0(0) - a_2 z_0'(0) \geq 0, \\ z_0(1) + a_3 z_0'(1) \geq 0, \end{cases}$$

D'aprés le Lemme 2 du **chapitre1**, on obtient

$$w_0(x) \geq 0 \text{ et } z_0(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

C'est-à-dire

$$u_0 \leq u_2 \text{ et } v_0 \leq v_2 \text{ dans } [0,1]. \tag{4.4}$$

D'une manière similaire on montre que

$$u_3 \leq u_1 \text{ et } v_3 \leq v_1 \text{ dans } [0,1]. \tag{4.5}$$

Puis on pose

$$p_1(x) = u_2(x) - u_1(x) \text{ et } q_1(x) = v_2(x) - v_1(x),\ x \in [0,1],$$

alors d'aprés (4.2) et (4.3), on a

$$\begin{cases} -p_1''(x) + M_1 p_1(x) \\ \leq f(x, u_0(x), v_0(x)) + M_1 u_0(x) - f(x, u_1(x), v_1(x)) - M_1 u_1(x),\ x \in (0,1), \\ p_1(0) - a_0 p_1'(0) \leq \int_0^{r_1} h_1(s)(u_0(s) - u_1(s))\, ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)(u_1(s) - u_0(s))\, ds, \\ p_1(1) + a_1 p_1'(1) \leq \int_0^{r_2} h_2(s)(u_0(s) - u_1(s))\, ds + \int_{r_2}^1 h_1(s)(u_1(s) - u_0(s))\, ds, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -q_1''(x) + M_2 q_1(x) \\ \leq g(x, u_1(x), v_0(x)) + M_2 v_0(x) - g(x, u_0(x), v_1(x)) - M_2 v_1(x), \ x \in (0,1), \\ q_1(0) - a_2 q_1'(0) \leq \int_0^{r_3} h_3(s)(v_0(s) - v_1(s)) \, ds + \int_{r_3}^1 h_3(s)(v_1(s) - v_0(s)) \, ds, \\ q_1(1) + a_3 q_1'(1) \leq \int_0^{r_4} h_4(s)(v_0(s) - v_1(s)) \, ds + \int_{r_4}^1 h_4(s)(v_1(s) - v_0(s)) \, ds. \end{cases}$$

Puisque $u_0 = \underline{u} \leq \overline{u} = u_1$ et $v_0 = \underline{v} \leq \overline{v} = v_1$ dans J et en utilisant les hypothèses $(\mathrm{H_i})_{\mathrm{i}=1,..,5}$, on obtient

$$\begin{cases} -p_1''(x) + M_1 p_1(x) \leq 0, \ x \in (0,1), \\ p_1(0) - a_0 p_1'(0) \leq 0, \\ p_1(1) + a_1 p_1'(1) \leq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -q_1''(x) + M_2 q_1(x) \leq 0, \ x \in (0,1), \\ q_1(0) - a_2 q_1'(0) \leq 0, \\ q_1(1) + a_3 q_1'(1) \leq 0. \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 2 du **chapitre1**, on a

$$p_1(x) \leq 0 \text{ et } q_1(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

C'est-à-dire

$$u_2 \leq u_1 \text{ et } v_2 \leq v_1 \text{ dans } [0,1]. \tag{4.6}$$

Maintenant on montre que

$$u_2 \leq u_3 \text{ et } v_2 \leq v_3 \text{ dans } [0,1].$$

Pour cela on pose

$$p_3(x) = u_2(x) - u_3(x) \text{ et } q_3(x) = v_2(x) - v_3(x), \ x \in [0,1].$$

Alors d'aprés (4.2) et (4.3), on a

$$\begin{cases} -p_3''(x) + M_1 p_3(x) \\ = f(x, u_0(x), v_0(x)) + M_1 u_0(x) - f(x, u_1(x), v_1(x)) - M_1 u_1(x), \ x \in (0,1), \\ p_3(0) - a_0 p_3'(0) = \int_0^{r_1} h_1(s)(u_0(s) - u_1(s))\, ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)(u_1(s) - u_2(s))\, ds, \\ p_3(1) + a_1 p_3'(1) = \int_0^{r_2} h_2(s)(u_0(s) - u_1(s))\, ds + \int_{r_2}^1 h_1(s)(u_1(s) - u_2(s))\, ds, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -q_1''(x) + M_2 q_1(x) \\ = g(x, u_1(x), v_0(x)) + M_2 v_0(x) - g(x, u_2(x), v_1(x)) - M_2 v_1(x), \ x \in (0,1), \\ q_3(0) - a_2 q_3'(0) = \int_0^{r_3} h_3(s)(v_0(s) - v_1(s))\, ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)(v_1(s) - v_2(s))\, ds, \\ q_3(1) + a_3 q_3'(1) = \int_0^{r_4} h_4(s)(v_0(s) - v_1(s))\, ds + \int_{r_4}^1 h_4(s)(v_1(s) - v_2(s))\, ds. \end{cases}$$

Puisque $u_0 \leq u_2 \leq u_1$ et $v_0 \leq v_2 \leq v_1$ dans $[0,1]$ et en utilisant les hypothèses $(\mathrm{H_i})_{\mathrm{i}=1,..,5}$, on obtient

$$\begin{cases} -p_3''(x) + M_1 p_3(x) \leq 0, \ x \in (0,1), \\ p_3(0) - a_0 p_3'(0) \leq 0, \\ p_3(1) + a_1 p_3'(1) \leq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -q_3''(x) + M_2 q_3(x) \leq 0, \ x \in (0,1), \\ q_3(0) - a_2 q_3'(0) \leq 0, \\ q_3(1) + a_3 q_3'(1) \leq 0. \end{cases}$$

Par suite d'aprés le Lemme 2 du **chapitre1**, on a

$$p_3(x) \leq 0 \text{ et } q_3(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

C'est-à-dire

$$u_2 \leq u_3 \text{ et } v_2 \leq v_3 \text{ dans } J. \tag{4.7}$$

En conclusion d'aprés (4.4), (4.5), (4.6) et (4.7), on obtient

$$u_0 \leq u_2 \leq u_3 \leq u_1 \text{ dans } [0,1] \text{ et } v_0 \leq v_2 \leq v_3 \leq v_1 \text{ dans } [0,1].$$

On suppose que pour un $n \geq 1$ fixé, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [0,1], \tag{4.8}$$

et

$$v_{2n} \leq v_{2n+2} \leq v_{2n+3} \leq v_{2n+1} \text{ dans } [0,1], \tag{4.9}$$

et on montre que

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [0,1],$$

et

$$v_{2n+2} \leq v_{2n+4} \leq v_{2n+5} \leq v_{2n+3} \text{ dans } [0,1].$$

Preuve: Pour cela on pose

$$w_{n+1}(x) := u_{2n+4}(x) - u_{2n+2}(x), \ x \in [0,1],$$

et

$$z_{n+1}(x) := v_{2n+4}(x) - v_{2n+2}(x), \ x \in [0,1],$$

alors d'aprés (4.2) et (4.3), on a

$$\begin{cases} -w''_{n+1}(x) + M_1 w_{n+1}(x) \\ = f(x, u_{2n+2}(x), v_{2n+2}(x)) + M_1 (u_{2n+2}(x) - u_{2n}(x)) - f(x, u_{2n}(x), v_{2n}(x)), \ x \in (0,1), \\ w_{n+1}(0) - a_0 w'_{n+1}(0) = \int_0^{r_1} h_1(s) (u_{2n+2}(s) - u_{2n}(s)) \, ds + \int_{r_1}^1 h_1(s) (u_{2n+3}(s) - u_{2n+1}(s)) \, ds, \\ w_{n+1}(1) + a_1 w'_{n+1}(1) = \int_0^{r_2} h_2(s) (u_{2n+2}(s) - u_{2n}(s)) \, ds + \int_{r_2}^1 h_2(s) (u_{2n+3}(s) - u_{2n+1}(s)) \, ds, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -z''_{n+1}(x) + M_2 z_{n+1}(x) \\ = g(x, u_{2n+3}(x), v_{2n+2}(x)) + M_2 (v_{2n+2}(x) - v_{2n}(x)) - g(x, u_{2n+1}(x), v_{2n}(x)), \ x \in (0,1), \\ z_{n+1}(0) - a_2 z'_{n+1}(0) = \int_0^{r_3} h_3(s) (v_{2n+2}(s) - v_{2n}(s)) \, ds + \int_{r_3}^1 h_3(s) (v_{2n+3}(s) - v_{2n+1}(s)) \, ds, \\ z_{n+1}(1) + a_3 z'_{n+1}(1) = \int_0^{r_4} h_4(s) (v_{2n+2}(s) - v_{2n}(s)) \, ds + \int_{r_4}^1 h_4(s) (v_{2n+3}(s) - v_{2n+1}(s)) \, ds. \end{cases}$$

En utilisant les deux hypothèses de récurrences (4.8) et (4.9) et les hypothèses $(\mathrm{H_i})_{\mathrm{i}=1,..,5}$, on obtient

$$\begin{cases} -w''_{n+1}(x) + M_1 w_{n+1}(x) \geq 0, \ x \in (0,1), \\ w_{n+1}(0) - a_0 w'_{n+1}(0) \geq 0, \\ w_{n+1}(1) + a_1 w'_{n+1}(1) \geq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -z''_{n+1}(x) + M_2 z_{n+1}(x) \geq 0, \ x \in (0,1), \\ z_{n+1}(0) - a_2 z'_{n+1}(0) \geq 0, \\ z_{n+1}(1) + a_3 z'_{n+1}(1) \geq 0. \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 2 du **chapitre1**, on a

$$w_{n+1}(x) \geq 0 \text{ et } z_{n+1}(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

C'est-à-dire

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \text{ et } v_{2n+1} \leq v_{2n+4} \text{ dans } [0,1]. \tag{4.10}$$

D'une manière similaire on montre que

$$u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } J \text{ et } v_{2n+5} \leq v_{2n+3} \text{ dans } J, \tag{4.11}$$

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+3} \text{ dans } J \text{ et } v_{2n+4} \leq v_{2n+3} \text{ dans } J, \tag{4.12}$$

et

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \text{ dans } J \text{ et } v_{2n+4} \leq v_{2n+5} \text{ dans } [0,1]. \tag{4.13}$$

Alors d'aprés (4.10), (4.11), (4.12) et (4.13), on a

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [0,1],$$

et

$$v_{2n+2} \leq v_{2n+4} \leq v_{2n+5} \leq v_{2n+3} \text{ dans } [0,1].$$

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [0,1],$$

et

$$v_{2n} \leq v_{2n+2} \leq v_{2n+3} \leq v_{2n+1} \text{ dans } [0,1].$$

La preuve de la **1ère étape** est achevée.

2ème étape: Il existe une constante positive C_1 indépendante de $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\left|u_n'\right|_0 := \max_{x\in[0,1]} \left|u_n'(x)\right| \leq C_1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$ .Puisque u_n est dérivable sur $[0,1]$, alors d'aprés le Théorème de la moyenne, ils existent $\tau_n \in [0,1]$ tel que

$$u_n(1) - u_n(0) = u_n'(\tau_n).$$

Alors, on a

$$u_{n+2}'(x) = u_{n+2}'(\tau_{n+2}) - \int_{\tau_{n+2}}^{x} f\ (t, u_n(t), v_n(t))\,dt + M_1 \int_{\tau_{n+2}}^{x} (u_{2n+1}(t) - u_n(t))\,dt$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \left|u_{n+2}'(x)\right| &\leq \left|u_{n+2}'(\tau_{n+2})\right| + \int_{\tau_{n+2}}^{x} \left|f(t, u_n(t), v_n(t))\right| dt + M_1 \int_{\tau_{n+2}}^{x} \left|(u_{2n+1}(t) - u_n(t))\right| dt \\ &\leq c_1 + c_2 + c_3, \end{aligned}$$

où

$$c_1 = 2 \max_{x\in[0,1]} \left(\left|\underline{u}(x)\right|, \left|\overline{u}(x)\right|\right),$$

$$c_2 = \max\left\{\left|f(x,u,v)\right| : x \in [0,1],\ \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ et } \underline{v} \leq v \leq \overline{v}\right\},$$

et

$$c_3 = 2M_1 \max_{x\in[0,1]} \left(\left|\underline{u}(x)\right|, \left|\overline{u}(x)\right|\right).$$

Si on pose par définition

$$C_1 = \max\left(\max_{x\in[0,1]}\left|\underline{u}'(x)\right|, \max_{x\in[0,1]}\left|\overline{u}'(x)\right|, c_1+c_2+c_3\right),$$

on obtient ■

$$\left|u_n'\right|_0 \leq C_1.$$

La preuve de la **2**$^{\text{ème}}$ **étape** est terminée.

3$^{\text{ème}}$ **étape**: Il existe une constante positive C_2 indépendante de $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\left|v_n'\right|_0 := \max_{x\in[0,1]}\left|v_n'(x)\right| \leq C_2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La preuve est similaire à celle de la **2**$^{\text{ème}}$ **étape**.

4$^{\text{ème}}$ **étape :** La suite de fonction (u_n') est équicontinue dans $[0,1]$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $t,\ s \in [0,1]$ tel que $t < s$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|u_{n+2}'(s) - u_{n+2}'(t)\right| \leq L\,|s-t|,$$

où

$$L = \max\left\{|f(x,u,v)| : x \in [0,1],\ \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ et } \underline{v} \leq v \leq \overline{v}\right\} + 2M_1 \max_{x\in[0,1]}\left(|\underline{u}(x)|, |\overline{u}(x)|\right).$$

Par suite si on choisit

$$|s-t| < \frac{\varepsilon}{L+1},$$

on obtient

$$\left|u_{n+2}'(s) - u_{n+2}'(t)\right| < \varepsilon.$$

Par conséquent, la suite de fonction (u_n') est équicontinue dans $[0,1]$ .La preuve de la **4**$^{\text{ème}}$ **étape** est terminée.

5$^{\text{ème}}$ **étape :** La suite de fonction (v_n') est équicontinue dans $[0,1]$.

La preuve est similaire à celle de la **4**$^{\text{ème}}$ **étape**.

$6^{\text{ème}}$ étape: Les suites des fonctions $(u_{2n}, v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}, v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers deux couples de quasi-solutions de (4.1).

D'aprés les **Etapes 2, 3, 4** et **5** les suites de fonctions $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées dans $C^1([0,1])$ et équicontinues dans $[0,1]$. Alors d'aprés le Théorème d'**Arzéla-Ascoli** il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^1([0,1])$, une sous-suite $(u_{\psi(n)})$ de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^1([0,1])$, une sous-suite $(v_{\phi(n)})$ de $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^1([0,1])$, et une sous-suite $(v_{\gamma(n)})$ de $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^1([0,1])$.

Preuve: Par suite il existe des fonctions $\underline{U}$, $\overline{U}$, $\underline{V}$ et $\overline{V}$ de classe $C^1([0,1])$ telles que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varphi(n)\to+\infty} u_{\varphi(n)} &= \underline{U} \text{ et } \lim_{\varphi(n)\to+\infty} u'_{\varphi(n)} = \underline{U}',\\
\lim_{\psi(n)\to+\infty} u_{\psi(n)} &= \overline{U} \text{ et } \lim_{\psi(n)\to+\infty} u'_{\psi(n)} = \overline{U}',\\
\lim_{\phi(n)\to+\infty} v_{\phi(n)} &= \underline{V} \text{ et } \lim_{\phi(n)\to+\infty} v'_{\varphi(n)} = \underline{V}',
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{\gamma(n)\to+\infty} v_{\gamma(n)} = \overline{V} \text{ et } \lim_{\gamma(n)\to+\infty} v'_{\gamma(n)} = \overline{V}'.$$

Mais d'aprés la $\mathbf{1}^{\text{ère}}$ **étape** les deux suites de fonctions $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes et majorées et les deux suites de fonctions $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et minorées. Alors on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_{2n} &= u_*,\\
\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} &= u^*,\\
\lim_{n\to+\infty} v_{2n} &= v_*,
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} v_{2n+1} = v^*.$$

Par unicité de la limite, on a

$$(u_*,u^*) = \left(\underline{U}, \overline{U}\right) \text{ et } (v_*,v^*) = \left(\underline{V}, \overline{V}\right).$$

Pour tout $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
-u'_{2n}(x) &= -u'_{2n}(a) + \int_a^x (f(t, u_{2n-2}(t), v_{2n-2}(t)) + M_1(u_{2n-2}(t) - u_{2n}(t)))dt, \\
-u'_{2n+1}(x) &= -u'_{2n+1}(a) + \int_a^x (f(t, u_{2n-1}(t), v_{2n-1}(t)) + M_1(u_{2n-1}(t) - u_{2n+1}(t)))dt, \\
-v'_{2n}(x) &= -v'_{2n}(a) + \int_a^x (g(t, u_{2n-1}(t), v_{2n-2}(t)) + M_2(v_{2n-2}(t) - v_{2n}(t)))dt, \\
-v'_{2n+1}(x) &= -v'_{2n+1}(a) + \int_a^x (g(t, u_{2n}(t), v_{2n-1}(t)) + M_2(v_{2n-1}(t) - v_{2n+1}(t)))dt.
\end{aligned}$$

Maintenat si on fait faire tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
f(t, u_{2n-2}(t), v_{2n-2}(t)) + M_1(u_{2n-2}(t) - u_{2n}(t)) &\to f(t, u_*(t), v_*(t)), \\
f(t, u_{2n-1}(t), v_{2n-1}(t)) + M_1(u_{2n-1}(t) - u_{2n+1}(t)) &\to f(t, u^*(t), v^*(t)), \\
g(t, u_{2n-1}(t), v_{2n-2}(t)) + M_2(v_{2n-2}(t) - v_{2n}(t)) &\to g(t, u^*(t), v_*(t)), \\
g(t, u_{2n}(t), v_{2n-1}(t)) + M_2(v_{2n-1}(t) - v_{2n+1}(t)) &\to g(t, u_*(t), v^*(t)).
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\exists K_1 &> 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \; |f(t, u_{2n-2}(t), v_{2n-2}(t)) + M_1(u_{2n-2}(t) - u_{2n}(t))| \leq K_1, \\
\exists K_2 &> 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \; |f(t, u_{2n-1}(t), v_{2n-1}(t)) + M_1(u_{2n-1}(t) - u_{2n+1}(t))| \leq K_2, \\
\exists K_3 &> 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \; |g(t, u_{2n-1}(t), v_{2n-2}(t)) + M_2(v_{2n-2}(t) - v_{2n}(t))| \leq K_3, \\
\exists K_4 &> 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \; |g(t, u_{2n}(t), v_{2n-1}(t)) + M_2(v_{2n-1}(t) - v_{2n+1}(t))| \leq K_4.
\end{aligned}$$

Alors d'aprés le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned}
-u'_*(x) &= -u'_\star(a) + \int_a^x f(t, u_*(t), v_*(t))\, dt, \\
-u^{*\prime}(x) &= -u^{*\prime}(a) + \int_a^x f(t, u^*(t), v^*(t))\, dt, \\
-v'_*(x) &= -v'_\star(a) + \int_a^x g(t, u^*(t), v_*(t))\, dt, \\
-v^{*\prime}(x) &= -v^{*\prime}(a) + \int_a^x g(t, u_*(t), v^*(t))\, dt.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
-u_*''(x) &= f(x,u_*,v_*),\ x\in(0,1), \\
-u^{*\prime\prime}(x) &= f(x,u^*,v^*),\ x\in(0,1), \\
-v_*''(x) &= g(x,u^*,v_*),\ x\in(0,1), \\
-v^{*\prime\prime}(x) &= g(x,u_*,v^*),\ x\in(0,1).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

De même d'aprés les conditions aux limites dans (4.2), (4.3) et en utilisant le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned}
u_*(0)-a_0u_*'(0) &= \textstyle\int_0^{r_1} h_1(s)\,u_*(s)\,ds+\int_{r_1}^1 h_1(s)\,u^*(s)\,ds, \\
u_*(1)+a_1u_*'(1) &= \textstyle\int_0^{r_2} h_2(s)\,u_*(s)\,ds+\int_{r_2}^1 h_2(s)\,u^*(s)\,ds, \\
u^*(0)-a_0u^{*\prime}(0) &= \textstyle\int_0^{r_1} h_1(s)\,u^*(s)\,ds+\int_{r_1}^1 h_1(s)\,u_*(s)\,ds, \\
u^*(1)+a_1u^{*\prime}(1) &= \textstyle\int_0^{r_2} h_2(s)\,u^*(s)\,ds+\int_{r_2}^1 h_2(s)\,u_*(s)\,ds, \\
v_*(0)-a_2v_*'(0) &= \textstyle\int_0^{r_3} h_3(s)\,v_*(s)\,ds+\int_{r_3}^1 h_3(s)\,v^*(s)\,ds, \\
v_*(1)+a_3v_*'(1) &= \textstyle\int_0^{r_4} h_4(s)\,v_*(s)\,ds+\int_{r_4}^1 h_4(s)\,v^*(s)\,ds, \\
v^*(0)-a_2v^{*\prime}(0) &= \textstyle\int_0^{r_3} h_3(s)\,v^*(s)\,ds+\int_{r_3}^1 h_3(s)\,v_*(s)\,ds, \\
v^*(1)+a_3v^{*\prime}(1) &= \textstyle\int_0^{r_4} h_4(s)\,v^*(s)\,ds+\int_{r_4}^1 h_4(s)\,v_*(s)\,ds.
\end{aligned}$$

et par conséquent d'aprés (4.14), il résulte que *le couple* (u_*,u^*) *est quasi-solution solution pour le problème* (4.1)**.**

La preuve de la **6**$^{\text{ème}}$ **étape** est terminée. ■

La preuve du Théorème est terminée. ■

4.3 Application

Dans cette partie, on donne un exemple pour illustrer l'application de nos résultats.

Exemple 4.1 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x,u,v), \ x \in (0,1), \\ -v''(x) = g(x,u,v), \ x \in (0,1), \\ u(0) - a_0 u'(0) = \int_0^1 h_1(s)\,u(s)\,ds, \\ u(1) + a_1 u'(1) = \int_0^1 h_2(s)\,u(s)\,ds, \\ v(0) - a_2 v'(0) = \int_0^1 h_3(s)\,v(s)\,ds, \\ v(1) + a_3 v'(1) = \int_0^1 h_4(s)\,v(s)\,ds, \end{cases} \tag{4.15}$$

où

$$\begin{aligned} f\ (x,u,v) &= \sin u - 4u \ + v + (2+x)^2 \ \textit{pour tout } x \in (0,1), \\ g(x,u,v) &= \cos v - 4v \ - u + x^2 + 2x + 6 \ \textit{pour tout } x \in (0,1), \end{aligned}$$

et

$$h_i(x) = \begin{cases} k\left(\frac{1}{2} - x\right); 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ k\left(x - \frac{1}{2}\right); \frac{1}{2} \le x \le 0. \end{cases}$$

où k est une constante réelle positive et $i = 1, ..., 4$.

Tout d'abord il n'est pas difficile de vérifier que les fonctions f, g et h_i pour $i = 1, ..., 4$ vérifient les hypothèses (H_i) i=1,...,5.

D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$, on prend

$$\underline{u}(x) = \underline{v}(x) = x \ \textit{et } \overline{u}(x) = \overline{v}(x) = 4.$$

$(\underline{u},\overline{u})$, $(\underline{v},\overline{v})$ sont deux couples de sous et sur solutions du problème (4.15) si on a

$$\begin{cases} -\underline{u}''(x) \leq f(x,\underline{u},\underline{v}),\ x \in (0,1)\,, \\ -\overline{u}''(x) \geq f(x,\overline{u},\overline{v}),\ x \in (0,1)\,, \\ -\underline{v}''(x) \leq g(x,\overline{u},\underline{v}),\ x \in (0,1)\,, \\ -\overline{v}''(x) \geq g(x,\underline{u},\overline{v}),\ x \in (0,1)\,, \\ \underline{u}(0) - a_0\underline{u'}\,(0) \leq \int_0^{r_1} h_1(s)\underline{u}(s)ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\overline{u}(s)ds, \\ \underline{u}(1) + a_1\underline{u'}\,(1) \leq \int_0^{r_2} h_2(s)\underline{u}(s)ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)\overline{u}(s)ds, \\ \overline{u}(0) - a_0\overline{u}'\,(0) \geq \int_0^{r_1} h_1(s)\overline{u}(s)ds + \int_{r_1}^1 h_1(s)\underline{u}(s)ds, \\ \overline{u}(1) + a_1\overline{u}'\,(1) \geq \int_0^{r_2} h_2(s)\overline{u}(s)ds + \int_{r_2}^1 h_2(s)\underline{u}(s)ds, \\ \underline{v}(0) - a_2\underline{v'}\,(0) \leq \int_0^{r_3} h_3(s)\underline{v}(s)ds + \int_{r_3}^1 h_3(s)\overline{v}(s)ds, \\ \underline{v}(1) + a_3\underline{v'}\,(1) \leq \int_0^{r_4} h_4(s)\underline{v}(s)ds + \int_{r_4}^1 h_4(s)\overline{v}(s)ds, \\ \overline{v}(0) - a_2\overline{v}'\,(0) \geq \int_0^{r_3} h_3(s)\overline{v}(s)ds + \int_{r_3}^1 h_3(s)\underline{v}(s)ds, \\ \overline{v}(1) + a_3\overline{v}'\,(1) \geq \int_0^{r_4} h_4(s)\overline{v}(s)ds + \int_{r_4}^1 h_4(s)\underline{v}(s)ds. \end{cases}$$

car:

$$\begin{cases} 0 \leq f(x,\underline{u},\underline{v}) = \sin x + x^2 + x + 4,\ x \in (0,1)\,, \\ 0 \geq f(x,\overline{u},\overline{v}) = \sin 4 + 4x + x^2 - 8,\ x \in (0,1)\,, \\ 0 \leq g(x,\overline{u},\underline{v}) = \cos x + 1 + (x-1)^2\,,\ x \in (0,1)\,, \\ 0 \geq g(x,\underline{u},\overline{v}) = \cos 4 + x^2 + x - 10,\ x \in (0,1)\,, \\ -a_0 \leq \frac{25k}{48} \\ 1 + a_1 \leq \frac{25k}{48} \\ 4 \geq \frac{29k}{48} \\ 4 \geq \frac{29k}{48} \\ -a_2 \leq \frac{25k}{48} \\ 1 + a_3 \leq \frac{25k}{48} \\ 4 \geq \frac{29k}{48} \\ 4 \geq \frac{29k}{48}. \end{cases}$$

Alors si on choisit $2 \leq k \leq 6$ *et*

$$a_1 \leq \frac{25k}{48} - 1 \ \textit{et}\ a_3 \leq \frac{25k}{48} - 1,$$

on obtient que $(\underline{u},\overline{u})$*et* $(\underline{v},\overline{v})$ *deux couples de sous et sur solutions et par suite d'aprés le théorème 4.1 le problème (4.15) admet deux couples de quasi-solutions* (u_*,u^*), (v_*,v^*) *tels que*

$$\underline{u}\leq u_*\leq u^*\leq\overline{u}\ \ dans\ \ [0,1]\,,$$

$$\underline{v}\leq v_*\leq v^*\leq\overline{v}\ \ dans\ \ [0,1]\,.$$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, en utilisant la méthode des sous et sur solutions couplée avec la technique itérative, on a étudié l'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles avec conditions initiales nonlocales ou aux limites nonlocales et de systèmes d'équations différentielles avec conditions initiales nonlocales ou aux limites nonlocales.

Donc il est intéressant de compléter cette étude par :

1/ Montrer l'existence des solutions dans le **Chapitre 4** qui est un problème ouvert.

2/Trouver des méthodes numériques adéquates à nos résultats.

3/ L'étude de l'existence des solutions pour le problème suivant:

$$\begin{cases} -u''(x) = f\ (x, u; u'),\ x \in (0,1), \\ u(0) - a_0 u'(0) = \int_0^1 h_1(s)\, u(s)\, ds, \\ u(1) + a_1 u'(1) = \int_0^1 h_2(s)\, u(s)\, ds, \end{cases}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2$ sont des fonctions continues et a_0, a_1 sont deux nombres réels positifs.

4/ Faire les mêmes travaux dans le cas où la sous solution est supérieure ou égale à la sur solution.

5/ Faire la même étude dans les espaces de Banach.

Annexe

Ensembles équicontinues.(Voir [63, Chapitre XIV page 313]).

Soient (E, d_1) et (F, d_2) deux espaces métriques, et soit $\mathfrak{F}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications $f : E \to F$.

Définition 1: Une partie H de $\mathfrak{F}(E, F)$ est dite équicontinue en $x \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in E, \forall f \in H : d_1(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Définition 2: Une partie H de $\mathfrak{F}(E, F)$ est dite équicontinue sur E si elle est équicontinue pour tout $x \in E$.

Théorème (**Théorème d'Arzelà-Ascoli, ou de Ascoli-Arzelà** (Voir [**63, Chapitre XIV page 313**])).

Soit (K, d_1) un espace métrique compact, et soit (F, d_2) un espace métrique quelconque. On considère l'espace métrique $C(K, F)$ des applications $f : K \to F$ continues sur K, muni de la distance uniforme $d(f, g) = \sup\limits_{x \in K} d_2(f(x), g(x))$.

Soit H une partie de $C(K, F)$. Alors on a

L'adhérence de H est compacte dans $C(K, F)$ si et seulement si

i) H est equicontinue sur K.

Et

ii) Pour tout x dans K, l'ensemble $H(x) = \{f(x) : x \in K\}$ est d'adhérence compacte dans F.

Remarque

Si $F=\mathbb{R}$, pour vérifier la seconde condition, il suffit de montrer que $H(x)$ est bornée.

Théorème (**Théorème de convergence dominée de Lebesgue** (Voir [**14, Théorème IV. 2 page 54**]).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(I)$. On suppose que

i) $f_n(x) \to f(x)$ p. p. sur I,

ii) il existe une fonction $g \in L^1(I)$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur I.

Alors $f \in L^1(I)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_I f_n(x)\,dx = \int\limits_I f(x)\,dx$.

Fonctions à variation bornée (Voir [**14**]).

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est dite à variation bornée s'il existe un nombre réel A tel que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq A,$$

pour toute suite $x_0 < x_1 < ... < x_n$ de I.

Bibliographie

[1] W. F. Ames, Monotonically convergent upper and lower bounds for classes of conflicting populations, in Proceedings of the International Conference on Nonlinear Systems and Applications, Academic Press, New York, 1977, 3-14.

[2] W. F. Ames, Nonlinear Ordinary Differential Equations in Transport Processes, Academic Press,, New York (1968).

[3] D. R. Anderson, Existence of three solutions for a first-order problem with nonlinear nonlocal boundary conditions, J. Math. Anal. Appl. 408 (2013) 318–323.

[4] R. E. Bellman, R. E. Kalaba, Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems, American Elsevier, New York, (1965).

[5] R. Bellman, H. Kagiwada, R. Kalaba, Orbit determination as a multi-point boundary value problem and quasilinearization, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 48 (1962), 1327-1329.

[6] S. W. Benson, The Foundations of Chemical Kinetics, Mc Graw Hill , New York (1960).

[7] L. E. Bobisud, D. O'Regan, Boundary value problems for first-order differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 99 (1987), 501-506.

[8] O. Bolojan, R. Precup, Implicit first order differential systems with nonlocal conditions, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 69 (2014), 1-13.

[9] O. Bolojan-Nica, G. Infante, R. Precup, Existence results for systems with coupled nonlocal initial conditions, Nonlinear Anal. 94 (2014), 231-242.

[10] O. Bolojan-Nica, G. Infante, R. Precup, Existence results for systems with nonlinear coupled nonlocal initial conditions, Math. Bohem. 140 (2015), 371-384.

[11] A. Boucherif and S. M. Bouguima, Nonlinear second order ordinary differential equations with nonlocal boundary conditions, Comm. in Applied Nonl. Anal. **5** (1998), 73-85.

[12] A. Boucherif, R. Precup, On the nonlocal initial value problem for first order differential equations, Fixed Point Theory 4 (2003), 205-212.

[13] A. Boutayeb A, A. Chetouani A: Dynamics of a disabled population in Morocco. BioMedical Engineering 2 (2003), 6 pages.

[14] H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[15] R. C. Brown, A. M. Krall, Ordinary differential operators under Stieltjes boundary conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 198 (1974), 73-92.

[16] V. Capasso and K. Kunisch, A reaction-diffusion system arising in modelling manenvironment diseases. Quart. Appl. Math., 46 (1988), 431–450.

[17] S. N. Chow, A. Lasota, On boundary value problems for ordinary differential equations, J. Differential Equations 14 (1973), 326-337.

[18] L. Collatz, Functional Analysis and Numerical Mathematics, Academic Press, , New York (1966).

[19] R. Conti, Problèmes linéaires pour les équations différentielles ordinaires, Math. Nachr. 23 (1961), 161-178.

[20] K. Deimling, V. Lakshmikantham, Quasi-solutions and their role in the qualitative theory of differential equations, Nonlinear Anal. 4 (1980), 657-663.

[21] M. Derhab, A quasilinear elliptic system with integral boundary conditions. Proc. Jangjeon Math. Soc. 12 (2009), 165–187.

[22] M. Derhab, T. Khedim, B. Messirdi, Existence results of first-order differential equations with integral boundary conditions at resonance, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 24 (2017), 93-106.

[23] M. Derhab, T. Khedim, B. Messirdi, Existence results of first-order differential systems with mixed quasimonotone nonlinearities and integral boundary conditions, Panam, J. 27 (2017), 59-77.

[24] D. Franco, G. Infante, M. Zima, Second order nonlocal boundary value problems at resonance, Math. Nachr. 284 (2011), 875-884.

[25] G. Infante, P. Jebelean, F. Madjidi, Infinite first order differential systems with nonlocal initial conditions, Bound. Value Probl. 2015 (2015), 10 pages.

[26] G. Infante, P. Pietramala, M. Tenuta, Existence and localization of positive solutions for a nonlocal BVP arising in chemical reactor theory, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 19 (2014), 2245–2251.

[27] G. H. Greco, S. Mazzucchi, Peano's 1886 existence theorem on first-order scalar differential equations: a review, Boll. Unione Mat. Ital. 9 (2016), 375-389.

[28] G.H. Greco, S. Mazzucchi, The originality of Peano's 1886 existence theorem on scalar differential equations, J. Convex Anal. 23 (2016), 649-659.

[29] C. P. GUPTA, A second order m-point boundary value problem at resonance, Nonlinear Anal. 24 (1995), 1483-1489.

[30] D. R. Herlea, Existence and localization of positive solutions to first order differential systems with nonlocal conditions, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 59 (2014), 221, 231.

[31] T. Jankowski, Differential equations with integral boundary conditions, J. Comput. Appl. Math. 147 (2002), 1-8.

[32] T. Jankowski, Monotone iterative method for first-order differential equations at resonance, Appl. Math. Comput. 233 (2014), 20-28.

[33] M. Kakabadze, On a problem with integral conditions for a system of ordinary differential equations (in Russian), Matematický časopis 24 (1974), 225–237.

[34] George L. Karakostas, P. Ch. Tsamatos, Existence of multiple positive solutions for a nonlocal boundary value problem, Topological Methods in Nonlinear Analysis 19 (2002), 109–121.

[35] I. Kossowski, B. Przeradzki, First order systems of odes with nonlinear nonlocal boundary conditions, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 73 (2015), 1-10.

[36] G. S. Ladde, V. Lakshmikantham, A. S. Vatsala, Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations, Pitman, London, 1985.

[37] V. Lakshmikantham, Nonlinear Systems and Applications An International Conference, Academic Press, Inc. , New York (1977).

[38] J. LaSalle, Uniqueness theorems and successive approximations, Ann. of Math. 50 (1949), 722-730.

[39] A. Lasota, On the existence and uniqueness of solutions of a multipoint boundary value problem, Ann. Polon. Math. 38 (1980), 305-310.

[40] B. Liu, Existence and uniqueness of solutions to first-order multipoint boundary value problems, Appl. Math. Lett. 17 (2004), 1307-1316.

[41] R. Ma, Existence and uniqueness of solutions to first-order three-point boundary value problems, Appl. Math. Lett. 15 (2002), 211-216.

[42] R. Ma, Multiplicity results for a three-point boundary value problem at resonance, Nonlinear Anal. 53 (2003), 777-789.

[43] M. McKibben, Discovering Evolution Equations with Applications. Vol. I. Deterministic Models, Chapman & Hall/CRC, Applied Mathematics and Nonlinear Science Series 2011.

[44] G. H. Meyer, Initial Value Metbods for Boundary Value Problems Theory and Application of Invariant Imbedding, Academic Press, New York and London (1973).

[45] M. Mohamed, B. Thompson, M. Sufian Jusoh, First-order three-point boundary value problems at resonance, J. Comput. Appl. Math 235 (2011) 4796–4801.

[46] P. Montel, Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle, Bull. Sci. Math. 50 (1926), 205-217.

[47] J. Moore, Existence of multiple quasifixed points of mixed monotone operators by iterative techniques, Comput. Appl. Math. 9 (1981), 135-141.

[48] M. Müller, Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Math. Z. 26 (1927), 619-645.

[49] K.N. Murty, S. Sivasundaram, Existence and uniqueness of solutions to three-point boundary value problems associated with non-linear first order systems of differential equations, J. Math. Anal. Appl. 173 (1993), 158-164.

[50] O. Nica, Initial-value problems for first-order differential systems with general nonlocal conditions, Electron. J. Differential Equations 2012 (2012), 1-15.

[51] O. Nica, Nonlocal initial value problems for first order differential systems, Fixed Point Theory 13 (2012), 603-612.

[52] O. Nica, R. Precup, On the nonlocal initial value problem for first order differential systems, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 56 (2011), 113–125.

[53] O. Nicoletti, Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, Atti Della R. Accademia Delle Scienze Di Torino 33 (1897-1898), 746-759.

[54] J. J. Nieto, R. Rodríguez-López, Green's function for first-order multipoint boundary value problems and applications to the existence of solutions with constant sign, J. Math. Anal. Appl. 388 (2012), 952–963.

[55] S. K. Ntouyas, Nonlocal initial and boundary value problems: a survey. In Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, Vol. II.Elsevier B V: Amsterdam, 2005; 461–557.

[56] B. G. Pachpatte, Boundary value problems for nonlinear systems of differential equations in Banach spaces, Funkcial. Ekvac. 25 (1982), 199-206.

[57] C. V. Pao, An iterative method for solving a two-point boundary-value problem, J. Math. Phys. 16 (1975), 1134-1138.

[58] G. Peano: Sull'integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine, Atti R.Accad. Sci. Torino 21 (1886), 437–445.

[59] R. Precup, D. Trif, Multiple positive solutions of non-local initial value problems for first order differential systems, Nonlinear Anal. 75 (2012), 5961-5970.

[60] M. H. Protter and H. F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, Prentice-Hall, Inc., 1967.

[61] B. Przeradzki, R. Stanczy, Solvability of a multi-point boundary value problem at resonance, J. Math. Anal. Appl. 264 (2001), 253-261.

[62] A. Sommerfeld, Ein Betrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung (In english: An amount for the hydrodynamic explanation of the turbulent liquid movement), In: Proceedings of the 4th international congress Math., Rome, vol 3 (1908), p 116–124.

[63] Y. Sonntag, Topologie et Analyse Fonctionnelle, Cours de licence avec 240 exercices et 30 problèmes corrigés, Edition Ellipses, Collection Universités, Mai 1998.

[64] E. Stanley Lee, I. Hwang, Stream quality modeling by quasilinearization, Water Pollution Control Federation 43 (1971), 306-317.

[65] J. Szarski, Differential Inequalities, PWN, Polish Sci. Publ., Warsaw, 1965.

[66] B. S. Thomson, Theory of the Integral, CreateSpace, 2013.

[67] M. Urabe, An existence theorem for multi-point boundary value problems, Funkcial. Ekvac. 9 (1966), 43-60.

[68] M. Urabe, Numerical solution of multi-point boundary value problems in Chebyshev series theory of the method, Numer. Math. 9 (1967), 341-366.

[69] W. Walter, Differential inequalities, in Inequalities: Fifty Years On From Hardy, Littlewood and Pólya, Proceedings of the International Conference London Mathematical Society, edited by W. N. Everitt, Marcel Dekker. Inc., New York, 1991, 249-283.

[70] J. R. L.Webb, M. Zima, Multiple positive solutions of resonant and non-resonant nonlocal boundary value problems, Nonlinear Anal. 71 (2009), 1369–1378.

[71] A. Wintner, On the convergence of successive approximations, Amer. J. Math. 68 (1946), 13-19.

[72] W.M.Whyburn, Differential equations with general boundary conditions, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 692-704.

[73] W. M. Whyburn, Matrix differential equations, Amer. J. Math. 56 (1934), 587-592.

[74] W. M. Whyburn, Over and under functions as related to differential equations, Amer. Math. Monthly 47 (1940), 1-10.

[75] A. D. Ziebur, Uniqueness and the convergence of successive approximations, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 899-903.

[76] X. Zhang, M. Feng, W. Ge, Existence result of second-order differential equations with integral boundary conditions at resonance, J. Math. Anal. Appl. 353 (2009), 311-319.