

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences



Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT LMD

Spécialité : Systèmes Dynamiques et Applications

présenté par : DJILALI Salih

Soutenu le : 26/04/2018

Etude Mathématique de certains modèles éco-épidémiologiques

Soutenu devant le jury composé de :

- M. TOUAOULA Mohammed Tarik Professeur Université de Tlemcen Président
- M. MOUSSAOUI Ali Professeur Université de Tlemcen Examineur
- M. HELAL Mohamed MCA Université de S.B. Abbes Examineur
- M. MEGHNAFI Mustapha MCA Université de Bechar Examineur
- M. MIRI Sofiane El-Hadi MCA Université de Tlemcen Directeur de Thèse

Dedicace

Je dédie ce modeste travail :

À ma chère mère Karima, qui m'a encouragé à aller de l'avant pour terminer mes études et m'a donné tout son amour.

À mon cher père Abderahmane.

À mon frère Nasredine et à ma soeur Hanifa.

À mon cher ami Ismail BOUDJEMA qui est un exemple de fidélité en amitié.

À ma famille et à tous mes amis.

Remerciements

Je tiens à présenter mes sincères remerciements à mon directeur de thèse M. Sofiane El Hadi MIRI, qui m'a initié à la théorie des bifurcations et de ses applications à la dynamique de populations, et il m'a donné l'opportunité de travailler sous sa direction durant les quatre formidables années et je lui réitère mes remerciements pour m'avoir transmis une partie de son expérience par ses conseils constructifs et pertinents. Je le remercie pour son soutien indéfectible et pour sa compréhension illimitée.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Mohamed Tarik Touaoula , pour sa précieuse aide dans la résolution de certains problèmes de la thèse, mais aussi pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury qui examinera ma thèse.

Je remercie aussi Monsieur le Professeur Ali Moussaoui, pour avoir accepté de faire partie du jury, ainsi que pour les conseils qu'il m'a prodigués tout au long de ma formation.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur Mustapha Meghnafi pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury.

Je présente mes remerciement à Monsieur le Professeur Mohamed Helal pour avoir donné son accord pour faire partie du jury qui examina la thèse.

Je tiens aussi à présenter des remerciements spéciaux au groupe d'enseignants du master, les Professeurs TOUAOULA, ABDELLAOUI, MOUSSAOUI et MIRI, qui nous ont donné une formation complète (analyse des équations différentielles ordinaires, et aux dérivées partielles, analyse de bifurcation, analyse numérique des EDO et EDP, simulations numériques avec C++ et MATLAB) qui fut un excellent départ pour entamer mes recherches scientifiques.

Je remercie aussi le Professeur Boumediene Abdellaoui, en sa qualité de Directeur du Laboratoire "Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées" pour avoir mis à notre disposition tout le matériel scientifique et informatique du laboratoire.

Résumés

Résumé Nous traitons dans cette thèse plusieurs modèles écologiques et épidémiologiques et éco-épidémiologiques dans le cas de l'équation différentielle ordinaire et dans les modèles de réaction diffusion et avec l'âge structure, et on a analysé l'existence des états d'équilibres et leurs stabilité (locale ou globale) et on a aussi analysé les types de bifurcation obtenu comme la bifurcation de Hopf et la bifurcation transcritique et on a utiliser la simulation numérique pour illustrer les résultats obtenu. **Mots clés** : Comportement troupeau, Héroïne, stabilité globale, stabilité locale, modèles réaction diffusion, l'âge structure, théorie de bifurcation.

Abstract We discuss in this thesis several ecological and epidemiological and eco-epidemiological models in the case of the ordinary differential equation and in the reaction-diffusion models and also the age structure, and we analyzed the existence of states of equilibrium and their stability (local or global) and the types of bifurcations obtained such as Hopf bifurcation and transcritical bifurcation; and numerical simulation was used to illustrate the results obtained. **Keywords** : Herd behavior, Heroin, global stability, local stability, reaction-diffusion models, age structure, bifurcation theory.

ملخص

نناقش في هذه الأطروحة العديد من النماذج الايكولوجية والوبائية والبيئية الايكولوجية في حالة المعادلة التفاضلية العادية وفي نماذج رد الفعل الانتشار ومع الهيكل العمري وحلنا وجود حالات التوازن و تم تحليل استقرارها وأنواع التشعب التي تم الحصول عليها مثل تشعب هوبف وتشعب عبر الحرجة واستخدمت المحاكاة العددية لتوضيح النتائج التي تم الحصول عليها.
الكلمات الرئيسية: سلوك القطيع، الهيروين، الاستقرار، نماذج تفاعل الانتشار، الهيكل العمري، نظرية التشعب.

Table des matières

Résumés	7
Introduction	11
I Epidémiologie mathématique et opiacés	17
1 Sur un modèle épidémiologique de l'usage de l'héroïne	19
1.1 Introduction	20
1.2 le Modèle	21
1.3 Attracteur global et compact et trajectoires totales	26
1.4 La stabilité globale de l'équilibre sans drogue	31
1.5 Persistance et stabilité globale de l'équilibre endémique	35
II Epidémiologie mathématique et comportement grégaire dans des modèles proie-prédateur	47
2 Comportement de troupeau dans un modèle proie-prédateur avec infection des proies	49
2.1 Introduction	50
2.2 Le cas non toxique	51
2.3 Le cas toxique	56
2.4 Conclusion	66
3 Comportement de troupeau dans un modèle proie-prédateur avec diffusion spatiale et infection des proies	67
3.1 Introduction	68
3.2 Le cas non toxique	68

3.3	Le cas toxique	76
3.4	Conclusion	91
4	Comportement de troupeau dans un modèle proie-prédateur avec diffusion spatiale	93
4.1	Introduction	94
4.2	Existence et positivité de la solution, bornitude de la solution, stabilité globale	96
4.3	Stabilité locale, instabilité de Turing et analyse de la bifurcation	102
4.4	Forme normale de la bifurcation de Hopf :	109
4.5	Conclusion	118
5	Annexes	121
5.1	Annexe A	122
5.2	Annexe B	126
	Bibliographie	131

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude mathématique de certains modèles épidémiologiques, écologiques et éco-épidémiologiques. Le but étant d'obtenir des informations sur les solutions des modèles étudiés, telles que la stabilité (locale et/ou globale), les bifurcations, l'influence de certains comportements grégaires sur les modèles étudiés. La plupart des résultats obtenus sont illustrés par des simulations numériques, soit pour conforter l'étude théorique, ou pour contourner une difficulté théorique rencontrée lors de notre étude.

La thèse est composée de deux grandes parties, la première partie est dédiée à l'étude de la propagation de l'utilisation de l'héroïne dans une population donnée, la seconde partie quant à elle regroupe trois chapitres sur l'étude d'un modèle éco-épidémiologique de type proie-prédateur en la présence et en l'absence de diffusion spatiale.

Première Partie : Epidémiologie mathématique et opiacés

Dans cette première partie, on considère la propagation de l'utilisation d'un opiacé (l'héroïne) comme une maladie infectieuse, en effet la transmission de l'accoutumance à l'héroïne se fait par contact entre ancien utilisateur de drogue et utilisateur susceptible, le contact ici est à considérer comme un contact sociologique, et la transmission ne se fait pas par contact physique mais par influence.

Nous considérons alors un modèle épidémique d'héroïne structuré en âge, dans une population divisée en trois sous-populations :

$$\begin{cases} S' = A - \mu S - F(S, U_1), \\ U_1' = F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p) U_1 + \int_0^\infty k(a) U_2(t, a) da, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial a} = -(\mu + \delta_2 + k(a)) U_2, \end{cases}$$

avec les conditions aux limite et initiales suivantes :

$$\begin{cases} U_2(t, 0) = pU_1(t), \\ S(0) = S^0 \in \mathbb{R}_+, \quad U_1(0) = U_1^0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{and} \quad U_2(0, \cdot) = U_2^0(\cdot) \in L_+^1((0, +\infty)), \end{cases}$$

où $S(t)$, $U_1(t)$ représentent respectivement les individus susceptibles et les utilisateurs de drogue dans la population à l'instant t , $U_2(t, a)$: représente les utilisateurs de drogue sous traitement à l'instant t , a est l'âge de traitement, N la densité de la population totale; soit $N = S + U_1 + \int_0^\infty U_2(t, a) da$, A représente les nouveaux individus entrant dans la population des susceptibles (soit de l'immigration ou des nouveaux nés), p est le taux auquel les utilisateurs de drogue entrent dans le traitement, δ_1 représente le taux d'élimination des utilisateurs de drogues qui ne sont pas traités, δ_2 représente le taux d'élimination des utilisateurs de drogues dans le traitement, $k(a)$ représente la probabilité de rémission d'un utilisateur de drogue sous traitement à l'âge du traitement θ , $\Pi(a) = \exp(-\int_0^a (\mu + \delta_2 + k(\theta)) d\theta)$

est la probabilité qu'un utilisateur de drogue soit toujours sous traitement après a unité d'âge, μ représente le taux de mortalité naturelle, $F(S, U_1)$ représente la fonction d'incidence non linéaire.

L'innovation dans ce travail est de considérer une fonction d'incidence non linéaire sous la forme la plus générale possible, et de faire l'étude asymptotique globale du modèle considéré.

Ce travail a fait l'objet de la publication internationale : Salih Djilali, Tarik Mohammed Touaoula and Sofiane El-Hadi Miri. " A Heroin Epidemic Model : Very General Non Linear Incidence, Treat-Age, and Global Stability." Acta Appl Math (2017). DOI : 10.1007/s10440-017-0117-2

link.springer.com/article/10.1007/s10440-017-0117-2.

Deuxième Partie : Epidémiologie mathématique et comportement grégaire dans des modèles proie-prédateur

Nous présentons dans cette seconde partie, une étude mathématique et numérique de plusieurs modèles écologiques et épidémiologiques, dans les deux premiers chapitres nous considérons des modèles proie-prédateur avec un " Comportement de Troupeau (ou Herd Behavior en anglais) " de la population des proies, qui représente une attitude grégaire et sociale des proies, introduit par différents auteurs dans littérature existante, ce phénomène existe dans la nature ; on donne l'exemple des moutons ou celui de certains espèces d'oiseaux (figure 0) ce comportement est naturel et instinctif chez certaines populations de proies, dans ces deux chapitres on a lié ce comportement à une maladie qui infecte la population des proies et on a analysé le modèle dans les deux cas, non toxique et toxique pour les prédateurs (on appellera cas toxique le cas où la maladie est mortelle pour les prédateurs et non toxique dans le cas contraire), et on a étudié le modèle dans les deux cas, sans diffusion (modèle EDO) et avec diffusion (modèle EDP).



Fig0 : Comportement de Troupeau dans la nature

Les modèles traités sont les suivants

1. *Cas non toxique* :

$$\begin{cases} \dot{P} = -mP + aPS + bP\sqrt{I}, \\ \dot{S} = -\beta S\sqrt{I} + rS\left(1 - \frac{S}{k}\right) - aPS, \\ \dot{I} = -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I}, \end{cases}$$

où P représente la densité des prédateurs, S et I sont respectivement les densités des proies susceptibles et des proies infectées, m le taux de mortalité naturelle des prédateurs, β le taux de transmission, r le taux de croissance de la population des proies, a le taux de prédation des proies susceptibles, b le taux de prédation des proies infectées, k la capacité limite d'espèce pour les proies. Le terme \sqrt{I} modélise le comportement de troupeau. μ la mortalité de la population des proies infectées.

2. *Cas toxique* :

On considère le modèle

$$\begin{cases} \dot{P} = -mP + aPS - bP\sqrt{I} \\ \dot{S} = -\beta S\sqrt{I} + rS\left(1 - \frac{S}{k}\right) - aPS \\ \dot{I} = -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} \end{cases}$$

On conserve la même notation faite avec le système précédent le terme $(-bP\sqrt{I})$ signifie que le contact avec une proie infectée est fatal pour le prédateur.

Ensuite nous considérons les deux précédents modèles en présence d'une diffusion spatiale, ce qui

donne les modèles :

1. *Cas non toxique en présence de diffusion :*

$$\begin{cases} P_t = -mP + aPS + bP\sqrt{I} + b_3P_{xx} \\ S_t = -\beta S\sqrt{I} + rS\left(1 - \frac{S}{k}\right) - aPS + b_2S_{xx} \\ I_t = -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} + b_1I_{xx} \end{cases}$$

sous les conditions aux bords de type Neumann.

2. *Cas toxique en présence de diffusion :*

$$\begin{cases} P_t = -mP + aPS - bP\sqrt{I} + d_1P_{xx}, \\ S_t = -\beta S\sqrt{I} + rS\left(1 - \frac{S}{k}\right) - aPS + d_2S_{xx}, \\ I_t = -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} + d_3I_{xx}, \end{cases}$$

sous les conditions aux bords de Neumann.

Notre but dans ces deux chapitres est d'étudier la stabilité des points d'équilibre, et d'analyser d'éventuelles bifurcation en l'absence ou en la présence de diffusion et de toxicité.

Ces deux chapitres font l'objet d'une prépublication actuellement en expertise.

Dans le dernier chapitre de cette partie, on a continué à étudier des modèles proie-prédateur dans la présence de comportement de troupeau mais avec une fonction réponse de type Holling, avec pour objectif d'observer l'apparition d'une bifurcation de Hopf, ainsi que l'instabilité de Turing.

Notre modèle étant le suivant

$$\begin{cases} R_t(x, t) - d_1R_{xx}(x, t) = rR(x, t)\left(1 - \frac{R(x, t)}{k}\right) - \frac{aR(x, t)P(x, t)}{1 + b\sqrt{R(x, t)} + cR(x, t)} & x \in (0, L) \\ P_t(x, t) - d_2P_{xx}(x, t) = -mP(x, t) + \frac{eaR(x, t)P(x, t)}{1 + b\sqrt{R(x, t)} + cR(x, t)} & t \geq 0 \end{cases}$$

avec des conditions aux bords de type Neumann.

Ce travail a fait l'objet d'une publication :

Salih Djilali "Herd behavior in a predator-prey model with spatial diffusion : bifurcation analysis and Turing instability." *Journal of Applied Mathematics and Computing*. (2017) pp. 1-25. DOI : <https://doi.org/10.1007/s12190-017-1137-9>

Première partie

Epidémiologie mathématique et opiacés

Chapitre 1

Sur un modèle épidémiologique de l'usage de l'héroïne

Ce chapitre a fait l'objet de la publication [\[19\]](#)

1.1 Introduction

Il est maintenant établi que l'héroïne, comme toute autre drogue opiacée, se propage dans une population comme une maladie épidémique, en effet, un individu "susceptible" devient un usager de drogue après un contact avec un ancien consommateur de drogues, qui l'infectera. Ici, le terme «infection» doit être considéré comme une influence à attirer les sensibles à l'usage de la drogue. De ce point de vue, la population considérée se divise en trois sous-populations ; à savoir S sont des individus susceptibles, U_1 des utilisateurs des drogues et U_2 des utilisateurs des drogues sous traitement comme indiqué dans le schéma de compartiments de la figure 1.1. Il existe dans la littérature de nombreux modèles décrivant le processus indiqué dans la figure 1.1, la différence entre eux, consiste principalement à modéliser l'interaction dans les trois compartiments.

L'un des premiers modèles a été introduit par White et Comiskey dans [69], où le système d'EDO suivant est considéré

$$\begin{cases} S' = A - \mu S - \beta_1 \frac{SU_1}{N}, \\ U_1' = \beta_1 \frac{SU_1}{N} + \beta_2 \frac{U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1 + p) U_1, \\ U_2' = p U_1 - \beta_2 \frac{U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2) U_2, \end{cases}$$

la stabilité des points d'équilibre, et une bifurcation backward est établie. Les spécialistes disent souvent que lorsqu'une bifurcation backward apparaît, cela signifie que le nombre de reproduction de base calculé R_0 ne correspond pas au taux réel, cela est certainement dû au changement de comportement des consommateurs de drogue sous traitement, lors de l'interruption du traitement ; ce travail étant le point de départ de notre étude nous allons le présenter plus en détails en préambule.

Après cela, un traitement par l'âge a fut introduit

$$\begin{cases} S' = A - \mu S - \beta S U_1, \\ U_1' = \beta S U_1 - (\mu + \delta_1 + p) U_1 + \int_0^{\infty} k(a) U_2(t, a) da, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial a} = -(\mu + \delta_2 + k(a)) U_2, \end{cases}$$

par Fang et al. dans [21], où une fonction d'incidence bilinéaire est considérée, nous rappelons que la fonction d'incidence représentée est le nombre de nouveaux consommateurs de drogue par unité de temps. Une fonction d'incidence plus générale a été prise en compte dans le travail très récent de yong et al. [33] on y trouve une étude de la stabilité globale de l'équilibre sans drogue et endémique du

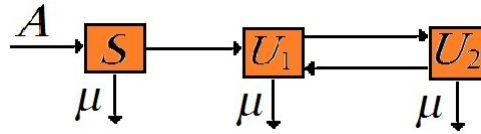


FIGURE 1.1

modèle

$$\begin{cases} S' = A - \mu S - \beta S f(U_1), \\ U_1' = \beta S f(U_1) - (\mu + \delta_1 + p) U_1 + \int_0^{\infty} k(a) U_2(t, a) da, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial a} = -(\mu + \delta_2 + k(a)) U_2. \end{cases}$$

Dans ce chapitre, nous considérerons une fonction d'incidence non linéaire sous sa forme la plus générale $F(S, U_1)$ et selon des hypothèses appropriées sur F , nous présenterons la stabilité globale de l'équilibre sans drogue sous la condition que $R_0 \leq 1$ et de l'équilibre endémique dès lors qu'il existe, sous la condition $R_0 > 1$. Il est à noter que notre modèle généralise tous les modèles présentés précédemment, il prend également en compte le cas particulier $f(S)G(U_1)$ quand l'incidence est considérée comme le produit de fonctions non-linéaires. Le choix d'une incidence non linéaire générale est la pierre angulaire de notre travail, elle englobe toutes les fonctions usuelles.

1.2 le Modèle

Nous considérons un modèle épidémique d'héroïne structuré en âge, dans une population divisée en trois sous-populations : S les individus susceptibles, U_1 est la densité des utilisateurs des drogues et U_2 est la densité des consommateurs de drogue sous traitement, interagissant comme suit :

$$\begin{cases} S' = A - \mu S - F(S, U_1), \\ U_1' = F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p) U_1 + \int_0^{\infty} k(a) U_2(t, a) da, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial a} = -(\mu + \delta_2 + k(a)) U_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

avec les conditions aux limite et initiales suivantes :

$$\begin{cases} U_2(t, 0) = pU_1(t), \\ S(0) = S^0 \in \mathbb{R}_+, \quad U_1(0) = U_1^0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{and} \quad U_2(0, \cdot) = U_2^0(\cdot) \in L_+^1((0, +\infty)), \end{cases} \quad (1.2)$$

où $S(t), U_1(t)$ représentent respectivement les individus susceptibles et les consommateurs de drogue dans la population à l'instant t , $U_2(t, a)$: représente les consommateurs de drogue sous traitement à l'instant t , a est l'âge de traitement, N la densité de la population totale; soit $N = S + U_1 +$

$\int_0^\infty U_2(t, a) da$, A représente les nouveaux individus entrant dans la population des susceptibles (soit de l'immigration ou des nouveaux nés), p est le taux auquel les consommateurs de drogue entrent dans le traitement, δ_1 représente le taux d'élimination des consommateurs de drogue qui ne sont pas traités, δ_2 représente le taux d'élimination des consommateurs de drogue sous traitement, $k(a)$ représente la probabilité de rémission d'un consommateurs de drogue sous traitement. On supposera aussi que \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R}_+ , $\Pi(a) = \exp(-\int_0^a (\mu + \delta_2 + k(\theta)) d\theta)$ est La probabilité qu'un utilisateur de drogue soit toujours sous traitement après a unité d'âge, μ représente le taux de mortalité naturelle, $F(S, U_1)$ représente - comme on a indiqué dans l'introduction du chapitre - la fonction d'incidence non linéaire.

On suppose que la fonction d'incidence non linéaire remplit les conditions suivantes

- si $y \geq 0$, $F(x, \cdot)$ est supposé être croissante pour $x > 0$.
- $F(0, y) = F(x, 0) = 0$ pour tout $x, y \geq 0$.
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x, 0)$ est positive et continue sur chaque ensemble compact.
- F est continue et localement L -Lipschitzienne par rapport aux deux variables x et y , a savoir

pour chaque $c > 0$ il existe $L > 0$ tel que

$$|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| \leq L(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|)$$

pour $0 \leq x_2, y_2, x_1, y_1 \leq c$.

Observons que, par exemple, les fonctions d'incidence de Holling I-III, ainsi que celle de Beddington-DeAngelis $F(x, y) = \frac{xy}{1+mx+ny}$ avec m et n des paramètres positifs, sont des cas particuliers de la fonction d'incidence considérée ici.

Tous les paramètres sont supposés positifs, nous supposons également que $k \in L_+^\infty((0, +\infty)) \setminus \{0_{L^\infty}\}$.

Nous plaçons notre problème dans les espaces fonctionnels

$$X := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L^1(0, +\infty),$$

$$X_+ := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times L_+^1(0, +\infty),$$

dotés de la norme

$$\|(S, U_1, U_2(\cdot))\| = |S| + |U_1| + \int_0^\infty |U_2(a)| da$$

Pour chaque condition initiale dans X_+ il existe une solution positive qui peut être obtenue par des méthodes classiques inspirées des travaux de Iannelli et Webb [32, 68].

THÉORÈME 1.1. *Le système (1.1) (1.2), est "point-dissipatif". Plus précisément, soit $(S^0, U_1^0, U_2^0(\cdot)) \in X_+$, alors il existe une solution unique positive $(S, U_1, U_2(\cdot)) \in C^1(\mathbb{R}^+) \times C^1(\mathbb{R}^+) \times C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^+))$ au*

problème (1.1), et vérifiant les estimations suivantes

$$N(t) = S(t) + U_1(t) + \int_0^\infty U_2(t, a) da \leq \max\{S^0 + U_1^0 + \|U_2^0\|_{L^1}, \frac{A}{\mu}\}$$

pour tout $t \geq 0$.

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{A}{\mu}$$

et

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{A}{\mu + L},$$

où L est la constante de lipschitz associée à F .

Démonstration. En utilisant le théorème standard du point fixe de Banach, nous obtenons l'existence et l'unicité de la solution positive de (1.1), comme cela a été fait par exemple dans [5]. En ajoutant maintenant les trois équations du système que nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(S + U_1 + \int_0^\infty U_2(t, a) da \right) \\ = & S' + U_1' + \int_0^\infty \frac{\partial U_2(t, a)}{\partial t} da \\ = & A - \mu S - F(S, U_1) + F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p) U_1 + \int_0^\infty k(a) U_2(t, a) da \\ & + \int_0^\infty \left(-\frac{\partial U_2(t, a)}{\partial a} - (\mu + \delta_2 + k(a)) U_2(t, a) \right) da \\ = & A - \mu \left(S + U_1 + \int_0^\infty U_2(t, a) da \right) - p U_1 - \delta_1 U_1 - \delta_2 \int_0^\infty U_2(t, a) da \\ \leq & A - \mu \left(S + U_1 + \int_0^\infty U_2(t, a) da \right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'inégalité différentielle

$$N' \leq A - \mu N,$$

équivalente à

$$(N(t)e^{\mu t})' \leq Ae^{\mu t},$$

en intégrant la dernière équation nous obtenons

$$N(t) \leq \left(N(0) - \frac{A}{\mu} \right) e^{-\mu t} + \frac{A}{\mu},$$

alors

$$N(t) \leq \max\{N(0) = S^0 + U_1^0 + \|U_2^0\|_{L^1}, \frac{A}{\mu}\}.$$

Nous avons aussi

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{A}{\mu}.$$

Nous prouvons maintenant, la dernière estimation du théorème

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{A}{\mu + L},$$

en effet, posons $\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S_\infty$, et $\limsup_{t \rightarrow +\infty} U_1 = U_1^\infty$, selon la méthode de fluctuation (Voir par exemple [5]) il existe une suite $\{t_k\}_k$, tel que $\lim_{t_k \rightarrow +\infty} S'(t_k) = 0$ et $\lim_{t_k \rightarrow +\infty} S(t_k) = S_\infty$ ainsi

$$A - \mu S_\infty - F(S_\infty, U_1^\infty) \leq 0.$$

Par le fait que F est L -localement Lipschitzienne et en utilisant l'hypothèse $F(0, U_1^\infty) = 0$, on obtient

$$A - \mu S_\infty - L S_\infty \leq 0,$$

et alors

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S_\infty \geq \frac{A}{\mu + L}.$$

□

Le taux de reproduction de base R_0 pour le modèle (1.1)-(1.2), est donné par

$$R_0 = \frac{\partial F}{\partial U_1} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) \frac{1}{(\mu + \delta_1 + p) - pK},$$

avec

$$K := \int_0^\infty \Pi(a)k(a)da. \quad (1.3)$$

Le système (1.1)-(1.2) en considération, de la condition $F(0, y) = F(x, 0) = 0$, pour tout $x, y \geq 0$, possède toujours un équilibre sans drogue; $E_0 = (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$.

Sous l'hypothèse $R_0 > 1$ on déduit l'existence d'un équilibre endémique, c'est une solution de

$$\begin{cases} A - \mu S^* - F(S^*, U_1^*) = 0, \\ F(S^*, U_1^*) - (\mu + \delta_1 + p)U_1^* + \int_0^\infty k(a)U_2^*(a)da = 0, \\ \frac{\partial U_2^*}{\partial a} = -(\mu + \delta_2 + k(a))U_2^*, \\ U_2^*(0) = pU_1^*, \end{cases}$$

avec $U_1^* \neq 0$. En effet, après un calcul direct de l'équation de U_2^* , en la combinant avec la deuxième équation du problème ci-dessus, nous obtenons,

$$\begin{cases} A = \mu S^* + F(S^*, U_1^*), \\ F(S^*, U_1^*) - (\mu + \delta_1 + p)U_1^* + pKU_1^* = 0, \end{cases}$$

ainsi,

$$\begin{cases} A = \mu S^* + F(S^*, U_1^*), \\ F(S^*, U_1^*)\bar{D} = U_1^*, \end{cases}$$

avec $\bar{D} = \frac{1}{\mu + \delta_1 + (1 - K)p}$, et ce dernier système admet une solution ; sous la condition $R_0 > 1$, par les mêmes arguments que dans [34, 35] ; nous fournissons cependant une preuve alternative avec plus de détails. Considérons le système

$$\begin{cases} A = \mu S^* + F(S^*, U^*), \\ \bar{D}F(S^*, U^*) = U^*, \end{cases}$$

de la deuxième équation de ce système, nous obtenons

$$F(S^*, U^*) = \frac{U^*}{\bar{D}},$$

nous remplaçons $F(S^*, U^*)$ par $\frac{U^*}{\bar{D}}$ dans la première équation du système, ce qui donne

$$A - \mu S^* = \frac{U^*}{\bar{D}},$$

et donc

$$S^* = \frac{1}{\mu} \left(A - \frac{U^*}{\bar{D}} \right).$$

Maintenant nous remplaçons S^* par sa valeur dans la deuxième équation de notre système, qui devient

$$\bar{D}F\left(\frac{1}{\mu}\left(A - \frac{U^*}{\bar{D}}\right), U^*\right) = U^*,$$

enfin, nous recherchons un point fixe de la fonction G avec

$$G(U^*) = \bar{D}F\left(\frac{1}{\mu}\left(A - \frac{U^*}{\bar{D}}\right), U^*\right).$$

Observons d'abord que, par l'hypothèse faite sur F nous avons

$$G(0) = \bar{D}F\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) = 0,$$

et

$$G(A\bar{D}) = 0.$$

Nous calculons maintenant la première dérivée de G en $U^* = 0$

$$\begin{aligned} G'(0) &= \bar{D} \left[-\frac{1}{\mu}(\bar{D} - 1) \frac{\partial F}{\partial S}\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) + \frac{\partial F}{\partial U^*}\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) \right] \\ &= \bar{D} \frac{\partial F}{\partial U^*}\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) \\ &= R_0. \end{aligned}$$

Ceci est en particulier dû à l'hypothèse $F(S, 0) = 0$ pour tout S positif, et comme on suppose que $R_0 > 1$, nous avons obtenu que

$$G'(0) > 1.$$

Cette dernière inégalité associée à $G(0) = 0$ et à $G(A\bar{D}) = 0$, nous amènent à conclure que le graphe de la fonction G coupe nécessairement (au moins une fois) la première bissectrice $y = U^*$. De plus, ce point fixe appartient à l'intervalle $[0, A\bar{D}]$, $U^* < A\bar{D}$, donc nécessairement $S^* = \frac{1}{\mu}\left(A - \frac{U^*}{\bar{D}}\right) > 0$. L'existence d'un équilibre positif est montrée, l'unicité sera, quant à elle démontrée dans la dernière section du chapitre.

1.3 Attracteur global et compact et trajectoires totales

Nous définissons un semi-flot (que l'on supposera continu) de (1.1)-(1.2) comme suit

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \times X_+ \rightarrow X_+,$$

$$\Phi(t, (S^0, U_1^0, U_2^0(\cdot))) = (S(t), U_1(t), U_2(t, \cdot)).$$

THÉORÈME 1.2. *Le semiflot Φ a un attracteur compact \mathbf{A} des ensembles bornés de X .*

Démonstration. Par le théorème 1, le semi-flot Φ est "point-dissipative" et finalement délimité dans des ensembles bornés, d'où le **Théorème 2.33** en [49]. Pour prouver notre théorème, il suffit de montrer que Φ est asymptotiquement régulière; à cette fin, nous appliquerons le **théorème 2.46** dans [49]. Nous définissons

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(t, (S^0, U_1^0, U_2^0(\cdot))) &= (0, 0, \widehat{U}_2(t, \cdot)), \\ \widetilde{\Phi}(t, (S^0, U_1^0, U_2^0(\cdot))) &= (S(t), U_1(t), \widetilde{U}_2(t, \cdot)),\end{aligned}$$

où

$$\widetilde{U}_2(t, a) = \begin{cases} U_2(t, a) & \text{pour } 0 \leq a \leq t \\ 0 & \text{pour } t < a \end{cases} = \begin{cases} pU_1(t-a)\Pi(a) & \text{pour } 0 \leq a \leq t \\ 0 & \text{pour } t < a \end{cases}$$

et

$$\widehat{U}_2(t, a) = U_2(t, a) - \widetilde{U}_2(t, a) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq a \leq t \\ U_2^0(a-t) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} & \text{pour } t < a \end{cases}$$

donc on a

$$\Phi = \widehat{\Phi} + \widetilde{\Phi}.$$

Maintenant, soit C un sous-ensemble fermé borné des données initiales dans X , et soit

$$M_1 = \sup\{S^0 + U_1^0 + \|U_2^0\|_{L^1}, (S^0, U_1^0, U_2^0) \in C\}$$

et

$$M = \max\{M_1, \frac{A}{\mu}\},$$

par un calcul direct, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\widehat{\Phi}(t, (S^0, U_1^0, U_2^0(\cdot)))\| &= \|\widehat{U}_2(t, \cdot)\|_{L^1} \\ &= \int_t^\infty U_2^0(a-t) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} da \\ &= \int_0^\infty U_2^0(a) \frac{\Pi(a+t)}{\Pi(a)} da \\ &\leq e^{-\mu t} \int_0^\infty U_2^0(a) da, \\ &\leq M e^{-\mu t},\end{aligned}$$

et ainsi

$$\widehat{\Phi}(t, (S^0, U_1^0, U_2^0(\cdot))) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty \text{ uniformément dans } C.$$

Nous devons maintenant établir que $\widetilde{\Phi}$ est complètement continu, pour cela, nous appliquerons le **théorème de Frechet-Kolmogorov** [49], et il suffit alors de vérifier la condition

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \widetilde{U}_2(t, \cdot) - \widetilde{U}_2(t, \cdot + h) \right\|_{L^1} = 0 \text{ uniformément dans } C,$$

les autres conditions du théorème de Frechet-Kolmogorov étant évidemment vérifiées.

Soit $h \in (0, t)$, comme conséquence directe des faits que $U_1(t) \leq \frac{A}{\mu}$, et

$$|\Pi(a+h) - \Pi(a)| \leq 1 - e^{\int_a^{a+h} (\mu + \delta_1 + k(s)) ds} \leq (\mu + \delta_1 + \|k\|_{L^\infty})h,$$

nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{U}_2(t, \cdot) - \widetilde{U}_2(t, \cdot + h) \right\|_{L^1} &= \int_0^\infty \left| \widetilde{U}_2(t, a) - \widetilde{U}_2(t, a+h) \right| da \\ &= p \int_0^{t-h} |U_1(t-a-h)\Pi(a+h) - U_1(t-a)\Pi(a)| da \\ &\quad + p \int_{t-h}^t U_1(t-a)\Pi(a) da \\ &\leq p \int_0^{t-h} U_1(t-a-h) |\Pi(a+h) - \Pi(a)| da \\ &\quad + p \int_0^{t-h} |U_1(t-a-h) - U_1(t-a)| \Pi(a) da + pMh \\ &\leq pMh + (\mu + \delta_1 + \|k\|_{L^\infty})h + \\ &\quad + p \int_0^{t-h} |U_1(t-a-h) - U_1(t-a)| \Pi(a) da + pMh. \end{aligned}$$

Par la continuité uniforme de U_1 nous obtenons le résultat souhaité, qui complète la preuve. \square

Maintenant, nous nous concentrerons sur les trajectoires totales du système (1.1)-(1.2). suivant le même raisonnement que dans [5], et par un calcul simple, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} S' = A - \mu S - F(S, U_1), \\ U_1' = F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p)U_1 + \int_0^\infty k(a)U_2(t, a) da, \\ U_2(t, a) = p\Pi(a)U_1(t-a); \end{cases} \quad (1.4)$$

vérifié par les trajectoires totales pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Par l'utilisation du système (1.4), nous fournissons des estimations qui seront utiles pour manipuler

l'attracteur compact \mathbf{A} .

THÉORÈME 1.3. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$U_1(t) + S(t) + p \int_0^{+\infty} U_2(t, a) da \leq \frac{A}{\mu},$$

$$S(t) \geq \frac{A}{\mu + L},$$

et

$$p \int_0^{+\infty} k(a) \Pi(a) U_1(t - a) da \leq \frac{A}{\mu} \|k\|_{\infty}.$$

Démonstration. Rappelons que

$$\Pi(a) = \exp\left(-\int_0^a (\mu + \delta_2 + k(\theta)) d\theta\right),$$

et alors

$$\Pi'(a) = -(\mu + \delta_2 + k(a)) \Pi(a).$$

En présentant la fonction auxiliaire, on a

$$\tilde{U}_2(t) = p \int_0^{\infty} \Pi(a) U_1(t - a) da,$$

posons $s = t - a$, on trouve

$$\tilde{U}_2(t) = p \int_{-\infty}^t \Pi(t - s) U_1(s) ds,$$

alors

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2'(t) &= p \Pi(0) U_1(t) - p \int_{-\infty}^t (\mu + \delta_2 + k(t - s)) \Pi(t - s) U_1(s) ds \\ &= p U_1(t) - p(\mu + \delta_2) \int_{-\infty}^t \Pi(t - s) U_1(s) ds - p \int_{-\infty}^t k(t - s) \Pi(t - s) U_1(s) ds \\ &= p U_1(t) - p(\mu + \delta_2) \int_0^{+\infty} \Pi(a) U_1(t - a) da - p \int_0^{+\infty} k(a) \Pi(a) U_1(t - a) da \\ &= p U_1 - (\mu + \delta_2) \tilde{U}_2 - p \int_0^{+\infty} k(a) \Pi(a) U_1(t - a) da, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\tilde{U}'_2 + U'_1 + S' &= pU_1 - p \int_0^{+\infty} k(a) \Pi(a) U_1(t-a) da - (\mu + \delta_2) \tilde{U}_2 \\ &\quad - (\mu + \delta_1 + p) U_1 + p \int_0^{+\infty} k(a) \Pi(a) U_1(t-a) da \\ &\quad + A - \mu S.\end{aligned}$$

Par suite

$$\left(\tilde{U}_2 + U_1 + S\right)' \leq A - \mu \left(\tilde{U}_2 + U_1 + S\right),$$

donc

$$\left[\left(\tilde{U}_2 + U_1 + S\right) e^{\mu s}\right]' \leq A e^{\mu s},$$

après une intégration entre r et t

$$\left(\tilde{U}_2(t) + U_1(t) + S(t)\right) e^{\mu t} \leq \left(\tilde{U}_2(r) + U_1(r) + S(r)\right) e^{\mu r} + \frac{A}{\mu} \left(e^{\mu t} - e^{\mu r}\right),$$

fixons t et faisons tendre r vers $-\infty$ on trouve

$$\tilde{U}_2(t) + U_1(t) + S(t) \leq \frac{A}{\mu};$$

la dernière inégalité étant vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Maintenant, nous passons à la deuxième inégalité; par la première équation dans (1.4), Et par le fait que $0 \leq U_1(t) \leq \frac{A}{\mu}$, comme F est continu, on doit avoir,

$$\begin{aligned}S' &= A - \mu S - F(S, U_1) \\ &\geq A - \mu S - F(S, c),\end{aligned}$$

pour certains $c \geq 0$. Par le fait que F est L -lipschitzienne et $F(0, c) = 0$, on trouve

$$S' \geq A - \mu S - LS,$$

après intégration, nous obtenons l'estimation souhaitée

$$S(t) \geq \frac{A}{\mu + L}.$$

La dernière inégalité est évidente. \square

1.4 La stabilité globale de l'équilibre sans drogue

Cette section est consacrée à prouver la stabilité asymptotique globale de l'équilibre sans drogue. Pour ce faire, nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

(H1) $F(., y)$ est une fonction concave.

Tout au long de cette section, nous notons $\bar{N} := \frac{A}{\mu}$.

THÉORÈME 1.4. *Supposons que (H1) est vérifiée, sous l'hypothèse $R_0 \leq 1$, l'équilibre sans drogue $(\bar{N}, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. Tout d'abord, soit ϕ telle que

$$\begin{cases} \phi'(a) = -pk(a) \Pi(a) R_0, \\ \phi(0) = pK R_0. \end{cases}$$

La solution de ce problème est donnée par

$$\phi(a) = pR_0 \int_a^\infty k(\theta) \Pi(\theta) d\theta,$$

pour $x := (S_0, U_1^0, U_2^0) \in \mathbf{A}$.

$$V = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x),$$

avec

$$V_1(x) = S_0 - \bar{N} - \int_{\bar{N}}^{S_0} \lim_{U_1 \rightarrow 0} \frac{F(\bar{N}, U_1)}{F(\eta, U_1)} d\eta$$

$$V_2(x) = R_0 U_1^0,$$

$$V_3(x) = \int_0^\infty \phi(a) \frac{U_2^0(a)}{p\Pi(a)} da,$$

soit $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}$ une trajectoire totale $\chi(t) = (S(t), U_1(t), U_2(t, .))$, $S(0) = S_0$, $U_1(0) = U_1^0$ et $U_2(0, a) =$

U_2^0 avec $(S(t), U_1(t), U_2(t, \cdot))$ solution de problème (1.4) ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_1(\chi(t)) &= \left(1 - \lim_{U_1 \rightarrow 0} \frac{F(\bar{N}, U_1)}{F(S, U_1)} \right) (A - \mu S - F(S, U_1)) \\ &= \mu \left(1 - \lim_{U_1 \rightarrow 0} \frac{F(\bar{N}, U_1)}{F(S, U_1)} \right) (\bar{N} - S) - \left(1 - \lim_{U_1 \rightarrow 0} \frac{F(\bar{N}, U_1)}{F(S, U_1)} \right) F(S, U_1). \end{aligned}$$

Soit à présent

$$V_2(\chi(t)) = R_0 U_1(t),$$

la dérivée de V_2 donne

$$\frac{d}{dt} V_2(\chi(t)) = R_0 F(S, U_1) - R_0 (\mu + \delta_1 + p) U_1 + p R_0 \int_0^\infty k(\theta) \Pi(\theta) U_1(t - \theta) d\theta.$$

En ce qui concerne la troisième partie de notre fonction de Lyapunov,

$$V_3(\chi(t)) = \int_0^\infty \phi(a) U_1(t - a) da,$$

on a

$$\frac{d}{dt} V_3(\chi(t)) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty \phi(a) U_1(t - a) da = \phi(0) U_1(t) + \int_0^\infty \phi'(a) U_1(t - a) da,$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\chi(t)) &= \mu \left(1 - \lim_{U_1 \rightarrow 0} \frac{F(\bar{N}, U_1)}{F(S, U_1)} \right) (\bar{N} - S) - \left(1 - \lim_{U_1 \rightarrow 0} \frac{F(\bar{N}, U_1)}{F(S, U_1)} \right) F(S, U_1) \\ &+ R_0 F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p) R_0 U_1 \\ &+ p R_0 \int_0^\infty k(a) \Pi(a) U_1(t - a) da + \phi(0) U_1(t) + \int_0^\infty \phi'(a) U_1(t - a) da. \end{aligned}$$

En mettant pour simplifier

$$J_1 = \mu \left(1 - \lim_{U_1 \rightarrow 0} \frac{F(\bar{N}, U_1)}{F(S, U_1)} \right) (\bar{N} - S),$$

en utilisant la définition de ϕ et le fait que

$$R_0(\mu + \delta_1 + p - pK) = \frac{\partial F}{\partial U_1}(\bar{N}, 0)$$

on trouve,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\chi(t)) &= J_1 + F(S, U_1) \lim_{U_1 \rightarrow 0} \frac{F(\bar{N}, U_1)}{F(S, U_1)} - (\mu + \delta_1 + p - Kp) R_0 U_1 + (R_0 - 1) F(S, U_1) \\ &= J_1 + F(S, U_1) \lim_{U_1 \rightarrow 0} \frac{F(\bar{N}, U_1)}{F(S, U_1)} - U_1 \frac{\partial F}{\partial U_1}(\bar{N}, 0) + (R_0 - 1) F(S, U_1). \end{aligned}$$

La concavité de F par rapport à U_1 implique que,

$$F(S, U_1) \leq U_1 \frac{\partial F}{\partial U_1}(S, 0).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} F(S, U_1) \lim_{U_1 \rightarrow 0} \frac{F(\bar{N}, U_1)}{F(S, U_1)} - U_1 \frac{\partial F}{\partial U_1}(\bar{N}, 0) &= F(S, U_1) \frac{\frac{\partial F}{\partial U_1}(\bar{N}, 0)}{\frac{\partial F}{\partial U_1}(S, 0)} - U_1 \frac{\partial F}{\partial U_1}(\bar{N}, 0), \\ &= \frac{\frac{\partial F}{\partial U_1}(\bar{N}, 0)}{\frac{\partial F}{\partial U_1}(S, 0)} (F(S, U_1) - U_1 \frac{\partial F}{\partial U_1}(S, 0)) \leq 0. \end{aligned}$$

Finalement, comme $R_0 \leq 1$, nous concluons que $\frac{d}{dt}V(\chi(t)) \leq 0$.

Notons que, $\frac{d}{dt}V(\chi(t)) = 0$ implique que $S = \bar{N}$. Nous substituons cela dans l'équation de S dans (1.4), on trouve $U_1 = 0$ et donc de l'expression de U_1 dans (1.4) on trouve $U_2 = 0$. D'où le plus grand ensemble invariant avec la propriété que $\frac{d}{dt}V(\chi(t)) = 0$ est le singleton $\{(\bar{N}, 0, 0)\}$ (Principe d'invariance de LaSalle). D'un autre côté, par le fait que \mathbf{A} est compact, les ensembles ω -limite et α -limite $\omega(S^0, U_1^0, U_2^0)$ et $\alpha(S^0, U_1^0, U_2^0)$ sont non vides, compacts, invariants et attirent $\chi(t)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$, respectivement. De plus $V(\chi(t))$ est une fonction décroissante de t , V est constante sur $\omega(S^0, U_1^0, U_2^0)$ et $\alpha(S^0, U_1^0, U_2^0)$, ainsi $\omega(S^0, U_1^0, U_2^0) = \alpha(S^0, U_1^0, U_2^0) = \{(\bar{N}, 0, 0)\}$. Par conséquent $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \chi(t) = (\bar{N}, 0, 0)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} V(\chi(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\chi(t)) = V(\bar{N}, 0, 0)$. Il en découle que, $V(\chi(t)) = V(\bar{N}, 0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et comme $\alpha(x) = \{(\bar{N}, 0, 0)\}$ alors $V(\chi(t)) \leq V(\bar{N}, 0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par suite V atteint sa valeur minimale en $(\bar{N}, 0, 0)$, nous en concluons que $\chi(t) = (\bar{N}, 0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier $(S^0, U_1^0, U_2^0) = (\bar{N}, 0, 0)$. Par conséquent, l'attracteur \mathbf{A} est le singleton constitué par l'équilibre $(\bar{N}, 0, 0)$. Le **Théorème 2.39** dans [49], nous permet de conclure que l'équilibre sans drogue est globalement asymptotiquement stable. \square

Considérons à présent le sous-ensemble suivant X_+ ,

$$X_0 = \{(S_0, U_1^0, U_2^0(\cdot)) \in X_+, U_1^0 + \int_0^\infty P(a)U_2^0(a)da = 0\}, \quad (1.5)$$

où $P(a) = \int_0^\infty k(a+t) \frac{\Pi(a+t)}{\Pi(a)} dt$.

Le lemme suivant indique que, l'équilibre sans drogue est globalement attractant, pour toutes les conditions initiales dans X_0 .

LEMME 1.1. *Supposons que les conditions initiales $(S_0, U_1^0, U_2^0(\cdot)) \in X_0$ alors $(\bar{N}, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. De $(S_0, U_1^0, U_2^0(\cdot)) \in X_0$, alors l'équation de U_1 dans (1.1)-(1.2) devient

$$\begin{cases} U_1' = F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p) U_1 + p \int_0^t \Pi(a) k(a) U_1(t-a) da, \\ U_1^0 = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Comme conséquence directe de l'inégalité de Grönwall, le problème précédent a une solution unique $U_1(t) \equiv 0$, et donc $U_2(t, \cdot) \equiv 0$. En effet ; cependant nous fournissons ici une autre preuve avec plus de détails :

Considérons le problème

$$\begin{cases} U_1' = F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p) U_1 + p \int_0^t \Pi(a) k(a) U_1(t-a) da, \\ U_1^0 = 0. \end{cases}$$

Il est clair que $U_1(t) \equiv 0$ est une solution de notre problème.

Supposons maintenant que notre problème a deux solutions, disons U_1 et U_2 avec les conditions initiales $U_1^0 = U_2^0 = 0$, et considérons $U = U_1 - U_2$, après une intégration par rapport au temps, nous obtenons

$$U(t) = \int_0^t F(S, U_1(\sigma)) - F(S, U_2(\sigma)) d\sigma - (\mu + \delta_1 + p) \int_0^t U(\sigma) d\sigma + p \int_0^t \int_0^\sigma \Pi(a) k(a) U(\sigma - a) da d\sigma,$$

par un changement de variable $x = \sigma - a$ dans le dernier terme, nous obtenons

$$U(t) = \int_0^t F(S, U_1(\sigma)) - F(S, U_2(\sigma)) d\sigma - (\mu + \delta_1 + p) \int_0^t U(\sigma) d\sigma + p \int_0^t \int_0^\sigma \Pi(\sigma - x) k(\sigma - x) U(x) dx d\sigma,$$

qui peut être réécrit par l'utilisation du théorème de Fubini

$$U(t) = \int_0^t F(S, U_1(\sigma)) - F(S, U_2(\sigma)) d\sigma - (\mu + \delta_1 + p) \int_0^t U(\sigma) d\sigma + p \int_0^t \int_x^t \Pi(\sigma - x) k(\sigma - x) U(x) d\sigma dx,$$

par la condition lipschitz sur F , la bornitude de la fonction k , et l'expression de la fonction Π nous

avons le calcul suivant

$$\begin{aligned}
|U(t)| &\leq L \int_0^t |U(\sigma)| d\sigma + (\mu + \delta_1 + p) \int_0^t |U(\sigma)| d\sigma + p \int_0^t \int_x^t \Pi(\sigma - x) k(\sigma - x) |U(x)| d\sigma dx \\
&\leq L \int_0^t |U(\sigma)| d\sigma + (\mu + \delta_1 + p) \int_0^t |U(\sigma)| d\sigma + p \int_0^t |U(x)| \int_x^t \Pi(\sigma - x) k(\sigma - x) d\sigma dx \\
&\leq L \int_0^t |U(\sigma)| d\sigma + (\mu + \delta_1 + p) \int_0^t |U(\sigma)| d\sigma + p \int_0^t |U(x)| dx \int_0^{+\infty} \Pi(y) k(y) dy \\
&\leq C \int_0^t |U(\sigma)| d\sigma.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Grönwall, nous permet de conclure que $U = 0$; et donc notre problème a une solution unique $U_1(t) \equiv 0$.

Enfin, par $S' = A - \mu S$ on a $S(t) \rightarrow \bar{N}$ quand $t \rightarrow +\infty$, ceci complète la preuve. □

1.5 Persistance et stabilité globale de l'équilibre endémique

Afin de montrer la persistance et la stabilité asymptotique globale de la solution, nous avons besoin de l'hypothèse suivante sur l'incidence F .

Nous supposons que pour tous $S > 0$ on a

$$\begin{cases} \frac{U_1}{U_1^*} < \frac{F(S, U_1)}{F(S, U_1^*)} < 1 & \text{pour } \frac{U_1}{U_1^*} < 1 \\ 1 < \frac{F(S, U_1)}{F(S, U_1^*)} < \frac{U_1}{U_1^*} & \text{pour } \frac{U_1}{U_1^*} > 1 \end{cases} \quad (1.7)$$

il existe $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que que pour tout $S \in [\frac{A}{\mu} - \epsilon, \frac{A}{\mu} + \epsilon]$ on a

$$\frac{F(S, x)}{x} \geq \frac{F(S, y)}{y}, \quad \text{pour tous } 0 < x \leq y \leq \eta. \quad (1.8)$$

REMARQUE 1.1. On remarque que (1.7) et (1.8) sont vérifiées si par exemple $F(., y)$ est supposée croissante et concave.

Définissons une fonction de persistance,

$$\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$$

par

$$\rho(S^0, U_1^0, U_2^0(\cdot)) = U_1^0$$

alors

$$\rho(\Phi(t, (S^0, U_1^0, U_2^0(\cdot)))) = U_1(t)$$

Nous allons d'abord montrer la ρ -persistance faible, à cette fin, nous utiliserons le Lemme suivant, qui peut être prouvé de la même manière que dans [10].

LEMME 1.2. [10] Soit $h \in L^1_+(0, +\infty)$ et $\int_0^{+\infty} h(\sigma)d\sigma > a$, alors le problème suivant

$$\frac{dx}{dt} = -ax + \int_0^t h(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma + F(t),$$

sous l'hypothèse alternative

$$\text{soit } x(0) > 0 \text{ ou } \int_0^\infty F(t)dt > 0,$$

possède une solution unique $x(t)$ qui est non bornée.

THÉORÈME 1.5. Sous l'hypothèse (1.8), la solution du système (1.1)-(1.2) est uniformément faiblement ρ -persistante dans $X_+ \setminus X_0$; c'est à dire

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} U_1(t) > 0.$$

Démonstration. Nous allons le prouver par l'absurde, supposons que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} U_1(t) = 0,$$

alors, pour l'équation de S

$$\begin{aligned} S' &= A - \mu S - F(S, U_1), \\ &\geq A - \mu S - F\left(\frac{A}{\mu}, U_1\right), \end{aligned}$$

de $\lim_{t \rightarrow +\infty} F\left(\frac{A}{\mu}, U_1\right) = 0$, alors (pour t large)

$$S' \geq A - \mu S - \varepsilon,$$

après intégration, nous obtenons (pour t large)

$$S(t) \geq \frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu},$$

et donc par la monotonie de F par rapport à S on trouve,

$$F(S, U_1) \geq F\left(\frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}, U_1\right). \quad (1.9)$$

Par l'hypothèse (1.8) nous obtenons que pour chaque $U_1 < \varepsilon$, on a

$$\frac{F\left(\frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}, U_1\right)}{U_1} \geq \frac{F\left(\frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}, \varepsilon\right)}{\varepsilon},$$

soit

$$F\left(\frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}, U_1\right) \geq \frac{F\left(\frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}, \varepsilon\right)}{\varepsilon} U_1, \quad (1.10)$$

par (1.9) et (1.10) nous venons à,

$$F(S, U_1) \geq \frac{F\left(\frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}, \varepsilon\right)}{\varepsilon} U_1. \quad (1.11)$$

Rappelons que le système (1.1)-(1.2) peut être réécrit comme,

$$\begin{cases} S' = A - \mu S - F(S, U_1), \\ U_1' = F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p) U_1 + p \int_0^t k(a) \Pi(a) U_1(t-a) da + \int_t^{+\infty} k(a) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} U_2^0(a-t) da. \end{cases}$$

Nous présentons le problème auxiliaire suivant,

$$\begin{cases} \tilde{U}_1' = \frac{F\left(\frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}, \varepsilon\right)}{\varepsilon} \tilde{U}_1 - (\mu + \delta_1 + p) \tilde{U}_1 + p \int_0^t k(a) \Pi(a) \tilde{U}_1(t-a) da + \int_t^{+\infty} k(a) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} U_2^0(a-t) da, \\ \tilde{U}_1(0) = U_1(0). \end{cases} \quad (1.12)$$

Nous fixons $W = U_1 - \tilde{U}_1$, et alors

$$\begin{cases} W' = F(S, U_1) - \frac{F\left(\frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}, \varepsilon\right)}{\varepsilon} \tilde{U}_1 - (\mu + \delta_1 + p) W + p \int_0^t k(a) \Pi(a) W(t-a) da, \\ W(0) = 0. \end{cases}$$

En utilisant (1.11) on a,

$$W' \geq \frac{F(\frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}, \varepsilon)}{\varepsilon} W - (\mu + \delta_1 + p) W + p \int_0^t k(a) \Pi(a) W(t-a) da.$$

Nous prétendons que pour tous $t \geq 0$; $W(t) \geq 0$, en effet, par l'absurde supposons qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $W(t_1) = 0$ et $W'(t_1) < 0$ avec $W(t) \geq 0 \forall t \in (0, t_1)$; donc nous avons,

$$0 > W'(t_1) \geq p \int_0^{t_1} k(a) \Pi(a) W(t_1 - a) da \geq 0,$$

ce qui est absurde, et nous concluons que

$$U_1(t) \geq \tilde{U}_1(t).$$

Par le Lemme précédent, $\tilde{U}_1(t)$ est non bornée dès que l'on a :

$$p \int_0^{+\infty} k(a) \Pi(a) da > (\mu + \delta_1 + p) - \frac{F(\frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}, \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Rappelons que $K = \int_0^{\infty} k(a) \Pi(a) da$, donc la dernière inégalité équivaut à

$$\frac{F(\frac{A}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}, \varepsilon)}{\varepsilon} \frac{1}{(\mu + \delta_1 + p) - pK} > 1, \quad (1.13)$$

comme

$$R_0 = \frac{\partial F}{\partial U_1} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) \frac{1}{(\mu + \delta_1 + p) - pK} > 1,$$

alors pour ε suffisamment petit, (1.13) est vérifiée, et par suite \tilde{U}_1 est non bornée, et comme $U_1(t) \geq \tilde{U}_1(t)$, alors la fonction $U_1(t)$ est aussi non bornée, ce qui contredit $\limsup_{t \rightarrow +\infty} U_1(t) = 0$, et cela complète la preuve. \square

Afin de prouver la persistance fortement uniforme, nous avons besoin du Lemme suivant.

LEMME 1.3. *Supposons que $(S_0, U_1^0, U_2^0(\cdot)) \in X_+ \setminus X_0$ alors la fonction U_1 est positive dans \mathbb{R} , où $(S, U_1, U_2(\cdot))$ est la solution du problème (1.4).*

Démonstration. Par le système (1.4), on a,

$$\begin{aligned} U_1' &= F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p)U_1 + p \int_0^{+\infty} k(a) \Pi(a) U_1(t-a) da, \\ &= F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p)U_1 + p \int_{-\infty}^t k(t-\sigma) \Pi(t-\sigma) U_1(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $U_1(t) = 0$, pour tout $t \leq r$.

Pour $t > r$

$$U_1' = F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p)U_1 + p \int_r^t k(t-\sigma) \Pi(t-\sigma) U_1(\sigma) d\sigma,$$

supposons qu'il existe $t_1 \geq r$ tel que $U_1(t_1) = 0$ et $U_1'(t_1) > 0$ avec $U_1(t) = 0$, pour tout $t \leq t_1$ alors,

$$0 < U_1'(t_1) = p \int_r^{t_1} k(t_1 - \sigma) \Pi(t_1 - \sigma) U_1(\sigma) d\sigma = 0,$$

ce qui est impossible. Alors $U_1 \equiv 0$, cependant, de $(S_0, U_1^0, U_2^0(\cdot)) \in X_+ \setminus X_0$, la fonction U_1 ne peut pas être identiquement nulle, donc, il existe une suite $\{t_n\}_n$, $t_n \rightarrow -\infty$ telle que $U_1(t_n) > 0$. Maintenant en intégrant l'équation de U_1 dans (1.4) sur (t_n, t) on trouve,

$$U_1(t)e^{(\mu+\delta_1+p)t} \geq U_1(t_n)e^{(\mu+\delta_1+p)t_n} + p \int_{t_n}^t e^{(\mu+\delta_1+p)\sigma} \int_0^\infty k(a)\Pi(a)U_1(\sigma-a)dad\sigma,$$

de là, nous concluons que $U_1(t) > 0$ pour tout $t > t_n$ et donc $U_1(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. \square

COROLLAIRE 1.1. *Sous l'hypothèse (1.8), la solution du système (1.1)-(1.2) est fortement persistante dans $X_+ \setminus X_0$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la ρ -persistante montrée ci-dessus ajoutée au dernier Lemme, alors par le Théorème 5.2 dans [49]; nous obtenons la persistante fortement uniforme. \square

Du Théorème 5,7 dans [49], nous avons les résultats suivants

THÉORÈME 1.6. *Il existe un attracteur compact \mathbf{A}_1 , qui attire toutes les solutions avec les conditions initiales dans $X_+ \setminus X_0$. De plus \mathbf{A}_1 , est ρ -uniformément positif; ce qui signifie qu'il existe $\varrho > 0$ tel que $U_1(t) > \varrho$ pour tout $(S^0, U_1^0, U_2^0(\cdot)) \in \mathbf{A}_1$.*

Maintenant, nous nous intéressons à la stabilité asymptotique globale de l'équilibre positif.

THÉORÈME 1.7. *Sous hypothèses $R_0 > 1$ et (1.7)-(1.8), L'équilibre endémique (S^*, U_1^*, U_2^*) est unique et globalement asymptotiquement stable dans $X_+ \setminus X_0$.*

Démonstration. Pour $x := (S_0, U_1^0, U_2^0(\cdot))$ on définit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$ comme une trajectoire totale telle que $\Psi(t) = (S(t), U_1(t), U_2(t, \cdot))$ et $(S(0), U_1(0), U_2(0, \cdot)) = x$, avec $(S(t), U_1(t), U_2(t, \cdot))$ est la solution du problème (1.4).

Tout d'abord, rappelons que l'équilibre endémique est la solution de

$$\begin{cases} A = \mu S^* + F(S^*, U_1^*), \\ F(S^*, U_1^*) = (\mu + \delta_1 + p) U_1^* - \int_0^\infty k(a) U_2^*(a) da, \\ U_2^*(a) = p \Pi(a) U_1^*. \end{cases} \quad (1.14)$$

maintenant on définit $H(s) = s - \ln(s) - 1$, et pour $x \in \mathbf{A}_1$, on considère la fonction de Lyapunov $V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x)$, avec

$$V_1(x) = S_0 - S^* - \int_{S_0}^{S^*} \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(\eta, U_1^*)} d\eta,$$

$$V_2(x) = U_1^* H\left(\frac{U_1^0}{U_1^*}\right),$$

et

$$V_3(x) = \int_0^\infty H\left(\frac{U_2^0(a)}{U_2^*(a)}\right) \phi(a) da,$$

avec

$$\phi(a) = p U_1^* \int_a^\infty k(\sigma) \Pi(\sigma) d\sigma.$$

Nous analysons la dérivée des V_i . Utilisons de la notation $V_i' = \frac{dV_i(\Psi(t))}{dt}$, alors par l'équation de S et le fait que

$$A = \mu S^* + F(S^*, U_1^*)$$

on a,

$$V_1' = \mu \left(1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)}\right) (S^* - S) + \left(1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)}\right) (F(S^*, U_1^*) - F(S, U_1^*)).$$

Concernant V_2 , en utilisant (1.4) on a,

$$\begin{aligned} V_2' &= \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) [F(S, U_1) - (\mu + \delta_1 + p)U_1] \\ &\quad + p \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) \int_0^\infty k(a) \Pi(a) U_1(t-a) da. \end{aligned}$$

Par le fait que

$$(\mu + \delta_1 + p)U_1^* = F(S^*, U_1^*) + pKU_1^*,$$

on trouve

$$\begin{aligned} V_2' &= \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) F(S, U_1) - \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) \frac{U_1}{U_1^*} [F(S^*, U_1^*) + pKU_1^*] \\ &\quad + p \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) \int_0^\infty k(a) \Pi(a) U_1(t-a) da \\ &= \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) F(S, U_1) - \left(\frac{U_1}{U_1^*} - 1\right) [F(S^*, U_1^*) + pKU_1^*] \\ &\quad + p \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) \int_0^\infty k(a) \Pi(a) U_1(t-a) da. \end{aligned}$$

Intéressons-nous à présent à V_3 , par un calcul simple on a,

$$\begin{aligned} V_3' &= H \left(\frac{U_1(t)}{U_1^*}\right) \phi(0) + \int_0^\infty H \left(\frac{U_1(t-a)}{U_1^*}\right) \phi'(a) da, \\ &= H \left(\frac{U_1(t)}{U_1^*}\right) pKU_1^* - pU_1^* H \left(\frac{U_1(t-a)}{U_1^*}\right) k(a) \Pi(a) da. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
V'_2 + V'_3 &= H\left(\frac{U_1}{U_1^*}\right) pKU_1^* - pU_1^* \int_0^\infty H\left(\frac{U_1(t-a)}{U_1^*}\right) k(a)\Pi(a)da \\
&+ pU_1^* \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) \int_0^\infty \frac{U_1(t-a)}{U_1^*} k(a)\Pi(a)da \\
&+ \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) F(S, U_1) - \left(\frac{U_1}{U_1^*} - 1\right) [F(S^*, U_1^*) + pKU_1^*], \\
&= H\left(\frac{U_1}{U_1^*}\right) pKU_1^* - pU_1^* \int_0^\infty H\left(\frac{U_1(t-a)}{U_1^*}\right) k(a)\Pi(a)da \\
&+ pU_1^* \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) \int_0^\infty \left(\frac{U_1(t-a)}{U_1^*} - \frac{U_1}{U_1^*}\right) k(a)\Pi(a)da \\
&+ \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) pKU_1.
\end{aligned}$$

Réorganisons les termes de la dernière égalité et rappelons que $K = \int_0^\infty k(a)\Pi(a)da$, on a,

$$\begin{aligned}
V'_2 + V'_3 &= pU_1^* \int_0^\infty \left\{ H\left(\frac{U_1}{U_1^*}\right) - H\left(\frac{U_1(t-a)}{U_1^*}\right) + H'\left(\frac{U_1}{U_1^*}\right) \left(\frac{U_1(t-a)}{U_1^*} - \frac{U_1}{U_1^*}\right) \right\} k(a)\Pi(a)da \\
&+ \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) pKU_1 + \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) F(S, U_1) - \left(\frac{U_1}{U_1^*} - 1\right) F(S^*, U_1^*) - \left(\frac{U_1}{U_1^*} - 1\right) pKU_1^*.
\end{aligned}$$

posons

$$\Sigma = pU_1^* \int_0^\infty \left\{ H\left(\frac{U_1}{U_1^*}\right) - H\left(\frac{U_1(t-a)}{U_1^*}\right) + H'\left(\frac{U_1}{U_1^*}\right) \left(\frac{U_1(t-a)}{U_1^*} - \frac{U_1}{U_1^*}\right) \right\} k(a)\Pi(a)da,$$

comme H est une fonction convexe, on a $H(b) - H(a) + H'(b)(a - b) \leq 0$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, ainsi

$\Sigma \leq 0$. Par conséquent

$$V'_2 + V'_3 = \Sigma + \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) (F(S, U_1) + pKU_1) - \left(\frac{U_1}{U_1^*} - 1\right) (F(S^*, U_1^*) + pKU_1^*).$$

Maintenant, pour $V' = V'_1 + V'_2 + V'_3$ on a,

$$\begin{aligned}
V' &= \Sigma + \mu \left(1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S(t), U_1^*)}\right) (S^* - S(t)) + \left(1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)}\right) (F(S^*, U_1^*) - F(S, U_1)) \\
&+ \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1}\right) (F(S, U_1) + pKU_1) - \left(\frac{U_1}{U_1^*} - 1\right) (F(S^*, U_1^*) + pKU_1^*),
\end{aligned}$$

par simplification, nous obtenons

$$\begin{aligned} V' &= \Sigma + \mu(1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S(t), U_1^*)})(S^* - S(t)) + (1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)})F(S^*, U_1^*) \\ &+ \frac{F(S, U_1)}{F(S, U_1^*)}F(S^*, U_1^*) - \frac{U_1^*}{U_1}F(S, U_1) - \frac{U_1}{U_1^*}F(S^*, U_1^*). \end{aligned}$$

En ajoutant et en soustrayant dans la dernière égalité le terme suivant

$$F(S^*, U_1^*)(\ln \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)} + \ln \frac{U_1^*F(S, U_1)}{U_1F(S^*, U_1^*)}),$$

on trouve,

$$\begin{aligned} V' &= \Sigma + \mu(1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S(t), U_1^*)})(S^* - S(t)) + F(S^*, U_1^*)(1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)} + \ln \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)}) \\ &+ F(S^*, U_1^*)(\ln \frac{U_1^*F(S, U_1)}{U_1F(S^*, U_1^*)} - \frac{U_1^*F(S, U_1)}{U_1F(S^*, U_1^*)} + 1) - F(S^*, U_1^*) \ln \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)} \\ &+ \frac{F(S, U_1)}{F(S, U_1^*)}F(S^*, U_1^*) - F(S^*, U_1^*) \ln \frac{U_1^*}{U_1} - F(S^*, U_1^*) \ln \frac{F(S, U_1)}{F(S^*, U_1^*)} - \frac{U_1}{U_1^*}F(S^*, U_1^*), \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} V' &= \Sigma + \mu(1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S(t), U_1^*)})(S^* - S(t)) + F(S^*, U_1^*)(1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)} + \ln \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)}) \\ &+ F(S^*, U_1^*)(\ln \frac{U_1^*F(S, U_1)}{U_1F(S^*, U_1^*)} - \frac{U_1^*F(S, U_1)}{U_1F(S^*, U_1^*)} + 1) + F(S^*, U_1^*)(\ln \frac{U_1}{U_1^*} - \frac{U_1}{U_1^*} + 1) \\ &+ F(S^*, U_1^*) \frac{F(S, U_1)}{F(S, U_1^*)} - F(S^*, U_1^*) \ln \frac{F(S, U_1)}{F(S^*, U_1^*)} - F(S^*, U_1^*). \end{aligned}$$

En utilisant la définition de H nous avons,

$$\begin{aligned} V' &= \Sigma + \mu(1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S(t), U_1^*)})(S^* - S(t)) - F(S^*, U_1^*)(H(\frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)}) + H(\frac{U_1^*F(S, U_1)}{U_1F(S^*, U_1^*)})) \\ &- H(\frac{U_1}{U_1^*})F(S^*, U_1^*) + F(S^*, U_1^*)(\frac{F(S, U_1)}{F(S, U_1^*)} - \ln \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)} - \ln \frac{F(S, U_1)}{F(S^*, U_1^*)} - 1), \end{aligned}$$

par le fait que

$$\ln \frac{F(S, U_1)}{F(S^*, U_1^*)} = \ln \frac{F(S, U_1)}{F(S, U_1^*)} + \ln \frac{F(S, U_1^*)}{F(S^*, U_1^*)},$$

on trouve,

$$\begin{aligned} V' &= \Sigma + \mu \left(1 - \frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S(t), U_1^*)}\right) (S^* - S(t)) - F(S^*, U_1^*) \left(H\left(\frac{F(S^*, U_1^*)}{F(S, U_1^*)}\right) + H\left(\frac{U_1^* F(S, U_1)}{U_1 F(S^*, U_1^*)}\right) \right) \\ &+ F(S^*, U_1^*) \left(H\left(\frac{F(S, U_1)}{F(S, U_1^*)}\right) - H\left(\frac{U_1}{U_1^*}\right) \right). \end{aligned}$$

Observons que les quatre premiers termes de l'équation ci-dessus sont négatifs. Maintenant, nous affirmons que le dernier terme est également négatif. Pour cela, posons

$$Z(t) = H\left(\frac{F(S(t), U_1(t))}{F(S(t), U_1^*)}\right) - H\left(\frac{U_1(t)}{U_1^*}\right),$$

et considérons d'abord les valeurs t , telles que $\frac{U_1(t)}{U_1^*} < 1$, puis par l'hypothèse (1.7) on a

$$\frac{U_1(t)}{U_1^*} < \frac{F(S, U_1(t))}{F(S, U_1^*)} < 1,$$

puisque la fonction H est décroissante sur $(0, 1)$ alors

$$H\left(\frac{U_1(t)}{U_1^*}\right) > H\left(\frac{F(S, U_1(t))}{F(S, U_1^*)}\right),$$

donc $Z(t)$ est négative. Nous employons le même raisonnement pour prouver que Z est négative pour d'autres valeurs de t . Par conséquent, la proposition est prouvée et donc

$$V' \leq 0.$$

De plus, $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$ implique que $S(t) = S^*$. Maintenant, nous recherchons le plus grand ensemble invariant Q tel que $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$ dans Q , nous devons avoir $S(t) = S^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En utilisant l'équation de S dans (1.4) on obtient,

$$A - \mu S^* = f(S^*, U_1(t)),$$

de là, et de la première équation de (1.14) on a

$$f(S^*, U_1(t)) = f(S^*, U_1^*), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, de (1.7)

$$U_1(t) = U_1^*, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, à nouveau de (1.4), on a

$$U_2(t, \cdot) = U_2^*(\cdot), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Par les mêmes arguments que ceux de la preuve du théorème 1.4 on peut conclure la stabilité globale asymptotique de l'équilibre endémique. L'unicité est une conséquence directe du fait que $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$ n'a lieu que sur la ligne $S = S^*$. \square

Deuxième partie

**Epidémiologie mathématique et
comportement grégaire dans des
modèles proie-prédateur**

Chapitre 2

Comportement de troupeau dans un modèle proie-prédateur avec infection des proies

2.1 Introduction

Nous traitons dans ce chapitre un modèle éco-épidémiologique de type "proie-prédateur" avec la présence d'une infection de la population des proies, et un comportement de troupeau est considéré. On note par S la population des proies susceptibles, et par I la densité de la population des proies infectées, et P la densité des prédateurs et on a fait l'hypothèse que les proies malades se regroupent entre elles instinctivement comme réaction à leur infection. Le comportement de troupeau est un phénomène écologique que les proies utilisent pour se défendre contre les prédateurs, de telle sorte que les prédateurs ne peuvent pas atteindre les proies qui se trouve à l'intérieur de ce groupe autrement dit que les prédateurs chassent uniquement sur le bord du groupe considéré. La question qui se pose, c'est comment modéliser mathématiquement ce phénomène ? Pour y répondre, considérons un exemple simple, supposons que les proies infectées forment un carré de surface I comme dans la figure 1 ainsi les prédateurs seront contraints de chasser seulement sur la frontière de ce groupe, soit que les prédateurs ne chassent que $4\sqrt{I}$, nous avons pris un carré, mais si l'on considère un cercle ou toute autre forme géométrique régulière, le périmètre représente une proportion de la racine carré de l'aire. Donc un bon moyen (certes simpliste mais assez réaliste) de modéliser le contact entre prédateurs et proies regroupées en troupeau et de mettre la racine carrée (modulo une constante) de la population des proies dans notre modèle.

Nous allons diviser ce chapitre en deux sections, dans la première on supposera que la maladie est non mortelle et on notera ce cas par les cas "non toxique" et dans la seconde section on traitera "le cas toxique".

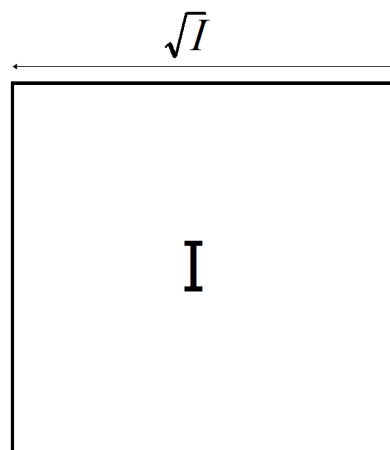


figure 1.1 :Représentation du comportement de troupeau.

2.2 Le cas non toxique

$$\begin{cases} \dot{P} = -mP + aPS + bP\sqrt{I}, \\ \dot{S} = -\beta S\sqrt{I} + rS\left(1 - \frac{S}{k}\right) - aPS, \\ \dot{I} = -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I}, \end{cases} \quad (2.1)$$

où P comme précédemment énoncé représente la densité des prédateurs, S et I sont respectivement les densités des proies susceptibles et des proies infectées, m le taux de mortalité naturelle des prédateurs, μ le taux de mortalité des proies infectés, β le taux de transmission, r le taux de croissance de la population des proies a le taux de prédation des proies susceptibles, b le taux de prédation des proies infectées k la capacité limite de l'espèce pour les proies.

Le terme \sqrt{I} comme expliqué dans l'introduction du chapitre représente que la partie infectée de la population des proies et qui ont un comportement de troupeau, en réaction instinctive à la maladie. Pour l'analyse mathématique du modèle on va donner les points d'équilibre du système (2.1)

$$E_0 = (0, 0, 0); E_1 = \left(0, \frac{\mu rk}{\beta^2 k + \mu r}, \frac{r^2 k^2 \beta^2}{(\beta^2 k + \mu r)^2}\right); E^* = (P^*, S^*, I^*) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{bkr\beta + akr\mu - mr\mu - km\beta^2}{a^2 k\mu + b^2 r} \\ S^* &= \frac{b^2 r + m\mu a - bm\beta^2}{a^2 k\mu + b^2 r} \\ I^* &= \left(\frac{bmr + akm\beta - abkr}{a^2 k\mu + b^2 r}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sous la condition de la positivité des états d'équilibre on donne les hypothèses pour l'existence de E^*

$$\begin{aligned} bkr\beta + akr\mu - mr\mu - km\beta^2 &> 0 \\ b^2 r + m\mu a - bm\beta^2 &> 0 \\ bmr + akm\beta - abkr &> 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour la stabilité locale des points d'équilibres on calcule la matrice jacobienne du système (2.1)

$$J = \begin{pmatrix} -m + aS + b\sqrt{I} & aP & \frac{bP}{2\sqrt{I}} \\ -aS & -\beta\sqrt{I} + r - \frac{2rS}{K} - aP & -\frac{\beta S}{2\sqrt{I}} \\ -\frac{1}{2}b\sqrt{I} & \frac{1}{2}\beta\sqrt{I} & -\mu + \frac{\beta S}{2\sqrt{I}} - \frac{bP}{2\sqrt{I}} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Pour le point d'équilibre E_1 la matrice jacobienne est donnée par :

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -m + a_1 S_1 + b\sqrt{I_1} & 0 & 0 \\ -a S_1 & -\frac{r S_1}{K} & -\frac{\beta S_1}{2\sqrt{I_1}} \\ -b\sqrt{I_1} & \beta\sqrt{I_1} & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

pour simplification de la matrice jacobienne on a utilisé le calcul suivant :

$$-\mu + \frac{\beta S}{2\sqrt{I_1}} - \frac{bP}{2\sqrt{I_1}} = \frac{-2\mu\sqrt{I_1} + \beta S_1 - bP_1}{2\sqrt{I_1}} = \frac{-\mu\sqrt{I_1}}{2\sqrt{I_1}} = -\frac{\mu}{2}$$

$$\text{et } -\beta\sqrt{I_1} + r - \frac{2rS_1}{K} = -\beta\sqrt{I_1} + r - \frac{rS_1}{K} - \frac{rS_1}{K} = -\frac{rS_1}{K}$$

on définit la matrice J par :

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{rS_1}{K} & -\frac{\beta S_1}{2\sqrt{I_1}} \\ \beta\sqrt{I_1} & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$tr J = -(\frac{rS_1}{K} + \frac{\mu}{2}) < 0$ et $\det J = \frac{rS_1\mu}{2K} + \frac{\beta^2 S_1}{2} > 0$ alors les valeurs propres de J sont strictement négatives, et par suite E_1 est localement asymptotiquement stable si et seulement si $-m + a_1 S_1 + b\sqrt{I_1} < 0$.

REMARQUE 2.1. Si $-m + a_1 S_1 + b\sqrt{I_1} = 0$ on prévoit l'apparition d'une bifurcation transcritique.

On réitère la même démarche pour l'analyse de la stabilité de l'équilibre E^* , on calcule la matrice Jacobienne comme précédemment

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -m + aS^* + b\sqrt{I^*} & aP^* & \frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -aS^* & -\beta\sqrt{I^*} + r - \frac{2rS^*}{K} - aP^* & -\frac{\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -\frac{1}{2}b\sqrt{I^*} & \frac{1}{2}\beta\sqrt{I^*} & -\mu + \frac{\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} - \frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

pour une simplification de la matrice (2.8), on utilise les équations de l'existence de l'équilibre E^* , et Par un simple calcul on trouve :

$$\begin{aligned} -m + aS^* + b\sqrt{I^*} &= 0 \\ -\beta\sqrt{I^*} + r - \frac{2rS^*}{K} - aP^* &= -\frac{rS^*}{K} \\ -\mu + \frac{\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} - \frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} &= -\frac{\mu}{2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

alors (2.8) devient

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} 0 & aP^* & \frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -aS^* & -\frac{rS^*}{K} & -\frac{\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -\frac{1}{2}b\sqrt{I^*} & \frac{1}{2}\beta\sqrt{I^*} & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Alors l'équation caractéristique est donnée par

$$\det(J(E^*) - \lambda I) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (2.11)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}(a^2\mu + b^2\frac{r}{k})S^*P^* > 0 \\ a_2 &= \frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} > 0 \\ a_1 &= a^2S^*P^* + \frac{1}{2}(b^2P^* + (\frac{r}{k}\mu + \beta^2)S^*) > 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

puisque tous les coefficients du polynôme caractéristique de (2.11) sont positifs, on peut appliquer le critère de Routh-Hurwitz

$$\mathbf{Rappel :} \quad \begin{array}{c|c|c} \lambda^3 & 1 & a_1 \\ \lambda^2 & a_2 & a_0 \\ \lambda & b_1 & 0 \\ 1 & c_0 & 0 \end{array} \quad \text{avec } b_1 = \frac{-1}{a_2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad \text{et } c_0 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}$$

si $b_1 > 0$ et $c_0 > 0$ alors le point d'équilibre E^* est localement asymptotiquement stable

$$b_1 = \frac{-1}{a_2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_2}(a_2a_1 - a_0)$$

$$\begin{aligned} a_2a_1 &= \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right) \left[a^2S^*P^* + \frac{1}{2}(b^2P^* + (\frac{r}{k}\mu + \beta^2)S^*)\right] \\ &= \frac{rS^{*2}}{K}a^2P^* + \frac{1}{2}\frac{rS^*}{K}b^2P^* + \frac{rS^{*2}}{K}(\frac{r}{k}\mu + \beta^2) + \frac{\mu}{2}a^2S^*P^* + \frac{\mu}{4}b^2P^* + \frac{\mu}{2}S^*(\frac{r}{k}\mu + \beta^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2a_1 - a_0 &= \frac{rS^{*2}}{K}a^2P^* + \frac{1}{2}\frac{rS^*}{K}b^2P^* + \frac{rS^{*2}}{K}(\frac{r}{k}\mu + \beta^2) + \frac{\mu}{2}a^2S^*P^* + \frac{\mu}{4}b^2P^* + \frac{\mu}{4}S^*(\frac{r}{k}\mu + \beta^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}(a^2\mu + b^2\frac{r}{k})S^*P^* \end{aligned}$$

$$= \frac{rS^{*2}}{K}a^2P^* + \frac{rS^{*2}}{K}(\frac{r}{k}\mu + \beta^2) + \frac{\mu}{4}b^2P^* + \frac{\mu}{4}S^*(\frac{r}{k}\mu + \beta^2) > 0.$$

Alors on peut dire que le point d'équilibre E^* est localement asymptotiquement stable lorsqu'il

existe.

La valeur de la bifurcation :

Comme on l'a noté dans la **Remarque2.1**, une bifurcation peut apparaître si et seulement si

$$\begin{aligned} -m + aS_1 + b\sqrt{I_1} &= 0 \\ -m + \frac{akr\mu}{\beta^2k + r\mu} + \frac{brk}{\beta^2k + r\mu} &= 0 \\ -m(\beta^2k + r\mu) + ark\mu + brk\beta &= 0 \\ k(-m\beta^2 + ar\mu + br\beta) &= mr\mu \end{aligned}$$

$$k^* = \frac{mr\mu}{-m\beta^2 + ar\mu + br\beta}. \tag{2.13}$$

On prévoit l'apparition d'une bifurcation transcritique en $k = k^*$. Maintenant on peut déterminer la stabilité de l'équilibre E_1 suivant la valeur de k et on l'énonce dans le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. *Suivant le signe de $(-m\beta^2 + ar\mu + br\beta)$, on prévoit deux cas :*

- (i) *Si $-m\beta^2 + ar\mu + br\beta > 0$ alors E_1 est localement asymptotiquement stable si $k > k^*$ et instable si $k < k^*$.*
- (ii) *Si $-m\beta^2 + ar\mu + br\beta < 0$ alors E_1 est localement asymptotiquement stable si $k < k^*$ et instable si $k > k^*$.*

Une question légitime peut être posée :

Question 1 : Peut-on avoir la stabilité globale de l'équilibre E^* si E_1 est instable ?

Pour l'analyse mathématique de la stabilité globale de E^* il y'a plusieurs méthodes, une de ces méthodes c'est celle de la fonction de Lyapunov, mais elle reste assez difficile à mettre en pratique du fait de la présence la racine carrée de I. Utiliser le théorème de Poincaré-Bendixon est aussi une méthode possible, mais une autre difficulté apparait, car il est difficile de trouver un domaine attractant ne contenant pas de cycle limite et de trajectoires fermées. Nous devons donc nous contenter de la simulation numérique pour montrer formellement la stabilité globale de E^* ; mais avant cela on va faire une remarque pour clarifier les choses :

REMARQUE 2.2. *Si E^* existe alors $-m\beta^2 + ar\mu + br\beta > 0$ et par suite E_1 est instable sous la présence de E^* si et seulement si $k < k^*$*

Nous allons à présent essayer de donner des éléments de réponse à la **Question 1** en utilisant la simulation numérique (voir **Fig1.2**) :

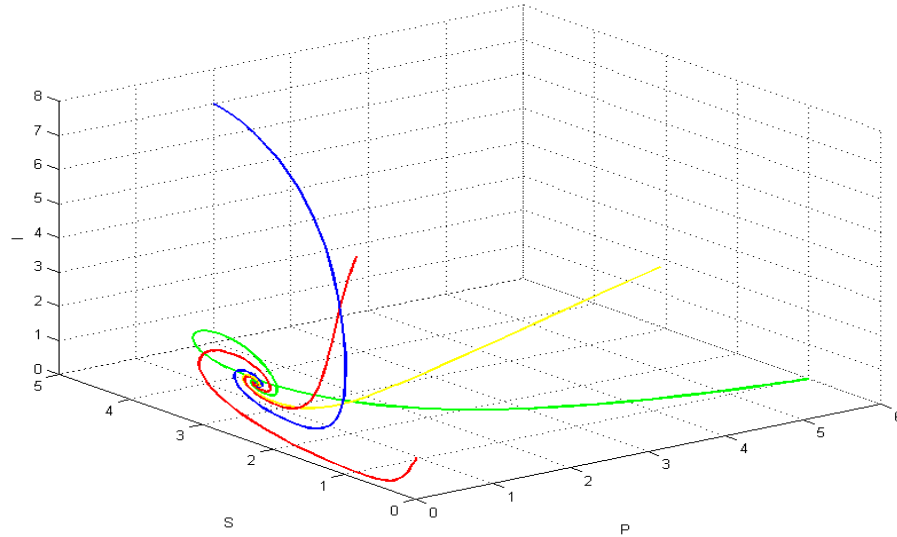


Figure 2.2 : portrait de phase pour montrer numériquement que l'équilibre endémique est globalement stable pour les valeurs $a = 0.029$; $b = 0.025$; $\beta = 0.9$; $m = 1.35$; $r = 1.2$; $\mu = 1.5$; $k = 5000$; et $E_1 = (0, 2.2212, 1.7762)$ et $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} = 116.987$ alors E_1 avec différentes conditions initiales.

Question 2 : Que se passe-t-il si l'équilibre endémique E^* n'existe pas et E_1 est instable ?

Mathématiquement il est difficile d'y répondre, mais numériquement on peut dire qu'il existe une solution périodique comme on le montre dans la simulation numérique suivante :

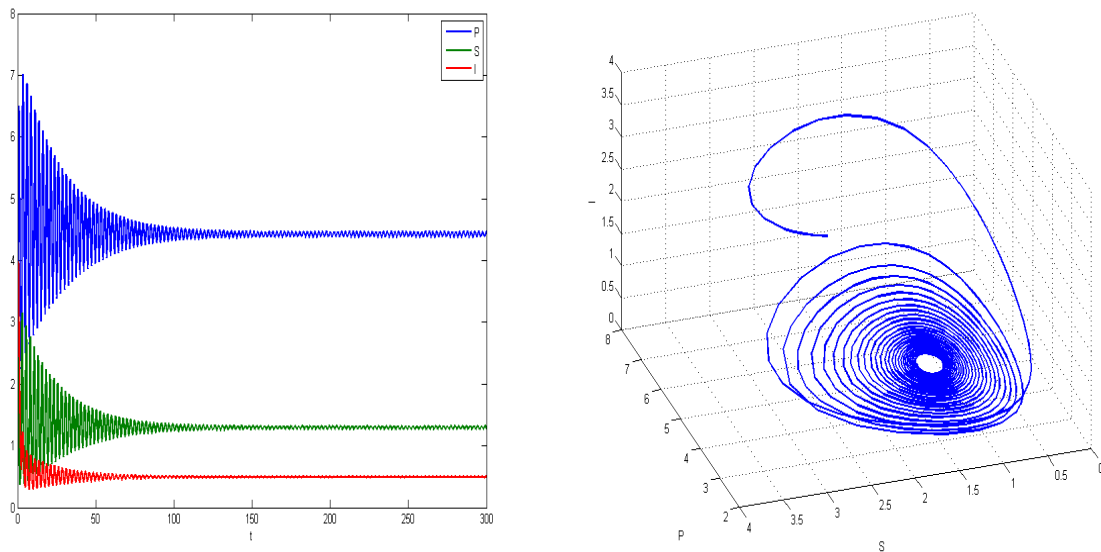


Figure 2.3 : Simulation numérique du système (2.1) avec la présence d'oscillations pour les trois populations, dans l'absence de l'équilibre endémique et l'instabilité de l'équilibre E_1 , pour les paramètres

$a = 1.029$; $b = 0.025$; $L = 1$; $\beta = 0.9$; $m = 1.35$; $r = 5.2$; $mu = 1.5$; $k = 500$; et $E_1 = (0, 8.07, 23.47)$ et $E^* = (-4.5889, 11.0246, 95.0726)$ et $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} = 11.9245 > 0$ alors E_1 est instable et E^* n'existe pas, avec les conditions initiales $P_0 = 2$ et $S_0 = 3$ et $I_0 = 4$.

2.3 Le cas toxique

On considère le modèle

$$\begin{cases} \dot{P} = -mP + aPS - bP\sqrt{I}, \\ \dot{S} = -\beta S\sqrt{I} + rS(1 - \frac{S}{k}) - aPS, \\ \dot{I} = -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I}, \end{cases} \quad (2.14)$$

on conserve les mêmes notations faites avec le système (2.1), le terme $(-bP\sqrt{I})$ signifie que le contact avec une proie inféctée est fatal pour le prédateur. Par un simple calcul on trouve les points d'équilibre suivants :

$$E_0 = (0, 0, 0); E_1 = (0, \frac{\mu rk}{\beta^2 k + \mu r}, \frac{r^2 k^2 \beta^2}{(\beta^2 k + \mu r)^2}) \text{ et } E^* = (P^*, S^*, I^*) \text{ avec}$$

$$P^* = \frac{akr\mu - bkr\beta - mr\mu - km\beta^2}{a^2k\mu - 2abk\beta - b^2r} \text{ et } S^* = \frac{akm\mu - bkm\beta - krb^2}{a^2k\mu - 2abk\beta - b^2r}$$

$$\text{et } I^* = \left(\frac{akm\beta + bmr - abkr}{a^2k\mu - 2abk\beta - b^2r} \right)^2.$$

Nous devons imposer les conditions de positivité

$$a^2k\mu \geq 2abk\beta + b^2r \qquad akm\mu \geq bkm\beta + krb^2$$

$$akr\mu \geq bkr\beta + mr\mu + km\beta^2 \qquad akm\beta + bmr \geq abkr$$

où

$$a^2k\mu \leq 2abk\beta + b^2r \qquad akm\mu \leq bkm\beta + krb^2 \quad (2.15)$$

$$akr\mu \leq bkr\beta + mr\mu + km\beta^2 \qquad akm\beta + bmr \leq abkr$$

Maintenant on va étudier la stabilité locale des états d'équilibre :

$$J = \begin{pmatrix} -m + aS + b\sqrt{I} & aP & -\frac{bP}{2\sqrt{I}} \\ -aS & -\beta\sqrt{I} + r - \frac{2rS}{K} - aP & \frac{-\beta S}{2\sqrt{I}} \\ -b\sqrt{I} & \beta\sqrt{I} & -\mu + \frac{\beta S}{2\sqrt{I}} - \frac{bP}{2\sqrt{I}} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

La matrice jacobienne pour l'équilibre E_1 est donné par

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -m + a_1S_1 + b\sqrt{I_1} & 0 & 0 \\ -aS_1 & -\frac{rS_1}{K} & \frac{-\beta S_1}{2\sqrt{I_1}} \\ -b\sqrt{I_1} & \beta\sqrt{I_1} & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\text{car } -\mu + \frac{\beta S}{2\sqrt{I}} - \frac{bP}{2\sqrt{I}} = \frac{-2\mu\sqrt{I_1} + \beta S_1 - bP_1}{2\sqrt{I_1}} = \frac{-\mu\sqrt{I_1}}{2\sqrt{I_1}} = -\frac{\mu}{2}$$

$$\text{et } -\beta\sqrt{I_1} + r - \frac{2rS_1}{K} = -\beta\sqrt{I_1} + r - \frac{rS_1}{K} - \frac{rS_1}{K} = -\frac{rS_1}{K}$$

soit

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{rS_1}{K} & \frac{-\beta S_1}{2\sqrt{I_1}} \\ \beta\sqrt{I_1} & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}J = -\left(\frac{rS_1}{K} + \frac{\mu}{2}\right) < 0 \quad \text{et} \quad \det J = \frac{rS_1\mu}{2K} + \frac{\beta^2 S_1}{2} > 0$$

alors les valeurs propres de J sont strictement négatives.

-Si $-m + a_1S_1 + b\sqrt{I_1} > 0$ alors E_1 est stable

-Si $-m + a_1S_1 + b\sqrt{I_1} < 0$ alors E_1 est instable

La valeur de bifurcation : Une bifurcation peut apparaître si et seulement si :

$$\begin{aligned} -m + aS_1 + b\sqrt{I_1} &= 0 \\ -m + \frac{akr\mu}{\beta^2k + r\mu} + \frac{brk}{\beta^2k + r\mu} &= 0 \\ -m(\beta^2k + r\mu) + ark\mu + brk\beta &= 0 \\ k(-m\beta^2 + ar\mu + br\beta) &= mr\mu \end{aligned}$$

$$k^* = \frac{mr\mu}{-m\beta^2 + ar\mu + br\beta} \quad (2.18)$$

On prévoit l'apparition d'une bifurcation transcritique en $k = k^*$.

Maintenant on va analyser la stabilité de l'équilibre endémique ; et la matrice jacobienne en E^* est donnée par :

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -m + aS^* + b\sqrt{I^*} & aP^* & -\frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -aS^* & -\beta\sqrt{I^*} + r - \frac{2rS^*}{K} - aP^* & \frac{-\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -\frac{1}{2}b\sqrt{I^*} & \frac{1}{2}\beta\sqrt{I^*} & -\mu + \frac{\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} - \frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Sous les conditions d'existence du point d'équilibre endémique, la matrice (2.19) devient

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} 0 & aP^* & -\frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -aS^* & \frac{rS^*}{K} - \frac{\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -b\sqrt{I^*} & \beta\sqrt{I^*} & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Pour déterminer la stabilité locale de l'équilibre E^* on va calculer l'équation caractéristique des (2.20)

$$J(E^* - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & aP^* & -\frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -aS^* & \frac{rS^*}{K} - \lambda - \frac{\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -b\sqrt{I^*} & \beta\sqrt{I^*} & -\frac{\mu}{2} - \lambda \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

d'où l'équation caractéristique

$$\det J(E^* - \lambda I) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (2.22)$$

avec $a_0 = \frac{1}{2}(a^2\mu - b^2\frac{r}{k} - 2ab\beta)S^*P^*$, $a_2 = \frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}$ et $a_1 = a^2S^*P^* + \frac{1}{2}(-b^2P^* + (\frac{r}{k}\mu + \beta^2)S^*)$.

On va utiliser la critère de ROUTH pour donner une condition suffisante pour la stabilité de l'état d'équilibre E^* mais il y a une hypothèse à considérer, en effet on sait que la condition nécessaire pour utiliser ce critère c'est la positivité de tous les coefficients de Routh i.e. $a_0, a_1 > 0$, et on remarque que $a_0 > 0$ est incompatible avec la condition (2.15) ; car si $a_0 > 0 \Rightarrow a^2k\mu \geq 2abk\beta + b^2r$ (i.e pour utiliser le critère de ROUTH il faut que la condition (2.15) soit vérifiée).

Si $b_1 > 0 \Rightarrow c_0 > 0$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{-1}{a_2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_2}(a_2 a_1 - a_0) \\
a_2 a_1 &= \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right) \left[a^2 S^* P^* + \frac{1}{2}(-b^2 P^* + \left(\frac{r}{k}\mu + \beta^2\right) S^*) \right] \\
&= \frac{rS^{*2}}{K} a^2 P^* - \frac{1}{2} \frac{rS^*}{K} b^2 P^* + \frac{rS^{*2}}{2K} \left(\frac{r}{k}\mu + \beta^2\right) - \frac{\mu}{4} b^2 P^* + \frac{\mu}{4} S^* \left(\frac{r}{k}\mu + \beta^2\right) + \frac{\mu}{2} a^2 P^* S^* \\
a_2 a_1 - a_0 &= \frac{rS^{*2}}{K} a^2 P^* - \frac{1}{2} \frac{rS^*}{K} b^2 P^* + \frac{rS^{*2}}{2K} \left(\frac{r}{k}\mu + \beta^2\right) - \frac{\mu}{4} b^2 P^* + \frac{\mu}{4} S^* \left(\frac{r}{k}\mu + \beta^2\right) + \frac{\mu}{2} a^2 P^* S^* \\
&\quad - \frac{1}{2} (a^2 \mu - b^2 \frac{r}{k} - 2ab\beta) S^* P^* \\
&= \frac{rS^{*2}}{K} a^2 P^* - \frac{1}{2} \frac{rS^*}{K} b^2 P^* + \frac{rS^{*2}}{2K} \left(\frac{r}{k}\mu + \beta^2\right) - \frac{\mu}{4} b^2 P^* + \frac{\mu}{4} S^* \left(\frac{r}{k}\mu + \beta^2\right) + \frac{\mu}{2} a^2 P^* S^* - \frac{1}{2} a^2 \mu S^* P^* \\
&\quad + \frac{1}{2} b^2 \frac{r}{k} S^* P^* + ab\beta S^* P^* \\
&= \frac{rS^{*2}}{K} a^2 P^* + \frac{rS^{*2}}{2K} \left(\frac{r}{k}\mu + \beta^2\right) - \frac{\mu}{4} b^2 P^* + \frac{\mu}{4} S^* \left(\frac{r}{k}\mu + \beta^2\right) + ab\beta S^* P^* \\
b_1 &> 0 \text{ ssi} \\
&\quad \frac{rS^{*2}}{K} a^2 P^* + \frac{rS^{*2}}{2K} \left(\frac{r}{k}\mu + \beta^2\right) + \frac{\mu}{4} S^* \left(\frac{r}{k}\mu + \beta^2\right) + ab\beta S^* P^* > \frac{\mu}{4} b^2 P^* \tag{2.23}
\end{aligned}$$

si cette dernière condition est vérifiée alors E^* est stable

Question : Peut-on déterminer la stabilité de E^* si les coefficients a_0 et a_1 ne sont pas positifs ?

Mathématiquement cela est possible, en effet on peut donner une autre conditions de l'instabilité (dans le cas où l'on ne peut pas appliquer le critère de Routh) on utilise alors la méthode de variation des signes de Descartes.

Exemple : si on prend l'équation caractéristique (2.22) et on suppose que $a_0 < 0$ et $a_1 > 0$ ou bien $a_0 < 0$ et $a_1 < 0$ on peut dire que l'équation caractéristique (2.22) admet une solution positive ce qui donne l'instabilité de l'équilibre endémique E^* . Dans le cas où $a_0 > 0$ et $a_1 < 0$ le signe varie deux fois i.e. l'équation caractéristique admet soit deux solutions positives soit n'admet pas de solutions positives (dans ce cas on peut avoir une bifurcation de Hopf).

Nature de la bifurcation :

Pour étudier le type de bifurcation on utilise la formule de CARDAN [88] pour calculer la forme

explicité des valeurs propres, tout d'abord on écrit l'équation (2.22) sous la forme :

$$X^3 + pX + q = 0, \quad (2.24)$$

on pose alors $\lambda = X - \frac{a_2}{3}$, ce qui donne

$$\left(X - \frac{a_2}{3}\right)^3 = X^3 - a_2X^2 + \frac{a_2^2}{3}X - \frac{a_2^3}{27}$$

$$a_2\left(X - \frac{a_2}{3}\right)^2 = a_2^2X + \frac{a_2^2}{9} - 2\frac{a_2^2}{3}X$$

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = \left(X - \frac{a_2}{3}\right)^3 + a_2\left(X - \frac{a_2}{3}\right)^2 + a_1\left(X - \frac{a_2}{3}\right) + a_0 = 0 \quad (2.25)$$

$$X^3 - a_2X^2 + \frac{a_2^2}{3}X - \frac{a_2^3}{27} + a_2^2X + \frac{a_2^2}{9} - 2\frac{a_2^2}{3}X + a_1X - a_1\frac{a_2}{3} + a_0 = 0 \quad (2.26)$$

$$X^3 + X\left(-\frac{a_2^2}{3} + a_1\right) + a_0 - \frac{a_2^3}{27} + \frac{a_2^2}{9} - a_1\frac{a_2}{3} = 0 \quad (2.27)$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} p &= -\frac{a_2^2}{3} + a_1 \\ q &= a_0 - \frac{a_2^3}{27} + \frac{a_2^2}{9} - a_1\frac{a_2}{3}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

On utilise alors le changement de variable $X = u + v$ et l'équation (2.24) devient

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0,$$

on choisit $uv = -\frac{p}{3}$ alors $u^3 + v^3 = -q$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}, \end{cases} \quad (2.29)$$

on pose $u_1 = u^3$ et $v_1 = v^3$. Il suffit de trouver deux nombres u_1, v_1 dont la somme est égale à $-q$, et dont le produit est égal à $-\frac{p^3}{27}$, la solution du système est la solution de l'équation de variable ξ

$$\xi^2 + q\xi - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (2.30)$$

$$\Delta = 27q^2 + 4p^3 = 27\left(a_0 - \frac{a_2^3}{27} + \frac{a_2^2}{9} - a_1 \frac{a_2}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{a_2^2}{3} + a_1\right)^3$$

LEMME 2.1.

-Si $\Delta > 0$, on a une racine réelle et 2 racines imaginaires conjuguées

-Si $\Delta = 0$, on a une racine réelle simple et une racine réelle double

-Si $\Delta < 0$, on a 3 racines réelles

Démonstration. $\Delta = 27q^2 + 4p^3$

• Si $\Delta > 0$ alors il existe deux racines réelles de l'équation (2.30) on les note t' et t''

u^3 et v^3 vérifie l'équation (2.30); et soit $\alpha = \sqrt[3]{t'}$ ie α^3 est la solution de l'équation (2.30) donc

$$\alpha^6 + q\alpha^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (2.31)$$

soit $k \in \{0, 1, 2\}$ et posons $u_k = j^k \alpha$ et $v_k = -\frac{p}{3\alpha} j^{2k}$ et $x_k = u_k + v_k$ on trouve x_0, x_1, x_2

$$u_k^3 + v_k^3 = (j^k \alpha)^3 + \left(-\frac{p}{3\alpha} j^{2k}\right)^3 = j^{3k} \alpha^3 - \frac{p^3}{27\alpha^3} j^{6k} = \alpha^3 - \frac{p^3}{27\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^3} \left(\alpha^6 - \frac{p^3}{27}\right) = -q$$

car $j^{3k} = j^0 = 1$ ($k \in \{0, 1, 2\}$)

$$j^{6k} = j^0 = 1 \text{ et } \alpha^6 + q\alpha^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \Rightarrow \alpha^6 - \frac{p^3}{27} = -q\alpha^3$$

et la même chose pour pour $u_k v_k = -\frac{p}{3} j^{3k} = -\frac{p}{3}$ donc u_k et v_k vérifient l'équation (2.29).

• Montrons que $x_k = u_k + v_k$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$ sont des solutions de l'équation (2.27)

il faut montrer que $\forall x \in C$ alors

$$x^3 + px + q = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^3 + px + q = x^3 - x^2(x_0 + x_1 + x_2) + x(x_0x_1 + x_0x_2 + x_2x_1) - x_0x_2x_1$$

montrons que

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0, \\ x_0x_1 + x_0x_2 + x_2x_1 = p, \\ x_0x_2x_1 = -q, \end{cases}$$

on pose $1 + j + j^2 = 0 \Rightarrow \Delta' = 3i^2 \Rightarrow j_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$$x_0 + x_1 + x_2 = (1 + j + j^2)\alpha - (1 + j + j^2)\frac{p}{3\alpha} = 0$$

$$\begin{aligned} x_k &= j^k \alpha - \frac{p}{3\alpha} j^{2k} \\ x_k^2 &= j^{2k} \alpha^2 + \frac{p^2}{9\alpha^2} j^{4k} - \frac{2p}{3} j^{3k} \\ &= j^{2k} \alpha^2 + \frac{p^2}{9\alpha^2} j^k - \frac{2p}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 &= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \\ &= (1 + j + j^2) \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{9\alpha^2} \right) - 2p \\ &= -2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1 + x_2)^2 &= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2(x_0x_1 + x_0x_2 + x_2x_1) \\ &= s_2 + 2(x_0x_1 + x_0x_2 + x_2x_1) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} x_0x_1 + x_0x_2 + x_2x_1 &= \frac{1}{2}(-s_2 + (x_0 + x_1 + x_2)^2) \\ &= \frac{1}{2}(2p + 0) = p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0x_2x_1 &= \left(\alpha - \frac{p}{3\alpha} \right) \left(j\alpha - \frac{p}{3\alpha} j^2 \right) \left(j^2\alpha - \frac{p}{3\alpha} j \right) \\ &= \left(\alpha - \frac{p}{3\alpha} \right) \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{9\alpha^2} + \frac{p}{3} \right) \\ &= \alpha^3 + \frac{p^2}{9\alpha} + \frac{p\alpha}{3} - \frac{p\alpha}{3} - \frac{p^3}{27\alpha^3} - \frac{p^2}{9\alpha} \\ &= \alpha^3 - \frac{p^3}{27\alpha^3} \\ &= -q \end{aligned}$$

du fait que $1 + j + j^2 = 0 \Rightarrow j_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$,

et par un simple calcul on montre que les j_i ; $i = 1, 2$ vérifient la condition $j_i^3 = 1$, ainsi que les conditions $j_i^4 = j$; $j_i^5 = j^2$

donc $x_k = u_k + v_k$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$ sont des solutions de l'équation (2.27)

puisque $\lambda_k = X_k - \frac{a_2}{3} = j^k \alpha - \frac{p}{3\alpha} j^{2k} - \frac{a_2}{3}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$ alors aussi λ_k sont des solutions de l'équation (2.22).

Maintenant on peut montrer le Lemme énoncé plus haut

• Pour $\Delta = 27q^2 + 4p^3 > 0$,

alors l'équation (2.30) admet deux solutions réelles distinctes, t' et t'' ; et soit α la racine cubique de t' i.e $\alpha = \sqrt[3]{t'}$ et posons

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \alpha - \frac{p}{3\alpha} - \frac{a_2}{3}, \\ \lambda_1 &= j\alpha - \frac{p}{3\alpha}j^2 - \frac{a_2}{3}, \\ \lambda_2 &= j^2\alpha - \frac{p}{3\alpha}j - \frac{a_2}{3},\end{aligned}$$

on sait que $\lambda_0 ; \lambda_1 ; \lambda_2$ sont des solutions de l'équation (2.22) et il est clair que λ_0 est réelle et puisque α est réel (car t' et t'' sont réels) donc $\lambda_1 ; \lambda_2$ sont des complexes conjugués car j est complexe.

• Pour $\Delta = 27q^2 + 4p^3 < 0$,

puisque $\Delta < 0$ alors $p < 0$,

l'équation (2.30) admet deux solutions complexes conjuguées t' et t'' ; donc $\alpha^3 = t' = \bar{t}''$ et $\bar{\alpha}^3 = t''$

$$27q^2 + 4p^3 < 0 \Rightarrow 0 > -27q^2 > 4p^3 \Rightarrow p < 0$$

$$\text{alors } t't'' = -\frac{p^3}{27} \Rightarrow t't'' = \alpha^3\bar{\alpha}^3 = |\alpha|^6 = -\frac{p^3}{27}$$

$$\text{et par suite } |\alpha|^2 = -\frac{p}{3} \Leftrightarrow \alpha\bar{\alpha} = -\frac{p}{3} \Rightarrow \bar{\alpha} = -\frac{p}{3\alpha}$$

$$\text{donc } \lambda_0 = \alpha - \frac{p}{3\alpha} - \frac{a_2}{3} = \alpha + \bar{\alpha} - \frac{a_2}{3} = 2\operatorname{Re}(\alpha) - \frac{a_2}{3}$$

$$\lambda_1 = j\alpha - \frac{p}{3\alpha}j^2 - \frac{a_2}{3} = j\alpha + \bar{\alpha}j^2 - \frac{a_2}{3}$$

$$\text{puisque } j^2 = \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{3})^2 = \bar{j} \text{ alors } \lambda_1 = j\alpha + \bar{j}\bar{\alpha} - \frac{a_2}{3} = 2\operatorname{Re}(j\alpha) - \frac{a_2}{3}$$

$$\lambda_2 = j^2\alpha - \frac{p}{3\alpha}j - \frac{a_2}{3} = j^2\alpha + \bar{\alpha}j - \frac{a_2}{3} = j^2\alpha + \bar{j^2}\bar{\alpha} - \frac{a_2}{3} = 2\operatorname{Re}(j^2\alpha) - \frac{a_2}{3}$$

donc $\lambda_0 ; \lambda_1 ; \lambda_2 \in \mathbb{R}$

• Pour $\Delta = 27q^2 + 4p^3 = 0$,

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 27q^2 + 4p^3 = 0 \Rightarrow \frac{p^3}{27} = -\frac{q^2}{4} \text{ alors } t' = t'' = -\frac{q}{2} \Rightarrow \alpha^3 = -\frac{q}{2} \text{ alors } \alpha^6 = \frac{q^2}{4} = -\frac{p^3}{27} \Rightarrow$$

$$\alpha^2 = -\frac{p}{3}$$

$$\lambda_0 = \alpha - \frac{p}{3\alpha} - \frac{a_2}{3} = \alpha + \frac{\alpha^2}{\alpha} - \frac{a_2}{3} = 2\alpha - \frac{a_2}{3}$$

$$\lambda_1 = j\alpha - \frac{p}{3\alpha}j^2 - \frac{a_2}{3} = j\alpha + \frac{\alpha^2}{\alpha}j^2 - \frac{a_2}{3} = j\alpha + \alpha j^2 - \frac{a_2}{3}$$

$$= \alpha(j + \bar{j}) - \frac{a_2}{3} = \alpha\left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{a_2}{3} = -\alpha - \frac{a_2}{3}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha - \frac{a_2}{3}$$

$$27q^2 + 4p^3 = 0 \Rightarrow -27q^2 = 4p^3 \Rightarrow p < 0$$

alors $\alpha = \sqrt{-\frac{p}{3}} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_k \in \mathbb{R}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$ et $x_0 = x_1$ (solution double) \square

LEMME 2.2. *Une bifurcation se produit si $Re(\lambda_1) = 0$ et $\Delta > 0$, et dans ce cas on a une bifurcation de Hopf (car les valeurs propres traversent l'axe imaginaire)*

REMARQUE 2.3. *Le **Lemme 2.2** donne une condition suffisante et nécessaire pour l'existence d'une bifurcation de Hopf, mais $Re(\lambda_1)$ a une formule très compliquée ce qui donne des difficultés calculatoires, encore une fois on va essayer de se convaincre numériquement que les paramètres du modèle vérifient les hypothèses du **Lemme 2.2**.*

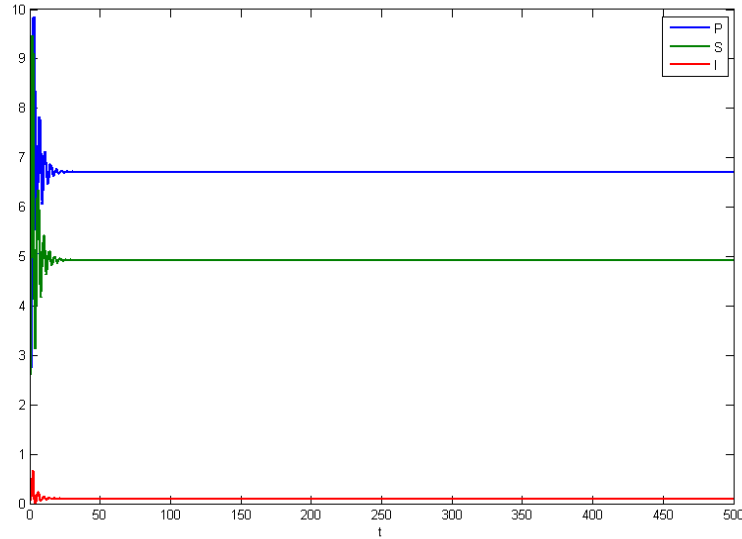


Figure 2.4 : simulation numérique du système (2.1) avec $a = 0.29$; $b = 0.25$; $\beta = 0.8$; $m = 1.35$; $r = 3.2$; $mu = 7.2$; $k = 5000$; et $E_1 = (0, 5.9928, 15.9617)$ et $E^* = (10.5650, 4.7986, 0.0277)$ et $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} = 10.0082$ alors E_1 est instable et E^* n'existe pas car $akm\beta + bmr - abkr = 407.08$ et $a^2k\mu - 2abk\beta - b^2r = -75.6$ (contradiction avec les conditions de positivité) sous les conditions initiales sont $P_0 = 5$ et $S_0 = 2$ et $I_0 = 1$

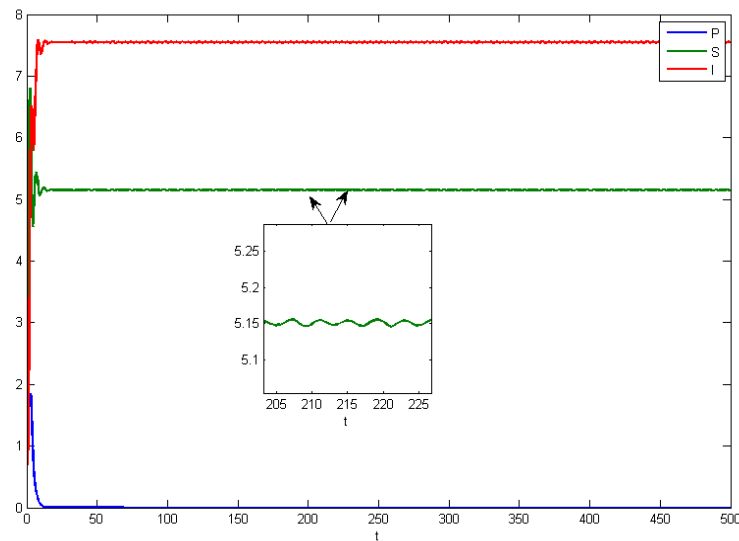


Figure 2.5 : simulation numérique de système (2.1) qui représente l'existence d'une solution périodique pour les valeurs $a = 0.29$; $L = 1$; $b = 0.25$; $\beta = 0.8$; $m = 1.35$; $r = 3.2$; $\mu = 1.2$; $k = 5000$; et $E_1 = (0, 10.9759, 15.9298)$ et $E^* = (6.4105, 4.7993, 2.7968)$ et $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} = 1.9328$ alors E_1 est instable et E^* existe et il est stable $a_0 = 2.6677$; $a_1 = 4.1246$; $a_2 = 1.1031$; $b_1 = 1.8820$ avec les conditions initiales $P_0 = 20$ et $S_0 = 1$ et $I_0 = 100$.

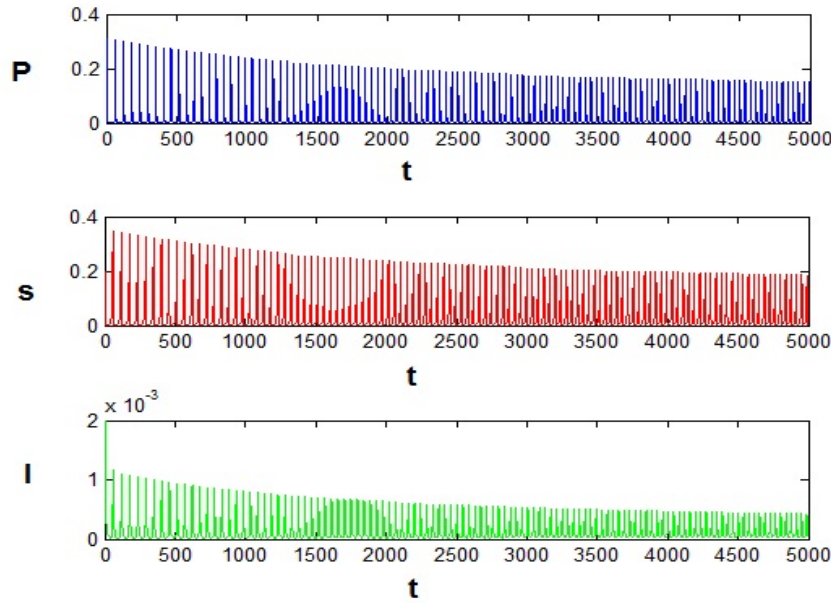


Figure 2.6 : simulation numérique de système (2.1) avec la présence d'oscillations pour les trois populations pour les paramètres $a = 9.4$; $b = 0.25$; $L = 1$; $\beta = 0.04$; $m = 0.2$; $r = 0.2$; $\mu = 0.1$;

$k = 5000$; $p = 0.0026$; $q = 0.0708$; $\Delta = 27q^2 + 4p^3 = 0.1352$ et $E_1 = (0, 12.4688, 24.8755)$ et

$E^* = (0.0212, 0.0373, 0.0096)$ et $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} = 116.9817$ alors E_1 est instable et E^* existe et il est stable $a_0 = 0.0035$; $a_1 = 0.0699$; $a_2 = 0.05$; $b_1 = 8.7041 \times 10^{-6}$ avec les conditions initiales

$$P_0 = 0.2 \text{ et } S_0 = 0.2 \text{ et } I_0 = 0.002.$$

2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un modèle proie-prédateur en la présence d'une infection des proies qui provoque (entre autre) instinctivement un comportement de troupeau pour la population des proies infectées. Notre étude est focalisée sur le comportement asymptotique des états d'équilibre et on a considéré les deux cas toxique et non toxique.

Pour l'analyse de bifurcation on a choisi le paramètre de la capacité limite comme paramètre de bifurcation et on a discuté suivant les valeurs de k la stabilité des états d'équilibre.

Durant ce chapitre nous avons rencontré beaucoup de difficultés calculatoires surtout lorsqu'il s'agit de la dynamique globale des solutions et la conservation des solutions périodiques, n'ayant pu donner de réponse mathématique rigoureuse, on a essayé de donner quelques indications sur le comportement global en utilisant la simulation numérique.

Chapitre 3

Comportement de troupeau dans un
modèle proie-prédateur avec diffusion
spatiale et infection des proies

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier l'effet de la diffusion spatiale sur le modèle introduit au chapitre précédent. Notre analyse ayant pour but de faire une étude comparative entre les résultats trouvés pour le système sans diffusion et ceux qu'on obtiendra lorsqu'on considère la diffusion. Encore une fois on va diviser notre étude en deux parties :

3.2 Le cas non toxique

Considérons le système :

$$\begin{cases} P_t = -mP + aPS + bP\sqrt{I} + b_3P_{xx}, \\ S_t = -\beta S\sqrt{I} + rS\left(1 - \frac{S}{k}\right) - aPS + b_2S_{xx}, \\ I_t = -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} + b_1I_{xx}, \end{cases} \quad (3.1)$$

sous les conditions aux bords de Neumann :

$$\begin{cases} P_x(0, t) = P_x(L, t) = S_x(0, t) = S_x(L, t) = I_x(0, t) = I_x(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \\ P(x, 0) = P_0(x) \geq 0, S(x, 0) = S_0(x), I(x, 0) = I_0(x) \geq 0 \quad x \in (0, L\pi). \end{cases} \quad (3.2)$$

On conserve les mêmes notations que l'on a déjà faites avec le système (2.1) et on ajoute x qui représente la distance couverte par une des trois population considérée, et $\Omega = [0, L\pi]$ avec $L\pi$ est la distance maximale couverte soit par S ou P ou I le choix d'un tel intervalle est fait par soucis de simplifications des calculs à venir.

Considérons l'espace fonctionnel

$$X = \{U \in H^2(0, L\pi), P_x(0, t) = P_x(L, t) = S_x(0, t) = S_x(L, t) = I_x(0, t) = I_x(L, t) = 0, x \in [0, L\pi]\}$$

Le système admet les mêmes états stationnaires ainsi que les mêmes conditions de positivité que ceux du système (2.1).

Maintenant on va analyser la stabilité locale du système (3.2), et on pose $L(k)$ la matrice Jacobienne associée à (2.1) au point d'équilibre E_1 , on écrit le système sous la forme :

$$U_t = D\Delta U + L(k) + F(U) \quad (3.3)$$

avec

$$L(k) = \begin{pmatrix} -m + aS_1 + b\sqrt{I_1} & 0 & 0 \\ -aS_1 & -\frac{rS_1}{K} & \frac{-\beta S_1}{2\sqrt{I_1}} \\ -b\sqrt{I_1} & \beta\sqrt{I_1} & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

et

$$D = \begin{pmatrix} b_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & b_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

et

$$F(U) = \begin{pmatrix} -mP + aPS + bP\sqrt{I} + mP - aS_1P - b\sqrt{I_1}P \\ -\beta S\sqrt{I} + rS(1 - \frac{S}{k}) - aPS + aS_1P + \frac{rS_1}{K}S + \frac{\beta S_1}{2\sqrt{I_1}}I \\ -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} + b\sqrt{I_1}P - \beta\sqrt{I_1}S + \frac{\mu}{2}I \end{pmatrix}$$

Par un simple calcul on peut simplifier $F(U)$ sous la forme :

$$F(U) = \begin{pmatrix} +aPS + bP\sqrt{I} - aS_1P - b\sqrt{I_1}P \\ -\beta S\sqrt{I} + rS(1 - \frac{S}{k}) - aPS + aS_1P + \frac{rS_1}{K}S + \frac{\beta S_1}{2\sqrt{I_1}}I \\ \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} + b\sqrt{I_1}P - \beta\sqrt{I_1}S - \frac{\mu}{2}I \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

On peut écrire le système linéarisé au voisinage de E_1

$$U_t = D\Delta U + L(b)U, \quad (3.7)$$

sous les conditions aux bords et par la séparation des variables on pose

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \cos\left(\frac{n}{L}x\right)e^{\lambda t}.$$

Rappelons que $(\frac{n}{L})^2$ sont les valeurs propres de $-\Delta$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

L'équation caractéristique :

Pour déterminer la stabilité locale du système (2.1) on définit la matrice $D\Delta + L(b)$ par

$$D\Delta + L(b) = \begin{pmatrix} -m + aS_1 + b\sqrt{I_1} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)b_3 & 0 & 0 \\ -aS_1 & -\frac{rS_1}{K} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)b_2 & \frac{-\beta S_1}{2\sqrt{I_1}} \\ -b\sqrt{I_1} & \beta\sqrt{I_1} & -\frac{\mu}{2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)b_1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

et par suite la matrice $D\left(\frac{n}{L}\right)^2 + L(b)$ est donnée par

$$D\left(\frac{n}{L}\right)^2 + L(b) = \begin{pmatrix} -m + aS_1 + b\sqrt{I_1} - \left(\frac{n}{L}\right)^2b_3 & 0 & 0 \\ -aS_1 & -\frac{rS_1}{K} - \left(\frac{n}{L}\right)^2b_2 & \frac{-\beta S_1}{2\sqrt{I_1}} \\ -b\sqrt{I_1} & \beta\sqrt{I_1} & -\frac{\mu}{2} - \left(\frac{n}{L}\right)^2b_1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Les valeurs propres de $D\left(\frac{n}{L}\right)^2 + L(b)$ sont des solutions de l'équation d'inconnue λ :

$$[\lambda - (-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} - \left(\frac{n}{L}\right)^2b_3)][\left(\frac{rS_1}{K} + \left(\frac{n}{L}\right)^2b_2 + \lambda\right)\left(\frac{\mu}{2} + \left(\frac{n}{L}\right)^2b_1 + \lambda\right) + \frac{\beta^2 S_1}{2}] = 0 \quad (3.10)$$

on définit la matrice J par

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{rS_1}{K} - \left(\frac{n}{L}\right)^2b_2 & \frac{-\beta S_1}{2\sqrt{I_1}} \\ \beta\sqrt{I_1} & -\frac{\mu}{2} - \left(\frac{n}{L}\right)^2b_1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

On peut facilement vérifier que $\det J > 0$ et $tr J < 0$ alors on peut dire que les valeurs propres de la matrice J sont strictement négatives, ce qui signifie que l'apparition d'une bifurcation transcritique se produit si et seulement si

$$-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} - \left(\frac{n}{L}\right)^2b_3 = 0 \quad (3.12)$$

maintenant on cherche la valeur de bifurcation transcritique

$$\begin{aligned} -m + aS_1 + b\sqrt{I_1} - \left(\frac{n}{L}\right)^2b_3 &= 0 \\ -m + \frac{akr\mu}{\beta^2k + r\mu} + \frac{br\beta k}{\beta^2k + r\mu} - \left(\frac{n}{L}\right)^2b_3 &= 0 \\ -(m + \left(\frac{n}{L}\right)^2b_3)(\beta^2k + r\mu) + ark\mu + brk\beta &= 0 \\ -m\beta^2k - mr\mu - \left(\frac{n}{L}\right)^2b_3\beta^2k - \left(\frac{n}{L}\right)^2b_3\mu r + ark\mu + rk\beta &= 0 \end{aligned}$$

$$k^*(n) = \frac{\left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 \mu r + m r \mu}{-m \beta^2 - \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 \beta^2 + r \beta + a r \mu}. \quad (3.13)$$

Pour déterminer les éventuels points de bifurcation transcritique on étudie la positivité de la fonction (3.13)

$$\begin{aligned} k^{*'}(n) &= \frac{\frac{2n}{L^2} b_3 \mu r (-m \beta^2 - \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 \beta^2 + r \beta + a r \mu) + \frac{2n}{L^2} b_3 \beta^2 \left(\left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 \mu r + m r \mu\right)}{(-m \beta^2 - \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 \beta^2 + r \beta + a r \mu)^2} \\ &= \frac{2n}{L^2} \frac{-b_3 \mu r m \beta^2 - b_3^2 \mu r \left(\frac{n}{L}\right)^2 \beta^2 + b_3 \mu r (r \beta + a r \mu) + \beta^2 \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3^2 \mu r + b_3 \beta^2 m r \mu}{(-m \beta^2 - \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 \beta^2 + r \beta + a r \mu)^2} \end{aligned}$$

$$k^{*'}(n) = \frac{2n}{L^2} \frac{b_3 \mu r (r \beta + a r \mu)}{(-m \beta^2 - \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 \beta^2 + r \beta + a r \mu)^2} > 0, \quad (3.14)$$

alors $k^*(n)$ est strictement croissante en fonction de n alors on a le lemme suivant

LEMME 3.1. *Pour déterminer la stabilité de l'équilibre E_1 on a deux cas à considérer :*

- Si $-m \beta^2 + r \beta + a r \mu > 0$ il existe $N^* = \left[L \sqrt{\frac{-m \beta^2 + r \beta + a r \mu}{b_3 \beta^2}} \right]$ tel que pour $0 < n < N^*$ on a : -Si $k > k^*(0)$ alors E_1 est instable
-Si $k < k^*(0)$ alors E_1 est stable
- Si $-m \beta^2 + r \beta + a r \mu < 0$ alors E_1 est localement asymptotiquement stable

Démonstration. :

- Si $-m \beta^2 + r \beta + a r \mu > 0$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -m \beta^2 - \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 \beta^2 + r \beta + a r \mu = -\infty$$

et $-m \beta^2 - \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 \beta^2 + r \beta + a r \mu$ est strictement décroissante en fonction de n , de plus il existe un N^* tel que pour tout $n > N^*$ on a $-m \beta^2 - \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 \beta^2 + r \beta + a r \mu < 0$; ce qui signifie que $k^*\left(\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) < 0$ dans ce cas pour tout $k > 0$ on a $k > k^*\left(\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)$ avec la condition $-m \beta^2 - \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 \beta^2 + r \beta + a r \mu < 0$ on trouve $-m + a S_1 + b \sqrt{I_1} - \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 < 0$ pour tout $n > N^*$. N^* vérifie alors la condition

$$-m \beta^2 - \left(\frac{N^*}{L}\right)^2 b_3 \beta^2 + r \beta + a r \mu = 0 \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} -m\beta + r\beta + ar\mu &= \left(\frac{N^*}{L}\right)^2 b_3 \beta^2 \\ \frac{-m\beta + r\beta + ar\mu}{b_3 \beta^2} &= \left(\frac{N^*}{L}\right)^2 \\ N^* &= L \sqrt{\frac{-m\beta + r\beta + ar\mu}{b_3 \beta^2}} \end{aligned}$$

puisque $N^* \in \mathbb{N}$ alors $N^* = \left\lceil L \sqrt{\frac{-m\beta + r\beta + ar\mu}{b_3 \beta^2}} \right\rceil$

-Si $k > k^*(n)$ pour un certain n alors E_1 est instable

-Si $k < k^*(0)$ pour tout $0 < n < n^*$ alors E_1 est stable

puisque $k^*(n)$ est strictement croissante en fonction de n on a $k^*(0) \leq k^*(n)$

• Si $-m\beta^2 + r\beta + ar\mu < 0$ alors $k^*(n) < 0$ alors pour tout $k > 0$ on a $k^*(n) < k$ alors E_1 est stable ce qui complète la preuve □

D'après l'étude du système avec diffusion on peut dire qu'on a une conservation de la bifurcation transcritique trouvée dans le système (2.1) et on a quelques remarques :

REMARQUE 3.1. *Au voisinage de l'équilibre E_1 la diffusion spatiale a un effet stabilisant pour le système (2.1) car on remarque que $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} - \left(\frac{n}{L}\right)^2 b_3 < -m + aS_1 + b\sqrt{I_1}$*

REMARQUE 3.2. *Pour l'équilibre endémique, il est localement asymptotiquement stable quand il existe dans le système (2.1), mais en présence de la diffusion il peut être instable ce qui s'appelle l'instabilité de Turing, et on a évité de donner des conditions de l'instabilité de Turing à cause de la difficulté calculatoire dans la présence de diffusion et en va juste donner quelques simulations numériques pour prouver l'éventualité de l'instabilité de E^* , on plus on peut avoir une bifurcation de Hopf; on plus on peut avoir une bifurcation de Hopf*

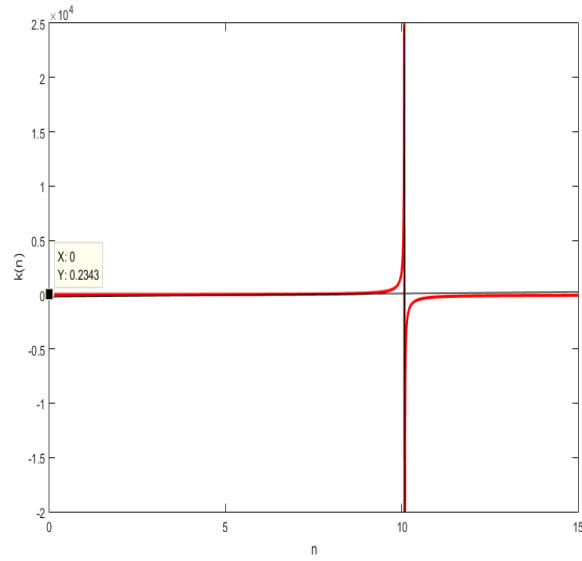


Figure 3.3 : Simulation numérique de la fonction $k(n)$ (3.13) avec $r = 1.22425$; $b_3 = 0.1440$; $\beta = 0.0845354$; $L = 1$; $m = 0.1$; $\mu = 0.2$; $a = 0.007$; et $-m\beta^2 - (\frac{n}{L})^2 b_3 \beta^2 + r\beta + ar\mu = 0.1045 > 0$ (i.e $k(0) > 0$)

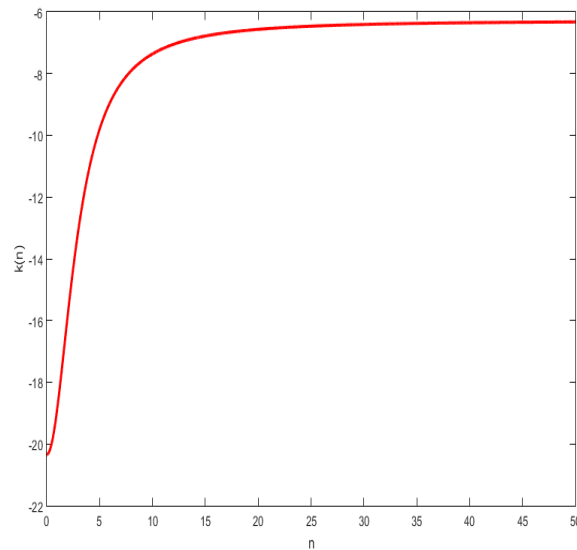


Figure 3.4 : Simulation numérique de la fonction $k(n)$ (3.13) avec $r = 0.22425$; $b_3 = 0.1440$; $\beta = 0.0845354$; $L = 1$; $m = 3.1$; $\mu = 0.2$; $a = 0.007$; et $-m\beta^2 - (\frac{n}{L})^2 b_3 \beta^2 + r\beta + ar\mu = -0.0086 < 0$ (i.e $k(0) < 0$)

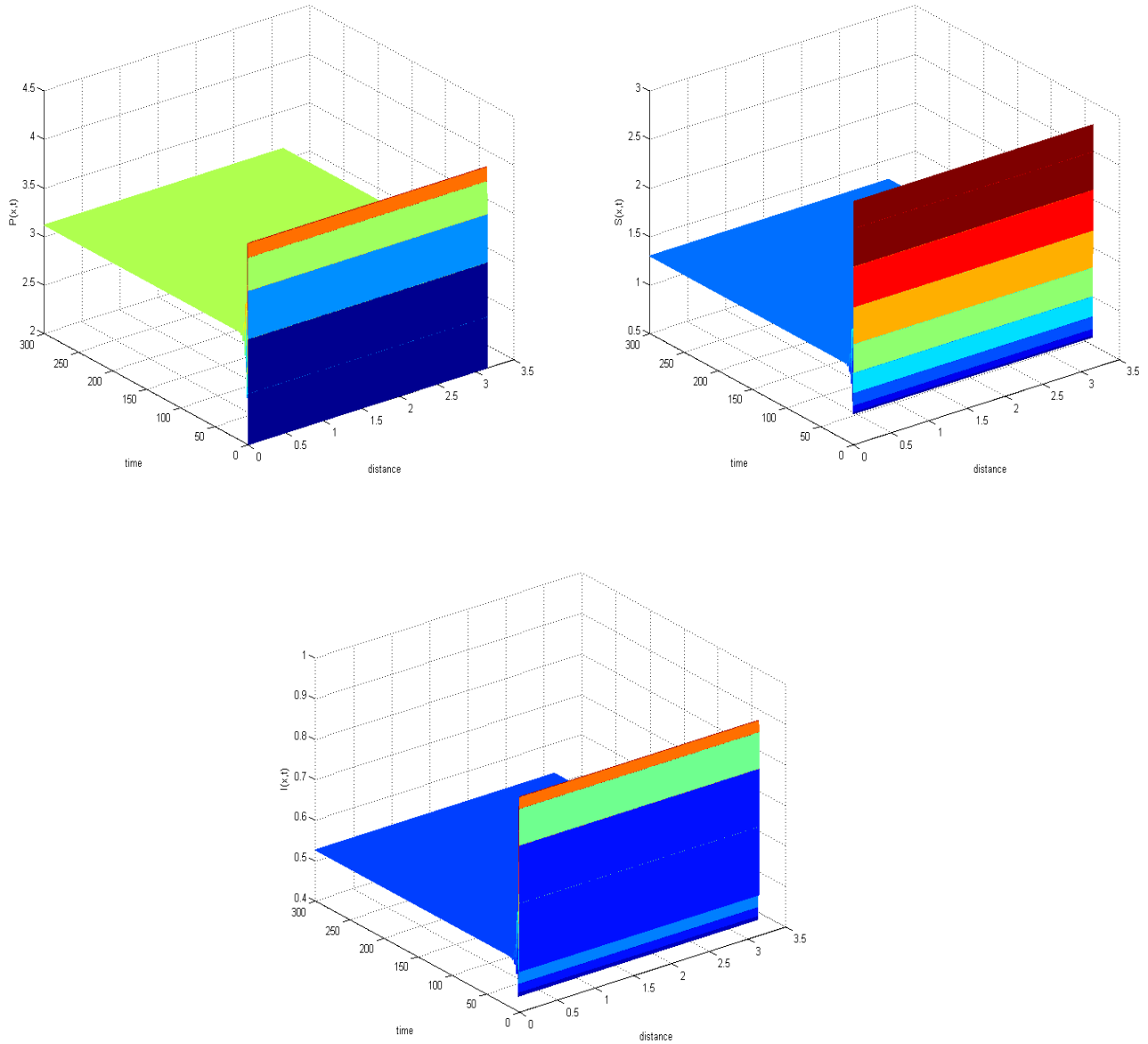


Figure 3.5 : Simulation numérique du système (3.1) la conservation de stabilité de E^* en présence de la diffusion et les mêmes valeurs des paramètres dans **figure 1.2** avec le taux de diffusion $d_1 = 0.04$, $d_2 = 0.02$, $d_3 = 0.01$ et les conditions initiales $P_0 = 2$ et $S_0 = 3$ et $I_0 = 4$.

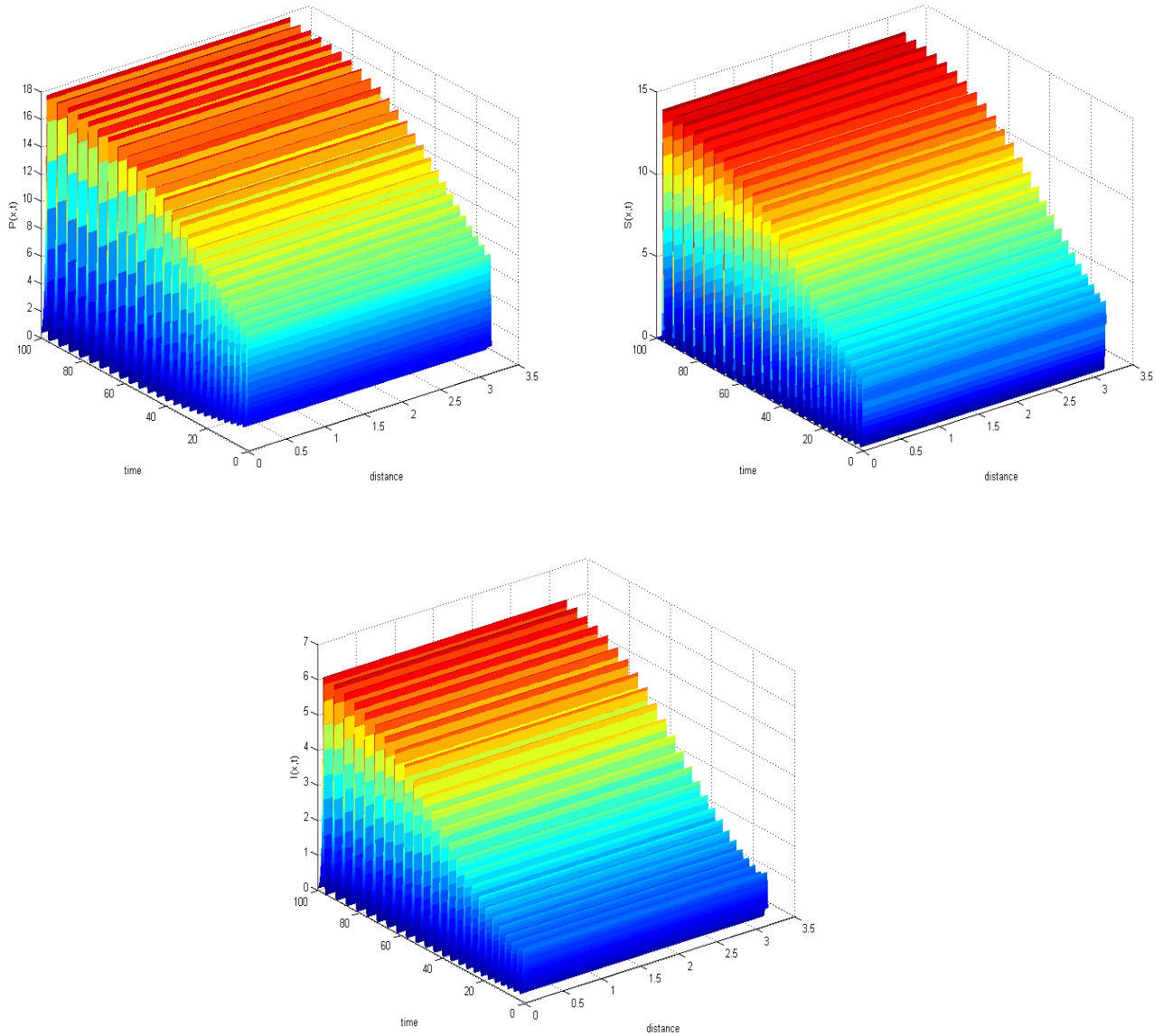


Figure 3.4 : Simulation numérique du système (3.1) la perte de la stabilité de l'équilibre E^* en la présence de diffusion et les mêmes valeurs des paramètres dans **figure 2.2** avec les coefficient de diffusion $d_1 = 0.4$, $d_2 = 0.2$, $d_3 = 0.1$ et les conditions initiales $P_0 = 2$ et $S_0 = 3$ et $I_0 = 4$.

Question : A-t-on toujours l'existence de la solution périodique pour le système (2.1) avec diffusion pour les mêmes conditions initiales dans **Figure 2.3** pour certaines valeurs des coefficient de la diffusion ?

On peut conserver la **Figure 1.3** en présence de la diffusion si l'on choisit le taux de diffusion tel que E^* reste stable en présence de diffusion comme on le montre dans la figure suivante

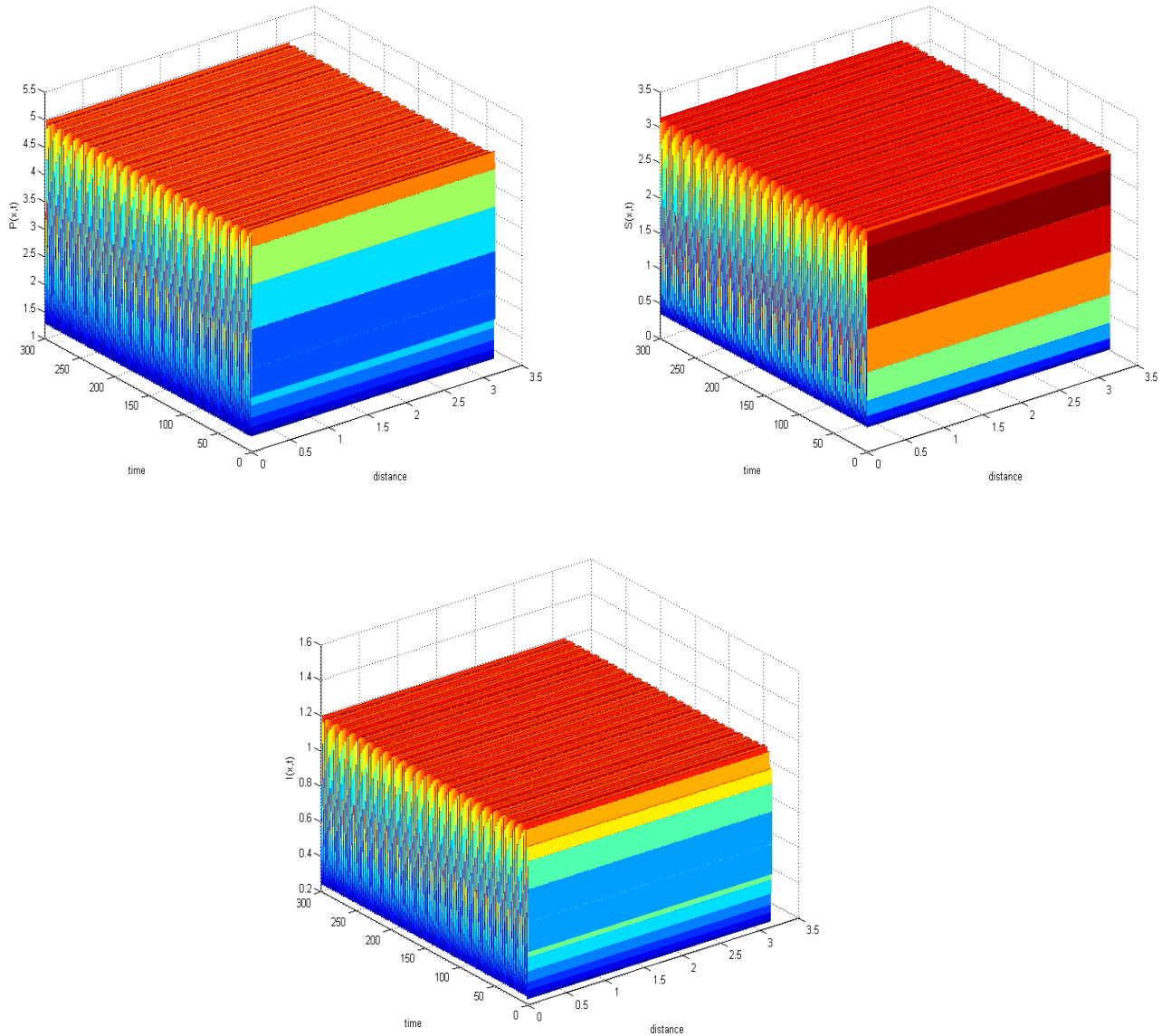


Figure 3.5 : simulation numérique du système (3.1) avec la présence de solution périodiques homogènes pour les trois populations pour les paramètres $a = 1.029$; $b = 0.025$; $L = 1$; $\beta = 0.9$; $m = 1.35$; $r = 5.2$; $mu = 1.5$; $k = 500$; et $d_1 = 0.04$, $d_2 = 0.02$, $d_3 = 0.01$; alors $E_1 = (0, 8.07, 23.47)$, $E^* = (-4.5889, 11.0246, 95.0726)$ et $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} = 11.9245 > 0$ alors E_1 est instable et E^* n'existe pas, sous les conditions initiales $P_0 = 2$ et $S_0 = 3$ et $I_0 = 4$.

3.3 Le cas toxique

Dans cette sous section nous allons suivre la même méthode que celle introduite dans la première section avec l'hypothèse de la toxicité des proies et la présence de diffusion; alors notre modèle est le

suisant :

$$\begin{cases} P_t = -mP + aPS - bP\sqrt{I} + d_1P_{xx}, \\ S_t = -\beta S\sqrt{I} + rS(1 - \frac{S}{k}) - aPS + d_2S_{xx}, \\ I_t = -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} + d_3I_{xx}, \end{cases} \quad (3.16)$$

sous les conditions aux bords de Neumann

$$\begin{cases} P_x(0, t) = P_x(L, t) = S_x(0, t) = S_x(L, t) = I_x(0, t) = I_x(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ P(x, 0) = P_0(x) \geq 0, S(x, 0) = S_0(x), I(x, 0) = I_0(x) \geq 0 \quad x \in (0, L\pi) \end{cases} \quad (3.17)$$

avec $\Omega = [0, L\pi]$

$$X = \{I \in H^2(0, L\pi), P_x(0, t) = S_x(0, t) = I_x(0, t) = 0, x \in [0, L\pi]\}$$

$$\text{et } P(x, 0) = P_0(x) \text{ et } S(x, 0) = S_0(x), I(x, 0) = I_0(x)$$

$$\text{et } U = (P, S, I)^T.$$

$$\text{Les solutions stationnaires sont } E_0 = (0, 0, 0); E_1 = (0, \frac{\mu rk}{\beta^2 k + \mu r}, \frac{r^2 k^2 \beta^2}{(\beta^2 k + \mu r)^2}) \text{ et } E^* = (P^*, S^*, I^*)$$

avec

$$P^* = \frac{akr\mu - bkr\beta - mr\mu - km\beta^2}{a^2k\mu - 2abk\beta - b^2r} \text{ et } S^* = \frac{akm\mu - bkm\beta - krb^2}{a^2k\mu - 2abk\beta - b^2r}$$

$$\text{et } I^* = \left(\frac{akm\beta + bmr - abkr}{a^2k\mu - 2abk\beta - b^2r} \right)^2.$$

$$J = \begin{pmatrix} -m + aS + b\sqrt{I} & aP & -\frac{bP}{2\sqrt{I}} \\ -aS & -\beta\sqrt{I} + r - \frac{2rS}{K} - aP & \frac{-\beta S}{2\sqrt{I}} \\ -b\sqrt{I} & \beta\sqrt{I} & -\mu + \frac{\beta S}{2\sqrt{I}} - \frac{bP}{2\sqrt{I}} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

avec $L(k)$ est la matrice Jacobienne du système (2.1) au point d'équilibre E_1

Analyse de stabilité de E_1

Encore une fois on peut écrire le système s'écrit sous la forme

$$U_t = D\Delta U + L(k) + F(U) \quad (3.19)$$

avec

$$L(k) = \begin{pmatrix} -m + a_1S_1 + b\sqrt{I_1} & 0 & 0 \\ -aS_1 & -\frac{rS_1}{K} & \frac{-\beta S_1}{2\sqrt{I_1}} \\ -b\sqrt{I_1} & \beta\sqrt{I_1} & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & d_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

et la fonction

$$F(U) = \begin{pmatrix} -mP + aPS + bP\sqrt{I} + mP - aS_1P - b\sqrt{I_1}P \\ -\beta S\sqrt{I} + rS(1 - \frac{S}{k}) - aPS + aS_1P + \frac{rS_1}{K}S + \frac{\beta S_1}{2\sqrt{I_1}}I \\ -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} + b\sqrt{I_1}P - \beta\sqrt{I_1}S + \frac{\mu}{2}I \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

en utilisant les équations de l'existence de E_1 , alors la fonction (3.21) devient

$$F(U) = \begin{pmatrix} +aPS + bP\sqrt{I} - aS_1P - b\sqrt{I_1}P \\ -\beta S\sqrt{I} + rS(1 - \frac{S}{k}) - aPS + aS_1P + \frac{rS_1}{K}S + \frac{\beta S_1}{2\sqrt{I_1}}I \\ \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} + b\sqrt{I_1}P - \beta\sqrt{I_1}S - \frac{\mu}{2}I \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

par une linéarisation au voisinage de E_1

$$U_t = D\Delta U + L(b)U, \quad (3.23)$$

sous les conditions aux bords on pose

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \cos(\frac{n}{L}x)e^{\lambda x},$$

on sait que $(\frac{n}{L})^2$ sont des valeurs propres de $-\Delta$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$D\Delta + J(b) = \begin{pmatrix} -m + aS_1 + b\sqrt{I_1} - d_1(\frac{n}{L})^2 & 0 & 0 \\ -aS_1 & -\frac{rS_1}{K} - d_2(\frac{n}{L})^2 & -\frac{\beta S_1}{2\sqrt{I_1}} \\ -b\sqrt{I_1} & \beta\sqrt{I_1} & -\frac{\mu}{2} - d_3(\frac{n}{L})^2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

soit

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{rS_1}{K} - (\frac{n}{L})^2 b_2 & -\frac{\beta S_1}{2\sqrt{I_1}} \\ \beta\sqrt{I_1} & -\frac{\mu}{2} - (\frac{n}{L})^2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\det J > 0$ et $tr J < 0$ alors les valeurs propres de J sont strictement négatives, et par conséquent une bifurcation peut apparaître si $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} - (\frac{n}{L})^2 b_3 = 0$

$$\begin{aligned} -m + aS_1 + b\sqrt{I_1} - (\frac{n}{L})^2 b_3 &= 0 \\ -m + \frac{akr\mu}{\beta^2 k + r\mu} + \frac{br\beta k}{\beta^2 k + r\mu} - (\frac{n}{L})^2 b_3 &= 0 \\ -(m + (\frac{n}{L})^2 b_3)(\beta^2 k + r\mu) + ark\mu + brk\beta &= 0 \\ -m\beta^2 k - mr\mu - (\frac{n}{L})^2 b_3 \beta^2 k - (\frac{n}{L})^2 b_3 r\mu + ark\mu + rk\beta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^{*'}(n) &= \frac{\frac{2n}{L^2} b_3 \mu r (-m\beta^2 - (\frac{n}{L})^2 b_3 \beta^2 + r\beta + ar\mu) + \frac{2n}{L^2} b_3 \beta^2 ((\frac{n}{L})^2 b_3 \mu r + mr\mu)}{(-m\beta^2 - (\frac{n}{L})^2 b_3 \beta^2 + r\beta + ar\mu)^2} \\ &= \frac{2n - b_3 \mu r m \beta^2 - b_3^2 \mu r (\frac{n}{L})^2 \beta^2 + b_3 \mu r (r\beta + ar\mu) + \beta^2 (\frac{n}{L})^2 b_3^2 \mu r + b_3 \beta^2 mr\mu}{L^2 (-m\beta^2 - (\frac{n}{L})^2 b_3 \beta^2 + r\beta + ar\mu)^2} \\ &= \frac{2n}{L^2} \frac{b_3 \mu r (r\beta + ar\mu)}{(-m\beta^2 - (\frac{n}{L})^2 b_3 \beta^2 + r\beta + ar\mu)^2} > 0 \end{aligned}$$

et $k^*(n)$ est strictement croissante en fonction de n .

LEMME 3.2. • Si $-m\beta^2 + r\beta + ar\mu > 0$ il existe $N^* = \left[L \sqrt{\frac{-m\beta^2 + r\beta + ar\mu}{b_3 \beta^2}} \right]$ tel que pour $0 < n < N^*$ on a :

-Si $k > k^*(0)$ alors E_1 est instable

-Si $k < k^*(0)$ alors E_1 est stable

• Si $-m\beta^2 + r\beta + ar\mu < 0$ alors E_1 est localement asymptotiquement stable

Démonstration. * Si $-m\beta^2 + r\beta + ar\mu > 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} -m\beta^2 - (\frac{n}{L})^2 b_3 \beta^2 + r\beta + ar\mu = -\infty$ et $-m\beta^2 - (\frac{n}{L})^2 b_3 \beta^2 + r\beta + ar\mu$, est strictement décroissante en fonction de n , de plus il existe un N^* tel que pour tout $n > N^*$ on a $-m\beta^2 - (\frac{n}{L})^2 b_3 \beta^2 + r\beta + ar\mu < 0$; ce qui signifie que $k^*((\frac{n}{L})^2) < 0$ dans ce cas pour tout $k > 0$ on a $k > k^*((\frac{n}{L})^2)$ avec la condition $-m\beta^2 - (\frac{n}{L})^2 b_3 \beta^2 + r\beta + ar\mu < 0$ on trouve $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} - (\frac{n}{L})^2 b_3 < 0$ pour tout $n > N^*$.

et N^* vérifie la condition

$$-m\beta^2 - (\frac{N^*}{L})^2 b_3 \beta^2 + r\beta + ar\mu = 0 \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} -m\beta + r\beta + ar\mu &= 2\left(\frac{N^*}{L}\right)^2 b_3\beta^2 \\ \frac{-m\beta + r\beta + ar\mu}{b_3\beta^2} &= \left(\frac{N^*}{L}\right)^2 \\ N^* &= L\sqrt{\frac{-m\beta + r\beta + ar\mu}{b_3\beta^2}} \end{aligned}$$

puisque $N^* \in \mathbb{N}$ alors $N^* = \left\lceil L\sqrt{\frac{-m\beta + r\beta + ar\mu}{b_3\beta^2}} \right\rceil$

-Si $k > k^*(n)$ por un certain n alors E_1 est instable

-si $k < k^*(0)$ por tout $0 < n < n^*$ alors E_1 est stable

Du fait que $k^*(n)$ est strictement croissante en fonction de n $k^*(0) \leq k^*(n)$

* Si $-m\beta^2 + r\beta + ar\mu < 0$ alors $k^*(n) < 0$ alors pour tout $k > 0$ on a $k^*(n) < k$ alors E_1 est stable □

Analyse de la stabilité de E^*

On peut écrire le système (3.16) sous la forme :

$$U_t = D\Delta U + J^*(k) + F(U), \tag{3.26}$$

avec

$$J^*(k) = \begin{pmatrix} 0 & aP^* & -\frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -aS^* & -\frac{rS^*}{K} & -\frac{\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -b\sqrt{I^*} & \beta\sqrt{I^*} & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & d_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ ,0 & 0 & d_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

et

$$F(U) = \begin{pmatrix} -mP + aPS + bP\sqrt{I} - aP^*S + \frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}}I \\ -\beta S\sqrt{I} + rS(1 - \frac{S}{k}) - aPS + aS^*P + \frac{rS^*}{K}S + \frac{\beta S^*}{2\sqrt{I^*}}I \\ -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} + b\sqrt{I^*}P - \beta\sqrt{I^*}S + \frac{\mu}{2}I. \end{pmatrix}$$

Par une linéarisation du système autour de E_1 on trouve :

$$U_t = D\Delta U + J^*(k)U, \quad (3.27)$$

et on cherche des solutions sous la forme

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \tilde{a}_n \\ \tilde{b}_n \\ \tilde{c}_n \end{pmatrix} \cos\left(\frac{n}{L}x\right)e^{\lambda x},$$

donc $(\frac{n}{L})^2$ est une valeur propre de $-\Delta$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

L'équation caractéristique :

Maintenant on va calculer la matrice $D\Delta + J^*(b)$

$$D\Delta + J^*(b) = \begin{pmatrix} -d_1(\frac{n}{L})^2 & aP^* & -\frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -aS^* & -\frac{rS^*}{K} - d_2(\frac{n}{L})^2 & -\frac{\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -b\sqrt{I^*} & \beta\sqrt{I^*} & -\frac{\mu}{2} - d_3(\frac{n}{L})^2 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

On cherche les valeurs propres de la matrice (3.28)

$$D\Delta + J^*(b) - \lambda I = \begin{pmatrix} -d_1(\frac{n}{L})^2 - \lambda & aP^* & -\frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -aS^* & -\frac{rS^*}{K} - d_2(\frac{n}{L})^2 - \lambda & -\frac{\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -b\sqrt{I^*} & \beta\sqrt{I^*} & -\frac{\mu}{2} - d_3(\frac{n}{L})^2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \det(D\Delta + J^*(b) - \lambda I) &= (-d_1(\frac{n}{L})^2 - \lambda) \begin{vmatrix} -\frac{rS^*}{K} - d_2(\frac{n}{L})^2 - \lambda & \frac{-\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} \\ \beta\sqrt{I^*} & -\frac{\mu}{2} - d_3(\frac{n}{L})^2 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &\quad - aP^* \begin{vmatrix} -aS^* & \frac{-\beta S^*}{2\sqrt{I^*}} \\ -b\sqrt{I^*} & -\frac{\mu}{2} - d_3(\frac{n}{L})^2 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &\quad - \frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} \begin{vmatrix} -aS^* & -\frac{rS^*}{K} - d_2(\frac{n}{L})^2 - \lambda \\ -b\sqrt{I^*} & \beta\sqrt{I^*} \end{vmatrix} \\
 &= (-d_1(\frac{n}{L})^2 - \lambda) [(\frac{rS^*}{K} + d_2(\frac{n}{L})^2 + \lambda)(\frac{\mu}{2} + d_3(\frac{n}{L})^2 + \lambda) + \frac{\beta^2 S^*}{2}] - aP^* [aS^*(\frac{\mu}{2} + d_3(\frac{n}{L})^2 + \lambda) \\
 &\quad - \frac{b\beta^2 S^*}{2}] + \frac{bP^*}{2\sqrt{I^*}} [(\frac{rS^*}{K} + d_2(\frac{n}{L})^2 + \lambda)b\sqrt{I^*} + a\beta\sqrt{I^*}S^*] \\
 &= (-d_1(\frac{n}{L})^2 - \lambda) [(\frac{rS^*}{K} + d_2(\frac{n}{L})^2)(\frac{\mu}{2} + d_3(\frac{n}{L})^2) + \lambda(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)(\frac{n}{L})^2) + \lambda^2 + \frac{\beta^2 S^*}{2}] \\
 &\quad - aP^* [aS^*(\frac{\mu}{2} + d_3(\frac{n}{L})^2) + aS^*\lambda - \frac{b\beta^2 S^*}{2}] + \frac{b^2 P^*}{2} (\frac{rS^*}{K} + d_2(\frac{n}{L})^2) + \frac{b^2 P^*}{2} \lambda + \frac{1}{2} ab\beta P^* S^* \\
 &= -d_1(\frac{n}{L})^2 (\frac{rS^*}{K} + d_2(\frac{n}{L})^2) (\frac{\mu}{2} + d_3(\frac{n}{L})^2) - \lambda d_1(\frac{n}{L})^2 (\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)(\frac{n}{L})^2) - d_1(\frac{n}{L})^2 \lambda^2 \\
 &\quad - \lambda (\frac{rS^*}{K} + d_2(\frac{n}{L})^2) (\frac{\mu}{2} + d_3(\frac{n}{L})^2) - \lambda^2 (\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)(\frac{n}{L})^2) - \lambda^3 - \lambda \frac{\beta^2 S^*}{2} - a^2 S^* P^* \lambda \\
 &\quad - aP^* S^* (a\frac{\mu}{2} + ad_3(\frac{n}{L})^2 - \frac{b\beta}{2}) + \frac{1}{2} ab\beta P^* S^* + \frac{b^2 P^*}{2} (\frac{rS^*}{K} + d_2(\frac{n}{L})^2) + \frac{b^2 P^*}{2} \lambda \\
 &= -\lambda^3 - \lambda^2 [\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_1 + d_2 + d_3)(\frac{n}{L})^2] - \lambda [(\frac{rS^*}{K} + d_2(\frac{n}{L})^2) (\frac{\mu}{2} + d_3(\frac{n}{L})^2) \\
 &\quad + d_1(\frac{n}{L})^2 (\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)(\frac{n}{L})^2) + a^2 S^* P^* + \frac{\beta^2 S^*}{2} - \frac{b^2 P^*}{2}] \\
 &\quad - [d_1(\frac{n}{L})^2 (\frac{rS^*}{K} + d_2(\frac{n}{L})^2) (\frac{\mu}{2} + d_3(\frac{n}{L})^2) + aP^* S^* (a\frac{\mu}{2} + ad_3(\frac{n}{L})^2 - b\beta) \\
 &\quad - \frac{b^2 P^*}{2} (\frac{rS^*}{K} + d_2(\frac{n}{L})^2)]
 \end{aligned}$$

on pose :

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= d_1\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)\left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2 + aP^*S^*\left(a\frac{\mu}{2} + ad_3\left(\frac{n}{L}\right)^2 - b\beta\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{b^2P^*}{2}\left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)\right) \\
\tilde{a}_1 &= \left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)\left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) + d_1\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + a^2S^*P^* + \frac{\beta^2S^*}{2} - \frac{b^2P^*}{2} \\
\tilde{a}_2 &= \frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.29}$$

donc les valeurs propres de la matrice (3.28) sont des solutions de l'équation

$$\lambda^3 + \tilde{a}_2\lambda^2 + \tilde{a}_1\lambda + \tilde{a}_0 = 0, \tag{3.30}$$

dans ce cas pour la deuxième fois on suppose $\tilde{a}_0 > 0, \tilde{a}_1 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en particulier pour $n = 0$ il vient que $a_0 > 0, a_1 > 0$ (car pour $n = 0$ on a $\tilde{a}_0 = a_0, \tilde{a}_1 = a_1, \tilde{a}_2 = a_2$)

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_2\tilde{a}_1 &= \left[\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right]\left[\left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)\left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)\right. \\
&\quad \left.+ d_1\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) + a^2S^*P^* + \frac{\beta^2S^*}{2} - \frac{b^2P^*}{2}\right] \\
&= (d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)\left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + (d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2d_1\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + (d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(a^2S^*P^* + \frac{\beta^2S^*}{2} - \frac{b^2P^*}{2}\right) + \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)\left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right)d_1\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) + \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right)\left(a^2S^*P^* + \frac{\beta^2S^*}{2} - \frac{b^2P^*}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_1 &= \tilde{a}_2\tilde{a}_1 - \tilde{a}_0 = (d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)\left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + (d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2d_1\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + (d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(a^2S^*P^* + \frac{\beta^2S^*}{2} - \frac{b^2P^*}{2}\right) + \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)\left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right)d_1\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) + \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right)\left(a^2S^*P^* + \frac{\beta^2S^*}{2} - \frac{b^2P^*}{2}\right) \\
&\quad - d_1\left(\frac{n}{L}\right)^2\left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)\left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) - aP^*S^*\left(a\frac{\mu}{2} + ad_3\left(\frac{n}{L}\right)^2 - b\beta\right) + \frac{b^2P^*}{2}\left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2 d_1 \left(\frac{n}{L}\right)^2 \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2 \left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) + \frac{1}{2}(d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2 \beta^2 S^* \\
&\quad + \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right) d_1 \left(\frac{n}{L}\right)^2 \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right) \left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) + a^2 S^{*2} P^* \frac{r}{K} - \frac{b^2 P^*}{2} \left(\frac{\mu}{2} + (d_1 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \beta^2 S^{*2} \left(\frac{r}{k} + \frac{1}{2} \mu\right) + ab\beta S^* P^*
\end{aligned}$$

E^* est stable si $\tilde{a}_0 > 0$, $\tilde{a}_1 > 0$ et $\tilde{b}_1 > 0$ ie

$$\begin{aligned}
&(d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2 d_1 \left(\frac{n}{L}\right)^2 \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2 \left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) + \frac{1}{2}(d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2 \beta^2 S^* \\
&\quad + \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right) d_1 \left(\frac{n}{L}\right)^2 \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2} + (d_2 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \\
&\quad + \left(\frac{rS^*}{K} + \frac{\mu}{2}\right) \left(\frac{rS^*}{K} + d_2\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) \left(\frac{\mu}{2} + d_3\left(\frac{n}{L}\right)^2\right) + a^2 S^{*2} P^* \frac{r}{K} \\
&\quad + \frac{1}{2} \beta^2 S^{*2} \left(\frac{r}{k} + \frac{1}{2} \mu\right) + ab\beta S^* P^* > \frac{b^2 P^*}{2} \left(\frac{\mu}{2} + (d_1 + d_3)\left(\frac{n}{L}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Analyse de la bifurcation

Dans ce cas on va utiliser la formule de CARDAN pour résoudre l'équation (3.30). Par un changement de variable on pose $\lambda = \tilde{X} - \frac{\tilde{a}_2}{3}$

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{X} - \frac{\tilde{a}_2}{3}\right)^3 &= \tilde{X}^3 - \tilde{a}_2 \tilde{X} + \frac{\tilde{a}_2^2}{3} \tilde{X} - \frac{\tilde{a}_2^3}{27} \\
\tilde{a}_2 \left(\tilde{X} - \frac{\tilde{a}_2}{3}\right)^2 &= \tilde{a}_2 \tilde{X}^2 + \frac{\tilde{a}_2^2}{9} - 2 \frac{\tilde{a}_2^2}{3} \tilde{X}
\end{aligned}$$

$$\lambda^3 + \tilde{a}_2 \lambda^2 + \tilde{a}_1 \lambda + \tilde{a}_0 = \left(\tilde{X} - \frac{\tilde{a}_2}{3}\right)^3 + \tilde{a}_2 \left(\tilde{X} - \frac{\tilde{a}_2}{3}\right)^2 + \tilde{a}_1 \left(\tilde{X} - \frac{\tilde{a}_2}{3}\right) + \tilde{a}_0 = 0$$

$$\tilde{X}^3 - \tilde{a}_2 \tilde{X} + \frac{\tilde{a}_2^2}{3} \tilde{X} - \frac{\tilde{a}_2^3}{27} + \tilde{a}_2 \tilde{X}^2 + \frac{\tilde{a}_2^2}{9} - 2 \frac{\tilde{a}_2^2}{3} \tilde{X} + \tilde{a}_1 \tilde{X} - \tilde{a}_1 \frac{\tilde{a}_2}{3} + \tilde{a}_0 = 0$$

$$\tilde{X}^3 + \tilde{X} \left(-\frac{\tilde{a}_2^2}{3} + \tilde{a}_1\right) + \tilde{a}_0 - \frac{\tilde{a}_2^3}{27} + \frac{\tilde{a}_2^2}{9} - \tilde{a}_1 \frac{\tilde{a}_2}{3} = 0 \quad (3.31)$$

alors

$$\begin{aligned}
\tilde{p} &= -\frac{\tilde{a}_2^2}{3} + \tilde{a}_1 \\
\text{et } \tilde{q} &= \tilde{a}_0 - \frac{\tilde{a}_2^3}{27} + \frac{\tilde{a}_2^2}{9} - \tilde{a}_1 \frac{\tilde{a}_2}{3}
\end{aligned}$$

on pose $\tilde{X} = \tilde{u} + \tilde{v}$ donc l'équation (3.31) devien

$$\tilde{u}^3 + \tilde{v}^3 + (3\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{p})(\tilde{u} + \tilde{v}) + \tilde{q} = 0$$

on choisit $\tilde{u}\tilde{v} = -\frac{\tilde{p}}{3}$ alors $\tilde{u}^3 + \tilde{v}^3 = -\tilde{q}$

$$\begin{cases} \tilde{u}^3 + \tilde{v}^3 = -\tilde{q} \\ \tilde{u}^3\tilde{v}^3 = -\frac{\tilde{p}}{27} \end{cases}$$

on pose $\tilde{u}_1 = \tilde{u}^3$ et $\tilde{v}_1 = \tilde{v}^3$ il suffit de trouver deux nombres u_1, v_1 dont la somme est égale à $-\tilde{q}$ et dont

le produit est égal à $-\frac{\tilde{p}}{27}$ la solution du système est la solution de l'équation de variable ξ

$$\xi^2 + \tilde{q}\xi - \frac{\tilde{p}}{27} = 0$$

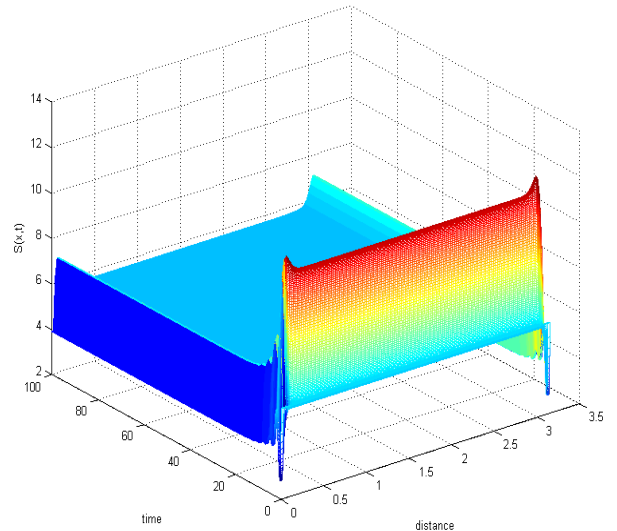
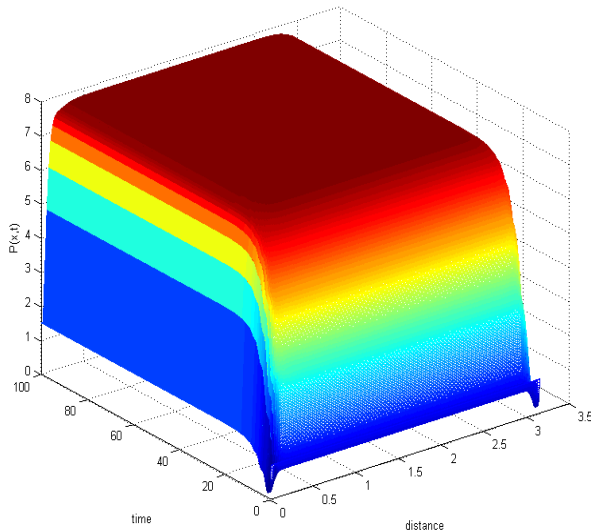
$$\Delta = 27\tilde{q}^2 + 4\tilde{p}^3 = 27\left(\tilde{a}_0 - \frac{\tilde{a}_2^3}{27} + \frac{\tilde{a}_2^2}{9} - \tilde{a}_1\frac{\tilde{a}_2}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{\tilde{a}_2^2}{3} + \tilde{a}_1\right)^3$$

-Si $\Delta > 0$ donc on a une racine réelle et 2 racines imaginaires conjugués.

-Si $\Delta = 0$, on a une racine réelle simple et une racine réelle double.

-Si $\Delta < 0$, on a 3 racine réelles.

LEMME 3.3. *La bifurcation se produit si $Re(\lambda_1) = 0$ et $\Delta > 0$, et par suite on a une bifurcation de hopf (car les valeur propres traversent l'axe des imaginaires)*



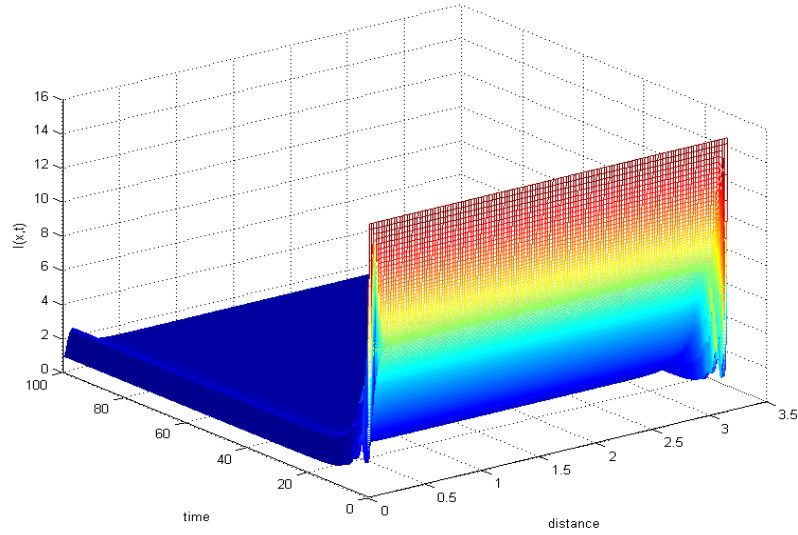
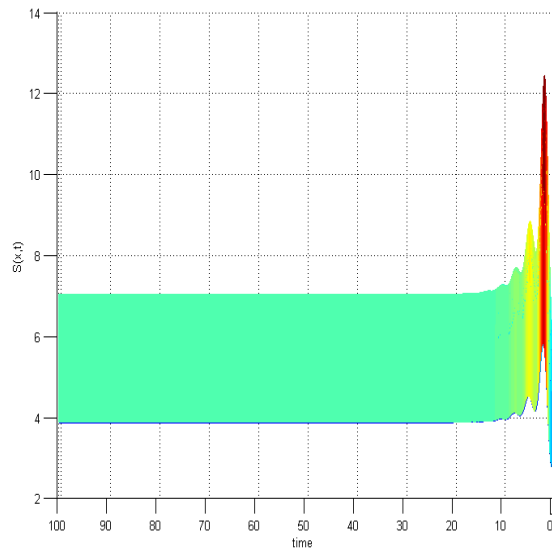
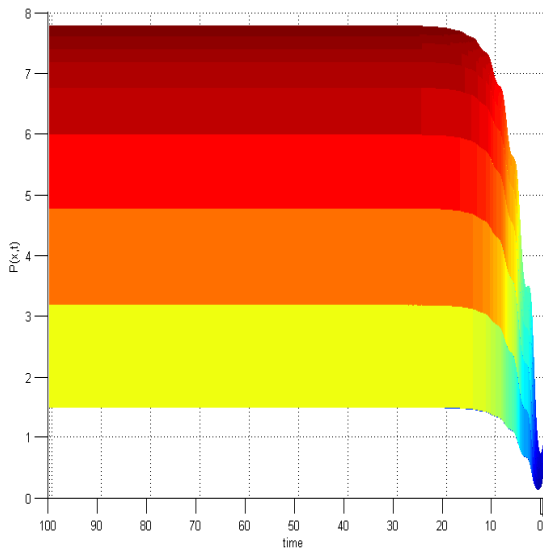


Figure 3.6 :Simulation numérique de système (3.16) avec la présence des solutions périodiques non homogènes pour $a = 0.29$; $L = 1$; $b = 0.025$; $\beta = 0.8$; $m = 1.35$; $r = 3.2$; $\mu = 2.2$; $k = 5000$; et $E_1 = (0, 5.9928, 15.9617)$ et $E^* = (25.8887, 0.0132, 28.9948)$ et $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} = 1.3867$ alors E_1 est instable et E^* n'existe pas car $akm\beta + bmr - abkr = 407.08$ et $a^2k\mu - 2abk\beta - b^2r = -75.6$ (contradiction avec les conditions (3.1) et (2.15)) avec les conditions initiales $P_0 = 1$ et $S_0 = 6$ et $I_0 = 16$



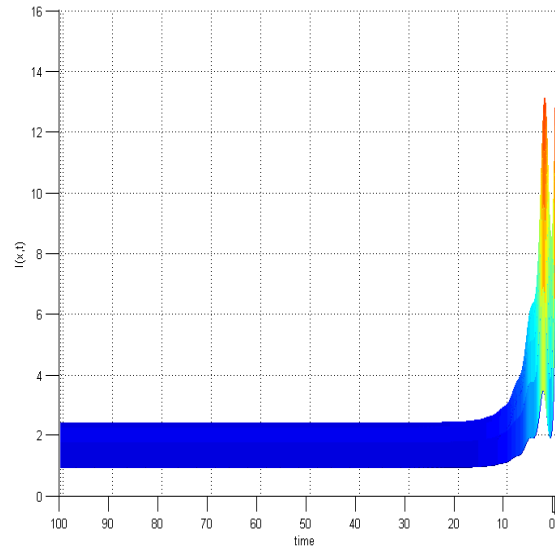
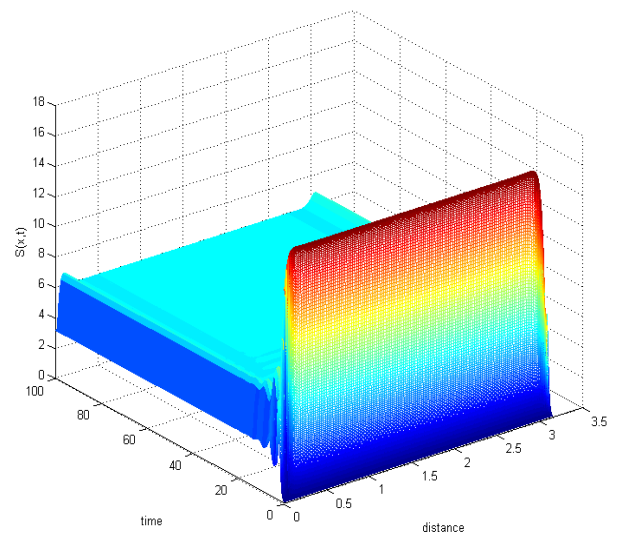
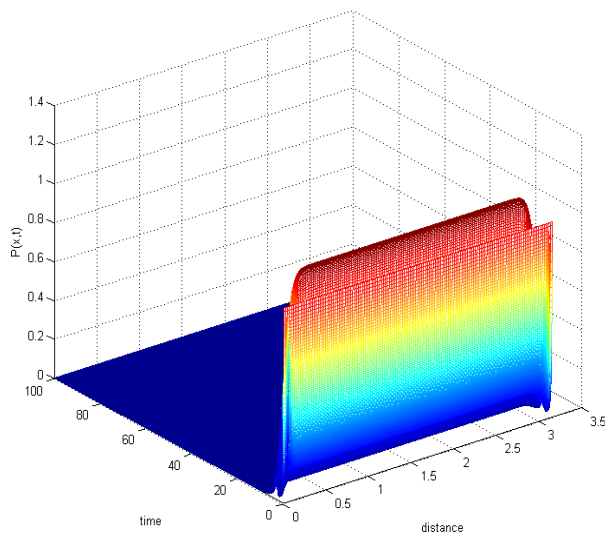


Figure 3.7 :Projection sur l'axe des x pour les mêmes conditions initiales précédentes



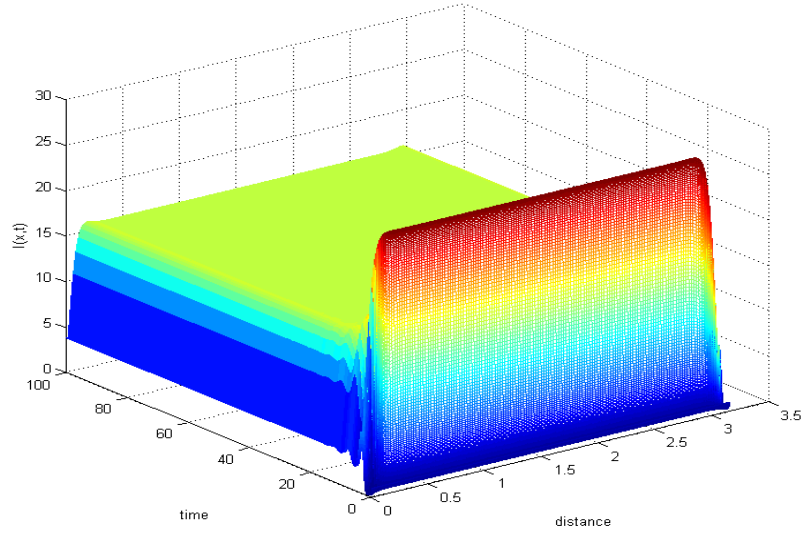
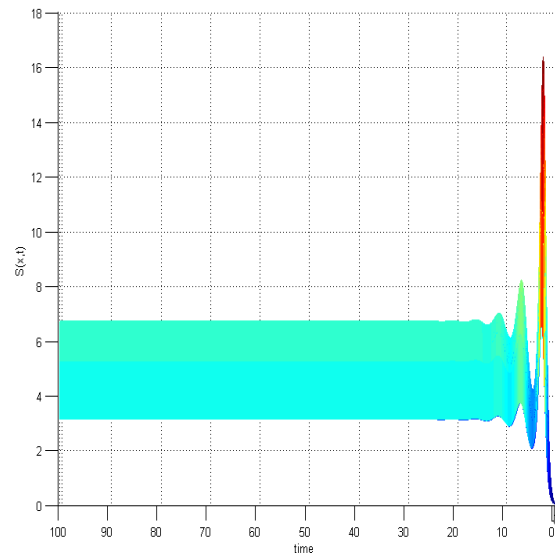
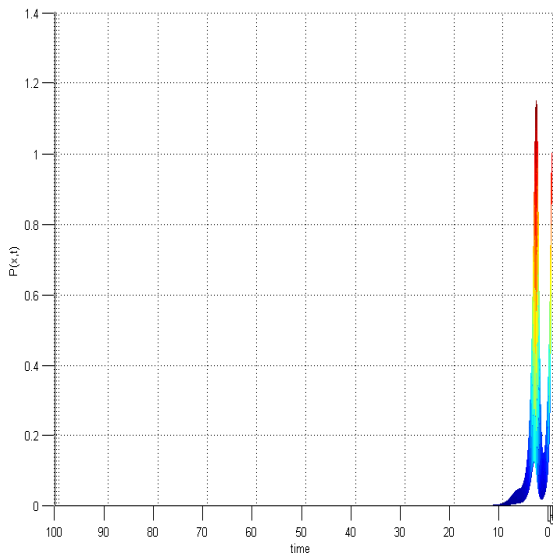


Figure 3.8 : Simulation numérique de système (3.16) avec les valeurs $a = 0.29$; $b = 0.25$; $L = 1$; $\beta = 0.8$; $m = 1.35$; $r = 3.2$; $\mu = 1.2$; $k = 500$; et $E_1 = (0, 10.9759, 15.9298)$ et $E^* = (7.7660, 5.6727, 1.3931)$ et $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} = 1.9328$ alors E_1 est instable et E^* existe et il est stable $a_0 = 2.6677$; $a_1 = 4.1246$; $a_2 = 1.1031$; $b_1 = 1.8820$ avec les conditions initiales $P_0 = 1$ et $S_0 = 1$ et $I_0 = 1$



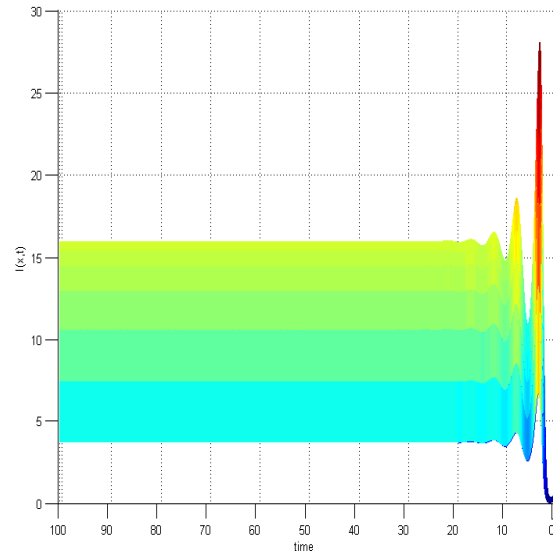
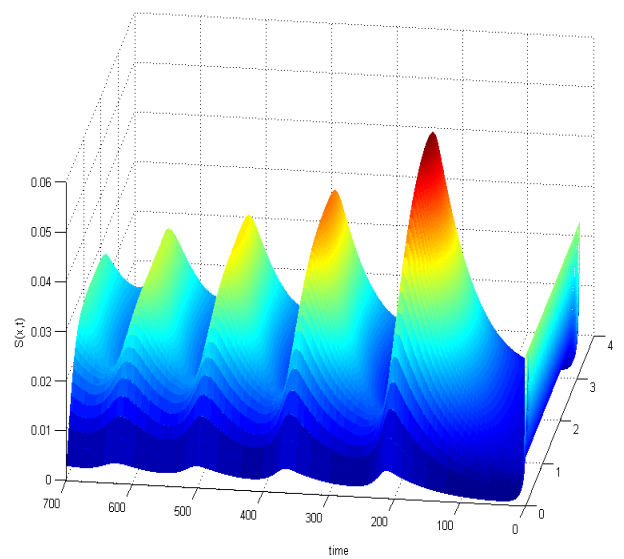
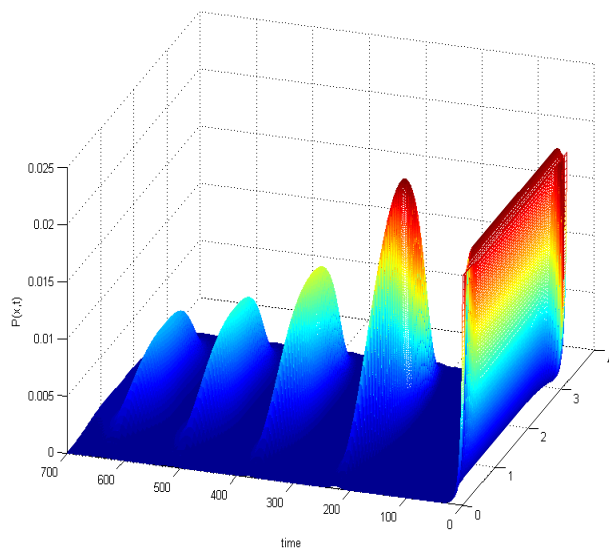


Figure 3.9 : Projection sur l'axe Ox, OZ pour les mêmes conditions initiales précédentes



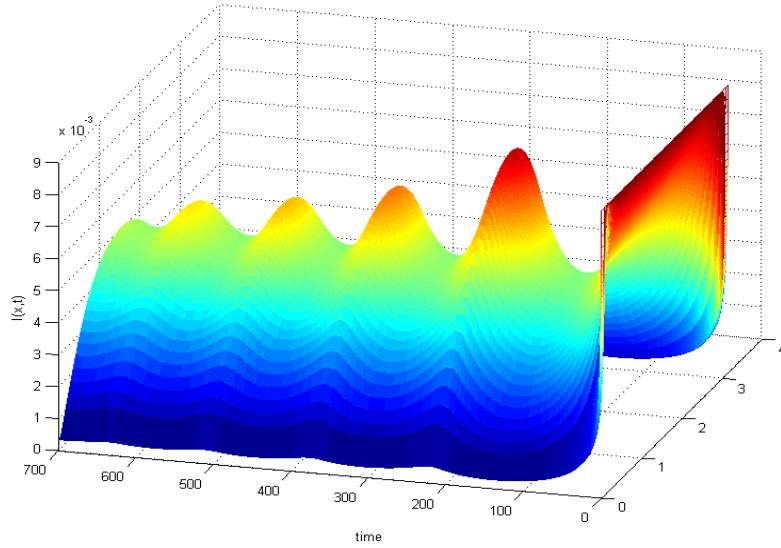
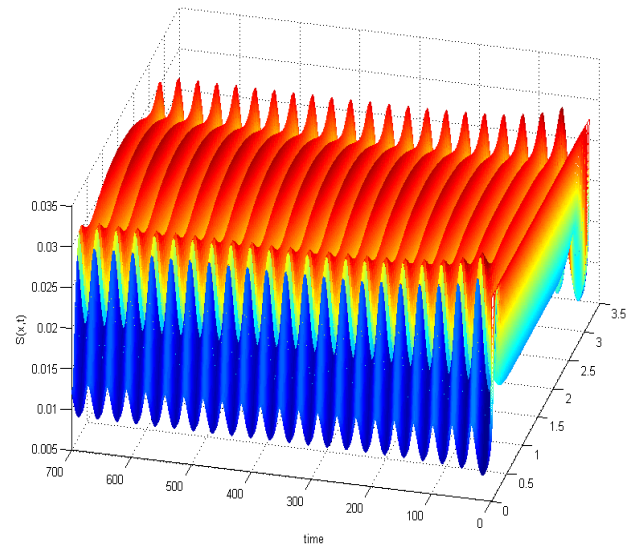
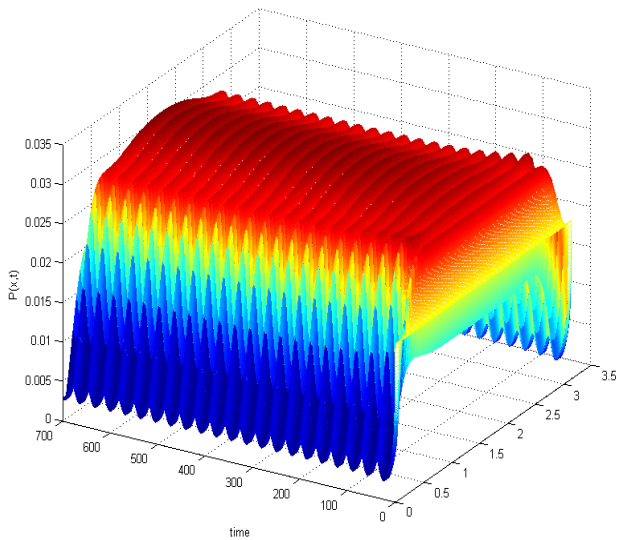


Figure 3.10 : Simulation numérique de système (3.16) avec la présence des oscillation pour les trois populations pour les paramètres $a = 9.4$; $b = 0.025$; $L = 1$; $\beta = 0.04$; $m = 0.2$; $r = 0.02$; $\mu = 0.01$; $k = 50$; et $E_1 = (0, 12.4688, 24.8755)$ et $E^* = (0.0212, 0.0373, 0.0096)$ et $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} = 116.9817$ alors E_1 est instable et E^* existe et il est stable $a_0 = 0.0035$; $a_1 = 0.0699$; $a_2 = 0.05$; $b_1 = 8.7041 \times 10^{-6}$ avec les conditions initiales $P_0 = 0.02$ et $S_0 = 0.03$ et $I_0 = 0.009$.



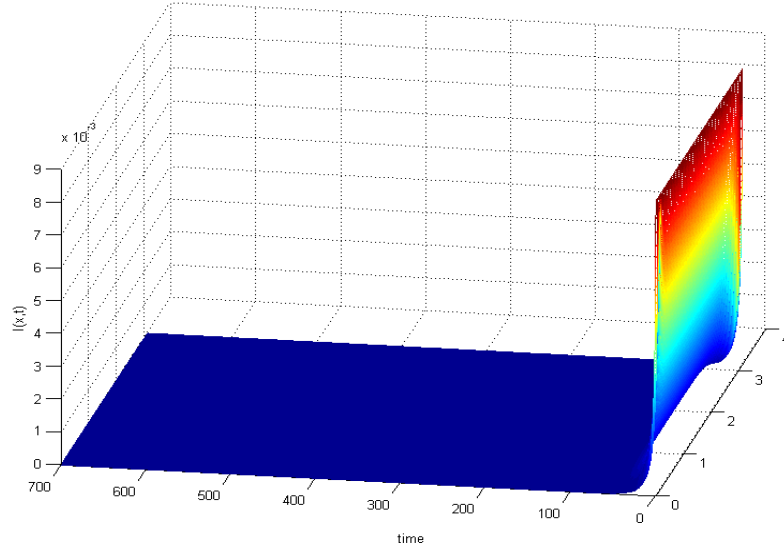


Figure 3.11 : Simulation numérique de système (3.16) avec la présence des solutions périodiques non homogènes pour les trois populations pour les paramètres $a = 9.4$; $b = 0.025$; $L = 1$; $\beta = 0.04$; $m = 0.2$; $r = 0.2$; $\mu = 0.1$; $k = 50$; et $E_1 = (0, 12.4688, 24.8755)$ et $E^* = (0.0212, 0.0373, 0.0096)$ et $-m + aS_1 + b\sqrt{I_1} = 116.9817$ alors E_1 est instable et E^* existe et il est stable $a_0 = 0.0035$; $a_1 = 0.0699$; $a_2 = 0.05$; $b_1 = 8.7041 \times 10^{-6}$ avec les conditions initiales $P_0 = 0.02$ et $S_0 = 0.03$ et $I_0 = 0.009$.

3.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un modèle proie-prédateur avec la présence d'une infection des proies qui a pour réaction un comportement de troupeau pour la population des proies infectées. Notre étude s'est focalisée sur l'analyse asymptotique des états d'équilibre en la présence et en l'absence de diffusion et on a considéré les deux cas toxique et non toxique.

Pour l'analyse de bifurcation on a choisi le paramètre de la capacité limite comme valeur de bifurcation et on a discuté suivant les valeurs de ce dernier de la stabilité des états d'équilibre.

Chapitre 4

Comportement de troupeau dans un modèle proie-prédateur avec diffusion spatiale

Ce chapitre a fait l'objet de la publication [\[20\]](#)

4.1 Introduction

Nous restons toujours dans la même thématique que les deux chapitres précédents, à savoir un modèle proie prédateur, avec un comportement de troupeau des proies ; sauf que dans ce chapitre nous allons considérer l'interaction entre proies et prédateurs sous une nouvelle forme, par le biais d'une fonction réponse de type Holling "modifiée". Nous allons aussi pousser l'étude jusqu'à traiter des phénomènes que nous n'avons pas rencontré auparavant dans cette thèse, ou que nous avons délibérément évité, tels que la bifurcations de type Turing-Hopf, ainsi que l'instabilité de Turing (lorsqu'une diffusion spatiale est considérée).

Considérons le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = rR\left(1 - \frac{R}{k}\right) - \frac{aRP}{1+b\sqrt{R}+cR}, \\ \frac{dP}{dt} = -mP + \frac{eaRP}{1+b\sqrt{R}+cR}, \end{cases} \quad (4.1)$$

où $R(t)$ et $P(t)$ sont respectivement les densités des proies et des prédateurs, r est le taux de reproduction de la population de proies, k est la capacité limite pour les proies, e est le taux de conversion de la biomasse des proies en biomasse des prédateurs, m est le taux de mortalité naturelle des prédateurs, b et c sont les coefficient de recherche du prédateur pour les proies, a est le taux de prédation, avec $\frac{a}{c}$ est la quantité maximale des proies pouvant être capturée par un prédateur. Le terme \sqrt{R} a la même interprétation faite dans les chapitre précédents, un comportement grégaire des proies. Nous renvoyons le lecteur désireux de se documenter plus amplement sur ce sujet, aux références suivantes [1, 11, 54, 65, 61, 83].

Lorsqu'un comportement de troupeau est considéré, plusieurs types de fonctions réponse ont été proposées, par exemple en [11, 78] les auteurs utilisent la fonction d'interaction $h_1(R, P) = a\sqrt{R}P$ qui n'est autre qu'une fonction de Holling I, en la présence de comportement troupeau de proies, dans [55] les auteurs ont proposé la fonction d'interaction $h_2(R, P) = \frac{a\sqrt{R}P}{1+b\sqrt{R}}$ qui est la fonction de Holling II où b est le taux de recherche de P pour R . Nous allons pour notre part, utiliser dans ce chapitre la fonction d'interaction de Holling III généralisée [28, 74, 87] qui est définie par $h_3(R, P) = \frac{aR^2P}{1+bR+cR^2}$ et nous allons y inclure le comportement grégaire des proies de la façon suivante $h_4(R, P) = h_3(\sqrt{R}, P) = \frac{aRP}{1+b\sqrt{R}+cR}$.

Exemple 1 : Si nous mettons $b = 0$, la fonction de interaction devient une fonction d'interaction de Holling II qui signifie $\frac{aRP}{1+cR}$, comme on peut le voir comme une fonction d'interaction de Holling III modifiée en présence de comportement de troupeau $h_5(R, P) = \frac{aR^2P}{1+cR^2}$ (est la fonction d'interaction Holling III) et en présence du comportement du troupeau $h_5(R, P)$ devient $h_5(R, P) = h_4(\sqrt{R}, P) = \frac{aRP}{1+cR}$.

Exemple 2 : Lorsque $b = 0$ et $c = 0$ la fonction $h_4(R, P)$ devient la fonction d'interaction du

Holling I et sans comportement de troupeau $h_7(R, P) = aRP$.

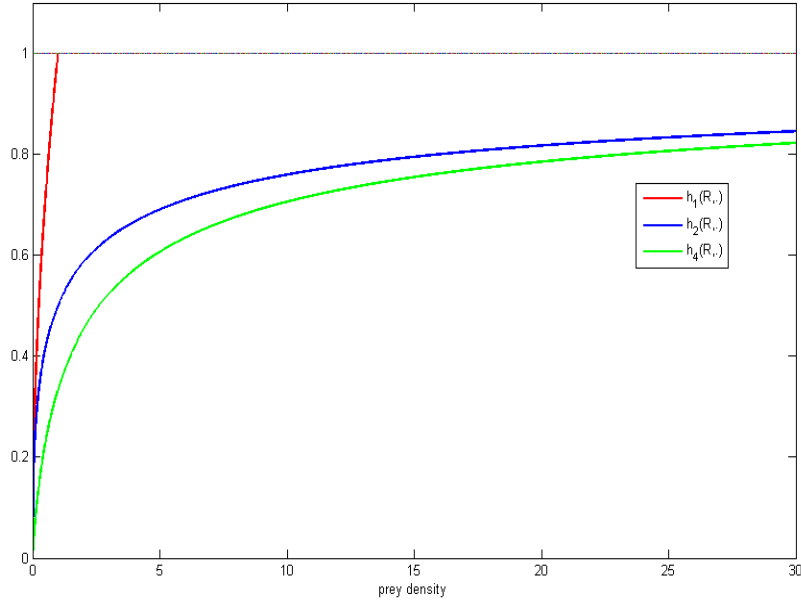


Fig 4.1 : Trois types des fonctions d'interaction en présence du comportement de troupeau pour $a = 0.5$, $b = 0.5$, $c = 0.5$.

Suite à la discussion ci-dessus, le système (4.1) devient en présence d'une diffusion spatiale :

$$\begin{cases} R_t(x, t) - d_1 R_{xx}(x, t) = rR(x, t) \left(1 - \frac{R(x, t)}{k}\right) - \frac{aR(x, t)P(x, t)}{1 + b\sqrt{R(x, t)} + cR(x, t)} & x \in (0, L), \\ P_t(x, t) - d_2 P_{xx}(x, t) = -mP(x, t) + \frac{eaR(x, t)P(x, t)}{1 + b\sqrt{R(x, t)} + cR(x, t)} & t \geq 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

avec les conditions aux limites de Neumann :

$$\begin{cases} R_x(0, t) = R_x(L, t) = P_x(0, t) = P_x(L, t) = 0 & \forall t \geq 0 \\ R(x, 0) = R_0(x) \geq 0 & P(x, 0) = P_0(x) \geq 0 & x \in (0, L) \end{cases} \quad (4.3)$$

avec x est la distance couverte par P ou R , L est la distance maximale qui peut être couverte par une proie ou par un prédateur.

Les conditions aux limites de Neumann signifie que les populations considérées sont isolées, ou autrement dit que rien n'entre ni ne sort du domaine (il n'y a pas d'immigration).

4.2 Existence et positivité de la solution, bornitude de la solution, stabilité globale

Il est facile de vérifier que le système (4.2) a trois états d'équilibre $E_0 = (0, 0)$ et $E_1 = (k, 0)$ et $E^* = (R^*, P^*)$ (qui existe si et seulement si $k > R^*$ et $\frac{ae}{m} > c$) tel que

$$R^* = \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4(\frac{ae}{m} - c)}}{2(\frac{ae}{m} - c)} \right)^2 \quad (4.4)$$

et $P^* = \frac{er}{m}R^*(1 - \frac{R^*}{k}) > 0$

REMARQUE 4.1. *Il existe un quatrième état d'équilibre qui est toujours négatif.*

Pour l'existence d'une solution globale de (4.2) on a le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. *Pour $P_0(x) \geq 0$, $R_0(x) \geq 0$ et $R_0(x), P_0(x)$ non identiquement nuls, le système (4.2) a une solution unique $(R(x, t), P(x, t))$ telle que $0 < R(x, t) < R^*(t)$ et $0 < P(x, t) < P^*(t)$ pour $t > 0$ et $x \in (0, L)$ où $(R^*(t), P^*(t))$ est l'unique solution du système :*

$$\begin{cases} R_t = rR(x)(1 - \frac{R(x)}{k}) & t > 0, \\ P_t = -mP(x) + \frac{eaR(x)P(x)}{1 + b\sqrt{R(x)} + cR(x)} & t > 0, \\ R(0) = R_0^* = \sup_{x \in (0, L)} R_0(x), \quad P(0) = P_0^* = \sup_{x \in (0, L)} P_0(x). \end{cases} \quad (4.5)$$

De plus, nous avons $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup R(x, t) = k$ et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{L} \times \int_{\Omega} P(x, t) dx \leq \frac{m+r}{m} ek \quad (4.6)$$

REMARQUE 4.2. *Ce théorème montre l'existence et la bornitude de la solution.*

Démonstration. Notre système vérifie les conditions de quasimonotonie (voir par exemple PAO [46]), en effet f et g

$$\begin{aligned} f(R, P) &= rR(1 - \frac{R}{k}) - \frac{aRP}{1 + b\sqrt{R} + cR} \\ g(R, P) &= -mP + \frac{eaRP}{1 + b\sqrt{R} + cR} \end{aligned} \quad (4.7)$$

verifient la condition :

$$\begin{aligned} f_P &= -\frac{aR}{1 + b\sqrt{R} + cR} < 0 \\ g_R &= \frac{eaP}{(1 + b\sqrt{R} + cR)^2} > 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

D'autre part les fonctions f et g sont des fonctions Lipschitziennes ; ce qui signifie qu'il existe c_1, c_2 de sorte que pour des réels positifs R_1, R_2, P_1, P_2 on a :

$$\begin{aligned} |f(R_1, P_1) - f(R_2, P_2)| &\leq c_1(|R_1 - R_2| + |P_1 - P_2|) \\ |f(R_1, P_1) - f(R_2, P_2)| &\leq c_2(|R_1 - R_2| + |P_1 - P_2|) \end{aligned} \quad (4.9)$$

On peut déduire de (4.8) et (4.9) que f et g sont des fonctions quasi monotones dans \mathbb{R} (voir [46]) ; maintenant on pose $(R_2(x, t), P_2(x, t)) = (R^*(t), P^*(t))$ satisfaisant l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial R_2}{\partial t} - d_1 R_{2xx} - f(R_2, P_2) = 0 \geq 0 \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} - d_2 P_{2xx} - g(R_2, P_2) = 0 \geq 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

et $(R_1(x, t), P_1(x, t)) = (0, 0)$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial t} - d_1 R_{1xx} - f(R_1, P_1) = 0 \leq 0 \\ \frac{\partial P_1}{\partial t} - d_2 P_{1xx} - g(R_1, P_1) = 0 \leq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

et $0 \leq R_0(x) \leq R_0^*, 0 \leq P_0(x) \leq P_0^*$.

$(R_1(x, t), P_1(x, t))$ et $(R_2(x, t), P_2(x, t))$ sont respectivement appelés des sous et sur solutions du système (4.2) ; il est évident de voir que les fonctions f et g sont des fonctions lipchitziennes et homogènes i.e. on peut écrire $f(R_1, P) - f(R_2, P) \geq -c_1(R_1 - R_2)$ et $f(R, P_1) - f(R, P_2) \geq -c_1(P_1 - P_2)$ pour $R_1 > R_2$ et $P_1 > P_2$ où c_1 est la constante de Lipschitz de la fonction f et la même idée pour la fonction g ; alors on peut dire que toutes les conditions de la **Théorème 2.1** dans [46] sont vérifiées ce qui permet de conclure à l'existence globale de la solution du système (4.2) satisfaisant la condition $0 \leq R(x, t) \leq R^*(t)$ et $0 \leq P(x, t) \leq P^*(t)$ pour $t > 0$ et $x \in (0, L)$; par le principe de maximum fort on a $0 < R(x, t), 0 < P(x, t)$ pour $t > 0$ et $x \in (0, L)$ ce qui complète la première partie de la preuve on sait que $R(x, t) \leq R^*(t)$ et $P(x, t) \leq P^*(t)$ avec $R^*(t)$ est l'unique solution de l'équation $R_t = rR(x)(1 - \frac{R(x)}{k})$ et $R(0) = R_0^* > 0$

Il est facile de vérifier que $R^*(t) \rightarrow k$ quand $t \rightarrow +\infty$ donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $T_0 > 0$ tel que $R(x, t) \leq k + \varepsilon$ pour $t > T_0, x \in [0, L]$ ce qui donne $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup R(x, t) = k$.

maintenant on pose

$$\beta(t) = \int_0^L R(x, t) dx \quad \delta(t) = \int_0^L P(x, t) dx \quad (4.12)$$

et

$$w(t) = e\beta(t) + \delta(t) \quad (4.13)$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{dt} &= \int_0^L d_1 R_{xx} dx + \int_0^L \left[rR \left(1 - \frac{R}{k}\right) - \frac{aRP}{1 + b\sqrt{R} + cR} \right] dx \\ \frac{d\delta}{dt} &= \int_0^L d_2 P_{xx} dx + \int_0^L \left[-mP + \frac{eaRP}{1 + b\sqrt{R} + cR} \right] dx\end{aligned}\tag{4.14}$$

En utilisant la condition au bord, car sous les conditions de Neumann on a $\int_0^L P_{xx} dx = \int_0^L R_{xx} dx = 0$

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= e \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\delta}{dt} \\ &= -m\delta(t) + er \int_0^L R \left(1 - \frac{R}{k}\right) dx \\ &= -m(e\beta(t) + \delta(t)) + me\beta(t) + er \int_0^L R \left(1 - \frac{R}{k}\right) dx\end{aligned}\tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}&\leq -mw + me\beta(t) + er\beta(t), \\ &\leq -mw + e\beta(t)(m + r).\end{aligned}\tag{4.16}$$

De $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup R(x, t) = k$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) \leq Lk$ donc pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petits il exist $T > 0$ tel que

$$\frac{dw}{dt} \leq -mw + eLk(m + r),\tag{4.17}$$

et on sait que $w(t)$ est la solution de

$$\frac{dw}{dt} = -mw + eL(k + \varepsilon)(m + r),\tag{4.18}$$

et on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = \frac{m + r}{m} e(k + \varepsilon)L,\tag{4.19}$$

et en utilisant le principe de comparaison et (4.17) nous pouvons obtenir pour $T_2 > T_1$

$$\int_0^L P(x, t) dx = \delta(t) < w(t) \leq \frac{m + r}{m} e(k + \varepsilon)L + \varepsilon \quad t > T_2,\tag{4.20}$$

cela signifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{L} \times \int_0^L P(x, t) dx \leq \frac{m+r}{m} ek, \quad (4.21)$$

ce qui complète la preuve \square

Maintenant, on choisit la capacité limite de la population des proies, k comme paramètre de bifurcation, et on définit la matrice jacobienne du système (4.1) comme ceci :

$$J(R, P) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

avec

$$a_{11} = r \left(1 - \frac{2R}{k}\right) - aP \frac{1 + b\sqrt{R} + cR - R\left(\frac{b}{2\sqrt{R}} + c\right)}{(1 + b\sqrt{R} + cR)^2} \quad (4.23)$$

$$a_{12} = -\frac{aR}{1 + b\sqrt{R} + cR} < 0 \quad (4.24)$$

$$a_{21} = eaP \frac{1 + b\sqrt{R} + cR - R\left(\frac{b}{2\sqrt{R}} + c\right)}{(1 + b\sqrt{R} + cR)^2} > 0 \quad (4.25)$$

$$a_{22} = -m + \frac{eaR}{1 + b\sqrt{R} + cR} \quad (4.26)$$

et $D = \text{diag}(d_1, d_2)$

et considère l'espace fonctionnel

$$\chi = \left\{ U = (R, P)^T \in H^2(0, L) \mid \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0, L \right\} \quad (4.27)$$

Pour $U_1, U_2 \in \chi$ on considère le produit scalaire par $\langle U_1, U_2 \rangle = \int_0^L (R_1 R_2 + P_1 P_2) dx$

et la norme Hilbertienne associée χ notée par $\|\cdot\|_{2,2}$, on considère également le problème des valeurs propres associé :

$$\begin{cases} -\Phi'' = \mu \Phi & x \in (0, L) \\ \Phi'(0) = \Phi'(L) = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

qui a $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ ($n = 0, 1, \dots$) comme valeurs propres.

Nous recherchons la solution sous la forme :

$$U = \sum_{i=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{\lambda t} \quad (4.29)$$

REMARQUE 4.3. *L'équilibre E_0 est toujours instable.*

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2. *En l'absence de l'équilibre positif E^* (i.e. si $R_1^* > k$), l'équilibre $E_1 = (k, 0)$ est globalement asymptotiquement stable*

Démonstration. Le système linéarisé autour de l'équilibre $E_1 = (k, 0)$ est :

$$U_t = D\Delta U + J(k, 0) \quad (4.30)$$

avec $J(k, 0)$ est la matrice jacobienne de système (4.1). Les valeurs propres de la matrice

$$-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D + J(k, 0),$$

sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -r - d_1\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 < 0, \\ \lambda_2 &= -m + \frac{eak}{1 + b\sqrt{k} + ck} - d_2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$-m + \frac{eak}{(b + \sqrt{k})(c + \sqrt{k})} = 0$ est équivalent à $R^* = k$ ce qui signifie que $R_1^* > k$ alors $\lambda_2 < 0$ pour tout $n \geq 0$ et par suite $E_1 = (k, 0)$ est localement asymptotiquement stable pour $R_1^* > k$, et il est évident de voir que $k = \tilde{k}(n)$ sont les points de la bifurcation transcritique où \tilde{k} sont les solution de l'équation d'inconnue k :

$$(m + d_2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2) + b(m + d_2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2)\sqrt{k} + (cm + cd_2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - ae)k = 0. \quad (4.32)$$

Maintenant, on montre l'attraction globale de E_1 . De la preuve de **Théorème 2.1** dans [46], on peut définir respectivement la sur solution et la sous solution du système (4.2) avec $(R_1, P_1) = (k + \varepsilon, M)$ et $(R_2, P_2) = (\varepsilon, 0)$ où ε et M sont des constantes positives et ε est suffisamment petit ; et les suites monotones pour l'équation parabolique couplée définies dans [46] avec $(\overline{R}^{(m)}, \overline{P}^{(m)})$ and $(\underline{R}^{(m)}, \underline{P}^{(m)})$

pour $m = 1, 2, \dots$ telles que

$$\begin{cases} \bar{R}^{(m)} = \bar{R}^{(m-1)} + \frac{1}{c_2} f(\bar{R}^{(m-1)}, \underline{P}^{(m-1)}) \\ \bar{P}^{(m)} = \bar{P}^{(m-1)} + \frac{c_1}{c_2} g(\bar{R}^{(m-1)}, \bar{P}^{(m-1)}) \end{cases} \quad (4.33)$$

et

$$\begin{cases} \underline{R}^{(m)} = \underline{R}^{(m-1)} + \frac{1}{c_2} f(\underline{R}^{(m-1)}, \bar{P}^{(m-1)}) \\ \underline{P}^{(m)} = \underline{P}^{(m-1)} + \frac{c_1}{c_2} g(\underline{R}^{(m-1)}, \underline{P}^{(m-1)}) \end{cases} \quad (4.34)$$

avec $(\bar{R}^{(0)}, \bar{P}^{(0)}) = (1 + \varepsilon, M)$ et $(\underline{R}^{(0)}, \underline{P}^{(0)}) = (\varepsilon, 0)$.

de **lemme 2.1** dans [46] on a $(\bar{R}^{(m)}, \bar{P}^{(m)}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{P})$ et $(\underline{R}^{(m)}, \underline{P}^{(m)}) \rightarrow (\underline{R}, \underline{P})$ tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq \underline{R}^{(m)} \leq \underline{R}^{(m+1)} \leq \underline{R} \leq \bar{R} \leq \bar{R}^{(m+1)} \leq \bar{R}^{(m)} \leq k + \varepsilon \\ \varepsilon \leq \underline{P}^{(m)} \leq \underline{P}^{(m+1)} \leq \underline{P} \leq \bar{P} \leq \bar{P}^{(m+1)} \leq \bar{P}^{(m)} \leq M \end{aligned} \quad (4.35)$$

si on pose, $\varepsilon = 0$ on trouve $(\underline{R}^{(0)}, \underline{P}^{(0)}) = (0, 0)$ ce qui mène à $\underline{P} = 0$ de [46] (\bar{R}, \bar{P}) et $(\underline{R}, \underline{P})$ vérifie :

$$\begin{aligned} f(\bar{R}, \underline{P}) = 0 \quad f(\underline{R}, \bar{P}) = 0 \\ g(\bar{R}, \bar{P}) = 0 \quad g(\underline{R}, \underline{P}) = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} r\bar{R}\left(1 - \frac{\bar{R}}{k}\right) = 0 \quad -m\bar{P} + \frac{ea\bar{R}\bar{P}}{1 + b\sqrt{\bar{R}} + c\bar{R}} = 0 \\ r\underline{R}\left(1 - \frac{\underline{R}}{k}\right) - \frac{a\underline{R}\bar{P}}{1 + b\sqrt{\underline{R}} + c\underline{R}} = 0 \quad -m\underline{P} + \frac{ea\underline{R}\bar{P}}{1 + b\sqrt{\underline{R}} + c\underline{R}} = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

De la première équation de (4.37) on peut en déduire $\bar{R} = k$ et des autres équations nous déduisons que $\bar{P} = 0$, $\underline{R} = k$ et de **Théorème 2.2** dans [46] la solution (R, P) satisfait :

$(R, P) \rightarrow (k, 0)$ quand $t \rightarrow +\infty$ lorsque $\varepsilon < R_0(x) \leq k + \varepsilon$.

En utilisant le théorème de comparaison, on définit la fonction $\eta(x, t)$ qui vérifie $R(x, t) \leq \eta(x, t)$ avec $(x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty)$ est la solution unique de l'équation parabolique

$$\begin{cases} \eta_t = d_1 \eta_{xx} + r\eta\left(1 - \frac{\eta}{k}\right) & t > 0, x \in (0, L) \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial x}(L, t) = 0 & t > 0 \\ \eta(x, 0) = R_0(x) \end{cases} \quad (4.38)$$

et $\eta(x, t) \rightarrow k$ pour $t \rightarrow +\infty$ et il existe $t_0 > 0$ tel que $R(x, t) \leq k + \varepsilon$ dans $[0, L] \times [t_0, +\infty)$ ce qui signifie que l'état d'équilibre E_1 est globalement attractif et localement asymptotiquement stable,

d'où l'on déduit la stabilité globale de l'équilibre E_1 . Ce qui complète la preuve. \square

4.3 Stabilité locale, instabilité de Turing et analyse de la bifurcation

Dans cette section, on va analyser la stabilité locale de l'équilibre positif E^* , et on va choisir la capacité limite k comme paramètre de bifurcation, mais tout d'abord on donne la matrice jacobienne du système (4.1) :

$$J(R, P) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = r\left(1 - \frac{2R}{k}\right) - aP \frac{1+b\sqrt{R}+cR-R\left(\frac{b}{2\sqrt{R}}+c\right)}{(1+b\sqrt{R}+cR)^2}, \\ a_{12} = -\frac{aR}{1+b\sqrt{R}+cR} < 0, \\ a_{21} = eaP \frac{1+b\sqrt{R}+cR-R\left(\frac{b}{2\sqrt{R}}+c\right)}{(1+b\sqrt{R}+cR)^2} > 0, \\ a_{22} = -m + \frac{eaR}{1+b\sqrt{R}+cR}, \end{array} \right. \quad (4.40)$$

4.3.1 L'équation caractéristique

le système (4.2) peut être écrit sous la forme :

$$U_t = D\Delta U + J(E^*(k))U + F(U) \quad (4.41)$$

avec

$$J(E^*(k)) = \begin{pmatrix} A(k) & B \\ C(k) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

avec

$$\begin{cases} A(k) = r(1 - \frac{2R^*}{k}) - aP^* \frac{1+b\sqrt{R^*}+cR^*-R^*(\frac{b}{2\sqrt{R^*}}+c)}{(1+b\sqrt{R^*}+cR^*)^2}, \\ B = \frac{-m}{e} < 0, \\ C(k) = eaP^* \frac{1+b\sqrt{R^*}+cR^*-R^*(\frac{b}{2\sqrt{R^*}}+c)}{(1+b\sqrt{R^*}+cR^*)^2} > 0, \end{cases} \quad (4.43)$$

et

$$D\Delta = \text{diag}(d_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, d_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \quad (4.44)$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} rR(1 - \frac{R}{k}) - \frac{aPR}{1 + b\sqrt{R} + cR} - A(k)R - BP \\ -m + \frac{eaR}{1 + b\sqrt{R} + cR} - C(k)R \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

où $F(U)$ est une fonction non linéaire au voisinage de E^* . Le système linéarisé de (4.2) autour E^* est donné par :

$$U_t = D\Delta U + J(E^*(k))U. \quad (4.46)$$

Maintenant, on calcule la matrice $-(\frac{n\pi}{L})^2 D + J(E^*(k))$

$$-(\frac{n\pi}{L})^2 D + J(E^*(k)) = \begin{pmatrix} A(k) - d_1(\frac{n\pi}{L})^2 & B \\ C(k) & -d_2(\frac{n\pi}{L})^2 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Les valeurs propres de la matrice (4.47) sont les solutions de l'équation caractéristique donnée par :

$$\lambda^2 - T_n(k)\lambda + D_n(k) = 0, \quad (4.48)$$

avec

$$\begin{aligned} T_n(k) &= A(k) - (d_1 + d_2)(\frac{n\pi}{L})^2 \\ D_n(k) &= d_1 d_2 (\frac{n\pi}{L})^4 - d_2 A(k) (\frac{n\pi}{L})^2 - BC(k) \end{aligned} \quad (4.49)$$

4.3.2 Bifurcation de Hopf

Dans cette sous-section, on va prouver l'existence de la bifurcation de Hopf et on calcule les points de bifurcation et la positivité des ces points pour certaines valeurs de n . Rappelons que l'existence de

la bifurcation Hopf se produit si et seulement si $T_n(k) = 0$ et $D_n(k) > 0$. On peut facilement vérifier que $D_0(k) > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n(k) = +\infty$ alors nous pouvons avoir $D_n(k) > 0$ pour certaines valeurs de n . Avant cela, nous énonçons le lemme suivant :

LEMME 4.1. *L'équilibre positif, chaque fois qu'il existe, vérifie la condition suivante :*

$$T = R^* - \frac{m}{ae} \left(1 + \frac{1}{2} b\sqrt{R^*}\right) > 0 \quad (4.50)$$

Il est facile de prouver le **lemme 4.1** en utilisant l'équation de l'existence du point d'équilibre $R^* = \frac{b\sqrt{R^*} + 1}{\left(\frac{ae}{m} - c\right)}$ on trouve

$$\begin{aligned} T\left(\frac{ae}{m} - c\right) &= b\sqrt{R^*} + 1 - \frac{m}{ae} \left(1 + \frac{1}{2} b\sqrt{R^*}\right) \left(\frac{ae}{m} - c\right) \\ &= b\sqrt{R^*} \left(1 + \frac{mc}{ae}\right) + \frac{mc}{ae} > 0 \end{aligned}$$

Maintenant, on cherche les éventuels points de bifurcation de Hopf qui doivent être solutions de l'équation de la variable k :

$$A(k) - (d_1 + d_2) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = 0 \quad (4.51)$$

$$r \left(1 - \frac{2R^*}{k}\right) - aP^* \frac{1 + b\sqrt{R^*} + cR^* - R^* \left(\frac{b}{2\sqrt{R^*}} + c\right)}{(1 + b\sqrt{R^*} + cR^*)^2} - (d_1 + d_2) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = 0 \quad (4.52)$$

Utilisons $P^* = \frac{er}{m} R^* \left(1 - \frac{R^*}{k}\right)$ et $\frac{ae}{m} R^* = 1 + b\sqrt{R^*} + cR^*$ donc (4.51) devient :

$$r \left(1 - \frac{2R^*}{k}\right) - \frac{mr}{eaR^*} \left(1 - \frac{R^*}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{2} b\sqrt{R^*}\right) - (d_1 + d_2) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = 0, \quad (4.53)$$

alors on a :

$$k(n) = \frac{2r(R^*)^2 - \frac{rm}{ae} R^* \left(1 + \frac{1}{2} b\sqrt{R^*}\right)}{\left(r - (d_1 + d_2) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) R^* - \frac{rm}{ae} \left(1 + \frac{1}{2} b\sqrt{R^*}\right)} \quad (4.54)$$

LEMME 4.2. *On pose*

$$N_1 = \left\lceil \sqrt{\frac{rT}{R^*} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(d_1 + d_2)}} \right\rceil \quad (4.55)$$

avec $\lceil \cdot \rceil$ désigne la partie entière, et $k(n)$ est défini dans (4.54), on peut avoir une bifurcation de Hopf en $k = k(n)$ et pour $n \leq N_1$ et on a l'estimation :

$$R^* < k(0) < k(1) < \dots < k(n) < k(n+1) < \dots < k(N_1) \leq T_\infty \quad (4.56)$$

avec $T_\infty = \frac{r}{R^*}T > 0$

Démonstration. On savait que la bifurcation Hopf peut apparaître si et seulement si $T_n(k) = 0$ ce qui est équivalent à

$$T_0(k) = (d_1 + d_2)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (4.57)$$

avec

$$T_0(k) = A(k) = r\left(1 - \frac{2R^*}{k}\right) - \frac{mP^*}{eR^{*2}}\left(1 + \frac{1}{2}b\sqrt{R^*}\right) \quad (4.58)$$

on sait que $\lim_{k \rightarrow R^*} T_0(k) = -r < 0$ et on peut écrire $A(k)$ sous la forme

$$A(k) = \frac{r}{k}\left(-2R^* + \frac{mr}{ea}\left(1 + \frac{1}{2}b\sqrt{R^*}\right)\right) + \frac{r}{R^*}\left(R^* - \frac{mr}{ea}\left(1 + \frac{1}{2}b\sqrt{R^*}\right)\right) \quad (4.59)$$

Alors la primitive de la fonction $T_0(k)$ est donnée par

$$T'_0(k) = \frac{r}{k^2}\left(2R^* - \frac{mr}{ea}\left(1 + \frac{1}{2}b\sqrt{R^*}\right)\right) \quad (4.60)$$

ce qui est équivalent à

$$T'_0(k) = \frac{r}{k^2}(R^* + T) > 0 \quad (4.61)$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} T_0(k) = T_\infty > 0 \quad (4.62)$$

Alors de (4.57) et (4.61) on peut conclure que $T_0(k)$ est strictement croissante en fonction de k et intersecte l'axe horizontal dans

$$k^* = \frac{(R^* + T)R^*}{T} > 0 \quad (4.63)$$

l'équation (4.57) possède une solution si et seulement si

$$(d_1 + d_2)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 < \lim_{k \rightarrow +\infty} T_0(k) = \frac{r}{R^*}T = T_\infty \quad (4.64)$$

ce qui est équivalent à $n < N_1$ avec N_1 défini dans (4.55).

La fonction $(d_1 + d_2)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ est strictement croissante en fonction de n , alors nous avons l'estimation dans (4.56) ce qui complète la preuve. \square

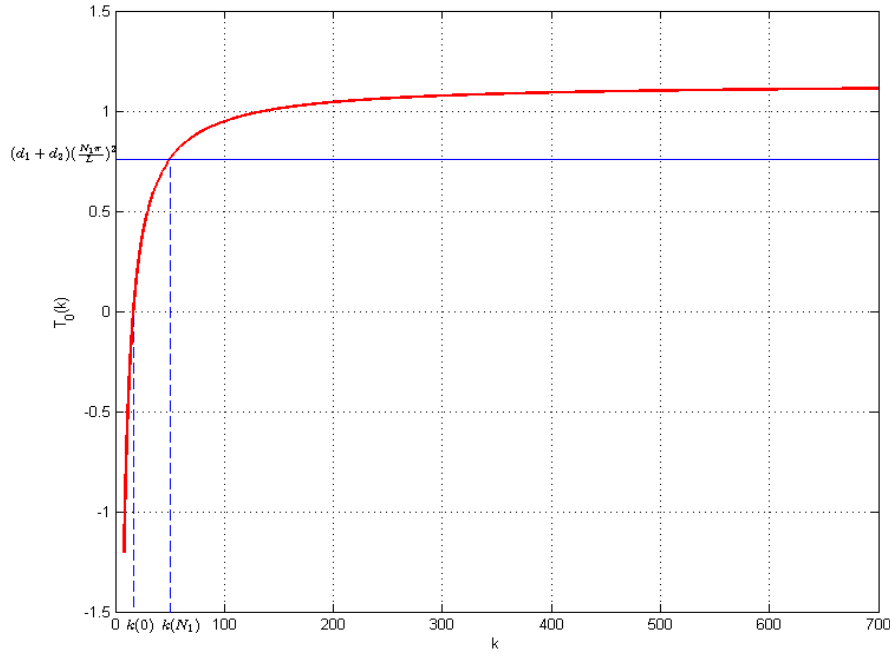


Fig1 :La simulation numérique pour l'existence et l'ordre de la bifurcation Hopf la solution de l'équation (4.57) avec $a = 1.5$; $b = 1.02$; $c = 1.02$; $e = 0.5$; $m = 0.5$; $r = 1.2$; $d_1 = 0.02$; $d_2 = 0.1$ et $L = 5$.ce qui signifie $R^* = 8.1497$; $N_1 = 4$; $T = 7.7404$ et $T_\infty = 1.1397$

REMARQUE 4.4. Dans la figure **Fig1** on montre l'ordre des points de bifurcation de Hopf représentés dans (4.56).

Maintenant, nous mettons la solution de l'équation caractéristique sous la forme $\lambda(k) = \alpha(k) \pm i\omega(k)$ alors :

$$\alpha(k(n)) = 0 \quad \text{and} \quad \omega(k(n)) = \sqrt{D(k(n))}.$$

$$\alpha'(k(n)) = \frac{r}{2k^2(n)}(R^* + T) > 0 \tag{4.65}$$

Sous la condition (4.65) nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3. S'il existe $N^* \leq N_1$ valeur critique j_0, \dots, j_{N^*} tel que $j_0 = 0 < j_1 < \dots < j_{N^*} < N_1$ et $D_{i\xi}(k(i\xi)) > 0$, $\xi = 0 \dots N^*$, nous avons l'estimation suivante :

$$R^* < k(0) < k(1) < \dots < k(n) < k(n+1) < \dots < k(j_{N^*})$$

REMARQUE 4.5. Le **Théorème 4.3** donne les points de bifurcation de Hopf; plus précisément il élimine les points éventuels de bifurcation de Hopf qui vérifient $D_n(k) < 0$; car on sait que la bifurcation de Hopf se produit si et seulement si $T_n = 0$ et $D_n > 0$.

4.3.3 L'instabilité de Turing, et la bifurcation de Turing-Hopf

Pour l'instabilité de Turing, on a besoin de la stabilité locale de l'équilibre positif E^* en l'absence de diffusion, mais en présence de celle-ci l'équilibre devient instable, ce phénomène est appelé instabilité de Turing. comme on a déjà dit $D_0(k) > 0$ et pour certaines valeurs de n on a besoin de trouver $D_n(k) < 0$; on peut maintenant voir $D_n(k) < 0$ en fonction de $(\frac{n\pi}{L})^2$ ce qui donne un polynôme de deuxième degré

$$D_n(k) = D((\frac{n\pi}{L})^2) = d_1 d_2 ((\frac{n\pi}{L})^2)^2 - d_2 A(k) (\frac{n\pi}{L})^2 - BC(k) \quad (4.66)$$

on a $D_0(k) > 0$ donc le minimum de la fonction (4.66) se produit lorsque

$$(\frac{n\pi}{L})^2 = (\frac{n\pi}{L})_{cr}^2 \quad (4.67)$$

avec

$$(\frac{n\pi}{L})_{cr}^2 = \frac{A(k)}{2d_1} > 0 \quad (4.68)$$

et $D((\frac{n\pi}{L})_{cr}^2) < 0$ est une condition suffisante de l'instabilité de Turing alors on a

$$d_1 d_2 (\frac{A(k)}{2d_1})^2 - d_2 A(k) \frac{A(k)}{2d_1} - BC(k) < 0 \quad (4.69)$$

$$-\frac{d_2}{4d_1} (A(k))^2 - BC(k) < 0 \quad (4.70)$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{d_2}{4d_1} (A(k))^2 > -BC(k) > 0 \quad (4.71)$$

alors

$$A(k) > 2\sqrt{\frac{md_1}{ed_2}} c(k) > 0. \quad (4.72)$$

C'est une condition suffisante pour l'instabilité de Turing. Maintenant, on va orienter notre attention sur l'étude de l'intersection entre la courbe de bifurcation de Hopf et la courbe d'instabilité de Turing, ce point est appelé "point de bifurcation Turing-Hopf". On savait que la condition $T_n = 0$ et $D_n > 0$ est une condition nécessaire pour l'existence de bifurcation de Hopf et $T_n = 0$ est équivalent à

$$A(k) - (d_1 + d_2) (\frac{n\pi}{L})^2 = 0 \quad (4.73)$$

ce qui implique

$$k_H(d_1, n) = \frac{R^*r(R^* + T)}{-(d_1 + d_2)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 R^* + rT} \quad (4.74)$$

et de $D_n = 0$ on a

$$d_1 d_2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 - d_2 A(k) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - BC(k) = 0 \quad (4.75)$$

On remplace $A(k) = -\frac{r}{k}(R^* + T) + \frac{r}{R^*}T$ et $C(k) = \frac{ae^2r}{mR^*}(R^* - T) - \frac{ae^2r}{mk}(R^* - T)$ dans (4.75) et on trouve

$$k_T(d_1, n) = r \frac{ae(R^* - T) - (R^* + T)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{d_1 d_2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 - \frac{r}{R^*}T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{ae r}{mR^*}(R^* - T)} \quad (4.76)$$

Les deux courbes définies dans (4.74) et (4.76) se coupent en

$$d_1 = d_1^* = \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \left[-d_2^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{R^*}{a} \left(\frac{R^* + T}{R^* - T}\right) + Tr + rR^*(R^* + T) - d_2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \quad (4.77)$$

Nous définissons la fonction

$$f(x) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \frac{1}{x} \left[-d_2^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{R^*}{a} \left(\frac{R^* + T}{R^* - T}\right) x^2 + Tr + rR^*(R^* + T) - d_2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 x \right] \quad (4.78)$$

avec

$$f'(x) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{1}{x^2} \left[-d_2^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{R^*}{a} \left(\frac{R^* + T}{R^* - T}\right) x^2 - Tr - rR^*(R^* + T) \right] < 0 \quad (4.79)$$

Ce qui signifie que le fonction f est strictement décroissante en n et $\lim_{n \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et il existe un entier positif n^* tel que

$$f(x) = \begin{cases} > 0 & \text{if } 1 \leq n < n^* \\ < 0 & \text{if } n^* \leq n \end{cases} \quad (4.80)$$

On peut dire maintenant qu'il existe $1 \leq n_* < n^*$ tel que la courbe de bifurcation de Hopf définie dans (4.74) coupe la courbe de l'instabilité de Turing (4.76) noté par L_{n_*} au point (k^*, d_2^*) , ce point s'appelle le point de la bifurcation de Turing-Hopf et on a le théorème suivant :

THÉORÈME 4.4. *Supposons que la condition d'existence de l'équilibre positif est vérifiée et on définit la courbe de Hopf H_n dans le plan $k - d_1$ définie dans (4.74)*

(i) *Si $n = 0$ l'équilibre $E^* = k^*$ est asymptotiquement stable si $0 < k < \frac{R^*(R^* + T)}{T} = k^*$ et est instable si $k > \frac{R^*(R^* + T)}{T}$*

(ii) *Le système (2.14) a une bifurcation de Hopf autour de E^* quand $k = k_H(d_1, n)$ et le système*

(2.14) a une solution périodique homogène pour $n = 0$, et solution périodique non homogène pour $n = 1, 2, \dots, j_{N^*}$

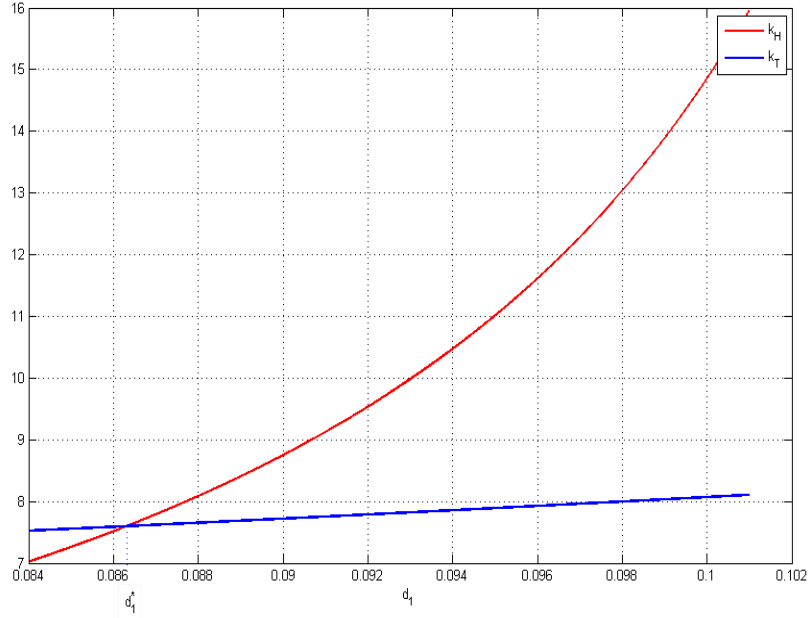


Fig2 : Simulation numérique pour le point d'intersection entre la courbe de bifurcation Hopf (4.74)

Et la courbe d'instabilité de Turing (4.76) quand $n = 3$;

$a = 3.5; b = 1.02; c = 1.02; e = 0.5; m = 0.75; r = 1.2; d_2 = 0.1$ et $L = 5$. ce qui signifie $R^* = 0.3863$;

$T = 0.2452$ et $T_\infty = 0.7616$, Et il est évident de le voir $k > R^*$

REMARQUE 4.6. La Figure 2 montre l'existence de bifurcation Turing-Hopf qui est l'intersection entre les deux courbes la première est la courbe de bifurcation de Hopf notée par k_H et la deuxième est la courbe de l'instabilité de Turing notée par k_T . L'avantage de l'étude de la bifurcation de Turing-Hopf est de donner les régions de l'instabilité ou de la stabilité de l'équilibre positif.

4.4 Forme normale de la bifurcation de Hopf :

Dans cette section, on va essentiellement suivre les travaux [22, 52] et on choisit k comme paramètre de bifurcation. En supposant que $k^* = k_H^*(n)$ avec $k_H^*(n)$ est défini par l'équation(4.51) et considérons la variable $\mu = k - k_H^*(n)$ maintenant on réécrit le point d'équilibre en fonction de μ en mettant $k = \mu + k_H^*(n)$ alors l'équilibre positif devient

$$u^*(\mu) = R^* \quad \text{and} \quad v^*(\mu) = P^*(\mu + k^*) \quad (4.81)$$

$$\tilde{R}(\cdot, t) = R(\cdot, t) - u^*(\mu) \quad \tilde{P}(\cdot, t) = P(\cdot, t) - v^*(\mu) \quad (4.82)$$

et

$$\tilde{U}(t) = (\tilde{R}(\cdot, t), \tilde{P}(\cdot, t))^T \quad \text{and} \quad \tilde{U}^* = (u^*(\mu), v^*(\mu))^T \quad (4.83)$$

on peut réécrire le système (4.2) sous la forme :

$$\frac{d\tilde{U}(t)}{dt} = D\Delta\tilde{U} + L_0(\tilde{U}) + g(\tilde{U}, \mu) \quad (4.84)$$

avec $D = \text{diag}(d_1, d_2)$ et $L_0(\tilde{U}) = J(\tilde{U}^*)\tilde{U}$

et

$$g(\tilde{U}, \mu) = \sum_{i+j+l \geq 2} \frac{1}{i!j!l!} g_{ijl} \tilde{R}^i \tilde{P}^j \mu^l \quad (4.85)$$

$$g_{ijl} = (g_{ijl}^{(1)}, g_{ijl}^{(2)}) \quad (4.86)$$

avec

$$g_{ijl}^{(k)} = \frac{\partial^{i+j+l} g^{(k)}(0, 0, 0)}{\partial^i R \partial^j P \partial^l \mu}, \quad k = 1, 2 \quad (4.87)$$

$$g^{(1)}(\tilde{R}, \tilde{P}, \mu) = r(\tilde{R} + u^*(\mu)) \left(1 - \frac{\tilde{R} + u^*(\mu)}{\mu + k^*}\right) - \frac{a(\tilde{P} + v^*(\mu))(\tilde{R} + u^*(\mu))}{1 + b\sqrt{\tilde{R} + u^*(\mu)} + c(\tilde{R} + u^*(\mu))} \quad (4.88)$$

$$g^{(2)}(\tilde{R}, \tilde{P}, \mu) = -m(\tilde{P} + v^*(\mu)) + \frac{ae(\tilde{P} + v^*(\mu))(\tilde{R} + u^*(\mu))}{1 + b\sqrt{\tilde{R} + u^*(\mu)} + c(\tilde{R} + u^*(\mu))} \quad (4.89)$$

la linéarisation du système (4.84) au voisinage de l'origine est donnée par :

$$\frac{d\tilde{U}(t)}{dt} = \Gamma(\tilde{U}) \quad (4.90)$$

Maintenant, on définit la fonction propre normalisée du problème (4.8)

$$\varphi_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left\|\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\|_{2,2}} \quad (4.91)$$

et soit

$$\beta_n^1(x) = (\varphi_n(x), 0)^T \quad \beta_n^2(x) = (0, \varphi_n(x))^T \quad (4.92)$$

on pose Λ_n l'ensemble de toutes les valeurs propres de (4.90), sous la forme $\lambda = \pm i\omega_n$ et on définit l'espace associé

$$\Upsilon_n = \text{span}\{\langle \varphi(\cdot), \beta_n^i \rangle / \varphi(\cdot) \in \chi, i = 1, 2\} \quad (4.93)$$

Il est facile de voir que $\Gamma(\Upsilon_n) \subset \text{span}\{\beta_n^i, i = 1, 2\}$ $n \in \mathbb{N}_0$

soit $Y(t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Y^T(t)(\beta_n^1, \beta_n^2)^T \in \Upsilon_n$ dans l'espace invariant l'EDP linéaire (4.90) est équivalente au système linéaire :

$$\dot{Y}(t) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \text{diag}(d_1, d_2) + L_0(Y(t)) \quad Y(t) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.94)$$

Il est évident de voir que (4.90) a la même équation caractéristique (4.41)

on définit la matrice

$$M_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \text{diag}(d_1, d_2) + J(R^*, P^*) \quad (4.95)$$

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $T_n = 0$ avec $k = k^*(n)$ alors les valeurs propres $\pm i\omega_n (\pm \sqrt{D_n})$ et on a

$$\Lambda_n = \{i\omega_n, -i\omega_n\}; B_n = \text{diag}(i\omega_n, -i\omega_n); z = (z_1, z_2)^T$$

Posons

$$p_n = \begin{pmatrix} p_{n1} \\ p_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + i\omega_n}{c_n(k^*)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

$$q_n = \begin{pmatrix} q_{n1} \\ q_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_n(k^*)}{2i\omega_n} \\ \frac{d_1 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - A(k^*) + i\omega_n}{2i\omega_n} \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

On note que p_n et q_n vérifient les conditions

$$M_n p_n = i\omega_n p_n ; M_n^T q_n = i\omega_n q_n \quad (4.98)$$

$$q_n^T p_n = 1 \quad (4.99)$$

Et la décomposition de χ en deux sous-espaces

$$\chi = \chi^c \oplus \chi^s \quad (4.100)$$

avec $\chi^{\mathbb{C}} := \{zq + \bar{z}\bar{q} : z \in \mathbb{C}\}$ et le sous-espace stable $\chi^{\mathbb{S}} := \{U \in \chi : \langle q, U \rangle = 0\}$ pour tout $U \in \chi$ il existe $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \chi^{\mathbb{S}}$

et on définit les matrices $\Omega_n = (p_n, \bar{p}_n)$, $\Psi_n = \text{col}(q_n^T, \bar{q}_n^T)$ avec \bar{p}_n (resp \bar{q}_n) est le conjugué de p_n (resp q_n)

$$\text{et } \Psi_n \Omega_n = \text{diag}(1, 1) = I_2$$

Nous utilisons la décomposition de notre espace χ pour écrire :

$$\tilde{U} = z_1 p_n \varphi_n(x) + z_2 \bar{p}_n \varphi_n(x) + w \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R} ; w \in \chi^{\mathbb{S}} \quad (4.101)$$

Suivons les mêmes idées que celles de [50, 54, 52], on trouve la forme normale :

$$z = B_n z + \begin{pmatrix} B_{n1} z_1 \mu \\ \bar{B}_{n1} z_2 \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{n2} z_1^2 z_2 \\ \bar{B}_{n2} z_1 z_2^2 \end{pmatrix} + O(z |\mu|^2 + |z|^4). \quad (4.102)$$

avec

$$B_{n1} = q_{n2} (g_{101}^{(2)} p_{n1} + g_{011}^{(2)} p_{n2}) \quad (4.103)$$

$$B_{n2} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} Q_{021} + \frac{1}{4\pi} F_{021} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{00} & \text{if } n = 0 \\ \frac{3}{4} Q_{n21} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{n0} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} G_{n(2n)} & \text{if } n \neq 0 \end{cases} \quad (4.104)$$

avec

$$Q_{n21} = q_n^T [g_{300} p_{n1} |p_{n1}|^2 + g_{030} p_{n2} |p_{n2}|^2 + g_{210} (p_{n1}^2 \bar{p}_{n2} + 2p_{n2} |p_{n1}|^2) + g_{120} (p_{n2}^2 \bar{p}_{n1} + 2p_{n1} |p_{n2}|^2)] \quad (4.105)$$

$$F_{k21} = \frac{i}{\omega_n} [(q_n^T C_{n20})(q_n^T C_{n11}) - |q_n^T C_{n11}|^2 - \frac{2}{3} |q_n^T C_{n02}|^2] \quad (4.106)$$

$$C_{n20} = \bar{C}_{n02} = g_{200} p_{n1}^2 + 2g_{110} p_{n1} p_{n2} + g_{020} p_{n2}^2 \quad (4.107)$$

$$C_{n11} = g_{200} |p_{n1}^2| + 4g_{110} \text{Re}\{p_{n1} \bar{p}_{n2}\} + 2g_{020} |p_{n2}^2| \quad (4.108)$$

et

$$G_{ni} = q_n^T [(g_{200}p_{n1} + g_{110}p_{n2})A_{ni11} + (g_{110}p_{n1} + g_{020}p_{n2})A_{ni11} + A_{ni20}(g_{200}\bar{p}_{n1} + g_{110}\bar{p}_{n2}) + (g_{110}\bar{p}_{n1} + g_{020}\bar{p}_{n2})A_{ni20}] \quad (4.109)$$

avec

$$A_{ni20} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}(2i\omega_0 \text{diag}(1, 1) - M_0)^{-1}(C_{020} - q_0^T C_{020}p_0 - \bar{q}_0^T C_{020}\bar{p}_0) & \text{if } n, j = 0 \\ c_{ni}(2i\omega_0 \text{diag}(1, 1) - M_0)^{-1}C_{n20} & \text{if } n \neq 0, j = 0, 2n \end{cases} \quad (4.110)$$

et

$$A_{ni11} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{\pi}}M_0^{-1}(C_{011} - q_0^T C_{011}p_0 - \bar{q}_0^T C_{011}\bar{p}_0) & \text{if } n, j = 0 \\ -c_{ni}M_i^{-1}C_{n11} & \text{if } n \neq 0, j = 0, 2n \end{cases} \quad (4.111)$$

$$c_{ni} = \langle \varphi_n^2(x) \varphi_i(x) \rangle \quad (4.112)$$

Notons que

$$c_{ni} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & i = n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} & i = 0, n \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} & i = 2n \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.113)$$

En utilisant un changement de variable

$$z_1 = V_1 - iV_2 \quad z_2 = V_1 + iV_2 \quad (4.114)$$

et

$$V_1 = \rho \cos \theta \quad V_2 = \rho \sin \theta \quad (4.115)$$

Le système (4.90) devient :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = V_{n1}\mu\rho + V_{n2}\rho^3 + O(\mu\rho^2 + |(\mu, \rho)|^4) \\ \dot{\theta} = -\omega_n + O(|(\mu, \rho)|) \end{cases} \quad (4.116)$$

avec

$$V_{n1} = \text{Re}\{B_{n1}\} \quad V_{n2} = \text{Re}\{B_{n2}\} \quad (4.117)$$

de **Lemme 3.1.2** dans [71] et de [27, 79] on a le théorème suivant :

THÉORÈME 4.5. (i) Si $V_{n2} < 0$ alors le système (4.101) a une bifurcation de hopf supercritique dans $k = k_H^*(n)$ (i.e les solutions périodiques sont localement asymptotiquement stables) et les solutions périodiques existent si $(V_{n1} > 0$ et $\mu > 0$ où $(V_{n1} < 0$ et $\mu < 0)$

(ii) Si $V_{n2} > 0$ alors le système (4.101) a une bifurcation de hopf souscritique dans $k = k_H^*(n)$ (i.e les solutions périodiques sont instables) et les solutions périodiques existent si $(V_{n1} > 0$ et $\mu < 0)$ ou $(V_{n1} < 0$ et $\mu > 0)$.

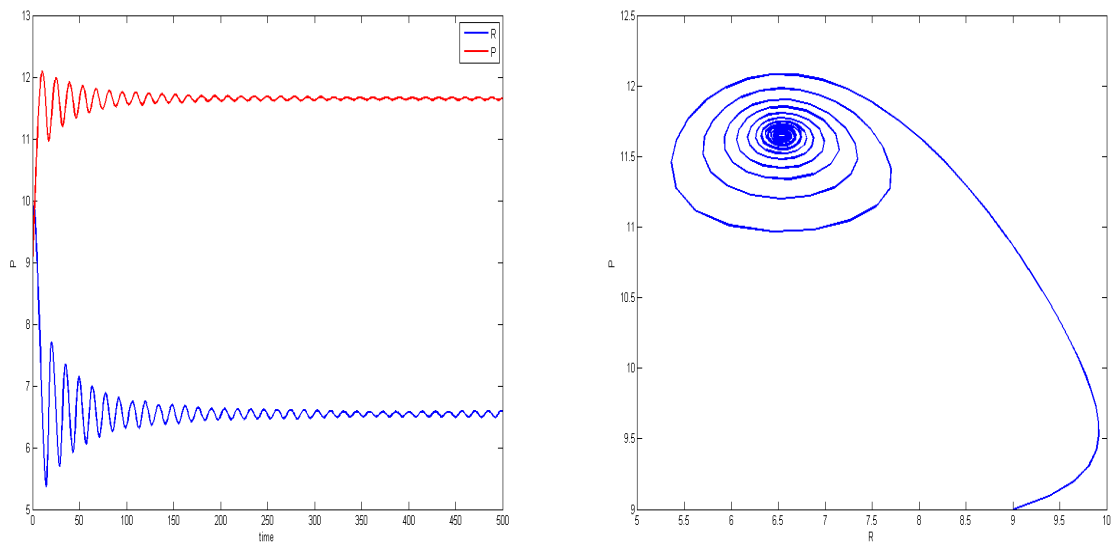


Fig3 : Trajectoire et portraits de phase du système(4.1) dans le cas où (R^*, P^*) est localement stable i.e. $k = 14.75 < k^* = k(0) = 16.7304$

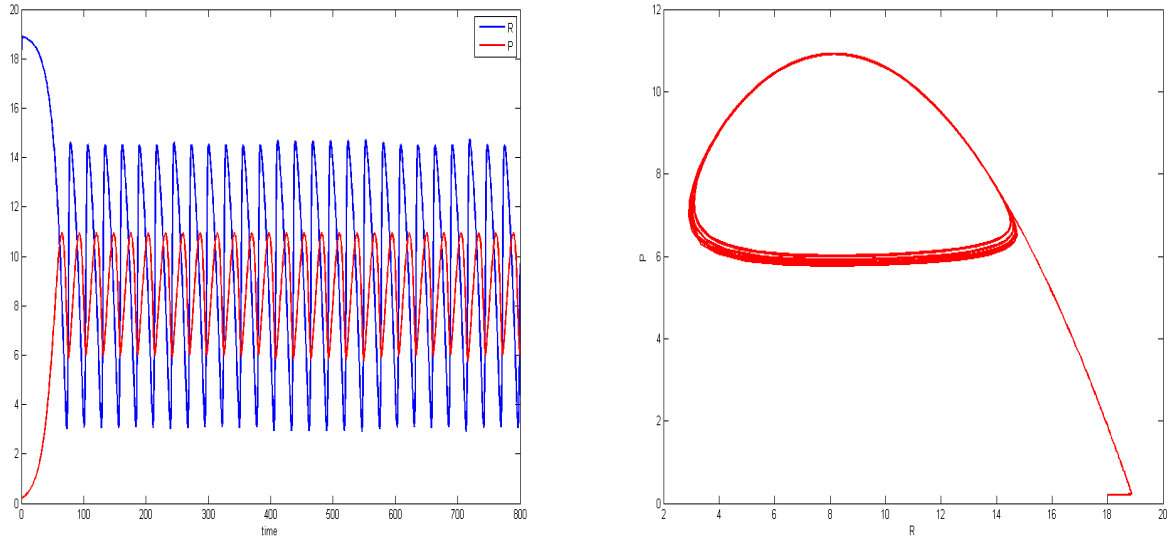


Fig4 : Trajectoire et portraits de phase du système (4.1) dans le cas où (R^*, P^*) est instable quand $k = 19 > k^* = k(0) = 16.7304$

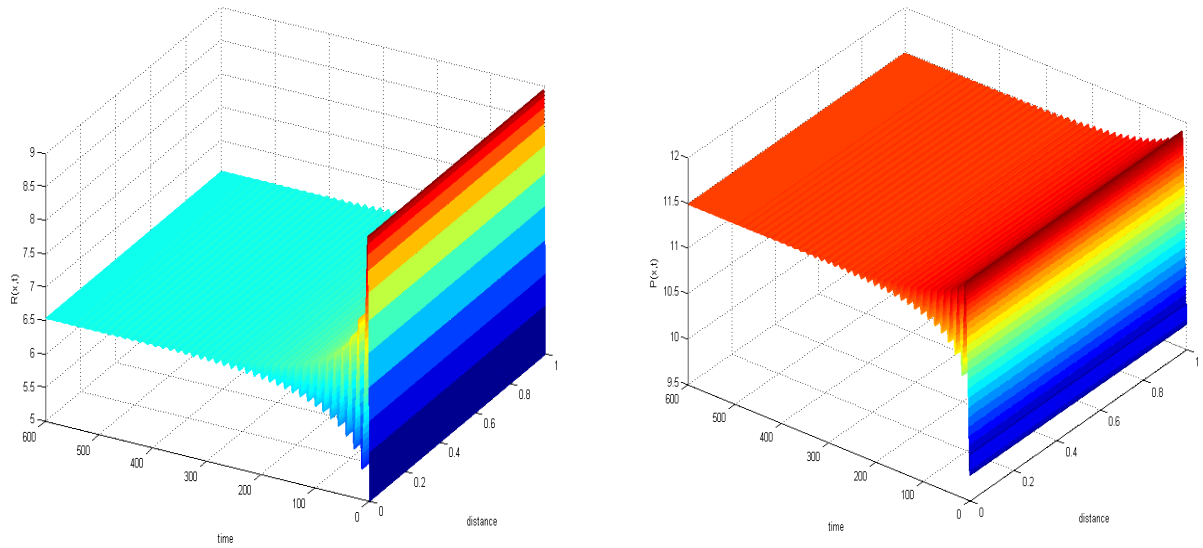


Fig5 : Simulation numérique du système (4.2) lorsque l'équilibre positif $(R^*, P^*) = (6.5394, 11.4886)$ est localement asymptotiquement stable stable quand $k = 14.5 < k(0)$ et $d_1 = 0.2, d_2 = 0.1, a = 1.75, b = 1.22, c = 1.12, e = 0.5, m = 0.5, r = 3.2$ avec les conditions initiales $R(0, x) = 5$ et $P(0, x) = 10$

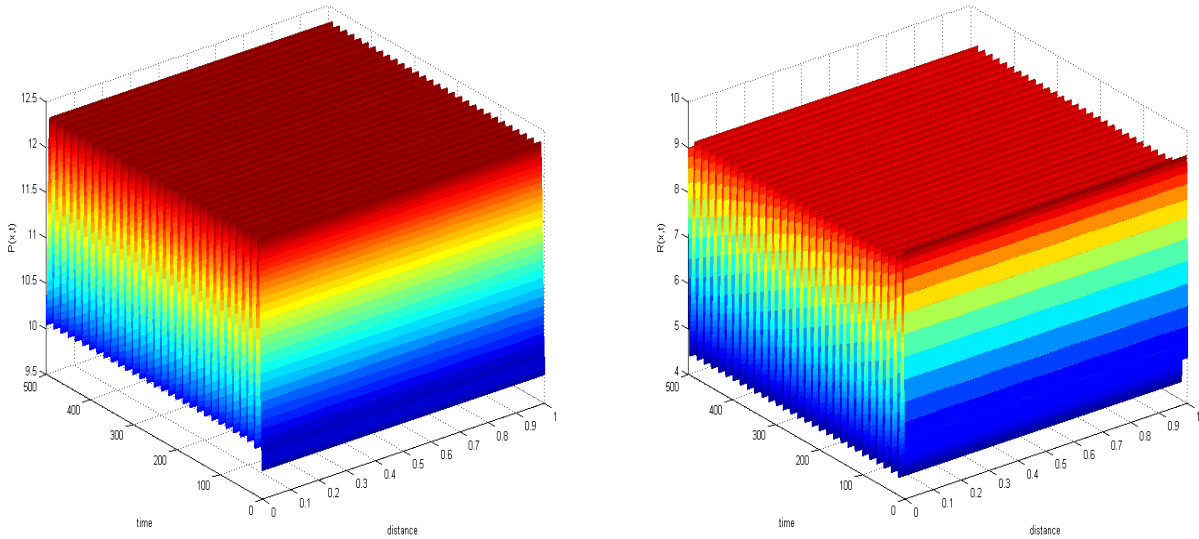


Fig6 : Simulation numérique du système (4.2) lorsque l'équilibre positif $(R^*, P^*) = (6.5394, 11.4886)$ est instable quand $k = 15 > k(0)$ et $d_1 = 0.2, d_2 = 0.1, a = 1.75, b = 1.22, c = 1.12, e = 0.5, m = 0.5, r = 3.2$ et on remarque la présence des solution périodique homogènes avec les conditions initiales $R(0, x) = 5$; $P(0, x) = 10$

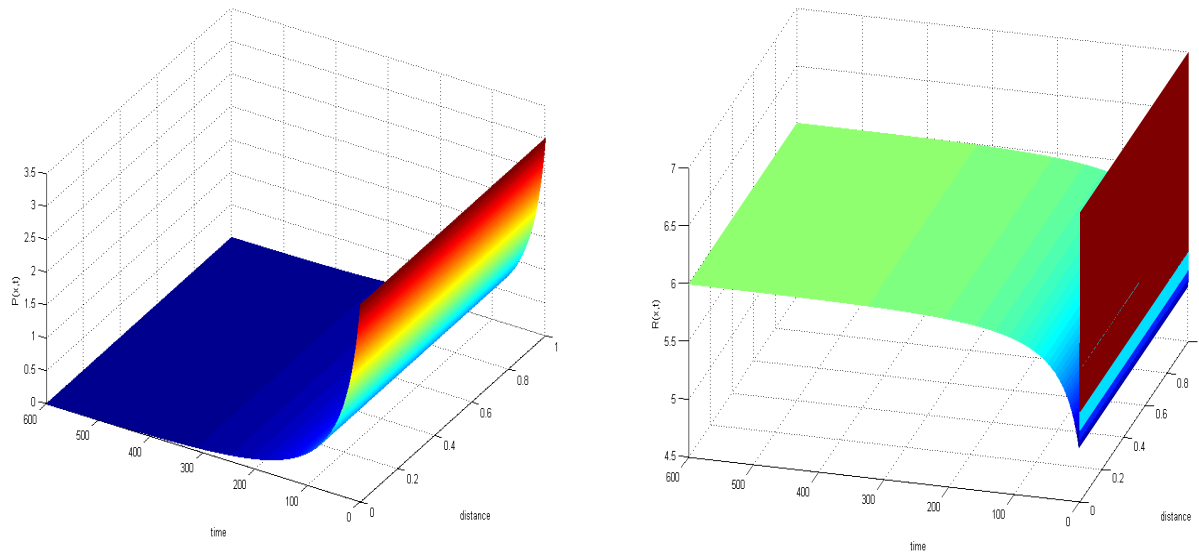


Fig8 : Simulation numérique du système (4.2) lorsque l'équilibre positif n'existe pas et E_1 Est globalement asymptotiquement stable lorsque $k = 6 < R^* = 6.5394$ and $d_1 = 0.02, d_2 = 0.01, a = 1.75, b = 1.22, c = 1.12, e = 0.5, m = 0.5, r = 3.2$ avec les conditions initiales $R(0, x) = 7$ and $P(0, x) = 3$

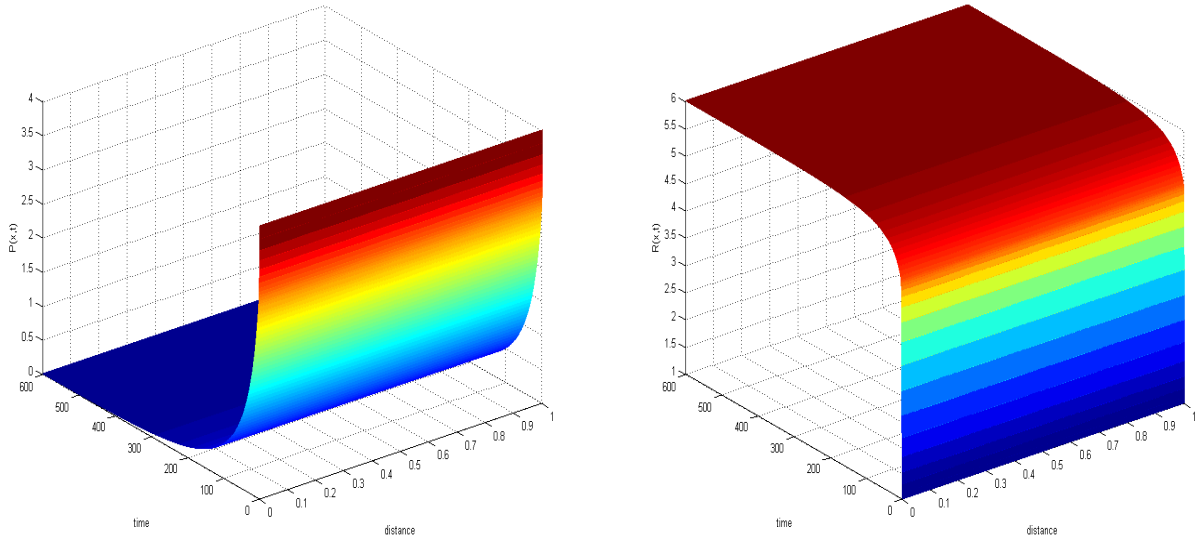


Fig9 : Simulation numérique du système (4.2) Lorsque l'équilibre positif n'existe pas et E_1 Est globalement asymptotiquement stable lorsque $k = 6 < R^* = 6.5394$ et $d_1 = 0.02, d_2 = 0.01, a = 1.75, b = 1.22, c = 1.12, e = 0.5, m = 0.5, r = 3.2$ avec les conditions initiales $R(0, x) = 1$ and $P(0, x) = 4$

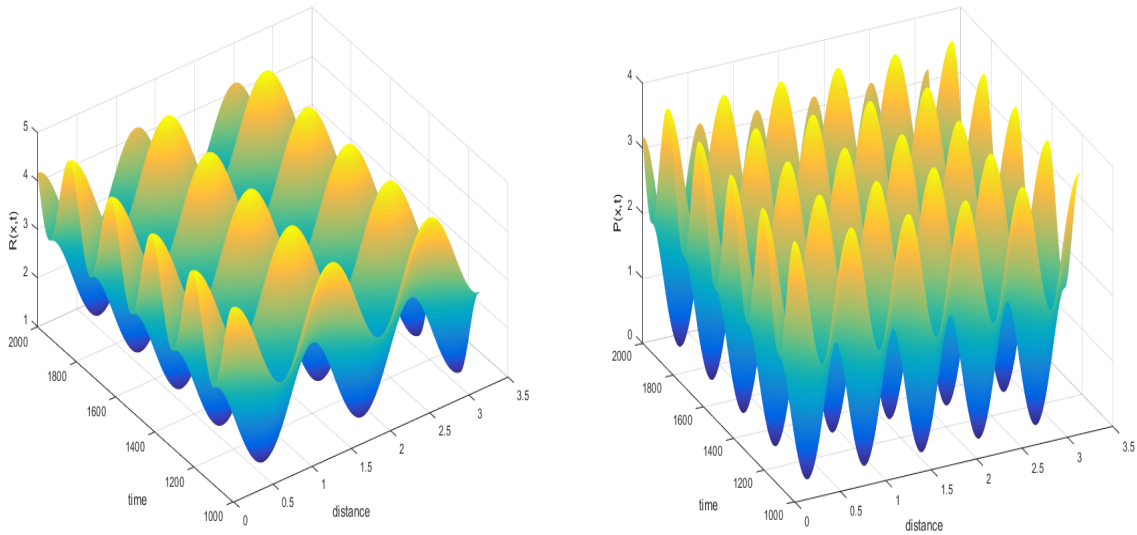


Fig5 : Simulation numérique pour l'existence de la solution périodique non homogène de système (2.14) avec $(R^*, P^*) = (3.0127, 2.2459)$ est instable et $k = 10 > k(1) = 8.0578$ et les conditions initiales $R(0, x) = R^* + \cos(5x)$ and $P(0, x) = P^* + \cos(10x)$

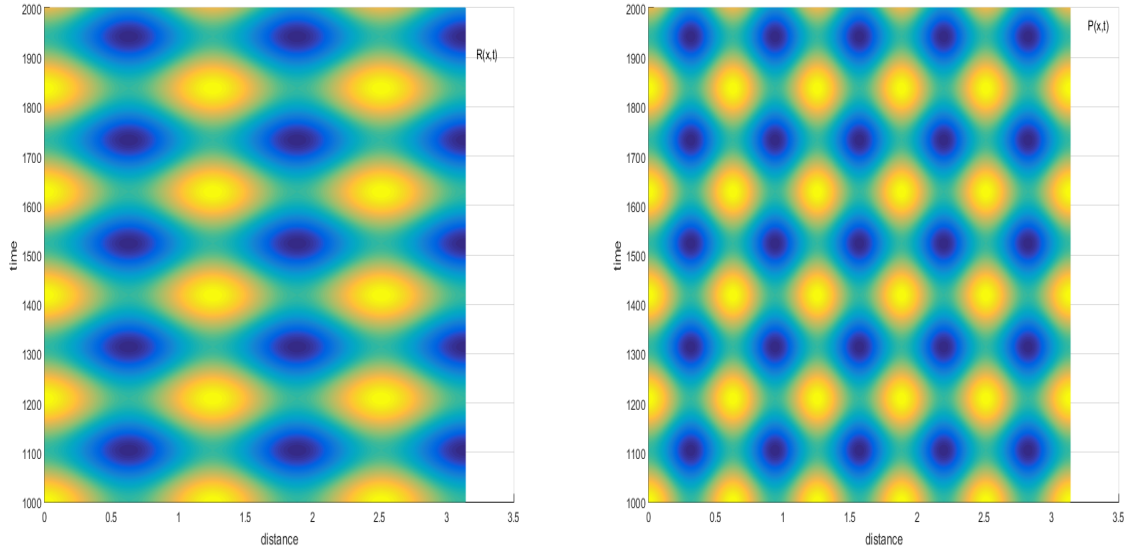


Fig6 : la projection sur le plan OX,OY pour les mêmes condition précédentes

4.5 Conclusion

Nous traitons dans ce chapitre un modèle proie prédateur avec la présence d'une diffusion spatiale et un comportement de troupeau est considéré ; nous avons choisi la fonction d'interaction de Holling III généralisée ; et des conditions aux limites de Neumann.

Dans la première partie, une construction de notre modèle a été donnée et aussi la signification écologique des paramètres. Dans la deuxième partie, l'existence d'une solution positive unique a été prouvée en utilisant la méthode des sous et sur solutions, la bornitude de la solution du système (4.2) est aussi établie, en outre, la stabilité globale de E_1 en l'absence de E^* a été prouvée. Newline Dans la troisième partie, nous avons étudié la stabilité locale de l'équilibre positif, en présence de la diffusion et aussi la bifurcation de Hopf a été analysée (calcul des points de bifurcation de Hopf) et aussi une condition suffisante pour l'instabilité de Turing a été donnée ; et la présence d'une solution périodique homogène lorsque $n = 0$ et une solution périodique non homogène pour $n = 1, 2, \dots, N_1$ a été montré ; Enfin, l'intersection entre la courbe de bifurcation de Hopf et la courbe d'instabilité de Turing a été étudiée, pour finalement trouver le point de bifurcation de Turing-Hopf. Dans la section suivante, la forme normale de la bifurcation de Hopf a été calculée et certaines propriétés de la solution périodique (la stabilité et l'instabilité des solutions périodiques homogènes et non homogènes). En fin de chapitre une simulation numérique est présentée pour illustrer les résultats théorique, par exemple

Fig2 représente l'ordre des points de bifurcation de Hopf indiqués dans **lemme 3.2**, **Fig3** l'existence du point de bifurcation de Turing-Hopf, **Fig4** et **Fig5** la présence d'une solution périodique du système (4.1) tel que pour $k < k^*$ l'équilibre positif est localement asymptotiquement stable mais quand $k > k^*$, il devient instable et il existe une orbite périodique stable; pour **Fig6** on montre l'existence d'une spirale autour de E^* quand $k < k(0)$, **Fig7** l'existence d'une solution homogène stable du système (4.2) pour $k > k(0)$. Finalement **Fig8** et **Fig9** représentent la stabilité globale de l'équilibre E_1 pour deux conditions initiales différentes lorsque $k < R^*$.

Chapitre 5

Annexes

Nous présentons dans cette annexe quelques notions nécessaires pour la bonne compréhension du premier chapitre, la lecture de l'annexe A est indissociable de celle du chapitre 1.

5.1 Annexe A

DÉFINITION 5.1 (Trajectoires totales). Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \chi$ est dite trajectoire totale si $f(t+r) = \Phi(t, f(r)), \forall t \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}$

DÉFINITION 5.2 (Orbite, orbite périodique). • On définit une orbite d'une trajectoire totale par $\{\Phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$

• On appelle un orbite périodique, une orbite associée à une trajectoire totale qui vérifie la condition de périodicité i.e. il existe $T > 0$ tel que $\Phi(t+T, x) = \Phi(t, x)$ avec x différent du point d'équilibre.

DÉFINITION 5.3 (Persistance faible). Soit $\rho : \chi \rightarrow \mathbb{R}^+$ et J un sous-ensemble de \mathbb{R}^+ , alors on dit que le semi-flot $\Phi : J \times \chi \rightarrow \chi$ est ρ -faiblement persistant si

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0, \forall x \in \chi, \rho(x) > 0.$$

DÉFINITION 5.4 (Persistance forte). On dit que le semi-flot $\Phi : J \times \chi \rightarrow \chi$ est ρ -fortement persistant si

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0, \forall x \in \chi, \rho(x) > 0.$$

DÉFINITION 5.5 (ρ -uniforme faible persistance). On dit que le semi-flot $\Phi : J \times \chi \rightarrow \chi$ est ρ -uniformément faiblement persistant si il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \varepsilon, \forall x \in \chi, \rho(x) > 0.$$

DÉFINITION 5.6 (ρ -uniforme faible persistance). On dit que le semi-flot $\Phi : J \times \chi \rightarrow \chi$ est ρ -uniformément faiblement persistant si il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \varepsilon, \forall x \in \chi, \rho(x) > 0.$$

DÉFINITION 5.7 (Point d'équilibre attractif). Soit X^* un point d'équilibre, on dit que ce point est attractif s'il existe un voisinage noté par V tel que pour toute condition initiale $x_0 \in V$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x_0) = X^*$.

DÉFINITION 5.8 (Point d'équilibre globalement asymptotiquement stable). Soit X^* est un

point d'équilibre, on dit que ce point est Globalement asymptotiquement stable s'il est localement asymptotiquement stable et globalement attractif.

Soit V une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vers \mathbb{R} et de classe \mathbb{C}^1 .

DÉFINITION 5.9 (Fonction définie positive (définie négative)). soit V une fonction qui vérifie :

- $V(0) = 0$
- $V(u) > 0 \forall u \in \Omega \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

Alors V est dite définie positive.

Si $-V$ est définie positive alors on dit que V est définie négative.

DÉFINITION 5.10 (Régularité asymptotique). Soit Φ un semi-flot continu défini sur $R \times \chi$, il est dit asymptotiquement régulier si et seulement si Φ est asymptotiquement compact sur tout les ensembles fermés bornés et positivement invariants.

DÉFINITION 5.11 (Point dissipatif). Soit Φ un semi-flot continu défini sur $R \times \chi$, il est dit point dissipatif si et seulement si il existe un sous ensemble de χ noté B qui est attractant.

THÉORÈME 5.1 (Point fixe). Soit E un espace de Banach, et f une fonction tel que $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq c\|x_1 - x_2\|$ avec $c \in (0, 1)$ (ou on peut dire que f est contractante) alors f admet un point fixe unique (qui vérifie $f(x) = x$)

THÉORÈME 5.2 (théorème 2.33 dans [49]). Φ est point dissipatif et asymptotiquement régulier et éventuellement borné sur chaque ensemble borné de χ si et seulement si il existe un attracteur compact des ensembles bornés.

THÉORÈME 5.3 (théorème 2.39 dans [49]). Soit Φ un semi flot continu, s'il existe un sous ensemble de χ positivement invariant \mathbf{A} qui est attracteur local des ensembles compacts alors \mathbf{A} est stable.

THÉORÈME 5.4 (Théorème 2.46 dans [49]). Soit Φ un semi flot continu, on dit que Φ est asymptotiquement régulier s'il existe des applications Ψ, Θ telles que

$$\Phi(t, x) = \Theta(t, x) + \Psi(t, x),$$

et pour tout ensemble borné C on a

- $\liminf_{t \rightarrow \infty} \text{diam} \Theta_t(C) = 0$
- Il existe r_C tel que $\Psi(C)$ a une fermeture compacte pour tout $t \geq r_C$.

THÉORÈME 5.5 (Théorème 2.53 dans [49]). Soit $\Phi : R^+ \times \chi \rightarrow \chi$ un semi-flot continu, et soit \mathbf{A} un nsemble invariant et compact dans χ et soit $V : \mathbf{A} \rightarrow R$ une fonction continue. Supposons que pour

toute trajectoire totale $\varphi : R \rightarrow \chi$ telle que $V(\varphi(t)) \leq 0$ sur R , et soit $\bar{A} \subset \mathbf{A}$, et V est constante sur A et $\varphi(R) \subset \bar{A}$ pour toute trajectoire totale avec $V(\varphi(t))' \equiv 0$; alors $\bar{A} = \mathbf{A}$

THÉORÈME 5.6 (Théorème 5.1 dans [49]). Posons

$$\chi_0 = \{x \in \chi; \forall t \in J; \rho(\Phi(t, x)) = 0\}$$

Si $\chi_0 = \emptyset$ alors $\rho(x) > 0; \forall x \in \mathbf{A}$ et il existe un certain $\eta > 0$ tel que $\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) \geq \eta \forall x \in \mathbf{A}$.

THÉORÈME 5.7 (Théorème 5.2 dans [49]). si $\chi_0 = \emptyset$ et $(\rho \circ \Phi)$ est continue et Φ est faiblement uniformément ρ -persistant alors Φ est uniformément ρ -persistant.

THÉORÈME 5.8 (Théorème 5.7 dans [49]). Supposons que $\chi_0 \neq \emptyset$, $\Phi : R^+ \times \chi \rightarrow \chi$ est ρ -uniformément fortement persistant, $\rho(\Phi)$ est continue, et :

- Il n'y a pas de trajectoire totale $\varphi : J \rightarrow A$ telle que $\rho(\varphi(0)) = 0$ et $\rho(\varphi(-r)) > 0$, $\rho(\varphi(t)) > 0$ pour un certain $r, t \in J$.

Alors l'attracteur \mathbf{A} est l'union disjointe

$$\mathbf{A} = A_0 \cup C \cup A_1$$

de trois ensembles A_0, C et A_1 qui sont des ensembles compacts et nous avons les affirmations suivantes

★ $A_0 = A \cap \chi_0$ est l'attracteur compact de sous ensembles de χ_0 c'est-à-dire, tout sous ensemble compact k de χ_0 a un voisinage dans χ_0 qui est attiré par A_0 .

★ A_1 est ρ -uniformément positif et A_1 est l'attracteur compact de voisinage des ensembles compacts dans χ/χ_0 et Φ est ρ -uniformément positif, en particulier, A_1 est stable.

★ Si $x \in \chi \setminus A_1$ et φ est une trajectoire totale, alors $\varphi(t) \rightarrow A_0$ pour $t \rightarrow -\infty$ si $x \in \chi \setminus A_0$ et φ est une trajectoire totale, alors $\varphi(t) \rightarrow A_1$ pour $t \rightarrow +\infty$.

En particulier, l'ensemble C contient les points $x \in \mathbf{A}$ tel qu'il existe une trajectoire totale $\varphi(t)$ avec $\varphi(-t) \rightarrow A_0$ et $\varphi(t) \rightarrow A_1$ pour $t \rightarrow \infty$.

THÉORÈME 5.9 (La critère de Fréchet-Kolmogorov Théorème B.2 dans [49]). Soit K un sous ensemble de $L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < \infty$ alors K a une fermeture compacte si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\clubsuit \sup_{f \in K} \int_0^{+\infty} |f(s)|^p ds < \infty$$

$$\clubsuit \lim_{r \rightarrow \infty} \int_r^{+\infty} |f(s)|^p ds \rightarrow 0 \text{ uniformément dans } f \in K,$$

$$\clubsuit \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} |f(s+t) - f(s)|^p ds \rightarrow 0 \text{ uniformément dans } f \in K,$$

$$\clubsuit \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^h |f(s)|^p ds \rightarrow 0 \text{ uniformément dans } f \in K ,$$

THÉORÈME 5.10 (Théorème d'invariance de LaSalle). Soit Ω un sous ensemble de \mathbb{R}^n , supposons que Ω est un ouvert positivement invariant pour le système différentiel en x^* (un point d'équilibre), et soit $V : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant :

- $V \leq 0$ sur Ω .

- Soit $E = \{x \in \Omega : V'(x) = 0\}$ et L est le plus grand ensemble invariant par Φ et contenu dans E .

Alors, toute solution bornée commençant dans E tend vers l'ensemble L lorsque le temps tend vers l'infini.

THÉORÈME 5.11 (LaSalle). Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe tel que $x^* \in \Omega$. Soit V une fonction définie positive et de classe C^1 telle que $V' \leq 0$ sur U . Soit $E = \{x \in \Omega : V'(x) = 0\}$, supposons que L le plus grand ensemble positivement invariant contenu dans E est réduit au point x^* . Alors x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système différentiel ordinaire. Si ces conditions sont satisfaites pour $U = \Omega$ si de plus V est propre sur Ω , c'est à dire si $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = \infty$, alors toutes les trajectoires sont bornées pour tout $t > 0$. x^* est un point d'équilibre globalement stable pour le système différentiel.

5.2 Annexe B

On va présenter dans cette section les outils mathématique qu'on a utilisé dans les chapitres 2,3 et 4.

Considérons le système

$$\begin{cases} u_{i_t} - \Delta u_i = f_i(U) \\ \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0 \quad (t > 0, x \in \partial\Omega) \quad i = 1, 2 \\ u_i(0, x) = \eta_i(0, x) \end{cases} \quad (5.1)$$

avec $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (i = 1, 2)$ et $U = (u_1, u_2)^T$

DÉFINITION 5.12 (quasi-monotone). Soit $f_i (i = 1, 2)$ deux fonctions Lipschitziennes,

$$|f_i(U) - f_i(U')| \leq k_i(|u - u'| + |v - v'|)$$

avec $U = (u, v)^T, U' = (u', v')^T$ et soit $\varkappa \subset \mathbb{R}^2$ tel que $f_{1v} \leq 0$ et $f_{2u} \geq 0$ dans \varkappa alors f_i sont des fonctions quasi-monotone mixtes.

THÉORÈME 5.12 (Théorème 2.1 [46]). Soit $\hat{c} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2)^T, \tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)^T$ deux vecteurs constants de \mathbb{R}^2 tel que $\tilde{c}_1 \geq \hat{c}_1$, et $\tilde{c}_2 \geq \hat{c}_2$ et vérifiant les conditions de quasi-monotone et la condition $f_i(\hat{c}) \leq 0, f_i(\tilde{c}) \geq 0$ alors le système (5.1) admet une solution globale unique $U(t, x)$ telle que $\hat{c} \leq U(t, x) \leq \tilde{c}, \forall t > 0, x \in \varkappa$ pour tout $\hat{c} \leq \eta_i(t, x) \leq \tilde{c}, i = 1, 2$.

DÉFINITION 5.13 (sous, sur solution). On dit que \hat{U} est une sous solution (resp \tilde{U} est une sur solution) du problème (5.1) si

$$(i) \forall x \in \varkappa, \hat{U}_t - d\Delta\hat{U} \leq f(\hat{U}) \quad (\text{resp } \tilde{U}_t - d\Delta\tilde{U} \geq f(\tilde{U}))$$

(ii) Les même inégalités sont conservées sur le bords par rapport à la condition initiale.

LEMME 5.1 (lemme 2.1 [46]). soit $\{\overline{C}^{(n)}\}, \{\underline{C}^{(n)}\}$ deux suites qui vérifient :

$$\overline{C}_i^{(n)} = \overline{C}_i^{(n-1)} + \frac{1}{k_i} f_i(\overline{C}_i^{(n-1)}, \underline{C}_i^{(n-1)}), \quad i = 1, 2, n \in \mathbb{N}^* \quad (5.2)$$

et

$$\underline{C}_i^{(n)} = \underline{C}_i^{(n-1)} + \frac{1}{k_i} f_i(\underline{C}_i^{(n-1)}, \overline{C}_i^{(n-1)}), \quad i = 1, 2, n \in \mathbb{N}^* \quad (5.3)$$

avec $\overline{C}^{(0)} = \tilde{C}, \underline{C}^{(0)} = \hat{C}$ alors les suites vérifient la propriété de la monotonie

$$\hat{C}_i \leq \underline{C}_i^{(n)} \leq \underline{C}_i^{(n+1)} \leq \overline{C}_i^{(n+1)} \leq \overline{C}_i^{(n)} \leq \tilde{C}_i \quad n \in \mathbb{N}^*, i = 1, 2$$

THÉORÈME 5.13 (Théorème 2.2 [46]). *Supposons que les conditions du Théorème 2.1 [46] soit vérifiées, et soit $\overline{C}, \underline{C}$ sont des limites de (5.2) et (5.3) alors pour toute fonction initiale $\eta_i(0, x) \in (\hat{C}_i, \tilde{C}_i)$ la solution $U(t, x)$ vérifie $\underline{C}_i \leq u_i(t, x) \leq \overline{C}_i$, $i = 1, 2$*

Si de plus, on a $C^ = \overline{C} = \underline{C}$ alors C^* est la solution unique du système (5.1) dans (\hat{C}_i, \tilde{C}_i) et $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t, x) = C^*$*

Maintenant on va écrire le système (5.1) sous la forme

$$\frac{d}{dt}U = d\Delta U + L(U) + f(U) \quad t > 0 \quad (5.4)$$

avec $dom(\Delta \subset \chi), L(C, \chi)$ i.e. $L : C \rightarrow \chi$ est un opérateur linéaire borné et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe $C^k (k \geq 2)$ tel que $f(0) = 0$ et $D(f(0)) = 0$ et sous les hypothèses suivantes

(H₁) : $d\Delta$ génère un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dans χ avec $|T(t)| \leq Me^{wt}$ ($M \geq 1, w \in \mathbb{R}$)

(H₂) : Les fonctions propres $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $d\Delta$ correspondant aux valeurs propres $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ forment une base orthonormale pour $\chi, \mu_n \rightarrow -\infty$

(H₃) : Le sous espace $\Upsilon_n := \{\langle \varphi(\cdot), \beta_n \rangle \beta_n, \varphi \in \chi\}$ de χ satisfait $\Gamma(\Upsilon_n) \subset span\{\beta_n\}$

DÉFINITION 5.14 (forme normale [22]). *Le système*

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}} = B\bar{z} + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} g_j^1(\bar{z}, \bar{y}) \\ \dot{\bar{y}} = A_1 \bar{y} + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} g_j^2(\bar{z}, \bar{y}) \end{cases} \quad (5.5)$$

avec $g_j = (g_j^1, g_j^2)^T, j \geq 2$ avec

$$\begin{cases} g_j^1 = \bar{f}_j^1(z, y) - [DU_j^1(z)Bz - BU_j^1(z)] \\ g_j^2 = \bar{f}_j^2(z, y) - [DU_j^2(z)Bz - A_1U_j^2(z)] \end{cases}$$

est appelé une forme normale relative à Λ si g_j^1, g_j^2 sont définie par $g_j = \bar{f}_j - M_j U_j$ et (5.5) est équivalent a la forme normale suivante

$$\dot{\bar{z}} = B\bar{z} + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} g_j^1(\bar{z}, 0) \quad (5.6)$$

i.e. (5.6) est aussi une forme normale relative à Λ .

THÉORÈME 5.14 (Théorème 3.2 [22]). *Supposons que (H_1) - (H_3) soient vérifiées et $\Lambda := \{\lambda \in \sigma(A); \operatorname{Re}\lambda = 0\} \neq \emptyset$, alors il existe une forme normale des variables $(z, y) = (\bar{z}, \bar{y}) + o(|\bar{z}|^2)$ telle que la forme normale est donnée par l'équation différentielle ordinaire*

$$\bar{z} = B\bar{z} + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} g_j^1(\bar{z}, 0)$$

5.2.1 Existence et unicité de l'équilibre positif dans (4.1)

THÉORÈME 5.15. *Si $\sqrt{k} > \frac{b+c + \sqrt{b^2 + 4(\frac{ae}{m} - c)}}{2(\frac{ae}{m} - c)}$ et $\frac{ae}{m} > c$ alors le système (4.2) possède un unique point d'équilibre positif $E^*(R^*, P^*)$.*

Démonstration. Le système (4.2) possède deux points d'équilibre sur le bords $E_0 = (0, 0)$ et $E_1 = (k, 0)$, le point d'équilibre positif est solution du système :

$$\begin{cases} 0 = r\left(1 - \frac{R}{k}\right) - \frac{aP}{1 + b\sqrt{R} + cR}, \\ 0 = -m + \frac{eaR}{1 + b\sqrt{R} + cR}, \end{cases} \quad (5.7)$$

de la seconde équation de (5.7) on a

$$\begin{aligned} \frac{ae}{m}R &= 1 + b\sqrt{R} + cR \\ R\left(\frac{ae}{m} - c\right) - b\sqrt{R} - 1 &= 0 \\ \Delta &= b^2 + 4\left(\frac{ae}{m} - c\right) > 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

dernière équation qui possède deux solutions

$$\begin{aligned} \sqrt{R^*} &= \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{ae}{m} - c\right)} > 0 \quad \text{if } \frac{ae}{m} > 1 \\ \sqrt{R_2^*} &= \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{ae}{m} - c\right)} < 0 \end{aligned}$$

et donc

$$R^* = \left(\frac{b + c + \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{ae}{m} - c\right)}\right)^2$$

de la première équation de (5.7) on a :

$$\frac{r}{a}\left(1 - \frac{R^*}{k}\right)(1 + b\sqrt{R^*} + cR^*) = P^*$$

et de (5.8) on obtient

$$P^* = \frac{er}{m} R^* \left(1 - \frac{R^*}{k}\right) > 0 \quad \text{si et seulement si } R_1^* < k$$

ainsi $E^*(R^*, P^*)$ est le point d'équilibre positif.

□

DÉFINITION 5.15 (Instabilité de Turing). *considérons le système*

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + f(u, v) \\ v_t = d_2 v_{xx} + g(u, v) \end{cases} \quad t > 0, x \in \Omega \quad (5.9)$$

avec les condition initiales et aux bords de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n} |_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n} |_{\partial\Omega} = 0, \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), x \in \Omega \end{cases}$$

Supposons que le système (5.9) admet un état stationnaire noté $E^* = (u^*, v^*)$ i.e. $f(u^*, v^*) = 0$ et $g(u^*, v^*) = 0$ qui est localement asymptotiquement stable dans l'absence de diffusion alors on peut avoir l'instabilité de l'équilibre E^* en la présence de diffusion pour quelque valeurs de d_1, d_2 (autrement dit que le diffusion n'a pas toujours un effet stabilisant pour le système (5.9)) ce phénomène est appelé l'instabilité de Turing.

THÉORÈME 5.16 (Théorème 20.2.3 Poincaré-Andronove-Hopf [71]). *Considérons la forme normale suivante :*

$$\begin{cases} r_t = d\mu r + ar^3 \\ \theta_t = w + c\mu + br^3 \end{cases} \quad (5.10)$$

avec a, b, c, d, w des constantes, alors pour μ suffisamment petit on les cas suivantes

1^{er} cas $d > 0, a > 0$: dans ce cas l'origine est instable pour $\mu > 0$ et asymptotiquement stable pour $\mu < 0$, avec un cycle limite instable pour $\mu < 0$ (Notons que si l'origine est stable pour $\mu < 0$ alors la solution periodique doit être instable) i.e. on a une bifurcation de Hopf sous critique.

2^{ème} cas : $d > 0, a < 0$: alors dans ce cas l'origine est localement asymptotiquement stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$, avec un cycle limite asymptotiquement stable pour $\mu > 0$ i.e. on a une bifurcation de Hopf super-critique.

3^{ème} cas : $d < 0, a > 0$: alors dans ce cas l'origine est instable pour $\mu < 0$ et localement asymptotiquement stable pour $\mu > 0$, avec un cycle limite instable pour $\mu > 0$ i.e. on a une bifurcation de Hopf

sous-critique.

THÉORÈME 5.17 (Bifurcation de Turing-Hopf). *La bifurcation de Turing-Hopf est un cas particulier de bifurcation de Hopf, c'est une bifurcation de Hopf à deux paramètres, si on considère l'équation caractéristique du système (4.30) autour de l'équilibre E^**

$$\lambda^2 - T_n(k)\lambda + D_n(k) = 0$$

On sait que la bifurcation de Hopf se produit si $T_n(k) = 0$ et $D_n(k) > 0$ et l'instabilité de Turing se produit pour $D_n(k) < 0$ pour quel que valeurs de n sachant que $D_0(k) > 0$ alors s'il existe de réelles positives k^*, d_1^* tel que $T_n(k^*, d_1^*) = 0$ et $D_n(k^*, d_1^*) = 0$ pour certaines valeurs de n . Le point (k^*, d_1^*) est appelé point de bifurcation de Turing-Hopf; et il est clair c'est aussi un point de bifurcation mais à deux paramètres k et d_1 .

DÉFINITION 5.16 (solutions périodique homogènes (resp non homogènes)). *On dit que le système (5.1) admet une solution $U(x, t)$ périodique homogène (resp non homogène) si elle vérifie les conditions suivantes : il existe $T \geq 0$ tel que $U(x, t + T) = U(x, t)$ et $\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = 0$ (resp $U(x, t + T) = U(x, t)$ et $\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) \neq 0$).*

Bibliographie

- [1] Ajraldi, Valerio, Marta Pittavino, and Ezio Venturino. "Modeling herd behavior in population systems." *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 12.4 (2011) : 2319-2338.
- [2] N. Bailey *The Mathematical Theory of Infectious Diseases*, Charles Griffin (1975)
- [3] A.D. BAZYKIN, "Nonlinear Dynamics of Interacting Populations" , World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, Vol. 11, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.(1998)
- [4] Beddington JR. "Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency".*Journal of Animal Ecology* 1975 ;44 :331-340.
- [5] Soufiane, Bentout, and Tarik Mohammed Touaoula. *Global analysis of an infection age model with a class of nonlinear incidence rates*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 434.2 (2016) : 1211-1239.
- [6] E. Beretta, Y. Takeuchi *Global stability of a SIR epidemic model with time delays*. *J. Math. Biol.*, 33 (1995), pp. 250-260
- [7] F. Brauer, C. Castillo-Chavez *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer, New York (2000)
- [8] F. Brauer, Z. Shuai, P. van den Driessche *Dynamics of an age of infection cholera model*. *Math. Biosci. Eng.*, 10 (5-6) (2013), pp. 1335-1349
- [9] F. Brauer, P. van den Driessche, J. Wu (Eds.), *Mathematical Epidemiology*. Lecture Notes in Math., vol. 1945, Springer, Berlin (2008)
- [10] C.J. Browne, S.S. Pilyugin, *Global analysis of age-structured within-host virus model*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 18 (8) (2013) 1999-2017.
- [11] E. Cagliero, E. Venturino, "Ecoepidemics with infected prey in herd defense : the harmless and toxic cases" , *Int. J. Comput. Math.* 93 (2016) 108-127
- [12] L.M. Cai, M. Martcheva, X.Z. Li *Epidemic models with age of infection, indirect transmission and incomplete treatment*. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 18 (9) (2013), pp. 2239-2265

- [13] Carr J. "Applications of Center Manifold Theory". New York : SpringerVerlag ; 1981
- [14] V. Capasso, G. Sergio *A generalisation of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model.* Math. Biosci., 42 (1978), pp. 43-61
- [15] C. Castillo-Chavez, H.W. Hethcote, V. Andreasen, S.A. Levin, W.M. Liu. *Epidemiological models with age structure, proportionate mixing and cross-immunity.* J. Math. Biol., 27 (1989), pp. 240-260
- [16] Cavani M, Farkas M. "Bifurcations in a predator-prey model with memory and diffusion. I : Andronov-hopf bifurcations". Acta Math Hungar 1994 ;63 :213-29
- [17] Chow SN, Hale JK. "Methods of Bifurcation Theory". New York : Springer ; 1982
- [18] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation.* Wiley, Chichester, UK (2000)
- [19] Salih Djilali, Tarik Mohammed Touaoula and Sofiane El-Hadi Miri. " A Heroin Epidemic Model : Very General Non Linear Incidence, Treat-Age, and Global Stability." Acta Appl Math (2017). DOI : 10.1007/s10440-017-0117-2.
- [20] Salih Djilali "Herd behavior in a predator-prey model with spatial diffusion : bifurcation analysis and Turing instability." Journal of Applied Mathematics and Computing. (2017) pp. 1-25. DOI : <https://doi.org/10.1007/s12190-017-1137-9>
- [21] FANG, Bin, LI, Xue-Zhi, MARTCHEVA, Maia, et al. *Global asymptotic properties of a heroin epidemic model with treat-age.* Applied Mathematics and Computation, 2015, vol. 263, p. 315-331.
- [22] Faria T. "Normal forms and Hopf bifurcation for partial differential equations with delay". Trans Am Math Soc 2000 ;352 :2217-38
- [23] Z. Feng, H.R. Thieme *Endemic models with arbitrarily distributed periods of infection I : fundamental properties of the model.* SIAM J. Appl. Math., 61 (3) (2000), pp. 803-833
- [24] Z. Feng, H.R. Thieme *Endemic models with arbitrarily distributed periods of infection II : fast disease dynamics and permanent recovery.* SIAM J. Appl. Math., 61 (3) (2000), pp. 983-1012
- [25] J.K. Hale *Asymptotic behavior of dissipative systems.* Mathematical Surveys and Monographs vol. 25, American Mathematical Society, Providence, RI (1988)
- [26] J. Hale, P. Waltman *Persistence in infinite dimensional systems.* SIAM J. Math. Anal., 20 (1989), pp. 388-395
- [27] Hassard BD, Kazarinoff ND, Wan YH. "Theory and Applications of Hopf Bifurcation". Cambridge University Press : Cambridge, 1981

- [28] Huang, Jicai, Shigui Ruan, and Jing Song. "Bifurcations in a predator-prey system of Leslie type with generalized Holling type III functional response." *Journal of Differential Equations* 257.6 (2014) : 1721-1752.
- [29] G. Huang, E. Beretta, Y. Takeuchi *Global stability for epidemic model with constant latency and infectious periods.* *Math. Biosci. Eng.*, 9 (2) (2012), pp. 297-312
- [30] G. Huang, Y. Takeuchi *Global analysis on delay epidemiological dynamic models with nonlinear incidence.* *J. Math. Biol.*, 63 (2011), pp. 125-139
- [31] G. Huang, Y. Takeuchi, W. Ma, D. Wei *Global stability for delay SIR and SEIR epidemic models with nonlinear incidence rate.* *Bull. Math. Biol.*, 72 (2010), pp. 1192-1207
- [32] M. Iannelli *Mathematical theory of age-structured population dynamics.* Applied Mathematics Monographs CNRvol. 7, Giadini Editorie Stampatori, Pisa (1994)
- [33] Yang, Junyuan, Xiaoxia Li, and Fengqin Zhang. *Global dynamics of a heroin epidemic model with age structure and nonlinear incidence.* *International Journal of Biomathematics* (2015) : 1650033. pp. 1-20
- [34] A. Korobeinikov *Lyapunov functions and global stability for SIR and SIRS epidemiological models with non-linear transmission.* *Bull. Math. Biol.*, 68 (2006), pp. 615-626
- [35] A. Korobeinikov, A. Global *Properties of infectious disease models with nonlinear incidence.* *Bull. Math. Biol.*, 69 (2007), pp. 1871-1886
- [36] A. Korobeinikov, P.K. Maini *Nonlinear incidence and stability of infectious disease models.* *Math. Med. Biol.*, 22 (2005), pp. 113-128
- [37] Lv Yunfei, Yongzhen Pei, and Rong Yuan. "Hopf bifurcation and global stability of a diffusive Gause-type predator-prey models." *Computers and Mathematics with Applications* 72.10 (2016) : 2620-2635.
- [38] P. Magal, C.C. McCluskey, G.F. Webb *Lyapunov functional and global asymptotic stability for an infection-age model.* *Appl. Anal.*, 89 (7) (2010), pp. 1109-1140
- [39] P. Magal, H.R. Thieme *Eventual compactness for a semiflow generated by an age- structured models.* *Commun Pure Appl. Anal.*, 3 (2003), pp. 695-727
- [40] P. Magal, X.-Q. Zhao *Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems.* *SIAM J. Math. Anal.*, 37 (2005), pp. 251-275
- [41] Kenjiro Maginu. "*Stability of spatially homogeneous periodic solutions of reaction-diffusion equations.*" *Journal of Differential Equations.* V31 (1979) Pages 130-138

- [42] C.C. McCluskey *Global stability for an SEIR epidemiological model with varying infectivity and infinite delay*. Math. Biosci. Eng., 6 (2009), pp. 603-610
- [43] C.C. McCluskey *Global stability for an SIR epidemic model with delay and general nonlinear incidence*. Math. Biosci. Eng., 7 (2010), pp. 837-850
- [44] G. Mulone, B. Straughan *A note on heroin epidemics*. Math. Biosci., 218 (2009), pp. 138-141
- [45] Murray JD. "Mathematical Biology". Springer Verlag : New York, 1989.
- [46] C.V.Pao. "convergence of solutions of reaction-diffusion systems with time delays". Nonlinear Analysis 48 (2002) 349-362
- [47] B. Perthame *Transport Equations in Biology*. Birkhauser, Berlin (2007)
- [48] G.P. Samanta *Dynamic behaviour for a nonautonomous heroin epidemic model with time delay*. J. Appl. Math. Comput., 35 (2011), pp. 161-178
- [49] Hal L. Smith, Horst R. Thieme *Dynamical Systems and Population Persistence*. Grad. Stud. Math., vol. 118 AMS (2011)
- [50] Song Y, Zhang T, Peng Y. "Turing-Hopf bifurcation in the reaction diffusion equations and its applications". Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2015. doi :10.1016/i.cnsns.2015.10.002
- [51] Song YL, Zou XF. "Spatiotemporal dynamics in a diffusive ratio-dependent predator-prey model near a Hopf-Turing bifurcation point". Computers and Mathematics with Applications 2014;67 :1978-1997
- [52] Song YL, Zou XF. "bifurcation analysis of a diffusive ratio-dependent predator-prey model". Non-Lin Dynam 2014;78 :49-70
- [53] Y. Takeuchi, W. Ma, E. Beretta *Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times*. Nonlinear Anal., 42 (2000), pp. 931-947
- [54] X Tang, Y Song. "Turing-hopf bifurcation analysis of a predator-prey model with herd behavior and cross-diffusion" , nonlinear Dyn (2016) Dio 10.1007/s11071-016-2873-3
- [55] X.tang, Y.song. Bifurcation analysis and Turing instability in a diffusive predator prey model with herd behavior and hyperbolic mortality.http ://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2015.10.001.
- [56] Tanner JT. "The stability and the intrinsic growth rates of prey and predator populations". Ecology 1975 ;56 :855-867.
- [57] H.R. Thieme *Semiflows generated by Lipschitz perturbations of non-densely defined operators*. Differ. Integral Eqn., 3 (1990), pp. 1035-1066
- [58] H.R. Thieme *Uniform persistence and permanence for nonautonomous semiflows in population biology*. Math. Biosci., 166 (2000), pp. 173-201

- [59] H.R. Thieme *Mathematics in Population Biology*. Princeton University Press, Princeton (2003)
- [60] H.R. Thieme *Global stability of the endemic equilibrium in infinite dimension : Lyapunov functions and positive operators*. J. Differential Equations, 250 (2011), pp. 3772-3801
- [61] E.Venturino, Modeling herd behavior in population systems. Nonlinear Analysis : Real World Applications,(2013) 12(4), 2319-2338.
- [62] E.Venturino, An ecoepidemic model with diseased predators and prey group defense. Simulation Modelling Practice and Theory, (2013) 34 : 144-155.
- [63] E.Venturino, Ecoepidemics with infected prey in herd defence : the harmless and toxic cases. International Journal of Computer Mathematics ahead-of-print : (2014) 1-20
- [64] E.Venturino, A minimal model for ecoepidemics with group defense. Journal of Biological Systems, (2011) 19.04 : 763-785.
- [65] E. Venturino, "A minimal model for ecoepidemics with group defense" , J. Biol. Syst. 19 (2011) 763-785.
- [66] Venturino E, Petrovskii S. "Spatiotemporal behavior of a prey-predator system with a group defense for prey". Ecological Complexity2013 ; 14 :37-47.
- [67] X.Y. Wang, J. Yang, X. Li *Dynamics of a heroin epidemic model with vary population*. Appl. Math., 2 (2011), pp. 732-738
- [68] G.F. Webb *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*. Marcel Dekker, New York (1985)
- [69] E. White, C. Comiskey *Heroin epidemics, treatment and ODE modelling*. Math. Biosci., 208 (2007), pp. 312-324
- [70] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [71] Wiggins S. "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos". New York : Springer-Verlag ; 2003.
- [72] Wu J. "Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations". New York : Springer Verlag ; 1996.
- [73] Xiao D, Zhu H. "Multiple focus and Hopf bifurcations in a predator-prey system with non-monotonic functional response". SIAM J Appl Math 2006 ;66 :802-19.
- [74] Xie Z. "Turing instability in a coupled predator-prey model with different Holling type functional responses". Discrete Contin Dyn Syst Ser S 2011 ;4 :1621-8.

- [75] Z.Xu et Y.Song, Cross-diffusion induced spatiotemporal patterns in a predator-prey model with herd behavior. *Nonlinear Analysis : Real World Applications* (2015) 24 : 36-49.
- [76] Z.Xu et Y.Song, Bifurcation analysis of a diffusive predator-prey system with a herd behavior and quadratic mortality. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (2014)
- [77] R. Xu, Z. Ma *Global stability of a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay*. *Nonlinear Anal.*, 10 (2011), pp. 3175-3189
- [78] Xu Z, Song Y. "Bifurcation analysis of a diffusive predator-prey system with a herd behavior and quadratic mortality". *Math Meth Appl Sci* 2015 ;38(4) :2994-3006.
- [79] Yan XP. "Stability and Hopf bifurcation for a delayed prey-predator system with diffusion effects". *Applied Mathematics and Computation* 2007 ;192 :552-566.
- [80] X. Yan, C. Zhang, "Stability and Turing instability in a diffusive predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response" , *Nonlinear Anal. RWA*. 20 (2014) 1113.
- [81] R. Yang, J. Wei, "Stability and bifurcation analysis of a diffusive prey-predator system in Holling type III with a prey refuge" , *Nonlinear Dynam*. 79 (2015) 631-646.
- [82] J.Y. Yang, X.Z. Li, M. Martcheva *Global stability of a DS-DI epidemic model with age of infection*. *J. Math. Anal. Appl.*, 385 (2012), pp. 655-671
- [83] Yuan, Sanling, Chaoqun Xu, and Tonghua Zhang. "Spatial dynamics in a predator-prey model with herd behavior." *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 23.3 (2013) : 033102.
- [84] Zhang XC, Sun GQ, Jin Z. "Spatial dynamics in a predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response". *Physical Review E* 2012 ;85 : 0219241-02192414.
- [85] Zhang JF, Li WT, Yan XP. "Hopf bifurcation and Turing instability in spatial homogeneous and inhomogeneous predator-prey models". *Applied Mathematics and Computation* 2011 ;218 :1883-1893.
- [86] Zuo WJ, Wei JJ. "Stability and bifurcation in a ratio-dependent Holling-III system with diffusion and delay" .*Nonlinear Analysis : Modeling and Control* 2014 ;19 :132-153.
- [87] Zuo WJ, Wei JJ. "Stability and Hopf bifurcation in a diffusive predatory-prey system with delay effect". *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 2011 ;12 :1998-2011.
- [88] LUCAS WILLEMS. "Résoudre les équations du troisième degré" <https://www.lucaswillems.com/fr/articles/58/equations-troisieme-degre?cache=update>