الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER
EN MATHEMATIQUES

Options : Probabilités et Statistiques

Stationarité Stricte des Processus Autorégressifs Généralisés.

Mémoire soutenu par : **TABTI Abir**
Le : 06/juillet/2017

Devant le jury composé de :

Président :	M. T. Mourid,	Professeur	Universsité de Tlemcen
Encadreur :	M. A. ALLAM,	M.C	Universsité de Tlemcen
Examinateurs :	Mme. M. Dali Youcef,	M.C	Universsité de Tlemcen
	M. F. Boukhari,	M.C	Universsité de Tlemcen
	M. A. Labbas,	M.C	Universsité de Tlemcen

Année universitaire 2016/2017

Dédicaces

A mes chers parents.
A ma chère tante Noria et mon cher oncle Benaoumeur Alhadj .
A mes chères sœurs Kawther et Houria.
A mes chers frères Yasser, Bakre, Meamaâr.
Ainsi qu'à mes deux trésors Djaafar et Ahmed Djihad.

Remerciements

Avant toute chose, je tiens à remercier Dieu le tout puissant, qui m'a toujours guidée dans tout ce que j'ai entrepris de faire.

J'exprime mes profonds remerciements, ma vive reconnaissance et ma sinsère gratitude à **M. A. ALLAM**, maitre de conférences à la faculté des Sciences,de l' Universsité Abou Bekr BelKaid pour avoir accepté de m'encadrer et pour ses conseils et ses précieuses orientations qu'il n'a cessé de m'apporter tout au long de ce travail.

J'adresse mes sinsères remerciements à **M. T. Mourid** professeur à la faculté des sciences, Universsité Abou Bekr BelKaid pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également **Mme M. Dali Youcef**, **M. F. Boukhari** et **M. A. Labbas**, maitres de conférences à la faculté des Sciences, Universsité Abou Bekr BelKaid de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner ma thèse de Master.

Mes remerciements vont aussi à tous mes professeurs qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué, à l'accomplissement de ce travail.

Plus que quiconque, il me faut remercier ma chère mère qui m'a apporté son appui durant toutes mes années d'études, pour son sacrifice et son soutien qui m'ont donné confiance, courage et sécurité.

Je remercie mon cher père qui m'a appris le sens de la persévérance tout au long de mes études, pour son sacrifice, ses conseils et ses encouragements.

Mes sentiments de reconnaissance et mes remerciements vont également à tous mes amis pour les sympathiques moments que nous avons passés ensemble.

Enfin je remercie gracieusement toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Tlemcen, le 17 juillet 2017.

Table des matières

Introduction

Au cours des dernières années, il y a eu un intérêt croissant pour diverses généralisations de processus autorégressifs. Entre autres, on trouve les classe des autorégressifs à coefficients aléatoires RCA, de modèles à moyenne mobile multivariée (ARMA) avec des perturbations non gaussiennes, des modèles bilinéaires, des modèles autorégressifs généralisés avec des processus d'hétéroscédastiques conditionnelle (GARCH) [voir par exemple, Andel (1976), Vervaat (1979), Nicholls et Quinn (1982), Caines (1988), Granger et Andersen (1978), Engle et Bollerslev (1986)]. Ces processus sont habituellement introduits pour modéliser les séries temporelles stationnaires. Par conséquent, les propriétés de stationnarité doivent être étudiées attentivement.

Nous traitons, dans ce mémoire, le problème d'existence d'une solution strictement stationnaire de l'équation stochastique

$$X_{n+1} = A_n X_n + B_n, \quad n \geq 0. \tag{1}$$

Dans de nombreux travaux, les couples (A_n, B_n) sont supposés être des vecteurs aléatoires $i.i.d.$ Cependant, du point du vue de l'application mentionnée dans [Vervaat (1979)] cette hypothèse semble être restrictive.

Ce mémoire se base essentiellement sur les articles suivants :
1) BOUGEROL, P. and PICARD N. *Strict stationarity of Generalized Autoregressive Processes.* The Annals of Probability, Vol. 20, No 4, 1992, pp. 1714-1730.
2) BRANDT, A. *The stochastic equation* $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ *with stationary coefficients*, Adv. in Appl. Probab. Vol.18,No 1, 1986, pp. 211-220.
Il est composé de trois chapitres. Dans le premier, nous rappelons quelques notions, en particulier, la stationnarité et l'ergodicité, ainsi que quelques propriétés et résultats qui nous seront utiles.
Dans le deuxième chapitre, nous développerons les résultats dus à BRANDT ([8]) qui a donné des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution strictement stationnaire $(X_n(\Psi))$ de l'équation 1 avec une suite $\Psi = (A_n, B_n)_n$ stationnaire et ergodique. L'auteur montre aussi, sous certaines conditions sur les moments, que pour toute suite $(\Psi^r = (A^r_n, B^r_n)_n)_r$ qui converge en loi vers Ψ, la suite des solutions $(X_n(\Psi^r))_n$ de l'équation 1 associée à la suite des coefficients Ψ^r converge en loi vers $(X_n(\Psi))_n$. Nous terminerons ce chapitre par des exemples qui montrent que certaines conditions sont

nécessaires.
Dans le troisième chapitre, nous présenterons les résultats de Bougerol ([6]) qui considère l'équation 1 dans $\mathbb{R}^d$ et s'intéresse au solution non anticipative (indépendante du futur) dans le cas où (A_n, B_n) sont $i.i.d.$ Son résultat principal est que sous une condition d'irréductibilité, il existe une solution strictement stationnaire non anticipative si, et seulement si, le premier exposant de Lyapounov est strictement négatif. C'est qui constitue une réciproque du résultat de BRANDT.

Chapitre introductif 1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, sur lequel nous considérerons un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ avec $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Dans toute la suite $\mathcal{L}(X)$ désigne la loi de la variable aléatoire X.
On note

$$\mathbb{R}^T = \{x = (x_t)_{t\in T} / x_t \in \mathbb{R}, \forall t \in T\}.$$

On appelle tribu produit sur $\mathbb{R}^T$ la plus petite tribu rendant mesurables les applications coordonnées :

lorsque t parcours T, on la note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^T}$.

Soit maintenant l'application :

$$\begin{array}{rccc} X: & \Omega & \to & \mathbb{R}^T \\ & X(\omega) & \mapsto & (X_t)_{t\in T} \end{array}$$

On a alors $(X_t)_{t\in T}$ est un processus stochastique à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ si, et seulement si, l'application X est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}$ dans $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^T})$. On peut identifier donc un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ et une application mesurable X. Ainsi, la loi d'un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$, la probabilité image de $\mathbb{P}$ par X, sont notées $\mathbb{P}_X$, de sorte que si $A = \mathbb{R} \times ...\mathbb{R} \times A_i \times A_{i+1} \times ... \times A_{i+k} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^T}$, avec $i \in T$ et $k \geq 0$ alors

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X_i \in A_i, X_{i+1} \in A_{i+1}, ..., X_{i+k} \in A_{i+k}).$$

La loi $\mathbb{P}_X$ est caractérisée donc par les lois $\mathcal{L}(X_i, X_{i+1}, ..., X_{i+k})$ appelÃ©es les distributions fini-dimensionnelles du processus.

1.1 Processus stationnaires

On distingue généralement la stationnarité au sens strict et la stationnarité au sens faible.

Définition 1.1 *(1) $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ est dit strictement stationnaire si pour tout $p \geq 1$,*

$$\mathcal{L}(X_1, X_2, ..., X_p) = \mathcal{L}(X_2, X_3, ..., X_{P+1}).$$

(2) $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit strictement stationnaire si pour toute suite $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{Z}$ avec $t_1 < t_2 < ... < t_n$ et $h \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{L}(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h}) = \mathcal{L}(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}).$$

Dans le cas des processus indexés par $\mathbb{N}$, pour $k \leq p$ et $l > 0$, comme $\mathcal{L}(X_1, X_2, ..., X_p) = \mathcal{L}(X_2, X_3, ..., X_{p+1})$, on obtient en particulier que $\mathcal{L}(X_k, X_2, ..., X_{p-1}) = \mathcal{L}(X_{k+1}, X_3, ..., X_p)$. Ceci donne, par transitivité, $\mathcal{L}(X_k, X_{k+1}, ..., X_p) = \mathcal{L}(X_{k+l}, X_{k+l+1}, ..., X_{p+l})$.
Un processus stationnaire $\{X_t, t \in T\}$ a la même loi que $\{X_{t+1}, t \in T\}$.
La stationnarité traduit donc la capacité d'un processus à ne pas dépendre de l'indice temporel : Un décalage temporel n'affecte pas la loi.

Proposition 1.1 *Soit $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ un processus stationnaire et φ une application mesurable, alors $\{Y_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ défini par $Y_t = \varphi(X_t, X_{t+1}, \dots)$, est aussi staionnaire. De même si $\{\,X_t,\ t \in \mathbb{Z}\,\}$ stationnaire et Φ est une application mesurable, alors $\{Y_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ défini par $Y_t = \Phi(\dots, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \dots)$, est staionnaire.*

Définition 1.2 *Un processus $\{X_t, t \in T\}$ est dit faiblement stationnaire ou stationnaire au sens faible, si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $\forall t \in T,\ \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$.

(ii) $\forall t \in \mathbb{T},\ \mathbb{E}(X_t) = \mu$.

(iii) $\forall (t,h) \in T^2,\ Cov(X_t, X_{t+h}) = \varphi(h)$.

1.2 Ergodicité

Le théorème ergodique est une version de la loi forte de grands nombres suffisamment générale pour s'appliquer à tout système régi par des lois de probabilités qui sont invariables dans le temps. Avant d'énoncer le théoréme ergodique, nous introduisons succinctement, certains concepts fondamentaux.

Définition 1.3 *On dit que $T : \Omega \to \Omega$ est une transformation qui préserve la mesure $\mathbb{P}$ si elle est mesurable et*

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(T^{-1}A) = \mathbb{P}(A).$$

Définition 1.4 *L'opérateur shift θ est définie sur $\mathbb{R}^\infty$ par :*

$$\theta(..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ...) = (..., x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, ...)\ .$$

Exemple 1.1 *Rappelons que si Π_t est l'opérateur de projection canonique de projection de $\mathbb{R}^T$ sur $\mathbb{R}$, alors $\Pi_t \circ \theta = \Pi_{t+1}$. Donc Si $X = (X_t, t \in T)$ est un processus strictement stationnaire, alors l'opérateur shift θ préserve la loi de X.*

Définition 1.5 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité*

(a) *Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est dit invariant par rapport à T si $T^{-1}(A) = A$; c'est un ensemble invariant non-trivial si $0 < \mathbb{P}(A) < 1$.*

(b) *Une transformation qui préserve la mesure est dite ergodique si pour tout ensemble invariant A, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.*

(c) *Un processus est dit ergodique si l'opérateur shift est ergodique.*

Théorème 1.1 *[1] Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stochastique. Considérons un processus stochastique $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ avec*

$$Y_t = \Phi(\ldots X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \ldots),$$

où Φ est mesurable.
Si $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est strictement stationnaire et ergodique, en particulier si les X_t sont i.i.d, alors $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est strictement stationnaire et ergodique.

Le théorème suivant assure la convergence presque sûre de la moyenne d'une fonction d'une suite strictement stationnaire et ergodique.

Théorème 1.2 (théorème ergodique) *[1] Soit $X = (X_1, X_2, \ldots)$ une suite aléatoire strictement stationnaire et ergodique.*
Pour toute fonction f mesurable tq $\mathbb{E}(|f(X_1)|) < \infty$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) = \mathbb{E}(f(X_1)) \quad p.s.$$

1.3 Convergence en loi

Pour tout vecteur aléatoire $X = (X^{(1)}; \ldots; X^{(d)})'$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on note F_X sa fonction de répartition

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X^{(1)} \leq x_1; \ldots; X^{(d)} \leq x_d), \quad \forall x = (x_1; \ldots; x_d) \in \mathbb{R}^d$$

et Φ_X sa fonction caractéristique

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{it'X}), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$$

pour toute fonction f, on pose

$$C_f = \{x : f \text{ est continue en } x\}.$$

Définition 1.6 *Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. La suite $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge en loi vers X si et seulement si*

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} F_X(x) \quad ,$$

en tout point de continuité x de F_X i.e pour tout $x \in C_F$.
On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Théorème 1.3 *La suite de vecteurs aléatoires $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,*

$$\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi_X(t).$$

Proposition 1.2 *Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ avec $d > 1$.Alors la suite $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$,*

$$\lambda' X_n = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_n^{(i)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^{d} \lambda_i X^{(i)} = \lambda' X$$

Théorème 1.4 *[1] Soient $X_1, X_2, \ldots,$ des variables aléatoires, supposons que*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \ ,$$

si g est une fonction continue, alors

$$g(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} g(X).$$

Lemme 1.1 *[3] Si les couples $(X,Y),(X^1,Y^1),\ldots,$ des variables aléatoires réelles satisfont les conditions suivantes :*

(i) $(X^r,Y^r) \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} (X,Y)$

(ii) $\mathbb{E}(X^r)^+ \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{E}(X)^+$

(iii) $\mathbb{E}(Y^r)^+ \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{E}(Y)^+$,

alors

$$\mathbb{E}(X^r+Y^r)^+ \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{E}(X+Y)^+$$

Lemme 1.2 *[3] Soient $X=\{X_n\}, X^1=\{X_n^1\}, X^2=\{X_n^2\},\ldots,$ des suites stationnaires et ergodiques de variables aléatoires rélles qui satisfont les conditions suivantes :*

(i) X *est ergodique et* $\mathbb{E}(X_0)<\infty$

(ii) $X^r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} X$

(iii) $\mathbb{E}(X_0^r)^+ \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{E}(X_0)^+$,

alors

$$\limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\big(\sup_{j>N} \sum_{i=n-j}^{n-1} X_i^r \geq 0\big) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad n\in\mathbb{Z}\,. \tag{1.1}$$

Théorème 1.5 *[1] Soit $(X_{kn})_{k,n}$ une suite de variables aléatoires doublement indexée à valeurs dans un espace metrique (E,d). Supposons pour chaque k que, $X_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X_k$ et*

$$X_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{L}} X \ ,$$

supposons en outre que $\lim\limits_{k\to+\infty} \limsup\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(d(X_{nk},Y_n)\geq\epsilon\big)=0$ pour tout $\epsilon>0$ alors,

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$$

Théorème 1.6 *Soient $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}$ des mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}^\infty,\mathcal{R}^\infty)$. Alors $\mathbb{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}$ si et seulement si $\mathbb{P}_n\pi_k^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\pi_k^{-1}$ pour chaque k, où $\pi_k:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}^k$ sont les projections canoniques définies par $\pi_k(x)=(x_1,\ldots,x_k)$, pour $x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $k=1,2,\ldots$.*

Théorème 1.7 *Soit* $(E, \mathcal{F})$, $(E', \mathcal{F}')$ *deux espaces mesurables et* f *une fonction* $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$*-mesurable de* $\mathcal{E}$ *dans un autre espace métrique* $\mathcal{E}'$*. Si* f *est continue en chaque point d'un certain ensemble séparable et* $\mathcal{F}$*-mesurable* C*, alors* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$ *et* $\mathbb{P}(X \in C) = 1$ *impliquent que*

$$f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} f(X).$$

1.4 Quelques notions topologiques

Définition 1.7 *Un groupe topologique est un groupe* $(G, *)$ *muni d'une topologie pour laquelle les applications*

$$\begin{array}{ccc} G^2 & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & x*y \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

sont continues.

Définition 1.8 *un semi-groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative. Il est dit commutatif si sa loi est de plus commutative.*

Définition 1.9 *Le support d'une mesure, ou plus généralement d'une distribution, est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel elle est nulle :*

$$\operatorname{supp} T = \Big(\bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ \mu(U)=0}} U \Big)^c$$

Corollaire 1.1 *Sur un groupe localement compact* G*, il existe une mesure positive non nulle* λ *définie sur les boréliens de* G *et qui est invariante par les translations à gauche. Autrement dit, pour toute partie borélienne* B *de* G*, et pour tout* g *dans* G*, on a :*

$$\lambda(gB) = \lambda(B).$$

De plus, cette mesure est unique et on l'appelle mesure de Haar du groupe G *et elle est finie sur les parties compactes de* G*.*

Exemple 1.1 *:*

- $G = \mathbb{R}$ *: La mesure de Lebesgue est une mesure de Haar.*
  i.e pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*,* $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ *où* $A + x = \{a + x : a \in A\}$.

- $G = \mathbb{Z}$ *: La mesure de comptage est une mesure de Haar.*

ÉQUATION STOCHASTIQUE $X_{n+1} = A_n X_n + B_n$ AVEC DES COEFFICIENTS STATIONNAIRES.

2

2.1 Introduction

Considérons l'équation stochastique

$$X_{n+1} = A_n X_n + B_n \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

où $\{(A_n, B_n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ est une suite strictement stationnaire et ergodique à valeur dans $\mathbb{R}^2$. Dans ce chapitre, aucune hypothèse d'indépendance n'a été faite. Ainsi, le premier objectif est de trouver des conditions qui garantissent l'existence d'une solution stationnaire déterminée de manière unique de (2.1).

Notons aussi que pour toute variable aléatoire réelle X définit sur le même espace de $\Psi = \{(A_n, B_n)\ n \in \mathbb{Z}\}$, nous nous intéressons à la convergence presque sûre de la suite

$$x_n(X, \Psi) = \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\prod_{i=n-j}^{n-1} A_i \Big) B_{n-j-1} + \Big(\prod_{i=0}^{n-1} A_i \Big) X, \tag{2.2}$$

quand n tend vers ∞.

2.2 Existence d'une solution strictement stationnaire et ergodique

Quinn (1982) a étudié l'existence d'une solution strictement stationnaire et ergodique pour les modèles bilinéaires, définis par l'équation

$$X_n = aX_{n-1} + be_n X_{n-1} + e_n \ ,$$

où (e_n) est une suite de variables aléatoires strictement stationnaire et ergodique.
Il a montré que les conditions $\mathbb{E}(\log|a + be_n|) < 0$ et $(\mathbb{E}(\log|a + be_n|) \leq 0)$ sont nécessaires et suffisantes pour l'existence de cette solution. Les mêmes arguments appliqués à l'équation (2.1) donnent le résultat qui suit.

Théorème 2.1 *Si la suite* $\Psi = \{(A_n, B_n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ *est stationnaire et ergodique et une des conditions :*

$$-\infty \leq \mathbb{E}(\log|A_0|) < 0 \ \ et \ \ \mathbb{E}(\log|B_0|)^+ < \infty \quad , \tag{2.3}$$

où $x^+ = max(0, x)$ *sur* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(A_0 = 0) > 0 \quad , \tag{2.4}$$

est satisfaite, alors

$$X_n(\Psi) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\prod_{i=n-j}^{n-1} A_i \Big) B_{n-j-1} \quad ; n \in \mathbb{Z} \tag{2.5}$$

avec $(\prod_{i=n}^{n-1} A_i = 1)$*, étant la seule solution stationnaire de* (2.1) *pour le* Ψ *donné. La somme du côté droite de* (2.5) *converge absolument presque sûrement.*
De plus,

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to+\infty} |x_n(X,\Psi) - X_n(\Psi)| = 0 \Big) = 1 \ , \tag{2.6}$$

en particulier

$$x_n(X,\Psi) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0(\Psi). \tag{2.7}$$

Avant de prouver le théorème 2.1, nous introduisons une notation et établissons un lemme. Pour la suite $\Psi = \{(A_n, B_n)\}$ des couples aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et la variable aléatoire X, notons

$$x_n^k(X,\Psi) = \sum_{j=0}^{k-1} \Big(\prod_{i=n-j}^{n-1} A_i \Big) B_{n-j-1} + \Big(\prod_{i=n-k}^{n-1} A_i \Big) X, \ \ n \in \mathbb{Z}, \ \ k \geq 0.$$

Évidemment,

$$x_n(X,\Psi) = x_n^n(X,\Psi), \ \ n \geq 0 \ ,$$

et

$$X_n(\Psi) = \lim_{k\to+\infty} x_n^k(0,\Psi) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\prod_{i=n-j}^{n-1} A_i \Big) B_{n-j-1}.$$

Lemme 2.1 *Si* Ψ *satisfait les hypothèses du théorème 2.1 alors la série du côté droit de* (2.5) *converge absolument presque sûrement.*

Preuve. Montrons que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \big(\prod_{i=n-j}^{n-1} A_i \big) B_{n-j-1}$, $n \in \mathbb{Z}$ converge *p.s.*
Supposons que

$$\mathbb{P}(A_0 = 0) > 0.$$

On a par le théorème ergodique

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{A_k=0\}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(A_0 = 0) > 0 \ \ p.s.,$$

et donc $p.s$

$$Card(\{k < 0 : A_k = 0\}) = Card(\{k \geq 0 : A_k = 0\}) = \infty. \tag{2.8}$$

Cela implique que la série $X_n(\Psi)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. Donc elle converge presque sûrement.
Supposons maintenant que

$$A_0 \neq 0 \ ,$$

on définit la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$Z_0 = B_{n-1} \ \ et \ \ Z_k = \prod_{i=1}^{k} A_{n-i} B_{n-k-1}\,, \ \ pour \ \ \ k \geq 1.$$

On a :

$$\begin{aligned}\log|Z_k| &= \log\prod_{i=1}^{k}|A_{n-i}||B_{n-k-1}| \\ &= \log|B_{n-k-1}| + \sum_{i=1}^{k}\log|A_{n-i}|,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{k}\log|Z_k| = \frac{1}{k}\log|B_{n-k-1}| + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log|A_{n-i}|.$$

D'autre part si

$$\mathbb{E}(\log|B_0|)^+ < \infty,$$

alors

$$\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(\log|B_0| > k\log a) < \infty \quad \forall a > 1$$

ce qui implique que

$$\mathbb{P}(\limsup_k\{|B_0|^{\frac{1}{k}} > a\}) = 0,$$

donc par l'hypothèse (2.3) et le théorème ergodique, nous obtenons

$$\limsup_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\log|Z_k| \leq \mathbb{E}(\log|A_0|) < 0 \quad p.s$$

et ainsi

$$\limsup_{k\to+\infty}(|A_{n-1}||A_{n-2}|\ldots|A_{n-k}||B_{n-k-1}|)^{\frac{1}{k}} < \exp\left(\mathbb{E}(\log|A_0|)\right) < 1 \quad p.s$$

et par le critère de Cauchy, la série

$$\sum_{k\geq 0}\Big(\prod_{i=n-k}^{n-1} A_i\Big)B_{n-k-1} \quad converge\ p.s.$$

□

Preuve du théorème 2.1. Nous allons d'abord démontrer l'assertion (2.6). Il résulte de (2.2) et (2.5) que

$$\begin{aligned}
|x_n(X,\Psi) - X_n(\Psi)| &= \Big|\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\prod_{i=n-j}^{n-1} A_i\Big)B_{n-j-1} + \Big(\prod_{i=0}^{n-1} A_i\Big)X - \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\prod_{i=n-j}^{n-1} A_i\Big)B_{n-j-1}\Big| \\
&= \Big| - \sum_{j=n}^{\infty}\Big(\prod_{i=n-j}^{n-1} A_i\Big)B_{n-j-1} + \Big(\prod_{i=0}^{n-1} A_i\Big)X\Big| \\
&= \Big|\Big(\prod_{i=0}^{n-1} A_i\Big)B_{-1} + \Big(\prod_{i=-1}^{n-1} A_i\Big)B_{-2} + \cdots + \Big(\prod_{i=0}^{n-1} A_i\Big)X\Big| \\
&\le \prod_{i=0}^{n-1}|A_i|\big|B_{-1} + A_{-1}B_{-2} + A_{-1}A_{-2}B_{-3} + \cdots + X\big| \\
&\le \prod_{i=0}^{n-1}|A_i|\big(|x_0(\Psi)| + |X|\big).
\end{aligned}$$

Sous la condition (2.3) et en utilisant le théorème ergodique 1.2, nous obtenons

$$\prod_{i=0}^{n-1}|A_i| = \Big(\exp\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log|A_i|\Big)\Big)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad p.s. \quad (*)$$

Si la condition (2.4) est satisfaite alors par (2.8) on déduit que pour tout n suffisamment grand, que

$$\prod_{i=0}^{n-1}|A_i| = 0 \quad p.s \quad (**)$$

ainsi l'assertion (2.6) est réalisée. De (2.6), on obtient

$$|x_n(X,\Psi) - X_n(\Psi)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

comme $X_n(\Psi) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_0(\Psi)$ alors

$$x_n(X,\Psi) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X_0(\Psi),$$

d'où la relation (2.7).
D'autre part, le shift appliqué à Ψ sur le terme à droite de (2.5) produit le shift de $\{X_n(\Psi)\}$ sur le côté gauche, donc $\{X_n(\Psi)\}$ est stationnaire.

De plus,

$$\begin{aligned}
A_n X_n(\Psi) + B_n &= A_n\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\big(\prod_{i=n-j}^{n-1} A_i\big)B_{n-j-1}\Big) + B_n \\
&= A_n B_{n-1} + \prod_{i=n-1}^{n} A_i B_{n-2} + \prod_{i=n-2}^{n} A_i B_{n-3} + \cdots + B_n \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\big(\prod_{i=(n+1)-j}^{(n+1)-1} A_i\big)B_{(n+1)-j-1}\Big) + B_{(n+1)-1} \\
&= \Big(\sum_{j=0}^{\infty}\big(\prod_{i=(n+1)-j}^{(n+1)-1} A_i\big)B_{(n+1)-j-1}\Big) \\
&= X_{n+1}(\Psi) \quad p.s
\end{aligned}$$

i.e, l'équation (2.1) est presque sûrement satisfaite.
Ainsi $\{X_n(\Psi)\}$ est une solution stationnaire de l'éqaution (2.1) pour Ψ .
Il reste à montrer l'unicité de la solution, pour cela supposons que $\{Y_n(\Psi)\}$ est une autre solution strictement stationnaire de (2.1) *i.e*, $Y_{n+1}(\Psi) = A_n Y_n + B_n \quad p.s.$, il s'en suit que

$$\begin{aligned}
|Y_n(\Psi) - X_n(\Psi)| &= |A_{n-1}Y_{n-1}(\Psi) + B_{n-1} - A_{n-1}X_{n-1}(\Psi) - B_{n-1}| \\
&= |A_{n-1}(Y_{n-1}(\Psi) - X_{n-1}(\Psi))| \\
&= |A_{n-1}||(Y_{n-1}(\Psi) - X_{n-1}(\Psi))| \\
&= |\prod_{i=1}^{k} A_{n-i}||(Y_{n-k}(\Psi) - X_{n-k}(\Psi))| \\
&\leq |\prod_{i=1}^{k} A_{n-i}||Y_{n-k}(\Psi)| + |\prod_{i=1}^{k} A_{n-i}||X_{n-k}(\Psi)|.
\end{aligned}$$

Si (2.3) et (2.4) sont satisfaites, d'après $(*)$ et $(**)$ et comme $\{Y_n(\Psi)\}$ et $\{X_n(\Psi)\}$ sont des suites stationnaires alors

$$|\prod_{i=1}^{k} A_{n-i}||Y_{n-k}\Psi)| \xrightarrow[k\to\infty]{\mathbb{P}} 0,$$

et

$$|\prod_{i=1}^{k} A_{n-i}||X_{n-k}(\Psi)| \xrightarrow[k\to\infty]{\mathbb{P}} 0,$$

par suite

$$Y_n(\Psi) - X_n(\Psi) = 0 \;\; ; n \in \mathbb{Z} \quad p.s$$

i.e $\{X_n(\Psi)\}$ est l'unique solution stationnaire de (2.1) pour Ψ. $\square$

Remarque 2.1 *Le résultat de l'unicité obtenu dans la démonstration du théorème 2.1 assure que si* $\{Y_n\}$ *est une solution stationnaire de* (2.1) *pour* Ψ*, alors* $Y_n = X_n(\Psi)$, $n \in \mathbb{Z}$*, p.s., ce qui implique que*

$$\{Y_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \overset{\mathcal{L}}{=} \{X_n(\Psi)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

Théorème 2.2 *Soient* $\Psi, \Psi^1, \Psi^2, \dots,$ *des suites stationnaires et ergodiques qui satisfont les conditions suivantes :*

$$\Psi^r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \Psi \ ; \tag{2.9}$$

$$a^r \xrightarrow[r\to\infty]{} a \quad ; \quad \mathbb{E}(\log|A_0^r|)^+ \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{E}(\log|A_0|)^+ \ ; \tag{2.10}$$

$$b^r \xrightarrow[r\to\infty]{} b \quad ; \quad \mathbb{E}(\log|B_0^r|)^+ \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{E}(\log|B_0|)^+ \ ; \tag{2.11}$$

où les moments :
$a = \mathbb{E}(\log|A_0|)$, $a^r = \mathbb{E}(\log|A_0^r|)$, $b = \mathbb{E}(\log|B_0|)$ *et* $b^r = \mathbb{E}(\log|B_0^r|)$
sont finis et $-\infty < a < 0$, $-\infty < a^r < 0$ *pour* $r \geq 1$.
Soient $\{X_n(\Psi)\}, \{X_n(\Psi^1)\}, \dots,$ *des solutions stationnaires de* (2.1) *pour* $\Psi, \Psi^1, \dots,$ *alors :*

$$\Big\{\big(A_n^r, B_n^r, X_n(\Psi^r)\big)\Big\}_{n=-\infty}^{\infty} \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \Big\{\big(A_n, B_n, X_n(\Psi)\big)\Big\}_{n=-\infty}^{\infty} \tag{2.12}$$

dans $(\mathbb{R}^3)^{\mathbb{Z}}$*, en particulier*

$$\big\{X_n(\Psi^r)\big\}_{n=-\infty}^{\infty} \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \big\{X_n(\Psi)\big\}_{n=-\infty}^{\infty} \tag{2.13}$$

Avant de prouver le théoreme 2.2, nous établissons le lemme suivant.

Lemme 2.2 *Soient* $X = \{X_n\}, X^1 = \{X_n^1\}, X^2 = \{X_n^2\}, \dots,$ *des suites stationnaires et ergodiques des v.a.r et supposons que les moments* $a = \mathbb{E}(X_0)$, $a^r = \mathbb{E}(X_0^r)$ *pour* $r \geq 1$ *existent et sont finis. Si*

$$X^r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} X \tag{2.14}$$

et

$$a^r \xrightarrow[r\to\infty]{} a \quad ; \quad \mathbb{E}(X_0^r)^+ \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{E}(X_0)^+ \quad , \tag{2.15}$$

alors

$$\sup_r \mathbb{P}\big(\sup_{j>N} \big|\frac{1}{j}\sum_{i=n-j}^{n-1} X_i^r - a^r\big| \geq \delta\big) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \tag{2.16}$$

et

$$\sup_r \mathbb{P}\big(\sup_{j>N} \frac{1}{j}|X_{n-j}^r| \geq \delta\big) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \tag{2.17}$$

où δ *est un nombre réel positif arbitraire.*

Preuve. On montre l'assertion (2.16).
De (2.14) et (2.15) et puisque les fonctions $x \mapsto x^+$ et $x \mapsto x^-$ sont continue alors

$(X_0^r)^+ \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0^+$ et $(X_0^r)^- \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0^-$.
D'autre part, soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ dans $\mathbb{R}^2$. On a

$$\lambda'((X_0^r)^+ + (a^r)^-, -((X_0^r)^- + (a^r)^+ + \delta)) = \lambda_1 (X_0^r)^+ - \lambda_2 (X_0^r)^- + \lambda_1 (a^r)^- - \lambda_2 (a^r)^+ - \lambda_2 \delta.$$

Comme la fonction qui associe à chaque x, $\lambda_1 x^+ - \lambda_2 x^-$ est continue alors la proposition 1.2 entraine

$$\big((X_0^r)^+ + (a^r)^-, -((X_0^r)^- + (a^r)^+ + \delta)\big) \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \big(X_0^+ + a^-, -(X_0^- + a^+ + \delta)\big).$$

Comme

$$\mathbb{E}\big((X_0^r)^+ + (a^r)^-\big)^+ \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{E}\big(X_0^+ + a^-\big)^+$$

et

$$\mathbb{E}\big(-((X_0^r)^- + (a^r)^+ + \delta)\big)^+ \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{E}\big(-(X_0^- + a^+ + \delta)\big)^+ .$$

En appliquant le lemme 1.1 on obtient

$$\mathbb{E}\big(X_0^r - a^r - \delta\big)^+ \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{E}\big(X_0 - a - \delta\big)^+.$$

Maintenant, le lemme 1.2 donne

$$\limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{j>N} \sum_{i=n-j}^{n-1} (X_i^r - a^r - \delta) \geq 0\Big) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

et ainsi

$$\limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{j>N} \frac{1}{j} \sum_{i=n-j}^{n-1} X_i^r - a^r \geq \delta\Big) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 . \tag{2.18}$$

Pour les suites $\{-X_n\}, \{-X_n^1\}, \{-X_n^2\}, \ldots$, les hypothèses du lemme 1.2 sont également satisfaites. Ainsi pour ces suites (2.18) conduit à

$$\limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{j>N} \frac{1}{j} \sum_{i=n-j}^{n-1} (-X_i^r) - (-a^r) \geq \delta\Big) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \tag{2.19}$$

combinant (2.18) et (2.19) on obtient

$$\limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{j>N} \Big|\frac{1}{j} \sum_{i=n-j}^{n-1} X_i^r - a^r\Big| \geq \delta\Big) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \tag{2.20}$$

et donc

$$\sup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{j>N} \Big|\frac{1}{j} \sum_{i=n-j}^{n-1} X_i^r - a^r\Big| \geq \delta\Big) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \tag{2.21}$$

Maintenant, on prouve (2.17), pour cela posons

$$Y_{n,i}^r = \frac{1}{j} \sum_{i=n-j}^{n-1} X_i^r - a^r.$$

Alors

$$\begin{aligned}
Y^r_{n,j} &= \frac{1}{j}\sum_{i=n-j}^{n-1} X^r_i - a^r \\
&= \frac{1}{j}\sum_{i=n-j+1}^{n-1} X^r_i - a^r + \frac{1}{j}X^r_{n-j} - \\
&= \frac{1}{j}\frac{j-1}{j-1}\sum_{i=n-j+1}^{n-1} X^r_i - a^r + \frac{1}{j}X^r_{n-j} \\
&= \frac{j-1}{j}Y^r_{n,j-1} - \frac{1}{j}a^r + \frac{1}{j}X^r_{n-j} \\
&= (1-\frac{1}{j})Y^r_{n,j-1} - \frac{1}{j}a^r + \frac{1}{j}X^r_{n-j},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{j}X^r_{n-j} = Y^r_{n,j} - (1-\frac{1}{j})Y^r_{n,j-1} + \frac{1}{j}a^r.$$

De (2.16) et $a^r \xrightarrow[r\to\infty]{} a$, on obtient

$$\sup_r \mathbb{P}\big(\sup_{j>N}\frac{1}{j}|X^r_{n-j}| \geq \delta\big) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

$\square$

Preuve du théorème 2.2. Si :

$$\big(\Psi^r, X_0(\Psi^r)\big)_n \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \big(\Psi, X_0(\Psi)\big)_n \tag{2.22}$$

dans $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}$ alors par la relation $X_1(\Psi^r) = A^r_0 X_0(\Psi) + B^r_0$ (aussi sans r) et le théorème 1.4, on obtient

$$\left(\Psi^r, \left\{X_k(\Psi^r)\right\}_{k=0}^n\right) \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \left(\Psi, \left\{X_k(\Psi)\right\}_{k=0}^n\right),$$

dans $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^{n+1}$ pour n=1, puis pour tout $n > 0$ par itération.
Par stationnarité de la suite, et le théorème 1.6 on obtient

$$\left\{\left(A^r_n, B^r_n, X_n(\Psi^r)\right)\right\}_{n=-\infty}^{\infty} \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \left\{\left(A_n, B_n, X_n(\Psi)\right)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Nous allons maintenant prouver (2.22).
Notons pour $N \geq 0$

$$R^N_0(\Psi^r) = \sum_{j=N+1}^{\infty}\Big(\prod_{i=-j}^{-1} A^r_i\Big)B^r_{-j-1},$$

on a

$$X_0(\Psi^r) = x^N_0(0,\Psi^r) + R^N_0(\Psi^r),$$

de plus

$$x_0^N(0,\Psi^r) = g_N((A_1^r, B_1^r), \dots, (A_N^r, B_N^r)) \tag{2.23}$$

où

$$g_N : \quad (\mathbb{R}^2)^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) = ((x_1,y_1)\dots,(x_N,y_N)) \mapsto g_N(x,y) = \sum_{j=0}^{N} (\prod_{i=-j}^{-1} x_i) y_{-j-1}$$

puisque, c'est une somme de produits, g est une fonction continue. Par le théorème 1.4 et la condition 2.9, nous avons

$$x_0^N(\Psi^r) \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} x_0^N(\Psi).$$

Comme la différence $x_0^N(\Psi) - X_0(\Psi)$ tend vers 0 *p.s.* quand N tend vers $+\infty$ alors par le théorème 1.5 il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{N\to+\infty} \limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\big(|\sum_{j=N+1}^{\infty} B_{-j-1}^r \prod_{i=-j}^{-1} A_i^r| > \epsilon\big) = 0. \tag{2.24}$$

Soit $\delta > 0$ tel que $a + 3\delta < 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ suffisament grand tel que

$$\varepsilon > \sum_{j=N+1}^{\infty} \exp(j(a+3\delta)) = \sum_{j=N+1}^{\infty} (\exp(a+3\delta))^j$$

Si $a^r \xrightarrow[r\to\infty]{} a$ alors pour tout $\delta > 0$, il existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|a^r - a| < \varepsilon$ pour $r \geq r_0$. Il en découle que

$$\lim_{N\to+\infty} \limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|\sum_{j=N+1}^{\infty} B_{-j-1}^r \prod_{i=-j}^{-1} A_i^r| > \sum_{j=N+1}^{\infty} \exp(j(a+3\delta))\Big)$$

$$\leq \lim_{N\to+\infty} \limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} |B_{-j-1}^r| \prod_{i=-j}^{-1} |A_i^r| > \sum_{j=N+1}^{\infty} \exp(j(a+3\delta))\Big)$$

$$\leq \lim_{N\to+\infty} \limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} |B_{-j-1}^r| \prod_{i=-j}^{-1} |A_i^r| > \sum_{j=N+1}^{\infty} \exp(j(a^r+\delta)) \exp(j\delta)\Big)$$

$$\leq \lim_{N\to+\infty} \limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\cup_{j>N} \{\prod_{i=-j}^{-1} |A_i^r| > \exp(j(a^r+\delta))\}\Big)$$

$$+ \lim_{N\to+\infty} \limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\cup_{j>N} \{|B_{-j-1}^r| > \exp(j\delta)\}\Big)$$

$$\leq \lim_{N\to+\infty} \limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\cup_{j>N} \{\frac{1}{j} \sum_{i=-j}^{-1} \log|A_i^r| > a^r + \delta\}\Big)$$

$$+ \lim_{N\to+\infty} \limsup_{r\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\cup_{j>N} \{\frac{1}{j} \log|B_{-j-1}^r| > \delta\}\Big)$$

$$\leq \lim_{N\to+\infty} \sup_{r} \mathbb{P}\Big(\sup_{j>N} |\frac{1}{j} \sum_{i=-j}^{-1} \log|A_i^r| - a^r| > \delta\Big) + \lim_{N\to+\infty} \sup_{r} \mathbb{P}\Big(\sup_{j>N} \frac{1}{j} \log|B_{-j-1}^r| > \delta\Big)$$

$$= 0.$$

D'où (2.24). □

2.3 Exemples

Dans cette section on voit que si les conditions (2.10) ou (2.11) dans le théorème 2.2 ne sont pas satisfaites, l'assertion (2.12) n'est pas vérifier en général, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 2.1 *On considère* $\Psi = \{(A_n, B_n)\}$ *défini par*

$$\mathbb{P}(A_n = \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(B_n = 1) = 1,$$

les suites $\Psi^k = \{(A_n^k, B_n^k)\}$ *des couples i.i.d. avec*

$$\mathbb{P}(A_n^k = \exp(\frac{k}{2})) = 1 - \mathbb{P}(A_n^k = \frac{1}{2}) = \frac{1}{k},$$

et

$$\mathbb{P}(B_n^k = 1) = 1.$$

Alors l'hypothèse du théorème 2.2 est satisfaite sauf pour (2.10).
Désignons par $[\frac{k}{2}]$ *la partie entière de* $\frac{k}{2}$. *Puisque* $2(\frac{e}{2})^{k/2} \geq e^{k/2}(\frac{1}{2})^{[\frac{k}{2}]}$, *alors*

$$\mathbb{P}\Big(y_0(\Psi^k) \geq 1 + 2(\frac{e}{2})^{k/2}\Big) \geq \mathbb{P}\Big(y_0(\Psi^k) \geq 1 + e^{k/2}(\frac{1}{2})^{[\frac{k}{2}]}\Big).$$

D'autre part

$$y_0(\Psi^k) = B_{-1}^k + A_{-1}^k B_{-2}^k + A_{-1}^k A_{-2}^k B_{-3}^k + \dots .$$

Soit $C_j = \{\omega / B_{-j}^k(w) = 1\}$, *donc* $\forall j \geq 0$, $\mathbb{P}(C_j) = 1$, *posons* $C = \cap_j C_j$.
Pour $\omega \in C$,

$$y_0(\Psi^k) = 1 + A_{-1}^k + A_{-1}^k A_{-2}^k + A_{-1}^k A_{-2}^k A_{-3}^k + \dots .$$

Considérons l'évènement

$$E = \{\exists 1 \leq j \leq [\frac{k}{2}] \text{ tel que } A_{-j}^k = e^{\frac{k}{2}}\}.$$

On a bien

$$E \subset \{y_0(\Psi^k) \geq 1 + e^{k/2}(\frac{1}{2})^{[\frac{k}{2}]}\}.$$

Comme

$$\mathbb{P}(E) = 1 - (1 - \frac{1}{k})^{[\frac{k}{2}]},$$

alors

$$\mathbb{P}\Big(y_0(\Psi^k) \geq 1 + 2(\frac{e}{2})^{k/2}\Big) \geq 1 - (\frac{k-1}{k})^{k/2+1}.$$

et

$$1 - \big(1 - \frac{1}{k}\big)^{k/2+1} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1 - 1/\sqrt{e}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} y_0(\Psi) &= B_{-1} + A_{-1}B_{-2} + A_{-1}A_{-2}B_{-3} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \\ &= 2 \end{aligned}$$

et donc $\mathbb{P}(y_0(\Psi) = 2) = 1$, *i.e* (2.12) *n'est pas satisfaite.*

Exemple 2.2 *Soient* $\Psi = \{(A_n, B_n)\}$ *comme dans l'exemple 2.1 et les suites* $\Psi^k = \{(A_n^k, B_n^k)\}$ *des couples i.i.d. avec*

$$\mathbb{P}(B_n^k = \exp(k)) = 1 - \mathbb{P}(B_n^k = 1) = \frac{1}{k}$$

et

$$\mathbb{P}(A_n^k = \frac{1}{2}) = 1.$$

Alors l'hypothèse du théorème 2.2 est satisfaite sauf pour (2.11)*. On trouve*

$$\mathbb{P}\Big(y_0(\Psi^k) \geq 1 + (\frac{e}{2})^k\Big) \geq 1 - (\frac{k-1}{k})^{k+1} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1 - 1/e.$$

En effet, soit $D_i = \{\omega \in \Omega / A_i^k(w) = 1\}$, *Donc* $\forall -j \leq i \leq -1$, $\mathbb{P}(D_i) = 1$. *Posons* $D = \cap_i D_i$.
Pour $\omega \in D$

$$y_0(\Psi^k) = B_{-1}^k + \frac{1}{2}B_{-2}^k + \frac{1}{4}B_{-3}^k + \dots.$$

Considérons l'évènement

$$E' = \{\exists 2 \leq j \leq k+1 \textit{ tel que } B_{-j}^k = 1\}.$$

On a

$$E' \subset \{y_0(\Psi^k) \geq 1 + (\frac{e}{2})^k\},$$

ceci entraine

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(y_0(\Psi^k) \geq 1 + (\frac{e}{2})^k\Big) &\geq \mathbb{P}(E') \\ &= 1 - (\frac{k-1}{k})^{k+1} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1 - 1/e, \end{aligned}$$

et (2.12) *n'est pas satisfaite.*

ÉQUATION STOCHASTIQUE $X_{n+1} = A_{n+1}X_n + B_{n+1}$ AVEC DES COEFFICIENTS I.I.D. 3

3.1 Introduction

On considère une équation de différence stochastique multivariée du type

$$X_{n+1} = A_{n+1}X_n + B_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

où X_n et B_n sont des vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^d$, les A_n sont des matrices $d \times d$, et $\{(A_n, B_n), n \in \mathbb{Z}\}$ est un processus strictement stationnaire et ergodique. Les propriétés de stationnarité de ces processus sont directement liées aux propriétés de stationnarité des solutions de (3.1). Il suffit donc de considérer ce modèle général et se limiter à cette situation.

Le but est d'établir un inverse au théorème Brandt. Nous considérons le cas où (A_n, B_n) sont indépendants, identiquement distribués, et nous regardons les solutions strictement stationnaires qui sont " indépendantes du futur " (nous les appelons non anticipative ; voir la définition 3.2).

Le résultat principal (Théorème 3.2) est que sous une condition d'irréductibilité, s'il existe une solution strictement stationnaire non anticipative de (1) alors l'exposant de *Lyapounov* γ est strictement négatif.

3.2 Existence d'une solution strictement stationnaire

Nous considérons un modèle autorégressif généralié avec des coefficients *i.i.d.*
On peut associer à ce modèle une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}^d$: à partir d'un point déterministe x dans $\mathbb{R}^d$, la chaîne est au temps n dans l'état X_n où $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est la solution de (3.1) qui satisfait $X_0 = x$.
La probabilité de transition de cette chaîne de Markove est le noyau $\mathcal{P}$ donné par :

$$\mathcal{P}(x, C) = \mathbb{P}(A_0x + B_0 \in C); \quad x \in \mathbb{R}^d$$

pour tout borélien C de $\mathbb{R}^d$.

Définition 3.1 *Une distribution* $\mathcal{P} - \boldsymbol{invariante}$ *est une mesure de probabilité* m *sur* $\mathbb{R}^d$ *telle que :*

$$m(C) = \int \mathcal{P}(x, C) dm(C)$$

pour tout borélien C *de* $\mathbb{R}^d$*.*

Définition 3.2 *Une solution non-anticipative strictement stationnaire de* (3.1) *est une suite strictement stationnaire* $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *qui est une solution de* (3.1) *telle que, pour tout* $p \in \mathbb{Z}, X_p$ *est indépendante des variables aléatoires* $\{(A_n, B_n), n > p\}$*.*

Lemme 3.1 *Il existe une correspondance bijective entre les solution strictement stationnaires non-anticipative de* (3.1) *et les distribution* $\mathcal{P} - \boldsymbol{invariantes}$

Preuve. Soient $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ une solution strictement stationnaire non-anticipative de (3.1) et soit m la loi commune de X_n. Par défintion de la non-anticipativité ; X_0 est indépendant de (A_1, B_1) et on peut ecrire, pour tout borélien C de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} m(C) &= \mathbb{P}(X_1 \in C) \\ &= \mathbb{P}(A_1 X_0 + B_1 \in C) \\ &= \int \mathbb{P}(A_1 x + B_1 \in C) d\mathbb{P}_{X_0}(x) \\ &= \int \mathcal{P}(x, C) dm(x) \end{aligned}$$

cela montre que m est $\mathcal{P} - \boldsymbol{invariante}$. Inversement, soit m une distribution $\mathcal{P} - \boldsymbol{invariante}$. Considérons une vairable aléatoire X_0 de loi m indépendante de la suite $\{(A_n, B_n);\ n \geq 1\}$. Lorsque n est strictement positif, on définit un processus par la formule $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$. Alors $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markove avec une probabilité de transition $\mathcal{P}$.
Puisque la loi de X_0 est $\mathcal{P} - \boldsymbol{invariant}$ ($\boldsymbol{i.e\ \ stationnaire}$), ce processus $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une solution strictement stationnaire non-anticipative de (3.1). □

Définition 3.3 *Un sous-espace affine E de* $\mathbb{R}^d$ *est dit invariant sous le modèle* (3.1) *si* $\{A_0 x + B_0,\ x \in E\}$ *est contenu dans E presque sûrement. Le modèle* (3.1) *est appelé irréductible si* $\mathbb{R}^d$ *est le seul sous-espace affine invariant.*

Lemme 3.2 *Soit* m *une distribution* $\mathcal{P} - \boldsymbol{invariant}$*. Le sous-espace affine H de dimension minimale tel que* $m(H) = 1$*, est invariant sous le modèle* (3.1)

Preuve. Sous la même notation du lemme 3.1, nous avons

$$\begin{aligned}
1 = m(H) = \mathbb{P}(X_1 \in H) &= \mathbb{P}(A_1X_0 + B_1 \in H) \\
&= \int \mathcal{P}(x, H)dm(x) \\
&= \int \mathbb{P}(A_1x + B_1 \in H)dm(x) \\
&= \int \mathbb{E}\{\mathbb{1}_H(A_1x + B_1)\}dm(x) .
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{1}_H(A_1x + B_1) \leq 1$, alors

$$\mathbb{E}\{\mathbb{1}_H(A_1x + B_1)\} \leq 1 ,$$

donc

$$\mathbb{E}\{\mathbb{1}_H(A_1x + B_1)\} \leq 1. \quad m - p.p$$

par conséquent il existe L tel que $m(L) = 1$ et pour tout $x \in L$

$$\mathbb{E}\{\mathbb{1}_H(A_1x + B_1)\} = 1 ,$$

par suite, pour $x \in L$,

$$\mathbb{1}_H(A_1x + B_1) = 1 \quad p.s$$

ainsi

$$L = \{x \in \mathbb{R}^d; A_1x + B_1 \in H, p.s\}$$

le sous-espace affine $L \cap H$ est tel que $m(L \cap H) = 1$. Par minimalité, H est contenu dans L. Cela montre que $\{A_1x + B_1,\ x \in H\}$ est contenu dans H *p.s.*, donc H est invariant. □

Théorème 3.1 *Considérons un modèle autorégressif généralisé* (3.1) *avec des Coefficients i.i.d. Supposons que ce modèle est irréductible et qu'il possède une solution strictement stationnaire non anticipative $X_n, n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :*

(i) $A_0A_{-1}\ldots A_{-k}$ *converge vers* 0 *presque sûrement quand* $k \to \infty$

(ii) Pour tout entier n

$$X_n = \sum_{k=0}^{+\infty} A_nA_{n-1}\ldots A_{n-k+1}B_{n-k}, \tag{3.2}$$

où la série converge presque sûrement.

(iii) Cette solution est l'unique solution strictement stationnaire de (3.1)

Avant de prouver le théorème 3.1, nous introduisons quelques notations et établissons deux lemmes.

Soit $Aff(d)$ l'ensemble des transformations affine de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Une telle transformation f est définie par

$$f(x) = Ax + b; \quad x \in \mathbb{R}^d$$

où $A \in \mathbb{M}(d)$ et b est un vecteur de $\mathbb{R}^d$.
L'ensemble $Aff(d)$ est donc en bijection avec $\mathbb{M}(d) \times \mathbb{R}^d$ il s'agit d'un espace vectoriel de dimension $d(d+1)$.
La composition de deux transformations définit un produit sur $Aff(d)$, explicitement si $f(x) = Ax + b$ et $g(x) = Cx + d$, alors

$$(f \circ g)(x) = ACx + Ad + b\ ,$$

avec ce produit, $Aff(d)$ est un semi-groupe topologique.
Nous définissons les transformations affines aléatoires $F_n(= F_n^\omega)$ et $\Gamma_n(= \Gamma_n^\omega)$ par :

$$F_n(x) = A_n x + B_n\ ; \quad x \in \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{Z}$$

et

$$\Gamma_n(x) = F_0 \circ F_{-1} \circ \cdots \circ F_{-n}\ ; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Soient μ la loi de F_0, μ_n la loi de Γ_n et $\nu = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\mu_n$. Ce sont des mesures de probabilité sur $Aff(d)$, le support topologique de ν noté S est un sous semi-groupe fermé de $Aff(d)$.
Par hypothèse le modèle est irréductible et (3.1) a une solution strictement stationnaire non-anticipative. Il résulte du lemme ci-dessus qu'il existe une distribution $\mathcal{P} - invariante$, m qui n'est pas portée par un hyperplan.
Le couplage qui associe à l'élément (f, x) dans $Aff(d) \times \mathbb{R}^d$ le vecteur $f(x)$ dans $\mathbb{R}^d$ définie une action de $Aff(d)$ sur $\mathbb{R}^d$.

Lemme 3.3 *[4] Il existe un sous-ensemble mesurable Ω_0 de Ω tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et pour tout ω dans Ω_0 il existe une probabilité m_ω sur $\mathbb{R}^d$ avec les propriétés suivantes : pour toute fonction continue bornée $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int \phi(\Gamma_n^\omega(x))dm(x) = \int \phi(x)dm_\omega(x)\ , \tag{3.3}$$

et pour ν-presque tout f dans $Aff(d)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int \phi[(\Gamma_n^\omega \circ f)(x)]dm(x) = \int \phi(x)dm_\omega(x). \tag{3.4}$$

Soit H_ω le plus petit sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ tel que $m_\omega(H_\omega) = 1$. Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4 *S'il existe une distribution $\mathcal{P}$-invariante m qui n'est pas portée par un hyperplan, alors pour tout $\omega \in \Omega_0$ on a :*

(i) La suite $\{\Gamma_n^\omega; n \geq 0\}$ est bornée dans l'espace vectoriel $Aff(d)$.

(ii) Pour tout point limite Γ_∞^ω de cette suite :

a) l'ensemble $\{\Gamma^\omega_\infty \circ f, f \in S\}$ *est borné.*

b) pour tout f *dans* S, $(\Gamma^\omega_\infty \circ f)(\mathbb{R}^d) = \Gamma^\omega_\infty(\mathbb{R}^d) = H_\omega$.

Démonstration. On fixe un ω dans Ω_0. Supposons que la suite $\{\Gamma^\omega_n; n \geq 0\}$ n'est pas bornée. On peut trouver une sous-suite $\{n_i, i \in \mathbb{N}\}$ et une transformation affine Γ^ω telles que :

$$\lim_{i\to+\infty} \|\Gamma^\omega_{n_i}\| = +\infty,$$

comme $\left(\frac{\Gamma^\omega_{n_i}}{\|\Gamma^\omega_{n_i}\|}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée on peut extraire une sous-suite

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{\Gamma^\omega_{n_i}}{\|\Gamma^\omega_{n_i}\|} = \Gamma^\omega \ .$$

où $\| \ \|$ désigne une norme sur l'espace vectoriel $Aff(d)$.

Soient $H = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \Gamma^\omega(x) = 0\}$ et $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue à support compact. Si $x \notin H$, alors $\Gamma^\omega(x) \neq 0$. Ainsi $\|\Gamma^\omega_{n_i}\| \longrightarrow +\infty$ implique que $(\Gamma^\omega_{n_i}(x))_{i\geq 0}$ n'est pas bornée. ϕ est à support compact donc

$$\lim_{i\to\infty} \phi(\Gamma^\omega_{n_i}(x)) \longrightarrow 0 \ .$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to+\infty} \int \phi(\Gamma^\omega_{n_i}(x))dm(x) &= \lim_{i\to+\infty} \int_H \phi(\Gamma^\omega_{n_i}(x))dm(x) + \lim_{i\to+\infty} \int_{H^c} \phi(\Gamma^\omega_{n_i}(x))dm(x) \\
&= \lim_{i\to+\infty} \int \mathbb{1}_H \phi(\Gamma^\omega_{n_i}(x))dm(x) + \int_{H^c} \lim_{i\to+\infty} \phi(\Gamma^\omega_{n_i}(x))dm(x) \\
&= \lim_{i\to+\infty} \int \mathbb{1}_H \phi(\Gamma^\omega_{n_i}(x))dm(x),
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to+\infty} \left|\int \phi(\Gamma^\omega_{n_i}(x))dm(x)\right| &= \lim_{i\to+\infty} \left|\int \mathbb{1}_H \phi(\Gamma^\omega_{n_i}(x))dm(x)\right| \\
&\leq \sup_x |\phi(x)| \int \mathbb{1}_H dm(x) \\
&= \sup_x |\phi(x)| m(H).
\end{aligned}$$

D'autre part, par (3.3) on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to+\infty} \left|\int \phi(\Gamma^\omega_{n_i}(x))dm(x)\right| &= \left|lim_{i\to+\infty} \int \phi(\Gamma^\omega_{n_i}(x))dm(x)\right| \\
&= \left|\int \phi(x)dm_\omega(x)\right|
\end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\left|\int \phi(x)dm_\omega(x)\right| \leq \sup_x |\phi(x)| m(H) \ ,$$

comme m_ω est une mesure de probabilité, $m(H) = 1$. Puisque m n'est pas portée par un hyperplan affine, H doit être égal à $\mathbb{R}^d$, donc $\Gamma^\omega = 0$ sur $\mathbb{R}^d$, mais ceci est impossible puisque $\|\Gamma^\omega\| = 1$. Par conséquent, la suite $(\Gamma_n^\omega,\ n \geq 0)$ est bornée, d'où (i).
Maintenant pour (ii) $a)$. Soit Γ_∞^ω une limite de la suite la suite $(\Gamma_n^\omega,\ n \geq 0)$.
On a alors par (3.4) pour ν-presque tout f

$$\int \phi\big((\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x)\big)dm(x) = \int \phi(x)dm_\omega(x), \tag{3.5}$$

pour tout fonction ϕ continue bornée.
Soit $(f_k)_k$ une suite dans $Aff(d)$ vérifiant (3.5) pour tout $k \geq 0$ et telle que $(f_k)_k$ converge vers f.
Puisque Γ_∞^ω, ϕ sont continues, ϕ est à support compact alors

$$\begin{aligned}\int \phi\big((\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x)\big)dm(x) &= \int \phi\big(\Gamma_\infty^\omega(\lim_{k\to\infty} f_k(x))\big)dm(x)\\ &= \lim_{k\to\infty}\int \phi\big(\Gamma_\infty^\omega(f_k(x))\big)dm(x)\\ &= \int \phi(x)dm_\omega(x)\ .\end{aligned}$$

L'ensemble E des transformations affines f pour lesquelles (3.5) est vérifiée est un fermé, donc son complémentaire est un ouvert de ν mesure nulle, il est par conséquent inclue dans le complémentaire de S, soit $S \subset E$ c'est à dire (3.5) est satisfaite pour tout f dans S. En utilisant cette propriété, la bornitude de $\{\Gamma_\infty^\omega \circ f, f \in S\}$ est alors prouvée exactement comme la première assertion (i).
Pour (ii) $b)$. Il découle de (3.5), avec $\phi = \mathbb{1}_C$, que pour tout f dans S

$$m_\omega(C) = m\{x \in \mathbb{R}^d\ \ /(\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x) \in C\}$$

pour tout borélien C dans $\mathbb{R}^2$. En appliquant cette relation avec $C = H_\omega$, on voit que

$$m\{x \in \mathbb{R}^d\ \ /(\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x) \in H_\omega\} = 1.$$

Ainsi m est portée par $\{x \in \mathbb{R}^d\ \ /(\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x) \in H_\omega\}$. Comme, m n'est pas portée par un hyperplan alors

$$\mathbb{R}^d \subset \{x \in \mathbb{R}^d;\ (\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x) \in H_\omega\},$$

il s'en suit que

$$(\Gamma_\infty^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d) \subset H_\omega$$

en utilisant à nouveau cette relation avec $C = (\Gamma_\infty^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d)$, on obtient

$$m_\omega(C) = m\{x \in \mathbb{R}^d\ \ /(\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x) \in (\Gamma_\infty^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d)\} = 1.$$

H_ω est le plus petit sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ tel que $m_\omega(H_\omega) = 1$, on voit donc que $H_\omega \subset C$ c'est à dire $H_\omega \subset (\Gamma_\infty^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d)$.
D'où

$$(\Gamma_\infty^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d) = H_\omega.$$

En particulier, pour f étant la transformation identité et puisque les relation (3.3) et (3.5) restent valables alors $\Gamma_\infty^\omega(\mathbb{R}^d) = H_\omega$. Ce qui prouve (b). □

Preuve du théorème 3.1. Soit $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega_0 \;\; /\Gamma_n^\omega \in S,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega_1) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega_0 \;\; /\Gamma_n^\omega \in S,\ \forall n \in \mathbb{N}\}) \\ &= \mathbb{P}(\bigcap_{n\geq 0}\{\Gamma_n^\omega \in S\}).\end{aligned}$$

Notons $S_n = supp(\mu_n)$. Soient O un ouvert tel que $\nu(O) = 0$, donc $\mu_n(O) = 0$, et $O \subset {S_n}^c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $S^c \subset \cap_n {S_n}^c$. D'où

$$\cup S_n \subset S.$$

Inversement, si $\mu_n(O) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\nu(O) = 0$ et $O \in S^c$. Par suite $S_n^c \subset S^c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire $\cap S_n^c \subset S^c$, ceci donne

$$S \subset \cap S_n.$$

On conclut que

$$S = \cap S_n.$$

par suite :

$$\mathbb{P}(\Gamma_n^\omega \in S) \geq \mathbb{P}(\Gamma_n^\omega \in S_n) = 1$$

et donc

$$\mathbb{P}(\Omega_1) = 1. \tag{3.6}$$

On fixe un ω dans Ω_1 et soit Γ_∞^ω une limite ponctuelle de la suite $\{\Gamma_n^\omega,\ n \in \mathbb{N}\}$. Puisque Γ_∞^ω est dans S, et puisque S est un semi-groupe de $Aff(d)$, l'ensemble $T = \{\Gamma_\infty^\omega \circ f, f \in S\}$ est également un semi-groupe.
Montrons en utilisant le théorème d'Ascoli que la fermeture K de T est compact.
Pour f dans S l'aplication affine $\Gamma_\infty \circ f$ s'écrit

$$(\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x) = A_f x + b_f, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

où $A_f \in \mathbb{M}(d)$, $b_f \in \mathbb{R}^d$.
Par le lemme 3.4, l'ensemble T est borné il en découle que

$$\exists c > 0, \forall f \in S, \quad \|\Gamma_\infty^\omega \circ f\| = \sup(\|A_f\|, \|b_f\|) \leq c$$

par suite pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\|(\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x)\| &= \|A_f x + b_f\| \\ &\leq \|A_f\|\|x\| + \|b_f\| \\ &\leq c(\|x\| + 1).\end{aligned}$$

D'autre part, si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ alors

$$\begin{aligned}\|(\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x_1) - (\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x_2)\| &= \|A_f(x_1 - x_2) + b_f\| \\ &\leq \|A_f\|\|x_1 - x_2\| \\ &\leq c\|x_1 - x_2\|.\end{aligned}$$

Donc la famille T est équicontinue et K est compact.
Il en résulte par Hofmann et Mostert [12] qu'il existe une transformation affine h dans K telle que $h \circ h = h$ et $G = \{h \circ l \circ h,\ l \in K\}$ soit un semi-groupe compact.
Soit λ la mesure de Haar sur G telle que $\lambda(G) = 1$. Posons

$$z = \int_G g(0) d\lambda(g); \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

On a

$$g(z) = g(\int_G y(0) d\lambda(y)) = \int_G (gy)(0) d\lambda(y).$$

Soit

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & G & \to & G \\ & & gy & \mapsto & \varphi(gy). \end{array}$$

Donc

$$\int_G (gy)(0) d\lambda(y) = \int_G y(0) d\mu(y)$$

où : $\mu(B) = \lambda(\varphi^{-1}(B\varphi))$ pour tout B borélien de G.
Or $\varphi^{-1}(B) = gB$. Par l'invariance de la mesure de Haar sous les translations à gauche on a :

$$\mu(B) = \lambda(gB) = \lambda(B).$$

Ainsi pour tout g dans G

$$g(z) = \int_G y(0) d\mu(y) = z.$$

En particulier, pour f dans S, on obtient

$$(h \circ \Gamma_\infty^\omega \circ f \circ h)(z) = z. \tag{3.7}$$

Soit $\phi = h \circ \Gamma_\infty^\omega$ et V le sous-espace affine engendré par $\{f(h(z)),\ f \in S\}$.
Il est claire que $f(V)$ est contenu dans V pour tout f dans S. En particulier, pour $f = \Gamma_0 = F_0$ qui est dans S, et par (3.6) on a $F_0(V) \subset V \quad p.s.$
Sous la condition d'irréductibilité du modèle, $V = \mathbb{R}^d$.
De plus si $f \in S$, alors

$$\phi(fh(z)) = (h \circ \Gamma_\infty^\omega \circ f \circ h)(z),$$

comme $(\Gamma_\infty^\omega \circ f) \in T \subset K$, alors $(h \circ \Gamma_\infty^\omega \circ f \circ h) \in G$ et donc

$$(h \circ \Gamma_\infty^\omega \circ f \circ h)(z) = z.$$

Puisque $h \in K$, alors h est la limite dans $Aff(d)$ d'une suite $(h_n)_n \subset T$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists f_n \in S,\ \ h_n = \Gamma_\infty^\omega f_n.$$

Comme $\Gamma_\infty^\omega \in S$, alors $h_n \in S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. S étant fermé, donc $h \in S$ et ϕ est un élément de S. On obtient, en utilisant le lemme 3.4 (b),

$$H_\omega = (\Gamma_\infty^\omega \circ g)(\mathbb{R}^d) = \Gamma_\infty^\omega(\{z\})$$

Soit $Z(\omega) = \Gamma_\infty^\omega(z)$, par le lemme 3.4 à nouveau, $\Gamma_\infty^\omega(\mathbb{R}^d) = \{Z(\omega)\}$. En d'autres termes, Γ_∞^ω est la transformation affine qui satisfait $\Gamma_\infty^\omega(x) = Z(\omega)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Cela prouve que la suite $\{\Gamma_n^\omega, n \in \mathbb{N}\}$ converge vers cette transformation pour tout ω dans Ω_1.
On a

$$\Gamma_n = (\prod_{j=0}^{-n} A_j)x + \sum_{j=0}^{n} (\prod_{i=-j}^{0} A_i) B_{-j} \tag{3.8}$$

donc presque surement, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$;

$$\lim_{k\to+\infty} A_0 A_{-1} \ldots A_{-k} x = \lim_{k\to+\infty} \{\Gamma_k(x) - \Gamma_k(0)\} = 0,$$

ce qui prouve le premier point du théorème 3.1, et

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} A_0 A_{-1} \ldots A_{-k+1} B_{-k} = \lim_{p\to+\infty} \Gamma_p(0) = Z.$$

Par la stationnarité, pour tout n, il existe un vecteur aléatoire Z_n tel que $p.s.$,

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} A_n A_{n-1} \ldots A_{n-k+1} B_{n-k} = Z_n.$$

Considérons maintenant une solution arbitraire $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ de (3.1). En utilisant (3.1) à plusieurs reprises, nous obtenons, pour tout p dans $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} Y_0 &= F_0(Y_{-1}) \\ &= A_0 Y_{-1} + B_0 \\ &= A_0(A_{-1}Y_{-2} + B_{-1}) + B_0 \\ &= (F_0 \circ F_{-1})(Y_{-2}) \\ &. \\ &. \\ &. \\ &= (F_0 \circ F_{-1} \circ \cdots \circ F_{-n})(Y_{-n-1}) \\ &= \Gamma_n(Y_{-n-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Y_0 - Z = \Gamma_n(Y_{-n-1}) - \Gamma_n(0)), \tag{3.9}$$

de plus

$$\begin{aligned} \|\Gamma_n(Y_{-n-1}) - \Gamma_n(0)\| &= \|A_0 A_{-1} \ldots A_{-n} Y_{-n-1}\| \\ &\leq \|A_0 A_{-1} \ldots A_{-n}\| \|Y_{-n-1}\|. \end{aligned}$$

Puisque $\|A_0A_{-1}\dots A_{-n}\|$ converge vers 0 p.s. et la loi de $\|Y_{-n-1}\|$ est constante, alors le terme gauche ci-dessus tend vers 0 en probabilité, et donc par (3.9), $Y_0 = Z$. De la même manière, on montre que $Y_n = Z_n$ pour tout n. Par conséquent, il existe une solution stationnaire unique. En particulier, $X_n = Z_n$. Ceci complète la preuve. □

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution strictement stationnaire, et donc constitue une réciproque aux conditions de Brandt.

Théorème 3.2 *Supposons que le modèle auto-régressif généralisé* (3.1) *avec des coefficients i.i.d. est irréductible et que* $\mathbb{E}(\log^+\|A_0\|)$ *et* $\mathbb{E}(\log^+\|B_0\|)$ *sont finis. Alors* (3.1) *a une solution strictement stationnaire non anticipative si et seulement si l'exposant de Lyapounov*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\frac{1}{n}\log\|A_0A_{-1}\dots A_{-n}\|)$$

est strictement négatif.

Afin de prouver le théorème 3.2, nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.5 *[11] Soient* (X, T, λ) *un espace de probabilité et* $T : X \to X$ *une transformation mesurable qui préserve* λ. *Si* f *une fonction intégrable à valeurs réelles et* $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1} f\circ T^k = -\infty$, $\lambda - p.s.$ *alors* $\int_X f d\lambda < 0$

Lemme 3.6 *Soit* $\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de matrices stationnaires et ergodiques dans* $\mathbb{M}(d)$. *On suppose que* $\mathbb{E}(\log^+\|M_0\|)$ *est fini et que*

$$\lim_{n\to+\infty}\|M_nM_{n-1}\dots M_1\| = 0 \quad p.s.$$

alors l'exposant de Lyapounov associé à cette suite est strictement négatif.

Preuve. On peut supposer que γ n'est pas $-\infty$. Dans ce cas, nous utilisons la construction de Furstenberg et Kesten [10]. Ils ont montré que l'on peut, dans un espace de probabilité élargi, adjoindre à la suite initiale $\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de matrices $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{M}(d)$ tel que la suite $\{(M_n, Z_n), n \in \mathbb{N}\}$ soit strictement stationnaire avec les propriétés suivantes $p.s$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|M_nM_{n-1}\dots M_2Z_1\| = \gamma.$$

et

$$\begin{cases} Z_{n+1} = \frac{M_{n+1}Z_n}{\|M_{n+1}Z_n\|} \quad si\|M_{n+1}Z_n\| \neq 0. \\ \\ Z_1 = \frac{M_1}{\|M_1\|} \end{cases}$$

On définie une fonction Φ de $\mathbb{M}(d)\times\mathbb{M}(d)$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\Phi(M, Z) = \begin{cases} \log\frac{\|MZ\|}{\|Z\|}, & \text{si } \|Z\| \neq 0 \\ \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\log\|M_nM_{n-1}\dots M_2Z_1\| - \log\|Z_1\| = \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(M_{i+1}, Z_i) \;\; p.s$$

en effet, on peut voir que

$$Z_i = \frac{M_iM_{i-1}...M_1Z_0}{\|M_iM_{i-1}...M_1Z_0\|},$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(M_{i+1}, Z_i) &= \sum_{i=1}^{n-1}\log\|M_{i+1}Z_i\| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\log\|M_{i+1}M_iM_{i-1}...M_1Z_0\| - \sum_{i=1}^{n-1}\log\|M_iM_{i-1}...M_1Z_0\| \\ &= \log\|M_nM_{n-1}...M_1Z_0\|.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(M_{i+1}, Z_i) = \gamma;$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(M_{i+1}, Z_i) &= \lim_{n\to+\infty}(\log\|M_nM_{n-1}\dots M_2Z_1\| - \log\|Z_1\|) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty}(\log\|M_nM_{n-1}\dots M_2\|\|Z_1\| - \log\|Z_1\|) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\log\|M_nM_{n-1}\dots M_2\| \\ &= -\infty\end{aligned}$$

comme la suite $\{(M_n, Z_n), n \in \mathbb{N}\}$ est strictement stationnaire alors en utilisant le lemme 3.5 , on obtient

$$\mathbb{E}(\phi(M_2, Z_1)) < 0.$$

Soit

$$\mathbb{E}\log\frac{\|M_2Z_1\|}{\|Z_1\|} < 0$$

puisque $Z_0 = M_0$ alors par la stationnarité on a

$$\mathbb{E}\log\|M_0\| = \mathbb{E}\log\|Z_0\| = \mathbb{E}\log\|Z_1\| < 0.$$

De nouveau, puisque les $(M_n)_n$ sont *i.i.d* alors par la loi forte des grands nombres

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\|M_i\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\log\|M_0\| \quad p.s.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{n}log\|M_nM_{n-1}\dots M_1\| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\|M_i\| \\ &< 0. \;\; p.s\end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 3.2. On suppose d'abord qu'il existe une solution strictement stationnaire non anticipative de (3.1).
Soit M_n la matrice transposée de A_{-n}. On a

$$\begin{aligned}\|M_n M_{n-1} \dots M_1\| &= \|A^t_{-n} A^t_{n-1} \dots A^t_{-1}\| \\ &= \|(A_{-1}A_{-2} \dots A_{-n})^t\| \\ &= \|A_{-1}A_{-2} \dots A_{-n}\|\end{aligned}$$

L'exposant de *Lyapounov* associé à (M_n) est également γ. Par le théorème (3.1) $A_0 A_{-1} \dots A_{-k}$ converge *p.s* vers 0, et nous concluons a partir de lemme 3.6 que γ est strictement négatif. Cela prouve la partie "seulement si" du théorème.
Réciproquement,
soit $n \in \mathbb{N}$, comme $\mathbb{E}(\log^+ \|B_0\|) < +\infty$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\log^+ \|B_{n-k}\| > -\frac{k\gamma}{2}) < +\infty.$$

Ce qui implique par le lemme de Borel-Cantelli que

$$\limsup_k \frac{1}{k} \log^+ \|B_{n-k}\| \leq -\frac{\gamma}{2},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}&\limsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \log\|A_n A_{n-1} \dots A_{n-k+1} B_{n-k}\| \\ &\leq \limsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \log(\|A_n A_{n-1} \dots A_{n-k+1}\| \|B_{n-k}\|) \\ &= \limsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \log\|A_n A_{n-1} \dots A_{n-k+1}\| - \limsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \log\|B_{n-k}\| \\ &\leq \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\limsup_{k \to +\infty} (|A_n||A_{n-1}| \dots |A_{n-k+1}||B_{n-k}|)^{\frac{1}{k}} < \exp(\frac{\gamma}{2}) < 1 \quad p.s$$

Par le critère de Cauchy, la série

$$Y_n = \sum_{k=0}^{+\infty} A_n A_{n-1} \dots A_{n-k+1} B_{n-k}$$

converge *p.s.*. Cette suite est une solution stationnaire non anticipative de (3.1). L'unicité est présentée à la fin de la preuve du théorème 3.1. □

Une conséquence immédiate du théorème 3.2 est le corollaire suivant.

Corollaire 3.1 *Considérons un modèle* (3.1) *avec* $\mathbb{E}(\log^+ \|A_0\|)$ *et* $\mathbb{E}(\log^+ \|B_0\|)$ *finis. Supposons qu'il existe une solution de stabilisation strictement non anticipative qui n'est pas portée par un hyperplan affine. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'exposant de Lyapounov *est strictement négatif.*

(ii) Le modèle est irréductible.

(iii) Il existe une unique solution stationnaire.

Bibliographie

[1] BILLINGSLEY, P., FRANKEN, P. and LISEK, B. *Convergence of Probability Measures* Wiley, New York, 1995.

[2] BOROVKOV, A. A.*Ergodic theorems and stability theorems for a class of stochastic equation and thier applications*, Theory Prob. Appl. Vol.23, No. 2, 1978, pp. 241-262.

[3] BOROVKOV, A. A.*Asymptotic Methods in Queueing Theory (in Russian).* Nauka, Moscow. 1980.

[4] BOUGEROL, P. and LACROIX, J. *Products of random matrices with Applications to Schrödinger Operators*, Progress in Probability and Statistics, Birkhäuser, Boston, Vol. 8, 1985.

[5] BOUGEROL, P. *Tightness of products of random matrices and stability of linear stochastic system*, Ann. Probab, Vol. 15, No 1, 1987, pp. 40-74.

[6] BOUGEROL, P. and PICARD N. *Strict stationarity of Generalized Autoregressive Processes.* The Annals of Probability, Vol. 20, No 4, 1992, pp. 1714-1730.

[7] BRANDT, A., FRANKEN, P. and LISEK, B. *Ergodicity and steady state existence. Continuity of stationary distributions of queueing characteristic.* Lecteure Notes in control and information Sciences. Spronger-Verlag, Berlin. Vol.60, 1984, pp. 275-296.

[8] BRANDT, A. *The stochastic equation* $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ *with stationary coefficients*, Adv. in Appl. Probab. Vol.18,No 1, 1986, pp. 211-220.

[9] CAINES, P. E. *Linear Stochastic Systems*, Wiley, New York. Probab, 1988.

[10] FURSTENBERG, H. and KESTEN, H. *Products of random matrices*, Ann. Math. Statis, Vol. 31, No. 2, 1960, pp. 457-469.

[11] GUIVARC'H, Y, and RAUGI, A. *Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete Vol.69, 1985, pp. 187-242.

[12] HOFMANN, K. H. and MOSTERT, P. S. *Elements of Compact Semigroups.* Merrill, Columbus, Ohio, 1966.

[13] KAILATH, T. *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1980.

[14] LISEK, B. *A method for solving a class of recursive stochastique equations.* Z. Wahrscheinlichkeitsth. Vol.60, 1982, pp. 151-161.

[15] LOYNES, R. M.*The stability of a queue with non-independent inter-arrival and service times*, Prc. Camb. Phil. Soc. Vol.58, No. 3, 1962, pp. 497-520.

[16] VERVAAT, W. *On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinietely random variables*, Adv. Appl. Prob. Vol.11, No. 4, 1979, pp. 750-783.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier le problème d'existante et d'unicité d'une solution de l'équation stochastique

$$X_{n+1} = A_n X_n + B_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

Notre travail est basé sur les articles suivants :
BRANDT, A. *The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationary coefficients*, Adv. in Appl. Probab. Vol.18,No 1, 1986, pp. 211-220.
BOUGEROL, P. and PICARD N. *Strict stationarity of Generalized Autoregressive Processes.* The Annals of Probability, Vol. 20, No 4, 1992, pp. 1714-1730.
Dans la première partie, nous développons les résultats de Brandt qui a établi des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution d'équation (3.10) dans le cas où la suite des coefficients $\Psi = (A_n, B_n)$ est stationnaire et ergodique. L'auteur montre aussi sous certains Conditions sur les moments, pour tout $(\Psi^r = (A_n^r, B_n^r)_n)_r$ qui converge faiblement à Ψ, la suite de solutions $(X_n(\Psi^r))_n$ de (3.10) associée à la suite des coefficients Ψ^r converge faiblement vers $(X_n(\Psi))_n$.
Dans la deuxième partie, nous présentons les résultats de Bougerol-Picard. Les auteurs Ont considéré l'équation (3.10) dans un cas vectoriel où les coefficients $\Psi = (A_n, B_n)$ sont *i.i.d.*. Leur résultat principal est que, dans une condition d'irréductibilité, il existe une solution strictement stationnaire non anticipative si, et seulement si, l'exposant de le *Lyapounov* est strictement négatif.

Mots clés : Stationnarité, ergodicité, non anticipative, irréductible, modèle autorégressif généralisé.

Abstract

We deal with the problem of existence and uniqueness of a solution of the stochastic equation

$$X_{n+1} = A_n X_n + B_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.11}$$

Our work is based on the following articles :
BRANDT, A. *The stochastic equation* $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ *with stationary coefficients*, Adv. in Appl. Probab. Vol.18,No 1, 1986, pp. 211-220.
BOUGEROL, P. and PICARD N. *Strict stationarity of Generalized Autoregressive Processes.* The Annals of Probability, Vol. 20, No 4, 1992, pp. 1714-1730.
In the first part, we develop the results of brandt which have established sufficient conditions for of existence and uniqueness of a solution of equation (3.11) in the case when the sequence of coefficients $\Psi = (A_n, B_n)$ is stationary and ergodic. The author shows also under some conditions on the moments, that for any $(\Psi^r = (A_n^r, B_n^r)_n)_r$ wich converges weakly to Ψ, the sequence of solutions $(X_n(\Psi^r))_n$ of (3.11) associated to the sequence of coefficients Ψ^r converges weakly to $(X_n(\Psi))_n$.
In the second part, we present the results of Bougerol-Picard. The authors have considered the equation (3.11) in vectorial case with *i.i.d.* coefficients $\Psi = (A_n, B_n)$. Their main result is that under a condition of irreducibility, it exists a strictly stationary non anticipative solution if and only if The exponent of *lyapounov* is strictly negative.

Keywords : Stationarity, ergodicity, nonanticipativ, irreducibl, generalized autoregressive model.