

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE
UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID - TLEMCCEN
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MASTER

Option : Systèmes dynamiques et applications à la dynamiques de populations

Présenté par :

M^{lle} BELKHODJA Kheira

Thème

Contrôle sur des modèles halieutiques

Devant le jury composé de :

Mr. S.M.Bouguima	Prof. Université de Tlemcen.	Président.
Mr. T.Mahdjoub	M.C.A Université de Tlemcen.	Examineur.
Mr. B.Abdellaoui	M.C.A Université de Tlemcen.	Examineur.
Mr. A. MOUSSAOUI	M.C.A, Université de Tlemcen.	Encadreur.

Année Universitaire : 2011 — 2012

Remerciements

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je remercie mes parents d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont toujours été une source de motivation d'encouragements et de beaucoup de bonheur.

Je remercie également ma sur et mon frère pour leur soutien et leurs idées.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Moussaoui, qui, en tant que mon encadreur, s'est toujours montré à l'écoute tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que pour son aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

C'est, encore, un grand plaisir pour moi, d'adresser mes plus sincères remerciements à : Mr. S.M.Bouguima d'avoir bien voulu présider mon jury, Mr. B. Abdellaoui et Mr. T. Mahdjoub d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

En effet, je voudrai remercier mon université, ma famille, mon encadreur et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

Merci à mes professeurs et enseignants d'avoir été là, de nous avoir énormément appris par la qualité des enseignements qu'ils nous ont prodigués.

J'adresse mes remerciements aussi à notre chef de département de mathématiques, Mr Benmiloud Mebkhout.

Je remercie également mes camarades de Master II et mes amis du département pour leurs conseils et leurs idées.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A mon grand père.

A mes très chers parents.

A ma soeur : Amina.

A mon frère : Abdelmajid.

A toute ma famille .

A tous mes amis sans exception .

A mes amis : Wafaa, Rima, soumia, Ikram, Kheira, Nasser, Merwan, Oussama, Soufiane,
Yassine, Adil, Ilyes, Anouar.

A tous mes enseignants.

A tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie .

Table des matières

Introduction	3
1 Modèles bioéconomiques	4
1.1 Modèle de base en halieutique	4
1.2 Rendement durable maximal (Maximal Sustained Yield) MSY	5
1.3 Modèle bio-économique	10
1.4 Rendement économique durable maximal (Maximal Economic Yield) MEY	11
1.5 Modèle d'optimisation dynamique	14
1.6 Conclusion	16
2 Notions de contrôle optimal	17
2.1 Règle des multiplicateurs de Lagrange (contraintes d'égalité)	18
2.2 Théorie du contrôle optimal en une dimension	19
2.3 Principe de maximum de Pontryaguin	20
2.4 Modèle bioéconomique linéaire	21
2.5 Conclusion	23
3 Impacts d'une gestion par quota sur la stabilisabilité économique et biologique d'un modèle de pêche	24
3.1 Analyse de la dynamique du modèle	24
3.2 Simulations numériques	29
3.3 Temps optimal	33
3.3.1 Résolution du Problème de Temps Optimal	33
3.3.2 Conclusion	39
Bibliographie	40

Introduction

La présente étude s'articule en deux parties, La première a pour but de dresser un aperçu de la modélisation en halieutique. Elle présente différents résultats classiques, qui ont servi de base à nos travaux. Nous présentons tout d'abord le modèle bioéconomique puis le principe de maximum de Pontryagin.

L'objet de la deuxième partie est l'analyse de la stabilité économique et biologique d'un modèle bioéconomique. Or les simulations numériques montrent que si on capture plus que le quota autorisé on perd l'équilibre. Donc le problème est d'amener l'état du modèle bioéconomique d'une position initiale quelconque (x_0, y_0) à une position finale (x_T, y_T) désirée en un temps minimale T .

Mots clés : Modélisation, contrôle optimal, dynamique de population, principe de Pontryagin.

Chapitre 1

Modèles bioéconomiques

Nous présentons ici quelques modèles, couplant la dynamique du stock avec l'économie.

1.1 Modèle de base en halieutique

La forme générale d'un modèle de base pour la gestion de ressources halieutiques est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x) - h(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

où

$x = x(t)$ la densité du stock au temps t .

$h(t)$ la récolte du stock au temps t .

$G(x)$ la fonction de croissance naturelle, vérifiant :

$$\begin{cases} G(0) = G(K) = 0, & t \geq 0 \\ G(x) > 0 & \text{pour } 0 < x < K \\ G''(x) < 0 & \text{pour } 0 < x < K, \end{cases}$$

où K la capacité limite du milieu.

Si $h(t) = 0$ (i.e pas de pêche), alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K$

Le modèle sans pêche est donné par

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Ce modèle admet deux points d'équilibre : $x_1 = 0$ instable et $x_2 = K$ stable.
Une des fonctions de croissance les plus utilisés dans la littérature est la fonction loges-
tique [19, 6] :

$$G(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

où :

r : le taux de croissance naturelle,

K : la capacité limite du milieu.

La figure 1.1 présente la fonction de croissance naturelle du modèle sans pêche.

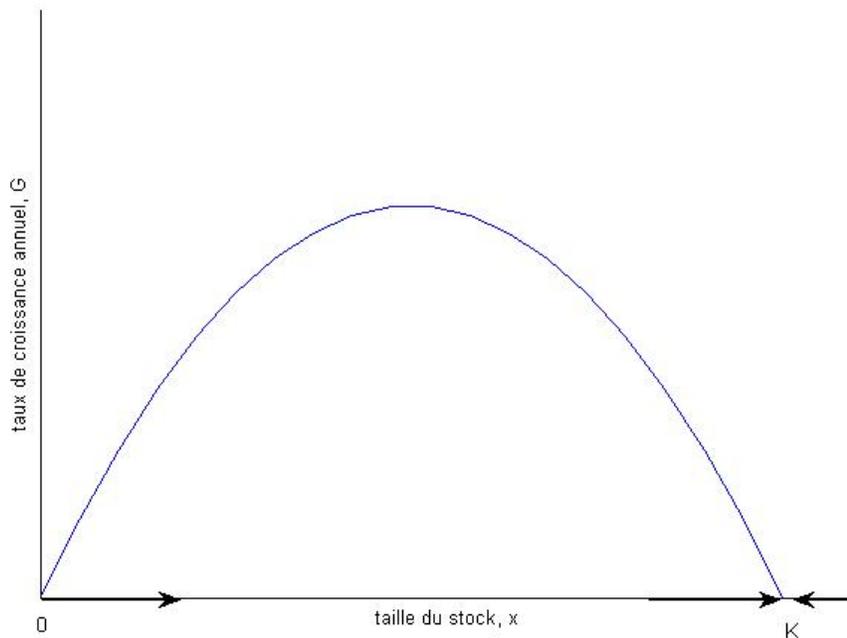


FIG. 1.1 – La fonction de croissance $G(x)$ du modèle de base

1.2 Rendement durable maximal (Maximal Sustained Yield) MSY

Supposons que $h = h(t) = cste$ dans le modèle de base, alors on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x) - h \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

Pour h suffisamment petit, ce modèle admet deux points d'équilibre l'un stable et l'autre instable.

La figure 1.2 montre la dynamique du modèle de base à taux de récolte constant.

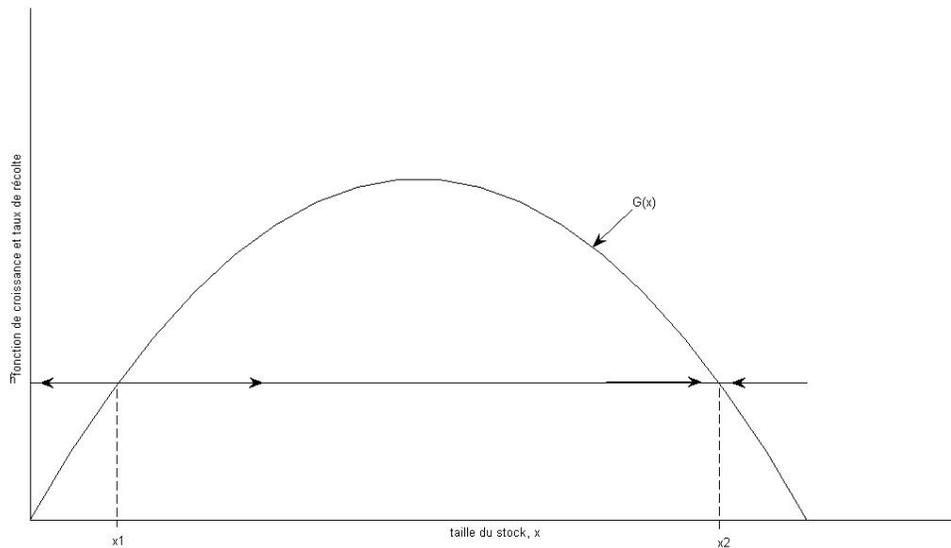


FIG. 1.2 – La dynamique de récolte à taux constant

Définition 1.2.1

On appelle redement durable maximal (MSY) le taux de prélèvements par pêche maximal, c'est-à-dire c'est le maximum des captures qui peuvent être récoltés à partir du stock.

Le MSY est un seuil, au-delà duquel il y a surexploitation.

Pour notre modèle $h_{MSY} = \max_x G(x)$, et pour cette valeur les équilibres coïncident en la valeur commune x_{MSY} qui est semi-stable (shunt négatif), telle que :

$$G'(x_{MSY}) = 0. \quad (1.4)$$

En économie, $G(x)$ représente la productivité de la ressource et $G'(x)$ est la productivité marginale.

La productivité est maximisée lorsque la productivité marginale est égale à zéro. Pour maximiser $G(x)$, on doit d'abord spécifier une fonction objectif pour la maximiser.

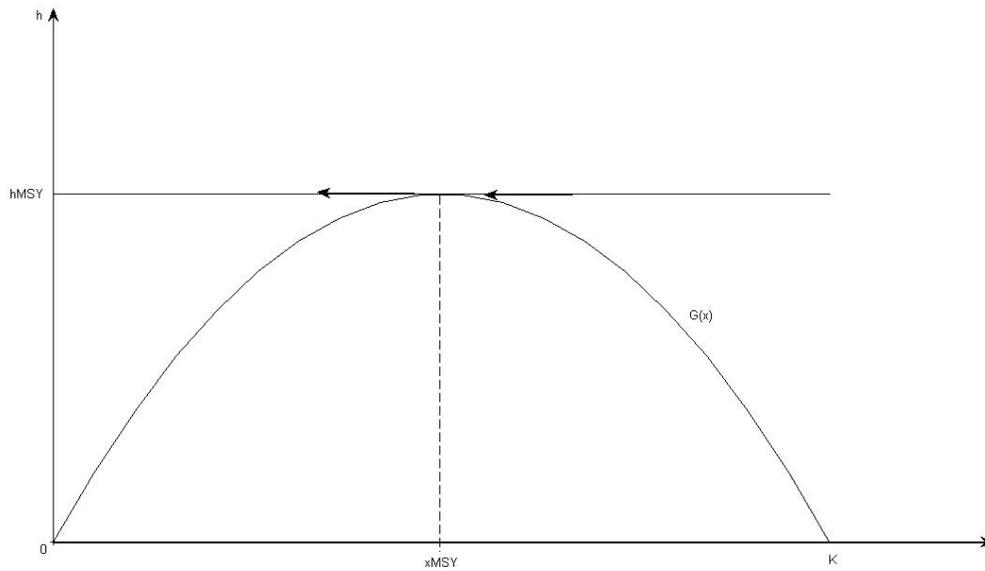


FIG. 1.3 – Le rendement durable maximal est un équilibre semi-stable

On peut dire qu'une des questions les plus importantes, concerne la stratégie de récolte optimale. Pour cela, on a besoin de définir une fonction objective à optimiser.

Par exemple, on cherche à maximiser la récolte totale sur un intervalle de temps $[0, T]$. D'où le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \text{maximiser}_t \text{ la récolte totale} = \int_0^T h(t)dt, \\ \text{sous les conditions} & \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x) - h(t), x(0) = x_0 \\ x(t) \geq 0, h(t) \geq 0 \text{ pour tout } t, \end{cases} \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, on procède comme suit :

$$\int_0^T h(t)dt = \int_0^T (G(x) - \frac{dx}{dt})dt = \int_0^T G(x)dt + x_0 - x(T). \quad (1.5)$$

La stratégie de récolte optimale est maintenant presque évidente, il reste à maximiser l'intégrale $\int_0^T G(x)dt$. Pour cela, on a besoin d'avoir $x = x_{MSY}$ qui est donné par l'équation (1.4). Donc un taux de récolte initial élevé devrait être utilisé pour réduire x de x_0 à x_{MSY} aussi rapidement que possible. En effet, puisqu'on a aucun taux de récolte maximum, un taux de récolte d'impulsion infini devrait être utilisé à l'instant $t = 0$. Alors pour $0 < t < T$ on a utilisé le taux de récolte h_{MSY} , ce qui maintient le stock à x_{MSY} . Enfin, à l'instant final T on effectue une autre récolte d'impulsion pour réduire instantanément la population à zéro.

Pour cela, on utilise la stratégie de récolte optimale $h^*(t)$, donnée par :

$$h^*(t) = \begin{cases} x_0 - x_{MSY} , \text{ pour } t = 0 \\ h_{MSY} , \text{ pour } 0 < t < T \\ x_{MSY} , \text{ pour } t = T. \end{cases} \quad (1.6)$$

D'où :

$$\int_0^T h(t)dt = h_{MSY}T + x_0.$$

Dans la théorie de contrôle, la loi de commande (1.6) est appelée "un contrôle bang-bang singulier".

La stratégie de récolte optimale est d'abord de réduire rapidement la population à son niveau MSY, puis de le récolter de façon durable au MSY. (Le temps terminal T fixé est clairement artificiel ; l'extermination finale de la ressource ne devrait jamais se produire dans la pratique.)

Qu'en est-il de la récolte impulsion à $t = 0$? Est-ce réaliste ? pas tout à fait, parce que la récolte impulsion implique un taux de récolte infini pour un instant de temps infinitésimal (i.e. une fonction delta de Dirac). Dans la pratique, il serait normalement une vitesse maximale à laquelle la ressource peut être récoltée. Pour inclure cette possibilité, nous ajoutons la contrainte

$$h(t) \leq h_{max} \quad (h_{max} = \text{cste}),$$

et $h^*(t)$ devient :

$$h^*(t) = \begin{cases} h_{max} & \text{si } x(t) > x_{MSY} \\ h_{MSY} & \text{si } x(t) = x_{MSY} \end{cases} \quad (1.7)$$

C'est aussi un contrôle bang-bang singulier. Le stock de ressource est récoltée à la vitesse maximale possible au début, jusqu'à ce que le stock soit réduit au niveau MSY. (Pour les cas $x(t) > x_{MSY}$ et $x(t) = x_{MSY}$.)

Il reste le cas $x(t) < x_{MSY}$, c'est à dire lorsque la ressource est initialement dans un état d'épuisement. Au temps $t = 0$, les exploitants sont d'accord pour passer à la politique du MSY, si l'objectif est toujours de maximiser le rendement total futur. Alors on a simplement ajouté la prescription récolte suivante à l'équation (1.7) :

$$h^*(t) = 0 \quad \text{si } x(t) < x_{MSY}. \quad (1.8)$$

Une fois de plus ce qui représente un contrôle bang-bang, ici en utilisant le taux de récolte minimale $h = 0$ jusqu'à ce que le stock augmentera au niveau MSY. Donc, pour maximiser la récolte totale au cours du temps, c'est-à-dire pour maximiser la production de ressources $G(x)$ il est nécessaire, par l'équation (1.4), de déplacer la taille de la population $x(t)$ à x_{MSY} aussi rapidement que possible.

La figure 1.4 présente la dynamique du stock $x(t)$ pour la stratégie de récolte totale (où T est infini). Deux cas sont présentés, $x_0 < x_{MSY}$ et $x_0 > x_{MSY}$.

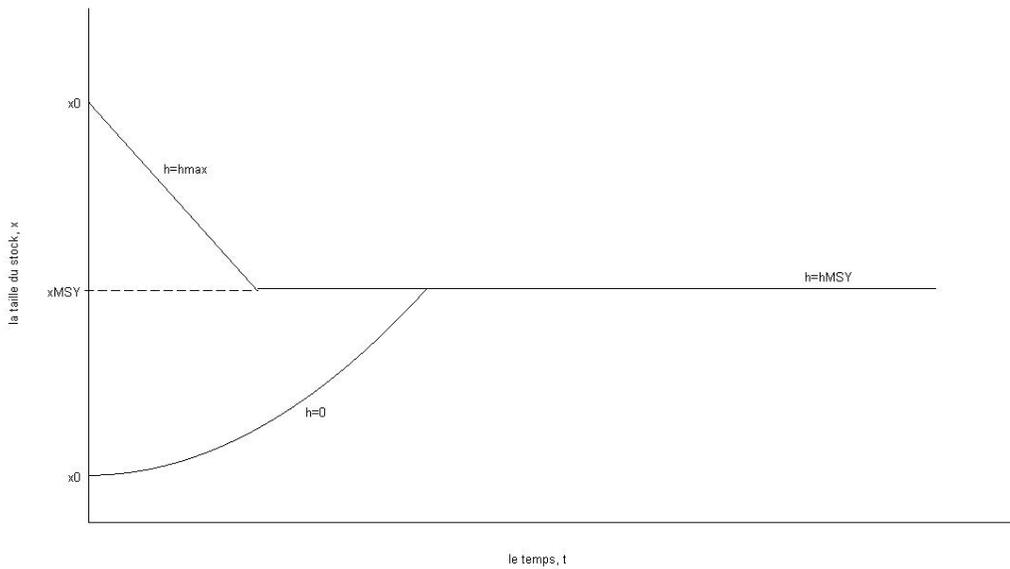


FIG. 1.4 – La dynamique du stock $x(t)$ pour la stratégie de récolte totale maximale (T est infini)

1.3 Modèle bio-économique

Considérons de nouveau le modèle de base :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x) - h(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Et introduisons les variables économiques suivantes :

$E(t)$: l'effort de récolte (de pêche) au temps t .

$h(t)$: la récolte quotidienne.

p : le prix unitaire de récolte.

$G(x)$: la fonction de croissance par jour.

c : le coût de l'effort.

q : la capturabilité, c-à-d la proportion du stock x capturée par un effort de pêche dans une unité de temps.

La relation effort-capture de Schaeffer est donnée par :

$$h = qEx.$$

Le *revenu quotidien* est donné par ;

$$R = ph - cE = (pqx - c)E.$$

La pêche est rentable, ssi :

$$R > 0 \quad \text{c-à-d} \quad x > \frac{c}{pq}.$$

si $R = 0$, on parle de l'*équilibre bioéconomique*, donné par :

$$x_{BE} = \frac{c}{pq} \quad (\text{BE : Bioeconomic Equilibrium}).$$

Remarque : On sait que x_{BE} dépend de p , q et c , donc la demande des ressources et le prix des ressources vont croître dès que la population humaine croît au cours du temps. De plus, les progrès technologiques peuvent conduire à moindre coût ou à une efficacité de récolte q plus élevée ou bien tous les deux. Tous ces changements provoquent la décroissance de x_{BE} au cours du temps.

Gordon[6, 19] s'est intéressé à la théorie économique de la pêcherie. Il a entre autre introduit la notion d'équilibre bioéconomique et d'optimum bioéconomique. L'équilibre bioéconomique d'une pêcherie est atteint lorsque la population est à l'équilibre (biologique) et que le *revenue net* est nul ; soit pour cette deuxième condition, lorsque le *revenue total* $TR = ph$ est égal au *coût total* $TC = cE$ qui détermine un niveau d'effort $E = E_1$ (le point B sur la figure 1.5).

Gordon[6, 19] a affirmé que la pêche optimale serait de maximiser la différence $TR - TC$, entre le *revenue* et le *coût total*. Ce qui exige que le *revenue total marginal* est égal au *coût total marginal*, i.e.

$$\frac{\partial R}{\partial E} = c$$

Cette condition détermine un niveau d'effort $E = E^*$ (le point A sur la figure 1.5). Lorsque $E < E_1$ on a $TR > TC$, dans ce cas les pêcheurs profitent des avantages nets positifs et se dirigent vers la ressource. Et pour $E > E_1$, les *revenus nets* deviennent négatifs et les pêcheurs ont tendance à quitter la ressource.

1.4 Rendement économique durable maximal (Maximal Economic Yield) MEY

Pour calculer le MEY au niveau x (donné), on remplace $h(t)$ par $h(t) = qE(t)x(t)$ à l'état d'équilibre ,donc :

$$G(x) = qEx.$$

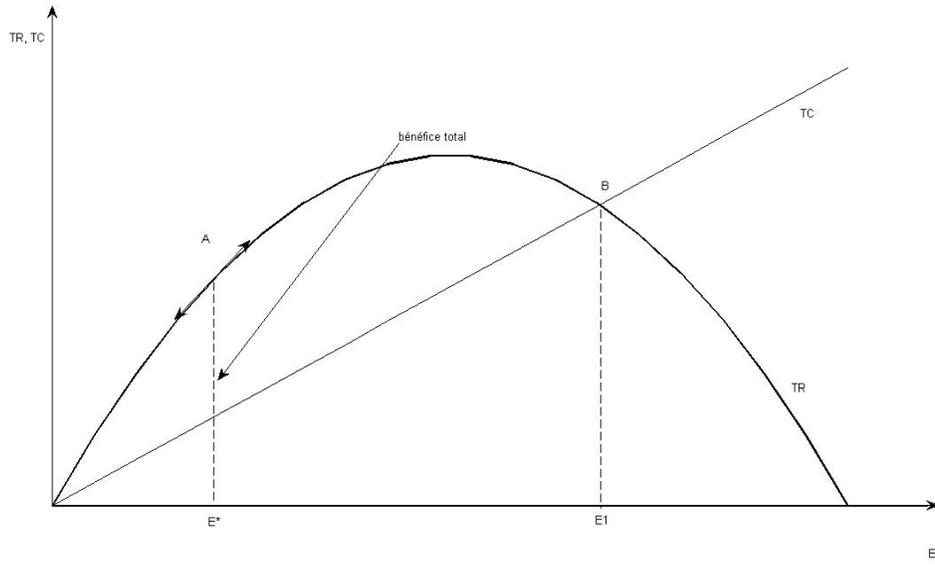


FIG. 1.5 – Le revenu durable total TR et coût TC d'une population biologique

Le revenu durable (the sustained rent) R_{sust} , est donné par :

$$R_{sust} = (pqx - c)E = (pqx - c)G(x)/qx$$

ou

$$R_{sust} = (p - c/qx)G(x).$$

En posant : $c(x) = c/qx$: coût unitaire de récolte au niveau x , on obtient :

$$Rsust = (p - c(x))G(x).$$

On a :

$R_{sust} > 0$ pour $x_{BE} < x < K$,
 $R_{sust} = 0$ aux deux extrémités x_{BE} et K ,
 et $R_{sust} = 0$ atteint un maximum pour la valeur x_{MEY} .
 C'est ce qu'on voit sur la figure 1.5.

En dérivant R_{sust} , on obtient :

$$G'(x_{MEY}) - \frac{c'(x_{MEY})G(x_{MEY})}{p - c(x_{MEY})} = 0 \quad (1.10)$$

Remarque : si $c(x) = 0$, alors (1.10) devient $G'(x_{MEY}) = 0$ et donc $x_{MSY} = x_{MEY}$,
 et si $c(x) \neq 0$ alors $x_{MEY} > x_{MSY}$. Ainsi, pour $c(x) = p$ on obtient $x = x_{BE}$.

Définition 1.4.1

le MEY (donné par l'équation (1.10)) est le niveau de captures qui offre le maximum de bénéfices à l'état d'équilibre.

Le terme : $\frac{-c'(x)G(x)}{p-c(x)}$ est appelé stock d'effort marginal.

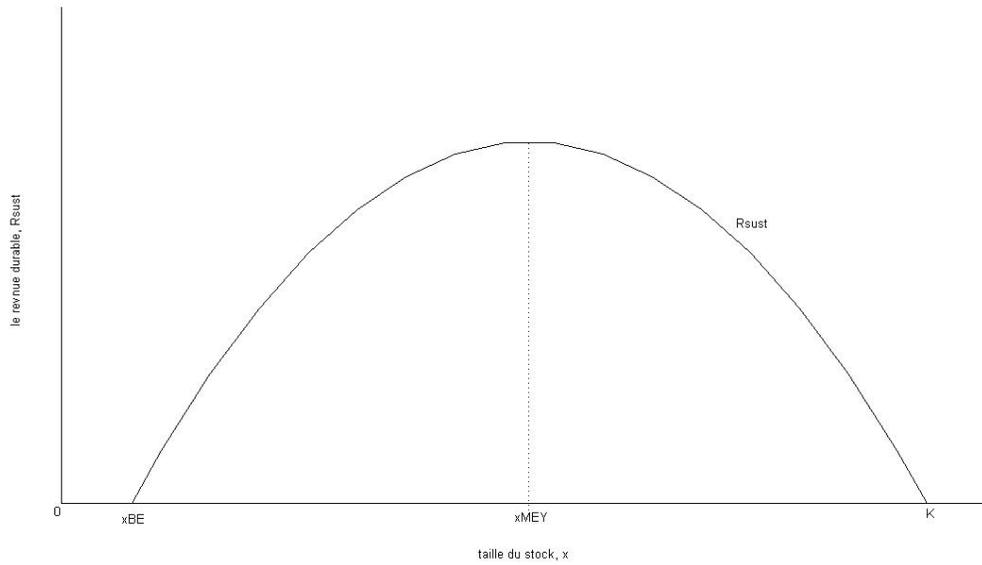


FIG. 1.6 – Le revenu durable comme une fonction de x

1.5 Modèle d'optimisation dynamique

soit le modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = G(x) - h(t) \quad x(0) = x_0 \quad (1.11) \\ h(t) = qE(t)x(t) \quad (1.12) \\ R(t) = ph(t) - cE(t) = (p - c(x(t)))h(t) \quad (1.13) \\ c(x) = \frac{c}{qx} \quad (1.14) \\ x(t) \geq 0, h(t) \geq 0 \quad (1.15) \end{array} \right.$$

La valeur actuelle totale des futures revenus nets est donnée par :

$$PV = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} R(t) dt, \quad (1.16)$$

où δ : désigne le taux d'actualisation.

Définition 1.5.1

Le taux d'actualisation est la valeur qui permet de ramener une future recette à une valeur courante.

soit le problème d'optimisation dynamique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser}_{\{E(t)\}} PV \\ \text{sous les conditions} \quad (1.11) - (1.15). \end{array} \right. \quad (1.17)$$

c-à-d on souhaite déterminer $E(t)$, $t \geq 0$, qui donne le plus grand possible des bénéfices économiques $R(t)$.

On souhaite maximiser par le choix de la stratégie de récolte $h(t) = qE(t)x(t)$, l'intégrale :

$$PV = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} R(t) dt,$$

sachant que : $\frac{dx}{dt} = G(x) - h(t)$,

donc :

$$PV = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} (p - c(x))(G(x) - \frac{dx}{dt}) dt.$$

Posons $z(x) = \int_{x_{BE}}^x (p - c(u))du,$

alors

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} = (p - c(x)) \frac{dx}{dt},$$

d'où :

$$PV = \int_0^{\infty} \exp(-\delta t)[(p - c(x))G(x) - \delta z]dt + z(x_0).$$

Une technique pour maximiser PV , est de chercher à maximiser l'expression $[(p - c(x))G(x) - \delta z]$ pour tout t , par rapport à x . Soit alors x^* le maximum. Après dérivation on obtient :

$$G'(x^*) - \frac{c'(x^*)G(x^*)}{p - c(x^*)} = \delta. \quad (1.18)$$

L'équation (1.18) est dite *règle d'or*.

Remarques :

✓ Pour maximiser $[(p - c(x))G(x) - \delta z]$ par rapport à x , le stock $x(t)$ doit être déplacé le plutôt possible du niveau initial x_0 à l'optimum désiré x^* . Donc la stratégie de récolte optimale est donnée par :

$$h(t) = \begin{cases} h_{max} & \text{si } x(t) > x^* \\ G(x^*) & \text{si } x(t) = x^* \\ 0 & \text{si } x(t) < x^*, \end{cases} \quad (1.19)$$

où h_{max} est le taux maximal de récolte possible, telle que :

$$h(t) \leq h_{max}, \text{ pour tout } t.$$

Maintenant, on suppose qu'il y a un effort maximal E_{max} , donc l'équation (1.19) devient :

$$E(t) = \begin{cases} E_{max} & \text{si } x(t) > x^* \\ E^* = \frac{h^*}{qx^*} & \text{si } x(t) = x^* \\ 0 & \text{si } x(t) < x^*. \end{cases}$$

✓ Revenons à l'équation (1.18), donnée par :

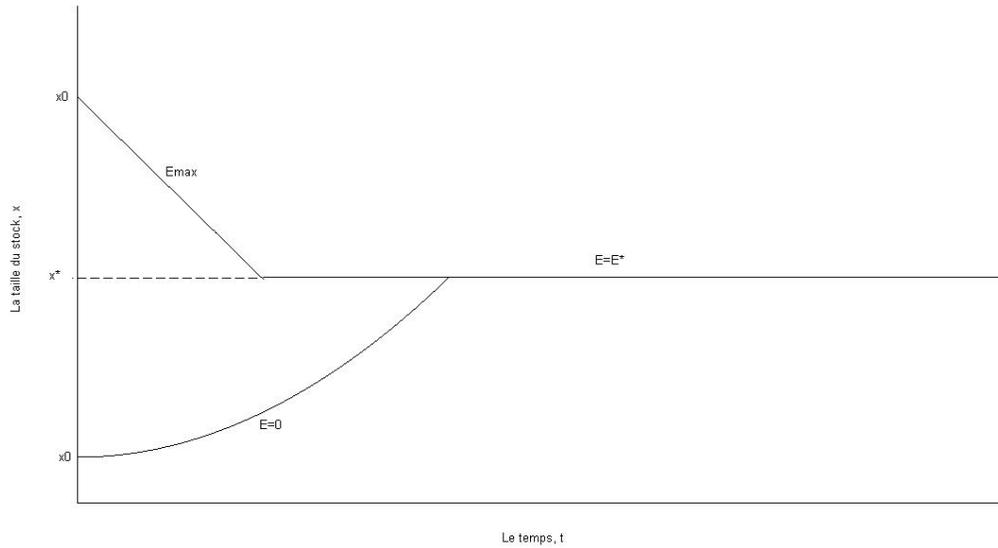


FIG. 1.7 – La dynamique du stock $x(t)$ pour la stratégie de récolte totale maximale (T est infini)

$$G'(x^*) - \frac{c'(x^*)G(x^*)}{p-c(x^*)} = \delta.$$

Alors, on a :

pour $\delta = 0$, $x^* = x_{MEY}$ et pour $\delta = 0$ et $c(x) = 0$, on obtient $x^* = x_{MSY}$.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques modèles bioéconomiques simples qui constituent un outil d'aide à la gestion de pêche.

Notre modèle de base, les équations (1.11)-(1.15), par exemple, fournit une explication des rôles des paramètres biologiques (taux de croissance, la capacité limite) ainsi que les paramètres économiques (prix, coûts, taux d'actualisation) pour déterminer la stratégie de récolte optimale. Le modèle de base, qui est linéaire par rapport à la variable de contrôle, prescrit une stratégie "bang-bang", pour s'approcher du niveau optimal du stock.

Chapitre 2

Notions de contrôle optimal

soit $f : U \subset \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ de classe C^1 , où U un ouvert de \mathfrak{R}^2 .

Il y a trois types de problèmes d'optimisation :

(a) *Sans contraintes*, on maximise $f(x, y)$ pour tous x, y dans U .

(b) *Avec contraintes d'égalité*, on maximise $f(x, y)$ sous la condition $g(x, y) = 0$ (ou bien $g(x, y) - c = 0$, avec c une constante donnée).

(c) *Avec contraintes d'inégalité*, on maximise $f(x, y)$ sous la condition $g(x, y) \leq 0$, (≥ 0) (ou bien $g(x, y) - c \leq 0$, ou $g(x, y) - c \geq 0$, avec c une constante donnée).

La fonction $f(x, y)$ est appelée *fonction objectif* et la condition $g(x, y) = 0$ (ou ≥ 0) est appelée *une contrainte*.

definition 2.1

$f(x, y)$ possède *un maximum local* en (x_0, y_0) , ssi : $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ pour tous (x, y) dans un voisinage de (x_0, y_0) .

definition 2.2

$f(x, y)$ possède *un maximum global* en (x_0, y_0) , ssi : $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ pour tous (x, y) dans U .

definition 2.3

$f(x, y)$ possède *un minimum local (global)* en (x_0, y_0) , ssi : $-f(x, y)$ possède un maximum local (global) en (x_0, y_0) .

definition 2.4

$f(x, y)$ possède un maximum local (global) avec contrainte en (x_0, y_0) , ssi : (x_0, y_0) satisfait la contrainte donnée, et $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ pour tous (x, y) dans un voisinage de (x_0, y_0) , (dans U) tel que (x, y) satisfait la contrainte.

2.1 Règle des multiplicateurs de Lagrange (contraintes d'égalité)

Considérons le problème d'optimisation avec contraintes d'égalité suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser } f(x, y) \text{ sur } U \\ \text{sous la contrainte } g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Théorème

soit (x_0, y_0) une solution locale du problème (2.2), alors :

$$\exists \lambda \in \mathfrak{R}, \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \end{cases}, \text{ au point } (x_0, y_0). \quad (2.3)$$

λ est appelé *multiplicateur de Lagrange*. \square

Le Lagrangien est donné par :

$$L = f(x, y) - \lambda g(x, y). \quad (2.4)$$

Une condition nécessaire pour que (x_0, y_0) soit un maximum local de $f(x, y)$ sur U satisfaisant $g(x, y) = 0$, est :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}, \text{ au point } (x_0, y_0). \quad (2.5)$$

Remarque : Cette théorie peut être utilisée pour plusieurs variables.

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Le problème d'optimisation avec contraintes d'égalité devient :

$$\begin{cases} \text{maximiser } f(x) \text{ sur } U \\ \text{sous les conditions } g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_m(x) = 0, m < n. \end{cases} \quad (2.6)$$

Soit x_0 un maximum (minimum) local du problème d'optimisation ci-dessus, alors il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathfrak{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0, \end{cases}$$

où le Lagrangien L est donné par :

$$L = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) = 0.$$

Notons qu'il y a un multiplicateur de Lagrange pour chaque contrainte.

2.2 Théorie du contrôle optimal en une dimension

considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t, u(t)), & 0 \leq t \leq T \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

où T est le temps final et x_0 donnée.

Ici, $x(t)$ désigne l'état du système à l'instant t , $u(t)$ est le *contrôle* et l'équation (2.7) est appelée *équation d'état*.

Si $u(t)$ est connu, alors les équations (2.7) et (2.8) déterminent un unique état $x(t)$, pour $0 \leq t \leq T$. Cette fonction d'état est appelée *réponse* du contrôle $u(t)$ donné.

Soit U_t l'ensemble des contrôles admissibles. On suppose que

$$u(t) \in U_t, 0 \leq t \leq T. \quad (2.9)$$

Par la suite, on introduit la fonction objectif :

$$V(u) = \int_0^T g(x(t), t, u(t)) dt.$$

Le problème de contrôle optimal est donné par :

$$\begin{cases} \text{maximiser}_{\{u(t)\} \in U_t} V(u) \text{ sur } U \\ \text{sous les conditions (2.7), (2.8) et (2.9).} \end{cases}$$

Définition 2.2.1

Un contrôle optimal est un contrôle $u(t)$ qui produit le gain maximal $V(u)$ satisfaisant toutes les contraintes.

Considérons le problème classique de calculs des variations suivant :

$$\text{maximiser}_{\{x(t)\}} \int_0^T g(x(t), t, \dot{x}(t)) dt, \text{ où } \dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Une condition nécessaire pour la solution $x(t)$, est :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}. \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) est appelée équation d'Euler.

2.3 Principe de maximum de Pontryaguin

Introduisons l'expression suivante appelée le *Hamiltonien* :

$$H(x(t), t, u(t), \lambda(t)) = g(x(t), t, u(t)) + \lambda(t)f(x(t), t, u(t)). \quad (2.11)$$

Ici, $\lambda(t)$ est une fonction supplémentaire inconnue, appelée *variable adjointe*.

Théorème

Si $u(t)$ est un contrôle optimal et $x(t)$ sa réponse, alors il existe une variable adjointe $\lambda(t)$, tel que :

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x} - \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2.12)$$

$$\text{et} \quad H(x(t), t, u(t), \lambda(t)) = \max_{u \in U_t} H(x(t), t, u, \lambda(t)). \quad (2.13)$$

(2.12) est appelée *équation adjointe* et (2.13) est appelée *condition de maximisation*. Ce théorème est dit *principe de maximum*. \square

D'après l'équation (2.7), on a :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad (2.14)$$

(2.14) est dite *condition supplémentaire*.

Les équations (2.12), (2.13) et (2.14) constituent le *principe de maximum de Pontryaguin (PMP)*.

Pour s'assurer que ce système des équations différentielles admet une unique solution, on a besoin d'avoir les conditions initiales pour $x(t)$ et $\lambda(t)$. En plus des conditions initiales, il y a une deuxième condition $x(T)$ qui s'applique au temps final T.

On distingue trois cas :

1^{er} cas : $x(T) = x_T$ connu.

Dans ce cas, les contrôles admissibles $u(t)$ qui conduisent l'état de x_0 à x_T , au cours du temps, sont appelés *contrôles possibles*. Ces contrôles s'ils existent satisfèront le PMP, et le système des équations différentielles (les équations (2.12)-(2.14)) admet maintenant une unique condition initiale et finale.

2^e cas : $x(T) = x_T$ indéterminé.

Dans ce cas, la condition supplémentaire devient :

$$\lambda(T) = 0. \quad (2.15)$$

3^e cas : $x(T) = x_T$ connu et T indéterminé.

Ici, on obtient :

$$H(T) = H(x(T), T, u(T), \lambda(T)) = 0. \quad (2.16)$$

Les équations (2.15) et (2.16) sont appelées *conditions de transversalité*.

2.4 Modèle bioéconomique linéaire

Considérons le problème d'optimisation du 1^{er} chapitre :

$$\text{maximiser}_{\{h(t)\}} PV = \int_0^\infty \exp^{-\delta t} (p - c(x)) h(t) dt,$$

$$\text{sous les conditions } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x) - h(t), & x(0) = x_0 \\ x(t) \geq 0, 0 \leq E(t) \leq E_{max}, \text{ pour tout } t \\ h(t) = q(x)E(t)x(t), \end{cases} \quad (2.17)$$

ici, $c(x)$ est le coût unitaire de récolte donné par $\frac{c}{q(x)x}$.

Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, ce problème admet comme solution optimale $h(t)$ donnée par (1.19).

Maintenant, nous allons appliquer le PMP pour trouver cette solution optimale.

Le hamiltonien est donné par :

$$H = e^{-\delta t} (p - c(x)) h + \lambda (g(x) - h) = [e^{-\delta t} (p - c(x)) - \lambda] h + \lambda g(x), \quad (2.18)$$

où x , h et λ sont en fonction du temps.

On va traiter $h(t)$ comme la variable de contrôle, avec

$$0 \leq h(t) \leq h_{max}(x) \text{ et } h_{max}(x) = q(x)E_{max}x.$$

Définissons : $\sigma(x, t) = e^{-\delta t}(p - c(x)) - \lambda(t)$,

$$\text{donc } H = \sigma(x, t)h + \lambda g(x). \quad (2.19)$$

La condition de maximisation dit que le contrôle optimal $h(t)$ maximise le hamiltonien, avec $0 \leq h(t) \leq h_{max}(x)$.

Et puisque H est linéaire en h , on obtient

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma(x, t) < 0 \\ \text{indéterminé} & \text{si } \sigma(x, t) = 0 \\ h_{max}(x, t) & \text{si } \sigma(x, t) > 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

$\sigma(x, t)$ est appelée : *fonction de commutation*.

Le cas $\sigma(x, t) = 0$ est important. En effet, supposons que $\sigma(x, t) = 0$ pour $t_1 < t < t_2$. Alors

$$\lambda(t) = e^{-\delta t}(p - c(x(t))), \quad (2.21)$$

$$\text{et } \frac{d\lambda}{dt} = e^{-\delta t}[-\delta(p - c(x)) - c'(x)(G(x) - h)], \quad t_1 < t < t_2. \quad (2.22)$$

Or d'après le PMP, on a : $\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$,

$$\text{avec } -\frac{\partial H}{\partial x} = e^{-\delta t}c'(x)h - \lambda G'(x) = e^{-\delta t}[c'(x)h - (p - c(x))G'(x)].$$

Donc :

$$G'(x) - \frac{c'(x)G(x)}{p-c(x)} = \delta. \quad (2.23)$$

Définition 2.4.1

L'état $x(t)$ donné par l'équation (2.23), est dit solution singulière.

Définition 2.4.2

Le contrôle singulier est obtenu en résolvant l'équation d'état pour la variable de contrôle.

Attention : On est dans le cas des modèles linéaires en contrôle.

Nous avons donc montré, en utilisant le PMP, que la stratégie de récolte optimale est une combinaison de contrôles bang-bang ($h(t) = 0$ ou h_{max}) et du contrôle singulier ($h(t) = G(x^*)$ où x^* est la solution singulière).

On sait, d'après le premier chapitre, que la combinaison de ces contrôles consiste à l'approche la plus rapide vers x^* , suivie d'une récolte durable en $x(t) = x^*$.

Pour la phase initiale, on a $h(t) = h_{max}$ si $x_0 > x^*$; on pêche le maximum pour aller le plus vite possible à x^* . Et si $x_0 < x^*$ alors $h(t) = 0$.

En plus, considérons la phase finale pour t près de T . On sait que si $x(T)$ est indéterminé alors on a la condition de transversalité $\lambda(T) = 0$ (i.e. $x = x_{BE}$ où x_{BE} est défini par $p - c(x_{BE}) = 0$).

Lorsque $\lambda(t) = e^{-\delta t}(p - c(x(t))) > 0$ sur le chemin singulier, alors on doit quitter cette droite après un certain temps $t_2 < T$, en utilisant $h(t) = h_{max}$ jusqu'à T . Et c'est ce qui montre la figure ci-dessous.

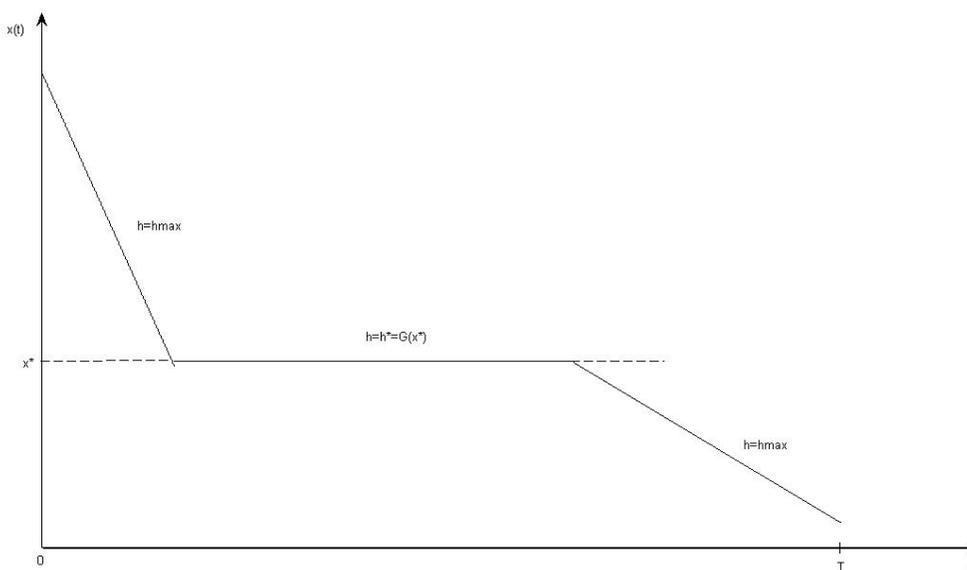


FIG. 2.1 – La trajectoire optimale de la biomasse $x(t)$ pour le modèle bioéconomique linéaire, le cas $x_0 > x^*$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les grandes lignes du principe de maximum de Pontryagin. Nous avons aussi appliqué le PMP pour résoudre un problème bioéconomique dont la solution est une combinaison de contrôles bang-bang et du contrôle singulier.

Chapitre 3

Impacts d'une gestion par quota sur la stabilisabilité économique et biologique d'un modèle de pêche

Dans ce travail, la dynamique du stock exploité et celle du prix sur le marché sont contrôlés par la quantité capturée et non par l'effort de pêche comme c'est le cas dans les modèles classiques. Cela présente un avantage dans le sens où la capture est un paramètre plus facile à déterminer que l'effort de pêche qui englobe plus de variables.

3.1 Analyse de la dynamique du modèle

La dynamique de la ressource exploitée est régie par sa croissance naturelle de type logistique à laquelle est ajouté un taux de mortalité par la pêche. La deuxième équation du modèle exprime l'évolution du prix de la ressource sur le marché dépendant de la différence entre la fonction demande, supposée linéaire, et l'offre. Cette dynamique est pondérée par un paramètre exprimant le temps de réaction de l'évolution du prix par rapport au marché. Soit donc le modèle suivant :

$$(S1) \quad \begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{K}) - Y \\ \dot{p} = s(D(p) - Y) \\ x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad p(0) = p_0 \end{cases}$$

où :

$x(t)$: Variable d'état représentant le stock de la ressource (biomasse) disponible à l'instant t .

$p(t)$: Variable d'état représentant le prix d'une unité du stock de la ressource à l'instant t .

$D(p)$: Fonction demande supposée linéaire telle que $D(p) = a - p(t)$.

$Y(t)$: Variable de commande représentant la capture à l'instant t .

r : Le taux de croissance intrinsèque, supposé constant.

K : La capacité de l'environnement (ou La population maximale).

s : Paramètre constant positif représentant la vitesse d'ajustement du prix sur le marché qui traduit le fonctionnement du marché concurrentiel (i.e la parfaite flexibilité du prix).

a : Paramètre constant positif représentant la capacité limite du marché.

Points d'équilibre du système (S1) :

Les isoclines associées au système (S1) sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{p} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = rx(1 - \frac{x}{K}) \\ Y = a - p. \end{cases} \quad (A)$$

A l'équilibre, on a :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{p} = 0 \end{cases} \Rightarrow Y = rx^*(1 - \frac{x^*}{K}) = a - p^* \Rightarrow -\frac{r}{K}x^{*2} + rx^* - Y = 0.$$

Lorsque Y est constant, on obtient :

$$p^* = a - Y.$$

p^* est positif si $Y < a$. Et la première équation du système (A) admet une solution si et seulement si :

$$0 \leq Y \leq \frac{rK}{4}.$$

On distingue trois cas :

✂ Si $0 \leq Y < \min(a, \frac{rK}{4})$, le système (S1) admet deux points d'équilibres (x_1^*, p^*) et (x_2^*, p^*) .

Où :

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{r + \sqrt{r^2 - \frac{4rY}{K}}}{\frac{2r}{K}} \geq 0, & \forall 0 \leq Y \leq \min(a, \frac{rK}{4}) \\ x_2^* = \frac{r - \sqrt{r^2 - \frac{4rY}{K}}}{\frac{2r}{K}} \geq 0, & \forall 0 \leq Y \leq \min(a, \frac{rK}{4}) \\ p^* = a - Y. \end{cases}$$

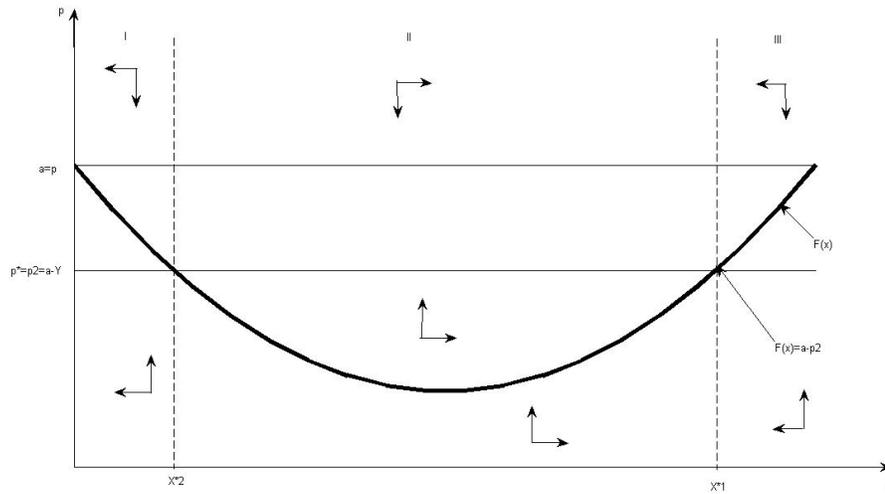


FIG. 3.1 – Portrait de phase du système (S1) dans le plan de phase (X, P)

p décroît si on est au dessus de la droite $p = P_2$ et croît si on est en dessous. Puisque x_1^* et x_2^* sont les solutions de l'équation $F(x) = a - p$, si la condition initiale (x_0, p_0) appartient à la région II, x croît, sinon x décroît dans les régions I et III.

✠ Si $Y_0 = \frac{rk}{4}$, le système (S1) admet un seul point d'équilibre $(x_0^*, p_0^*) = (\frac{K}{2}, a - Y_0)$.

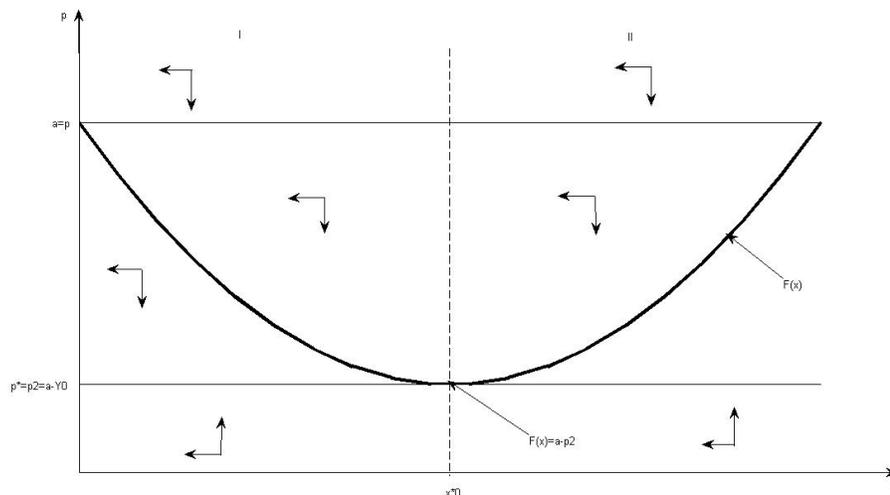


FIG. 3.2 – Portrait de phase du système (S1) dans le plan de phase (X, P)

p décroît au dessus de la droite P_2 et croît en dessous. Soit un point (x, p) quelconque dans le plan de phase (X, P) on a x décroît sur tout le plan de phase (X, P) . Si la condition initiale (x_0, p_0) appartient à la région II alors toutes les trajectoires correspondantes convergent vers le point (x_0^*, p_0^*) , en effet : le stock est décroissant dans cette région à cause du fait que $\forall x > x_0^*, F(x) < Y_0$ et donc après un certain temps le stock atteindra la valeur x_0^* et y restera, de même pour le prix après un certain temps il atteindra p_0^* et y restera. Par contre dans la région I avec une condition initiale (x_0, p_0) telle que $x_0 < x_0^*$ alors toutes les trajectoires correspondantes divergent jusqu'à extinction du stock car $\forall x < x_0^*, F(x) < Y_0$.

✠ Si $Y > \frac{rk}{4}$, le système (S1) n'admet pas de point d'équilibre.

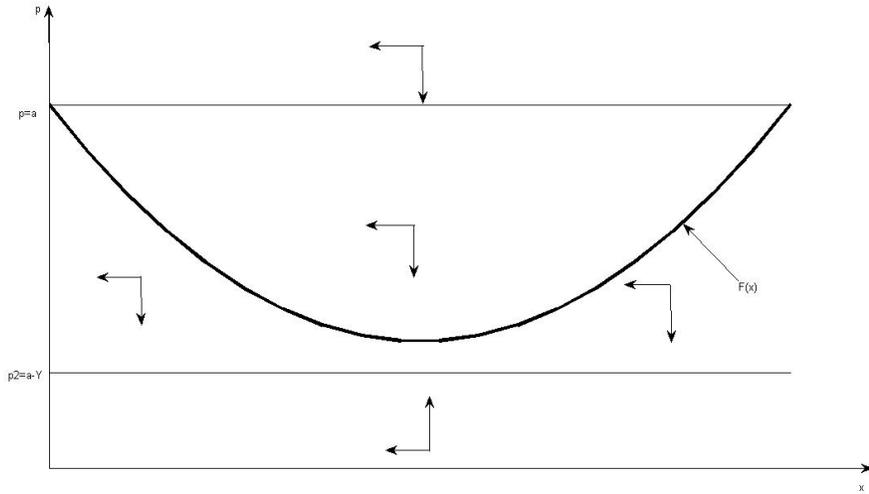


FIG. 3.3 – Portrait de phase du système (S1) dans le plan de phase (X, P)

p décroît au dessus de la droite P_2 et croît en dessous. x décroît sur tout le plan de phase (X, P) .

Stabilité des points d'équilibre :

La matrice jacobienne $J(x, p)$, associée au système (S1), est donnée par :

$$J(x, p) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}.$$

La stabilité des équilibres x_1^* , x_2^* et x_0^* , dépend des valeurs propres de $J(x, p)$. Ces valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -s \\ \lambda_2 = r - \frac{2rx^*}{K} = r(1 - 2\frac{x^*}{K}). \\ p^* = a - Y. \end{cases}$$

1^{er} cas : $x^* = x_1^*$.

$J(x, p)$ possède deux valeurs propres négatives $\lambda_1 = -s < 0$ et $\lambda_2 = -r\sqrt{1 - \frac{4Y}{Kr}} < 0$ (car $Y \leq \min(a, \frac{rK}{4})$).

Donc (x_1^*, p^*) est un *noeud stable*.

2^e cas : $x^* = x_2^*$.

$J(x, p)$ possède deux valeurs propres de signes opposés : $\lambda_1 = -s < 0$ et $\lambda_2 = -r\sqrt{1 - \frac{4Y}{Kr}} > 0$.

Donc (x_2^*, p^*) est un *point selle*.

3^e cas : $x^* = x_0^*$ (i.e. $Y = \frac{rK}{4}$).

$J(x, p)$ possède deux valeurs propres : $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 < 0$.

Donc (x_0^*, p_0^*) est *semi-stable*.

3.2 Simulations numériques

Première Situation ($0 < Y < \min(a, \frac{rK}{4})$) :

Soit (x_0, p_0) une condition initiale appartenant à la région II et III, alors les trajectoires convergeront vers l'équilibre stable (x_1^*, p^*) . Autour du point selle (x_2^*, p^*) , le portrait de phase ci-dessous permet de déterminer un domaine de stabilité dans lequel certaines trajectoires pourront converger.

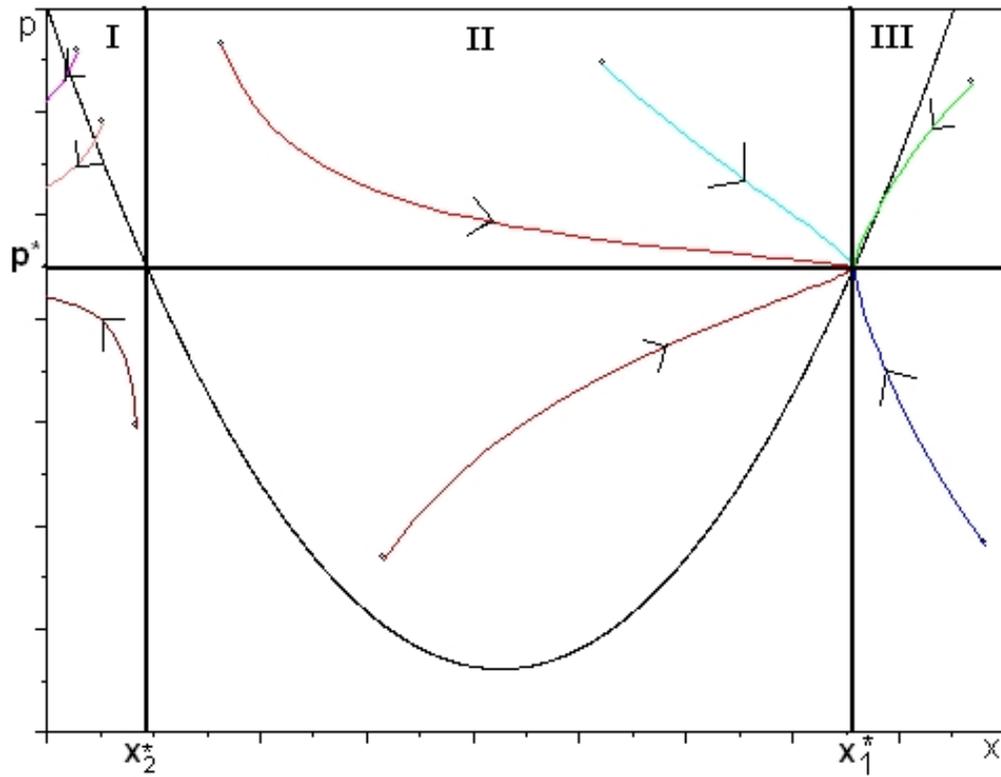


FIG. 3.4 – Simulation des trajectoires du système (S1) dans le plan de phase (X, P)

Deuxième Situation ($Y_0 = \frac{rk}{4}$) :

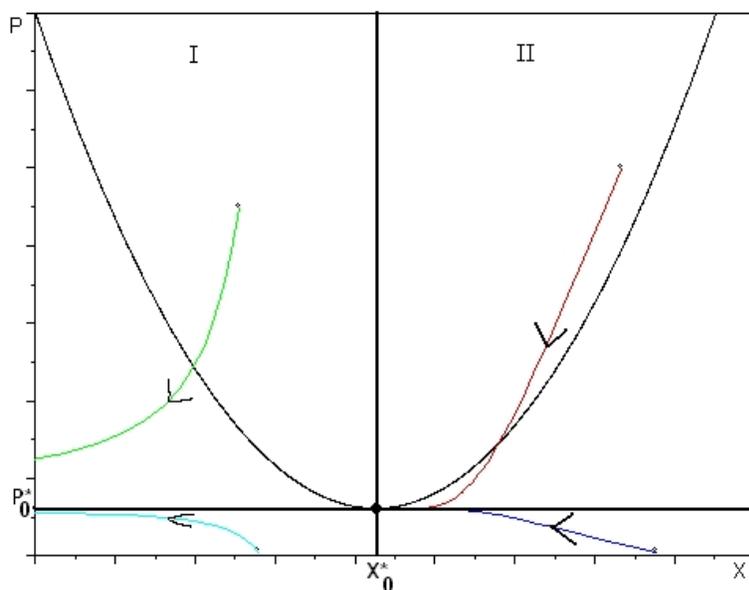


FIG. 3.5 – Simulation des trajectoires du système (S1) dans le plan de phase (X, P)

Une interprétation immédiate de ce cas de figure montre que selon les valeurs des conditions initiales, (région de stabilité II), les trajectoires peuvent converger vers l'équilibre ou tendront (région I) vers l'extinction de la ressource tout en maintenant la valeur du prix autour de l'équilibre.

Troisième Situation ($Y > \frac{rk}{4}$) :

Pour une valeur du quota légèrement plus grande à celle de la situation précédente on obtient la figure suivante

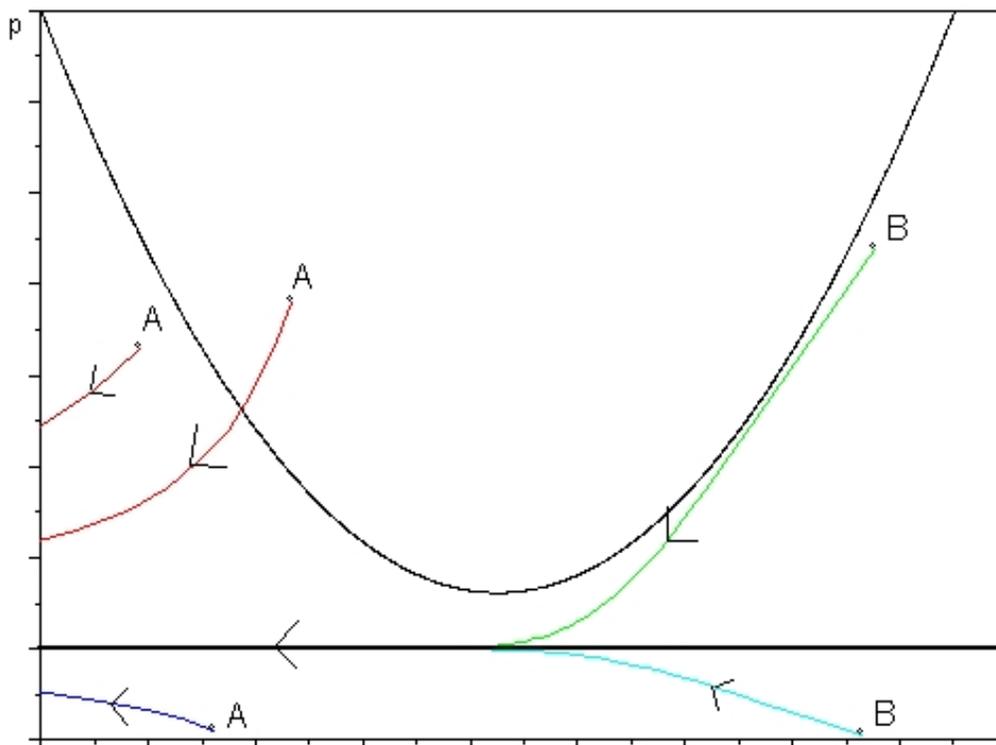


FIG. 3.6 – Simulation des trajectoires du système (S1) dans le plan de phase (X, P)

Si la condition initiale (x_0, p_0) est telle que le stock est abondant (les positions B dans la figure 3.6). Alors le prix atteint la droite P_2 et y reste et puisque le stock est décroissant dans tout le plan de phase (X, P) , car la valeur du quota est trop élevée par rapport aux paramètres biologiques, ceci mène à l'extinction du stock.

Si l'exploitation commence par une condition initiale (x_0, p_0) où le stock est faible (les positions A dans la figure 3.6), cela mène à l'extinction rapide du stock puisque, d'une part le stock décroît dans tout le plan de phase (X, P) , et d'autre part le prix croît ou décroît selon la position de la condition initiale par rapport à la droite P_2 et dans ce cas là, le prix n'arrive pas à atteindre $p = P_2$.

Les gestionnaires des pêcheries n'ont pas le temps d'ajuster le prix de la ressource à celui associé au quota. En comparant les deux situations précédentes avec celle-ci, l'enjeu économique et écologique du secteur est clairement lié à sa bonne gouvernance. Ainsi le

choix de la valeur du quota " $Y > \frac{rk}{4}$ " et son respect peuvent changer une situation catastrophique d'extinction de la ressource en une situation d'équilibre fortement souhaitable " $0 < Y < \min(a, \frac{rk}{4})$ " ou $Y_0 = \frac{rk}{4}$.

On conclut que l'analyse de la régulation par quota, mène à trois situations suivant la valeur du quota. De ces trois situations, la première est la plus intéressante car l'analyse dans la première situation permet de recommander des valeurs de quotas avec un objectif de stabilité. La deuxième et troisième situations montrent qu'un non respect de cette valeur de quota peut mener à l'extinction du stock de la ressource.

3.3 Temps optimal

En pratique, la mesure de quota n'est pas scrupuleusement respectée. Donc le problème est d'amener l'état du modèle bioéconomique (S1) d'une position initiale quelconque (x_0, p_0) à une position finale (x_T, p_T) désirée en un temps minimale T puis de décréter une mesure de repos biologique, afin de permettre au stock de se reconstituer. La période à partir de laquelle sera décrétée un repos biologique est solution du problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \min_{Y(t)} T \\ \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{K}) - Y \quad \text{avec} \quad x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad x(T) = x_T \\ \dot{p} = s(D(p) - Y) \quad \text{avec} \quad p(0) = p_0 \quad \text{et} \quad p(T) = p_T \\ \int_0^T Y(t)dt = Q, \end{cases}$$

avec Q donnée représentant le quota autorisé sur toute la période de pêche.

3.3.1 Résolution du Problème de Temps Optimal

Pour éliminer la contrainte sur le contrôle $\int_0^T Y(t)dt = Q$ on l'intègre dans le système en introduisant une troisième variable d'état artificielle comme suit

$$\dot{z} = Y(t) \quad \text{avec} \quad z(0) = 0 \quad \text{et} \quad z(T) = Q.$$

Le problème (P) devient équivalent au problème (P1)

$$(P1) \quad \begin{cases} \min_{Y(t)} T \\ \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{K}) - Y \quad \text{avec } x(0) = x_0 \quad \text{et } x(T) = x_T \\ \dot{p} = s(a - p - Y) \quad \text{avec } p(0) = p_0 \quad \text{et } p(T) = p_T \\ \dot{z} = Y \quad \text{avec } z(0) = 0 \quad \text{et } z(T) = Q. \end{cases}$$

Application du Principe du Maximum :

L'Hamiltonien associé au problème (P1) s'écrit

$$H(x, p, z, Y) = \lambda_1(rx(1 - \frac{x}{K}) - Y) + \lambda_2s(a - p - Y) + \lambda_3Y. \quad (3.1)$$

Si (x, p, z, Y) est un processus optimal du problème (P1) alors selon la version appropriée du principe du maximum associée donne l'existence des variables adjointes λ_1 , λ_2 et λ_3 solution du système suivant

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_1r(1 - \frac{2x}{k}) \\ \lambda_1(T)(rx_T(1 - \frac{x_T}{k}) - Y(T)) + \lambda_2(T)s(a - p_T - Y(T)) + \lambda_3(T)Y(T) = -1 \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial p} = \lambda_2s \\ \dot{\lambda}_3 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial Y} = 0 = \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2s. \end{cases}$$

Or d'après la dernière équation du système précédent on a

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_1r(1 - \frac{2x}{k}) \\ \lambda_1(T)(rx_T(1 - \frac{x_T}{k})) + \lambda_2(T)s(a - p_T) = -1 \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial p} = \lambda_2s \\ \lambda_3 = C \\ \frac{\partial H}{\partial Y} = 0 \implies \lambda_1 + \lambda_2s = C \quad \text{où } C \text{ est une constante.} \end{cases} \quad (3.2)$$

En développant les conditions du système (3.2) on trouve explicitement l'écriture de Y . En effet : d'après les trois dernières équations du système (3.2) on trouve que

$$\begin{cases} \lambda_2(t) = \lambda_2(T)e^{s(t-T)} \\ et \\ \lambda_1(t) = C - \lambda_2(T)se^{s(t-T)}. \end{cases} \quad (3.3)$$

En utilisant les expressions de $\lambda_1(t)$ et de $\lambda_2(t)$ du système (3.3) dans la première condition du système (3.2), on trouve :

$$x(t) = \frac{k}{2} - \frac{k\lambda_2(T)s^2e^{s(t-T)}}{2r(C-\lambda_2(T)se^{s(t-T)})} \quad (3.4)$$

alors

$$\dot{x}(t) = -\frac{k}{2r} \left[\frac{C\lambda_2(T)s^3e^{s(t-T)}}{(C-\lambda_2(T)se^{s(t-T)})^2} \right],$$

en remplaçant ces expressions de $x(t)$ et de $\dot{x}(t)$ dans la contrainte biologique du problème (P1) on trouve que :

$$Y(t) = \frac{rk}{4} + \frac{k\lambda_2(T)s^2}{2r(Ce^{-s(t-T)}-\lambda_2(T)s)^2} \left[\frac{k\lambda_2(T)s^2}{4r} + \frac{kCs}{2r} \right].$$

Il reste à chercher les expressions de $\lambda_1(T)$, $\lambda_2(T)$ et $\lambda_3(T)$.
D'après l'équation (3.4) on a

$$\text{à } t = T \quad \frac{2r}{k} \left(\frac{k}{2} - x_T \right) = \frac{\lambda_2(T)s^2}{\lambda_3(T) - \lambda_2(T)s}, \quad (3.5)$$

de plus d'après la dernière condition du système (3.2), l'équation (3.5) implique

$$\frac{2r}{k} \left(\frac{k}{2} - x_T \right) = \frac{\lambda_2(T)s^2}{\lambda_1(T)},$$

d'où

$$\lambda_2(T) = \frac{2r\lambda_1(T)}{ks^2} \left(\frac{k}{2} - x_T \right).$$

En remplaçant l'expressions de $\lambda_2(T)$ dans la deuxième équation du système (3.2) on trouve

$$\lambda_1(T) = -\frac{1}{rx_T(1-\frac{x_T}{k}) + \frac{2r}{ks}(\frac{k}{2}-x_T)(a-p_T)}, \quad (3.6)$$

grâce à cette expression de $\lambda_1(T)$ et à la deuxième équation du système (3.3) on trouve l'expression de $\lambda_2(T)$

$$\lambda_2(T) = \frac{2(\frac{k}{2}-x_T)}{ks^2x_T(1-\frac{x_T}{k}) + 2s(\frac{k}{2}-x_T)(a-p_T)}. \quad (3.7)$$

Or d'après le système (3.2) on a

$$\lambda_3(T) = \lambda_1(T) + s\lambda_2(T).$$

donc

$$\lambda_3(T) = C - \frac{ks+2r(\frac{k}{2}-x_T)}{krsx_T(1-\frac{x_T}{k})+2rs(\frac{k}{2}-x_T)(a-p_T)} \quad (3.8)$$

Donc pour atteindre (x_T, p_T) en un temps minimal, il faut que l'activité de pêche soit conforme à la capture $t \rightarrow Y(t)$. Mais cette stabilité de l'activité de pêche doit être régulée par une période optimale de pêche en fonction des conditions bioéconomiques initiales et finales du modèle.

Lemme1 *Le temps optimal T d'activité de pêche associé au problème (P) s'écrit de la façon suivante :*

$$T = -\frac{1}{s} \log \left(\frac{(k+2r(\frac{k}{2}-x_T))(\frac{k}{2}-x_0)}{(k+2r(\frac{k}{2}-x_0))(\frac{k}{2}-x_T)} \right). \quad (3.9)$$

Preuve.

Grace à l'équation (3.4) on trouve explicitement la période d'activité de pêche optimale du modèle. En effet :
d'après (3.4) on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } t = 0 \quad \frac{2r}{k}(\frac{k}{2} - x_0) = \frac{\lambda_2(T)s}{Ces^T - \lambda_2(T)s} \\ \text{et} \\ \text{à } t = T \quad \frac{2r}{k}(\frac{k}{2} - x_T) = \frac{\lambda_2(T)s}{C - \lambda_2(T)s} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

La deuxième équation du système (3.10) donne :

$$C = \frac{k\lambda_2(T)s}{2r(\frac{k}{2}-x_0)} + \lambda_2(T)s.$$

En remplaçant l'écriture de C dans la première équation du système (3.10) on trouve que

$$T = -\frac{1}{s} \log \left(\frac{(k+2r(\frac{k}{2}-x_T))(\frac{k}{2}-x_0)}{(k+2r(\frac{k}{2}-x_0))(\frac{k}{2}-x_T)} \right)$$

Lemme2 *Pour que le temp optimal T d'activité de pêche soit positif il faut et il suffit qu'une des conditions suivantes soient vérifiées, sachant que $x_T < x_0$*

$$(1) \quad x_T < x_0 < \frac{k}{2}$$

ou

$$(2) \quad x_0 > x_T > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2}$$

Preuve.

D'après (3.9), pour que T soit positif il faut et il suffit que :

$$0 < \frac{(k+2r(\frac{k}{2}-x_T))(\frac{k}{2}-x_0)}{(k+2r(\frac{k}{2}-x_0))(\frac{k}{2}-x_T)} < 1 \quad (3.11)$$

Pour cela deux cas s'imposent :

1. Premier cas :Si

$$(k + 2r(\frac{k}{2} - x_T))(\frac{k}{2} - x_0) > 0 \implies \begin{cases} x_0 < \frac{k}{2} \quad \text{et} \quad x_T < \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} \\ \text{ou} \\ x_0 > \frac{k}{2} \quad \text{et} \quad x_T > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} \end{cases} \quad (3.12)$$

et

$$(k + 2r(\frac{k}{2} - x_0))(\frac{k}{2} - x_T) > 0 \implies \begin{cases} x_0 < \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} \quad \text{et} \quad x_T < \frac{k}{2} \\ \text{ou} \\ x_0 > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} \quad \text{et} \quad x_T > \frac{k}{2} \end{cases} \quad (3.13)$$

Si on est dans le premier cas de (3.12) i.e $x_0 < \frac{k}{2}$ et $x_T < \frac{k}{2r} + \frac{k}{2}$ ça implique impérativement qu'on est dans le premier cas de (3.13) i.e $x_0 < \frac{k}{2r} + \frac{k}{2}$ et $x_T < \frac{k}{2}$. Donc ces deux cas ce regroupe en un seul cas qui est :

$$x_0 < \frac{k}{2} \quad \text{et} \quad x_T < \frac{k}{2}. \quad (3.14)$$

De même si on est dans le deuxième cas de (3.12) i.e $x_0 > \frac{k}{2}$ et $x_T > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2}$ ça implique impérativement qu'on est dans le deuxième cas de (3.13) i.e $x_0 > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2}$ et $x_T > \frac{k}{2}$. Donc ces deux cas ce regroupe en un seul cas qui est :

$$x_0 > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} \quad \text{et} \quad x_T > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2}. \quad (3.15)$$

De plus on doit avoir

$$(k + 2r(\frac{k}{2} - x_T))(\frac{k}{2} - x_0) < 1, \quad (3.16)$$

or d'après (3.12) et (3.13), (3.16) implique

$$x_T < x_0 \quad (3.17)$$

Alors pour que (3.11) soit vérifié on doit avoir une des conditions suivantes

$$x_T < x_0 < \frac{k}{2} \quad (3.18)$$

ou

$$x_0 > x_T > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2}. \quad (3.19)$$

2. Deuxième cas :Si

$$(k + 2r(\frac{k}{2} - x_T))(\frac{k}{2} - x_0) < 0 \implies \begin{cases} x_0 < \frac{k}{2} & \text{et } x_T > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} \\ \text{ou} \\ x_0 > \frac{k}{2} & \text{et } x_T < \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} \end{cases} \quad (3.20)$$

et

$$(k + 2r(\frac{k}{2} - x_0))(\frac{k}{2} - x_T) < 0 \implies \begin{cases} x_0 < \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} & \text{et } x_T > \frac{k}{2} \\ \text{ou} \\ x_0 > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} & \text{et } x_T < \frac{k}{2} \end{cases} \quad (3.21)$$

Si on est dans le premier cas de (3.20) i.e $x_0 < \frac{k}{2}$ et $x_T > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2}$ ça implique impérativement qu'on est dans le premier cas de (3.21) i.e $x_0 < \frac{k}{2r} + \frac{k}{2}$ et $x_T > \frac{k}{2}$. Donc ces deux cas ce regroupe en un seul cas qui est :

$$x_0 < \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} \quad \text{et} \quad x_T > \frac{k}{2}. \quad (3.22)$$

De même si on est dans le deuxième cas de (3.20) i.e $x_0 > \frac{k}{2}$ et $x_T < \frac{k}{2r} + \frac{k}{2}$ ça implique impérativement qu'on est dans le deuxième cas de (3.21) i.e $x_0 > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2}$ et $x_T < \frac{k}{2}$. Donc ces deux cas ce regroupe en un seul cas qui est :

$$x_0 > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} \quad \text{et} \quad x_T < \frac{k}{2}. \quad (3.23)$$

De plus (3.16) doit être vérifiée, or d'après (3.20) et (3.21), (3.16) implique

$$x_T > x_0 \quad (3.24)$$

Alors pour que (3.11) soit vérifié il faut qu'on a la condition suivante

$$x_T > \frac{k}{2r} + \frac{k}{2} > \frac{k}{2} > x_0. \quad (3.25)$$

3.3.2 Conclusion

Dans ce travail, nous avons élaboré un modèle bioéconomique ($S1$) variant selon le prix de la ressource dans le marché, la biomasse et la quantité capturée en greffant la dynamique du prix dans le modèle. L'étude dynamique du modèle ($S1$) nous a montré, que selon des quantités de quota bien précises, nous avons la stabilité du modèle ($S1$). Nous avons aussi montré que même lors des situations où notre modèle ($S1$) n'admet pas de points d'équilibres on peut assurer toujours la stabilité du modèle mais cela passe par l'introduction d'une nouvelle mesure de gestion, qui est le repos biologique, à celle du quota. Nous avons proposé qu'à partir d'une période optimale de pêche T , évaluée grâce aux techniques de la théorie du contrôle optimal, l'instauration de la période de repos biologique associée à notre modèle, dépendant des conditions initiale (x_0, p_0) et finale (x_T, p_T) tout en respectant une fonction de capture $Y(t)$.

Bibliographie

- [1] AMI D., CARTIGNY P., AND RAPAPORT A. (2005), Can Marine Protected Areas Enhance Both Economic and Biological Situations ?, *C. R. Biologies*, 328, pp. 357-366.
- [2] AUBIN J.-P. (1993), *Optima and Equilibria : An Introduction to Nonlinear Analysis*, Graduate Texts in Mathematics-Springer.
- [3] BERNSTEIN C., AUGER P., POGGIALE J.-C. (1999), Predator migration decisions, the ideal free distribution and predator-prey dynamics, *Am. Nat.*, 153, pp. 267-281.
- [4] BERTIGNAC M., CAMPBELL H.F., HAMPTON J., AND HAND A.J. (2000), Maximazing Ressource Rent from the Western and Central Pacific Tuna Fisheries, *Marine Ressource Economics*, 15(3), pp. 151-177.
- [5] BONNARD B., AND CHYBA M. (2003), *The Role of Singular Trajectories in Control Theory*, Math. Monograph : Springer-Verlag.
- [6] CLARK C.W. (1990), *Mathematical Bioeconomics : the Optimal Management of Renewable Resources*, 2nded. : A Wiley-Interscience.
- [7] CONRAD J.M., AND CLARK C.W. (1987), *Naturel Resource Economics*, Cambridge : Cambridge University Press.
- [8] GATTO M., AND GHEZZI L.L. (1992), Taxing Overexploited Open-access Fisheries : The Role of Demand Elasticities, *Ecological Modelling*, 80, pp. 185-198.
- [9] GRAFTON R.Q., SANDAL L.K., AND STEINSHAMN S.I. (2000), How to Improve the Management of Renewable Ressources : The Case of Canada's Northern Cod Fisheries, *American Journal of Agricultural Economics*, 82, pp. 570-580.

-
- [10] JERRY M., RAÝSSI N. (2001), A Policy of Fisheries Management Based on Continuous Fishing Effort, *Journal of Biological Systems*, Vol. 9, No. 4, pp. 247-254.
14
- [11] JERRY M., RAÝSSI N. (2002), The Optimal Strategy for a Bioeconomical Model of a Harvesting Renewable Resource Problem, *Mathematical and Computer Modelling*, 36, pp. 1293-1306.
- [12] LAFRANCE J.T. (1985), Linear Demand Functions in Theory and Practice, *Journal of Economic Theory*, 37, pp. 147-166.
- [13] LETT C., AUGER P., BRAVO DE LA PARRA R. (2003), Migration frequency and the persistence of host-parasitoid interactions, *Journal of theoretical biology*, Vol. 221, No 4, pp. 639-654.
- [14] MULLON C., AND FRÉON P. (2005), Prototype of an integrated model of the worldwide system of small pelagic fisheries. In R. Hannesson, M. Barange and S.F. Herrick. , UK. pp. 262-295.
- [15] PERKO L. (2000), *Differential Equations and Dynamical systems*, 3rd. ed. : Springer-Verlag.
- [16] POGGIALE J.-C., AUGER P. (2004), Impact of spatial heterogeneity on a predator-prey system dynamics, *C. R. Biologies*, 327, pp. 1058-1063.
- [17] PONTRYAGIN L., BOLTYANSKI V., GAMKRELIDZE R., AND MICHTCHEKNO E. (1974), *Théorie Mathématique de Processus optimaux*, Edition Mir : Moscou.
- [18] SCHAEFER M.B. (1954), Some Aspects of the Dynamics of Populations Important to the Management of the Commercial Marines Fisheries, *Bulletin of the Inter-American Tropical Tuna Commission*, 1, pp. 25-26.
- [19] S.TOUZEAU (1997), *Modèle de contrôle en gestion des pêches*, thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis.
- [20] SVIZZERO S. (1993), *On the Introduction of Demand in a Fishery Model*.
- [21] TRELAT E. (2002), *Contrôle Optimal : Théorie et Applications*.

[22] VERHULST F. (1996), Nonlinear Differential Equations Dynamical Systems, 2nded, Universitext : Springer-Verlag.

[23] WALRAS L. (1874), Elements d'économie Politique Pure, Corbaz, Lausanne.