

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبو بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

**MEMOIRE DE MASTER**

Spécialité : Équations Différentielles

Présenté Par : SENOUS Mohammed El Amine

---

# Le rôle des équations différentielles en dynamique de populations "systèmes proies-prédateurs"

---

Soutenu le : 28 /06 /2017 , devant le jury composé de :

M M.DERHAB	Professeur, Université de Tlemcen	Président
Mme N.LAHFA	Maître de conférences, Université de Tlemcen	Examinatrice
Mme N.MRABET	Maître de conférences, Université de Tlemcen	Encadreur

Année universitaire 2016-2017

# DEDICACES

Je dédie ce mémoire à mes très chers parents qui m'ont toujours soutenus , et qui ont tout sacrifié pour mes études, tout le mérite leurs revient .

A toute ma famille, mon frère, ma soeur et à tous ceux qui me sont chers.

# Remerciements

Je remercie en priorité **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné le courage, la force, et la volonté d'achever ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord Madame Nadjia MRABET qui m'a encadré tout au long de ce mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son attention, ses conseils qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec elle.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur Mohammed DERHAB Professeur à l'Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. Je lui témoigne ma profonde reconnaissance pour son aide et son soutien.

Mes plus vifs remerciements à Madame Nadira LAHFA maître de conférences à l'Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen, pour le temps qu'elle a consacré à examiner ce mémoire, et aussi qui m'a fait l'honneur de faire partie du jury.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>7</b>
1.1 Résultats fondamentaux pour les équations différentielles . . . . .	7
1.1.1 Définitions et généralités . . . . .	7
1.1.2 Existence de solutions . . . . .	9
1.1.3 Unicité des solutions et théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	10
1.2 Introduction à la théorie de stabilité . . . . .	12
1.2.1 Stabilité locale des solutions . . . . .	12
1.2.2 Cas des systèmes linéaires à coefficients constants . . . . .	13
1.2.3 Cas des systèmes non linéaire : stabilité locale . . . . .	14
1.2.4 Analyse des systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	15
1.3 Solutions périodiques . . . . .	19
1.3.1 Définitions : . . . . .	20
<b>2 Modèle à une seule population</b>	<b>22</b>
2.1 Suite de Fibonacci . . . . .	22
2.1.1 Présentation mathématique . . . . .	23
2.1.2 Expression fonctionnelle . . . . .	24
2.2 Le Modèle de Malthus (1798) . . . . .	26
2.3 Modèle logistique . . . . .	27

<b>3</b>	<b>Modèle à deux populations</b>	<b>30</b>
3.1	Modèle de Lotka Volterra . . . . .	30
3.1.1	Présentation du modèle . . . . .	31
3.1.2	Etude du modèle de Lotka-Volterra . . . . .	33
3.2	Modèle actuel . . . . .	40
	<b>Bibliographie</b>	<b>42</b>

# Table des figures

FIG-1: Chroniques de l'EDO $x' = x-t$ pour diverses conditions initiales.....	12
FIG-2: Noeud stable ( $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ ).....	16
FIG-3: Point selle ( $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ ).....	16
FIG-4: Etoile stable .....	17
FIG-5: Noeud dégénéré stable.....	17
FIG-6: Représentation d'un foyer stable.....	18
FIG-7: Représentation d'un centre.....	18
FIG-8: Résumé des différents portraits de phase possibles .....	19
FIG-9: Croissance de population des lapins selon une suite de Fibonacci, jusqu'au 6ème mois ...	23
FIG-10: Modèle de croissance de Malthus .....	27
FIG-11: Modèle de croissance de P.F.Verhulst.....	28
FIG-12: Représentation de l'approche asymptotique de la population vers le coefficient k.....	29
FIG-13: Trajectoires avec $a = b = c = d = 1$ .....	38
FIG-14: Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra .....	39
FIG-15 : Chronique du modèle de Lotka-Volterra ( $x_0=1$ et $y_0=2$ ).....	40

# Introduction

À la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle la notion des équations différentielles apparaît en Mathématique, inventée par Leibniz en 1686. Dans la même période, Newton découvre le calcul différentiel et intégral (*Nova methodus pro maximis et minimis*, 1684-86).

A cette époque, les équations différentielles s'introduisent chez les mathématiciens, par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique, comme par exemple :

- Mouvement du pendule circulaire,
- Problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation Newtonnienne.
- Problème de l'étude de mouvements de corps "élastiques" (tiges, ressorts, cordes vibrantes).
- Problème de l'équation de la courbe (appelée chaînette) décrivant la forme prise par une corde, suspendue aux deux extrémités et soumise à son propre poids.

· Vers le début du XVIII<sup>ème</sup> siècle, des méthodes de résolutions partielles ou totales ont été mises au point pour beaucoup de ce genre de problèmes. Ensuite, les mathématiciens se sont progressivement intéressés à des classes de plus en plus larges d'équations différentielles. Euler, en 1739 a résolu les équations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre, qui apparaissent maintenant comme les plus simples. Il ne faut pas oublier que pour les mathématiciens de cette époque, le maniement de la fonction exponentielle n'était pas encore familier.

· Vers les années soixante dix du XVIII<sup>ème</sup> siècle, Fuchs, puis Poincaré, ont inauguré un nouveau champ de recherche qui a permis à trouver les propriétés des solutions, mais le calcul effectif des solutions reste dans la plupart du temps impossible.

- Enfin, le développement moderne des moyens de calcul ajoute à cette panoplie la possibilité

de calculer numériquement, dans un temps raisonnable, des solutions approchées très précises d'équations différentielles ou d'explorer les propriétés que l'on peut attendre des solutions.

· Dès le début du XXIème siècle, les équations différentielles ont trouvé de nombreuses applications dans les Sciences de la Vie, lorsqu'est apparue la nécessité de relier le sujet biologique réel. De cette façon, ils ont construit des modèles mathématiques qui décrivent d'une façon plus précise la population désignée.

L'objectif entrepris dans ce mémoire est de voir de près l'importance des équations différentielles en dynamique de population, plus précisément dans la construction des modèles proie-prédateurs. Nous avons considéré quelques modèles cités dans la littérature et nous avons mis en valeur le rôle des équations différentielles dans l'étude des populations.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Notions préliminaires.

Chapitre 2 : Modèle à une seule population.

Chapitre 3 : Modèle à une deux populations.

Conclusion et une bibliographie.

Dans Le chapitre I nous rappelons quelques définitions, théorèmes et des résultats auxquels nous aurons recours fréquemment dans ce travail.

Le chapitre II est consacré à l'étude de quelques modèles mathématiques à une seule population : le modèle de Fibonacci, le modèle de croissance Malthus et le modèle logistique.

Dans le chapitre III, on présente le modèle de Lotka-Volterra qui est un modèle à deux populations bien connu dans la littérature. Le choix de ce modèle n'été pas un hasard mais pour des raisons bien précises. Ce dernier est le premier modèle construit à partir des équations différentielles, ce qui a permis au auteurs mathématiciens de faire une étude mathématique très détaillée.

Nous terminons notre travail par une conclusion.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les principales définitions et nous citons quelques lemmes et théorèmes utiles pour la suite de ce mémoire.

### 1.1 Résultats fondamentaux pour les équations différentielles

Dans toute cette section,  $J$  un intervalle d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 1$ . Si  $x$  est une fonction d'une variable réelle positive  $t$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  dérivable, nous noterons par  $\dot{x}$  sa dérivée par rapport à  $t$ . Dans notre travail, nous nous intéresserons seulement aux équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre.

#### 1.1.1 Définitions et généralités

**Définition 1** ( *Equation différentielle* )

Soit  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction

On appelle équation différentielle du premier ordre associée à  $f$  l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{1.1}$$

L'inconnue de cette équation est une fonction d'une seule variable et l'équation traduit une relation entre l'inconnue (notée ici  $x$ ), sa variable (notée ici  $t$ ) et sa dérivée première ( $\dot{x}$ ).

Une équation différentielle est dite autonome si la fonction  $f$  ne dépend pas explicitement de la variable  $t$ , i.e. si  $f$  est définie sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Dans le cas contraire on dit que c'est une équation non autonome. De plus, si  $f$  est affine, c'est-à-dire si  $f(t, x) = A(t)x + B(t)$ , avec  $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B(t) \in \mathbb{R}^n$  pour tout  $t \in J$ , on dit que c'est une équation différentielle linéaire.

**Définition 2 ( Solution locale )**

Une solution locale de (1.1) est la donnée d'un couple  $(I, x)$  où  $I$  est un intervalle d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$  contenu dans  $J$  et  $x$  est une fonction de  $I$  à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  dérivable sur  $I$  et vérifiant les conditions suivantes :

$$(i) \quad (t, x(t)) \in J \times U, \text{ pour tout } t \in I$$

$$(ii) \quad \dot{x} = f(t, x(t)), \text{ pour tout } t \in I.$$

**Définition 3 ( Prolongement de solutions )**

Soient  $(I_1, x_1)$  et  $(I_2, x_2)$  deux solutions de (1.1).  $(I_2, x_2)$  est un prolongement de  $(I_1, x_1)$  si  $I_1 \subset I_2$  et pour tout  $t \in I_1$ ,  $x_2(t) = x_1(t)$ .

**Définition 4 ( Solution maximale )**

Une solution  $(I, x)$  de (1.1) est maximale si elle n'admet aucun prolongement  $(I', x')$  avec  $I$  inclus strictement dans  $I'$ .

**Définition 5 ( Solution globale )**

Soit  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\dot{x} = f(., x)$ .  $(J, x)$  est solution globale de (1.1) si c'est une solution définie sur  $J$  tout entier.

**Remarque :**

Il existe un lien entre les deux définitions précédentes citées ci-dessus. En effet, si  $(J, x)$  est une solution globale de (1.1), alors c'est une solution maximale. La réciproque est fautive en général.

Dans les problèmes concrets faisant intervenir des équations différentielles, comme en dynamique de population, on connaît l'état du système initialement et on veut montrer que la solution de l'équation différentielle vérifie cette condition initiale. Ces types de problèmes sont appelés problème de Cauchy et sont définis de la manière suivante :

**Définition 6 ( *Problème de Cauchy* )**

*Etant donné un point  $(t_0, x_0) \in J \times U$ , le problème de Cauchy consiste à trouver une solution  $(I, x)$  de (1.1) telle que  $t_0 \in I$  et  $x(t_0) = x_0$ .*

**1.1.2 Existence de solutions**

Nous nous intéressons à l'existence de solutions de (1.1), assurée dans un premier temps par le théorème de Cauchy-Peano-Arzéla, prouvée par Peano en 1886.

**Théorème 1 :**

Soit  $(t_0, x_0) \in J \times U$  et supposons  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue en  $(t_0, x_0)$ . Alors il existe une solution du problème de Cauchy associé à l'équation différentielle (1.1) relatif à la condition initiale  $(t_0, x_0)$ .

**Théorème 2 :**

On suppose  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue et soit  $(I, x)$  une solution maximale de (1.1). Alors

a. si  $\sup I < \sup J$  ou si  $I \not\subset \sup I = \sup J \in J$  alors  $\lim_{t \rightarrow \sup I} \|x(t)\| = +\infty$

b. si  $\inf J < \inf I$  ou si  $I \not\subset \inf I = \inf J \in J$  alors  $\lim_{t \rightarrow \inf I} \|x(t)\| = +\infty$

**Preuve:** voir [1] ■

**Remarque**

En pratique, on fait surtout appel aux contraposées de ce théorème. Par exemple si  $(I, x)$  est une solution maximale de (1.1), bornée sur  $I$ , alors  $I = J$ , i.e. c'est une solution globale.

### 1.1.3 Unicité des solutions et théorème de Cauchy-Lipschitz

Nous nous intéressons à présent à l'unicité des solutions. Les théorèmes suivants assurent l'existence et l'unicité de solution du problème de Cauchy (1.1) associé à l'équation différentielle (1.1) relatif à la condition initiale  $(t_0, x_0)$ .

#### Définition 7 ( *Locale lipschitziennité en un point* )

Soit  $(t_0, x_0) \in J \times U$ . On dit que  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable en  $(t_0, x_0)$  si il existe  $T_0 > 0$ ,  $r_0 > 0$  et  $k > 0$  tels que pour tout  $(t, x) \in ]t_0 - T, t_0 + T[ \times B(x_0, r_0)$  et  $(t, y) \in ]t_0 - T, t_0 + T[ \times B(x_0, r_0)$  (avec  $B(x_0, r_0)$  : la boule de centre  $x_0$  et de rayon  $r_0$ )

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k \|x - y\|$$

Dans la pratique, au lieu de vérifier que la fonction  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, on vérifie que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$ . On a le théorème suivant.

#### Théorème 3

Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $J \times U$  alors  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable sur  $J \times U$ .

#### Théorème 4

Si  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable sur  $J \times U$ , alors pour tout  $(t_0, x_0) \in J \times U$ , le problème de Cauchy associé à (1.1) relatif à la condition initiale  $(t_0, x_0)$  admet une unique solution.

**Preuve:** voir [1] ■

**Exemple 1 :**

Soit  $\dot{x} = x - t$  avec  $x(t_0) = x_0$ .

$f(x, t) = x - t$  et  $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$  sont définies et continues dans  $\mathbb{R}^2$ .

Pour rechercher la solution, on pose  $u = x - t$

L'équation en  $u$  devient alors autonome :

$$\begin{aligned}x &= u + t \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= \frac{du}{dt} + 1 \\ \Rightarrow \frac{du}{dt} &= u - 1\end{aligned}$$

On procède par la méthode de séparation des variables :

Donc :

$$\frac{du}{u - 1} = dt$$

Et par intégration, on trouve la solution :

$$\ln |u(t) - 1| = t + C'$$

Alors :

$$|u(t) - 1| = Ce^t$$

Donc :

$$u(t) = 1 + Ce^t \quad \Rightarrow \quad x(t) = 1 + t + Ce^t \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

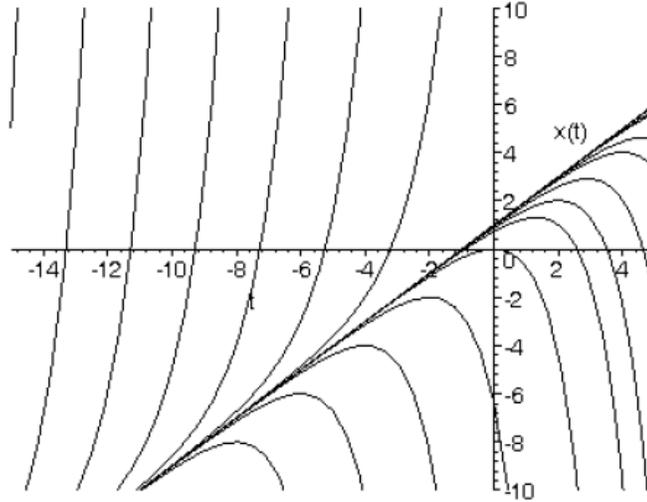
On détermine la constante  $C$  à partir de la condition initiale, d'où :

Alors :

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0 = 1 + t_0 + Ce^{t_0} \\ \Rightarrow C &= e^{-t_0}(x_0 - 1 - t_0)\end{aligned}$$

Donc :

$$x(t) = 1 + t + e^{t-t_0}(x_0 - 1 - t_0)$$



**FIG-1 : Chroniques de l'EDO  $\dot{x} = x - t$  pour diverses conditions initiales.**

**Remarque :**

La forme faible du théorème de Cauchy-Lipschitz consiste simplement à prendre une fonction  $f$  de classe  $C^1$ .

## 1.2 Introduction à la théorie de stabilité

### 1.2.1 Stabilité locale des solutions

On considère que l'équation différentielle (1.1) est autonome et s'écrit :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1.2}$$

Avec  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localement lipschitzienne sur  $U$ , pour assurer l'existence et l'unicité de solutions pour les problèmes de Cauchy.

**Définition 8 ( Point d'équilibre ).**

On appelle point d'équilibre de (1.2) toute solution constante  $x^*$  qui vérifie  $f(x^*) = 0$

**Définition 9 ( Stabilité au sens de Lyapunov ).**

Soit  $(\mathbb{R}, x)$  une solution globale de l'équation (1.2). On dit que  $(\mathbb{R}, x)$  est stable, (au sens de Lyapunov), si pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta_{(\varepsilon, t_0)} > 0$  tel que pour tout  $y_0 \in B(x(t_0), \delta(\varepsilon, t_0))$ , alors l'unique solution maximale du problème de Cauchy associé à (1.2) relatif à la condition initiale  $(t_0, y_0)$ , notée  $(I, x(\cdot; t_0, y_0))$ , vérifie :

$$\forall t \in I, \quad t \geq t_0 \quad \|x(t) - x(t; t_0, y_0)\| \leq \varepsilon$$

La solution sera dit instable, si elle n'est pas stable.

Ainsi, si la condition initiale en  $t_0$  d'une solution se trouve dans la boule  $B(x(t_0), \delta(\varepsilon, t_0))$ , alors cette solution vit dans un tube de rayon  $\varepsilon$  autour de la courbe  $\{(t, x(t; t_0, x_0)), t \geq t_0\}$ .

**Définition 10 ( Stabilité asymptotique locale )**

On dit que  $(\mathbb{R}, x)$  est localement asymptotiquement stable si et seulement si  $(\mathbb{R}, x)$  est stable et  $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\exists \delta(t_0) > 0$  tel que  $\forall y_0 \in B(x(t_0), \delta(t_0))$ , l'unique solution maximale du problème de Cauchy associé à (1.2) relatif à la condition initiale  $(t_0, y_0)$ ,  $(I, x(\cdot; t_0, y_0))$  est définie sur  $[t_0, +\infty[$  et vérifie :

$$\|x(t) - x(t; t_0, y_0)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \tag{1.3}$$

**Définition 11 ( Stabilité globale ).**

On dit que  $(\mathbb{R}, x)$  est globalement asymptotiquement stable sur  $V \subset U$ , si  $\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall y_0 \in V$ , l'unique solution maximale  $(I, x(\cdot; t_0, y_0))$  du problème de Cauchy associé à (1.2) relatif à la condition initiale  $(t_0, y_0)$ , est définie sur  $[t_0, +\infty[$  et vérifie (1.3).

### 1.2.2 Cas des systèmes linéaires à coefficients constants

Considérons le cas d'une équation différentielle linéaire autonome et homogène suivante :  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  On remarque aisément que l'ensemble des solutions d'équilibre du système est  $\ker(A)$  et donc que la solution identiquement nulle est solution d'équilibre.

**Théorème 2.2.1 ( Caractérisation de la stabilité de l'équilibre  $x \equiv 0$  ).**

1. L'origine est un équilibre :

• Globalement asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative, i.e.

$$Sp(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \quad / \quad \Re(z) < 0\}$$

• Stable si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle négative et les valeurs propres dont la partie réelle est nulle ont un espace caractéristique de dimension 1.

2. Dans le cas contraire, l'origine est un équilibre instable.

### 1.2.3 Cas des systèmes non linéaire : stabilité locale

► *Le système linéarisé*

Soit  $x_0$  une solution d'équilibre de l'équation différentielle (1.2) :

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

On va linéariser cette dernière équation en opérant un développement limité de  $f$  en  $x_0$  .

#### Définition 2.3.1

Le système linéarisé de (2.2) autour du point  $x_0$  est défini par :

$$\dot{z}(t) = Df(x_0)z(t) \tag{1.4}$$

Où  $Df$  est la différentielle de  $f$  .

► **Théorèmes de stabilité locale**

#### Théorème 2.3.2 ( Lyapunov, 1892 ).

Si toutes les valeurs propres de  $Df(x_0)$  sont de partie réelle strictement négative, alors  $x_0$  est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable pour le système non linéaire.

### **Théorème 2.3.3**

Si  $Df(x_0, t_0)$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre  $x_0$  est instable pour le système non linéaire.

### **1.2.4 Analyse des systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}^2$**

#### **Définition 2.4.1 ( Les systèmes planaires dans $\mathbb{R}^2$ )**

Un système d'équations différentielles ordinaires tel que

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Est un système planaire si et seulement si

$$\exists(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{R}^6 / \begin{cases} f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \\ g(x, y) = \alpha' x + \beta' y + \gamma' \end{cases}$$

Soit un système planaire du type

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = aX_1 + bX_2 \\ \dot{X}_2 = cX_1 + dX_2 \end{cases}$$

La matrice  $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est appelée matrice Jacobiënne du système, on se limite ici au cas où  $J$  est inversible, c'est-à-dire  $\det(J) \neq 0$ .

Les valeurs propres de  $J$  sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(J) + \det(J) = 0 \quad (1.5)$$

Donc la nature des solutions dépend du discriminant de l'équation (2.5) :

$$\Delta = \operatorname{tr}^2(J) - 4 \det(J)$$

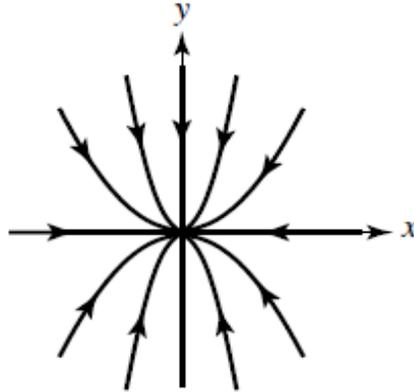
**1<sup>er</sup> cas : (  $\Delta > 0$  )**

$J$  admet deux valeurs propres réelles distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr}(J) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\text{tr}(J) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

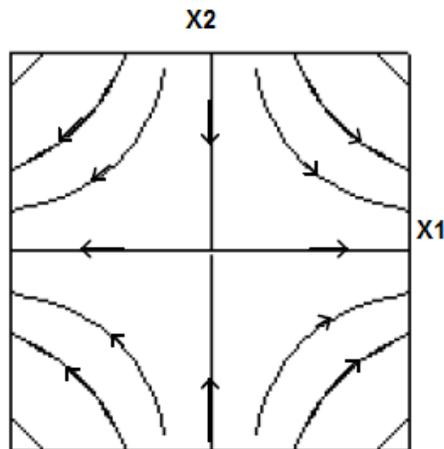
- Si  $\det(J) > 0$  , alors  $\sqrt{\Delta} < |\text{tr}(J)|$  et  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont du signe de  $\text{tr}(J)$  .

Le point d'équilibre est un noeud



**FIG-2 : Noeud stable** ( $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ ) (et  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ )

- Si  $\det(J) < 0$  , alors  $\sqrt{\Delta} > |\text{tr}(J)|$  et  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signes opposés. Le point d'équilibre est un point selle ( ou appelé encore col )



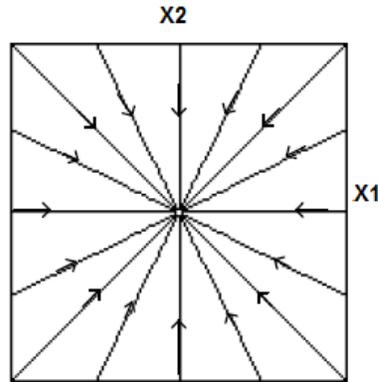
**FIG-3 : Point selle** ( $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 < 0$ )

**2ème cas : ( $\Delta = 0$ )**

$J$  admet une valeur propre double :

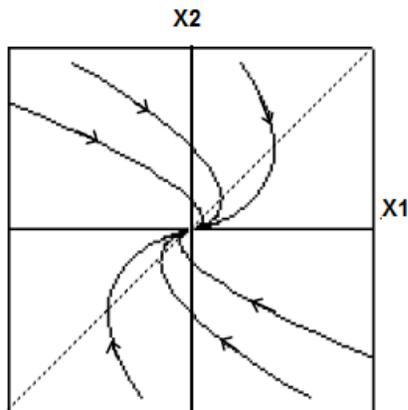
$$\lambda_0 = \frac{\text{tr}(J)}{2}$$

- Si  $J$  est diagonale, le point d'équilibre est une étoile stable ou instable selon le signe de  $\text{tr}(J)$ .



**FIG-4 : Etoile stable** ( $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ )

- Si  $J$  n'est pas diagonale, le point d'équilibre est un noeud dégénéré stable ou instable selon le signe de  $\text{tr}(J)$ .



**FIG-5 : Noeud dégénéré stable**

**3ème cas : ( $\Delta < 0$ )**

$J$  admet deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr}(J) + i\sqrt{\Delta}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\text{tr}(J) - i\sqrt{\Delta}}{2}$$

- Si  $\text{tr}(J) > 0$  , le point d'équilibre est un foyer instable.
- Si  $\text{tr}(J) < 0$  , le point d'équilibre est un foyer stable.

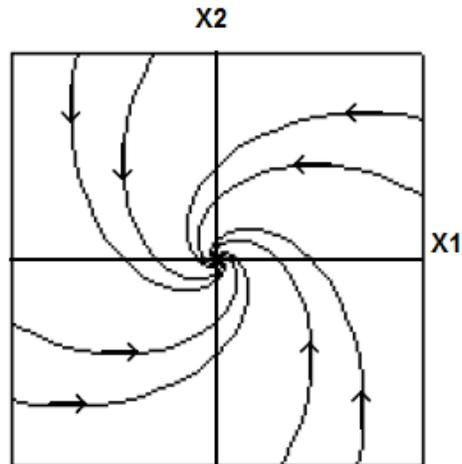


FIG-6 : Représentation d'un foyer stable

- Si  $\text{tr}(J) = 0$  , le point d'équilibre est un centre.

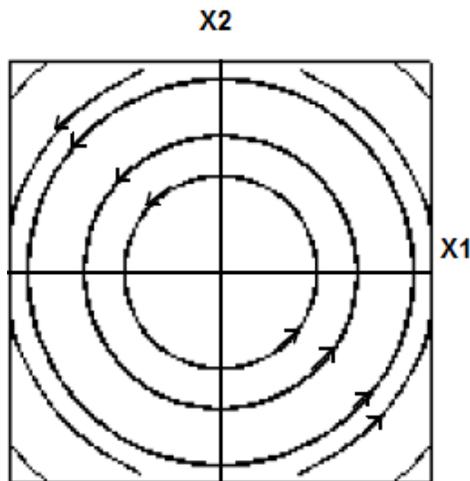


FIG-7 : Représentation d'un centre

Dans le plan  $(\text{tr}(J), \det(J))$  , on peut représenter les régions d'apparition des différents types de points d'équilibre.

Le discriminant de l'équation caractéristique de la Jacobiène du système est :

$$\Delta = \text{tr}^2(J) - 4 \det(J)$$

La parabole d'équation  $\det(J) = \text{tr}^2(J)/4$  délimite les régions du plan où  $\Delta > 0$  (sous la parabole) et  $\Delta < 0$  (au-dessus de la parabole)

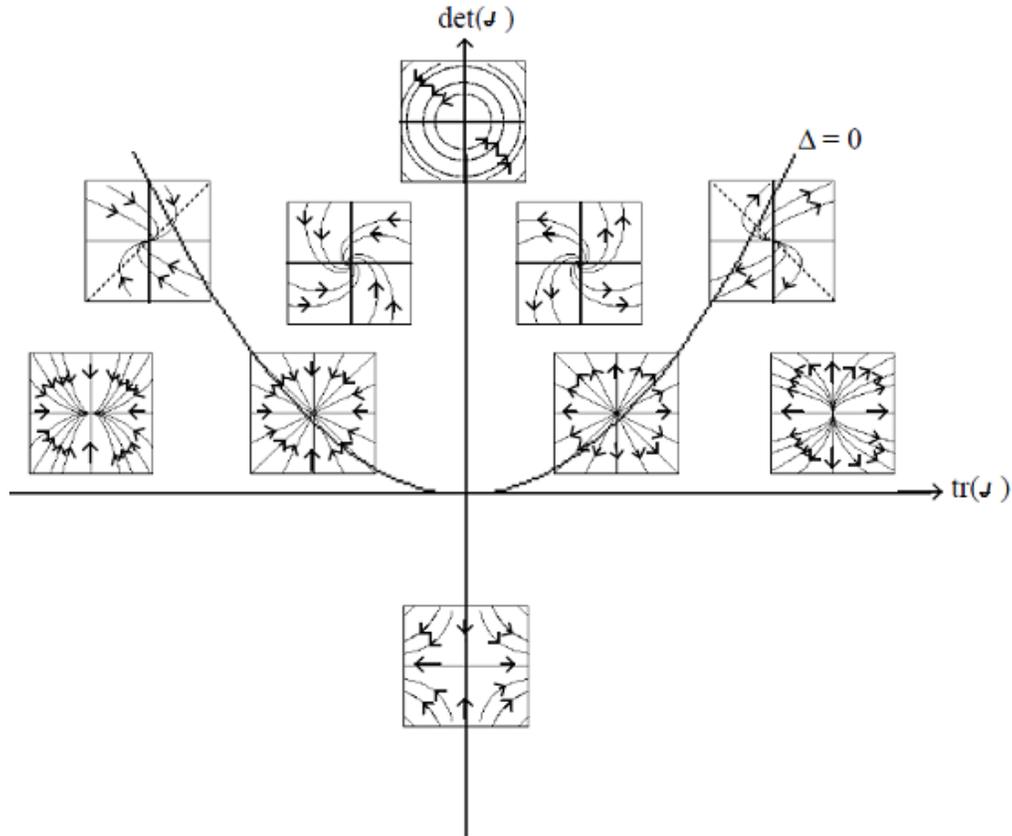


FIG-8 : Résumé des différents portraits de phase possibles

### 1.3 Solutions périodiques

Voir [3]

Un moyen pour détecter les solutions périodiques dans  $\mathbb{R}^2$  c'est la théorie de Morse

Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$

### 1.3.1 Définitions :

#### Définition (point critique)

Un point critique de  $F$  est un point  $X = p_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0) \equiv 0$  avec  $1 \leq i \leq n$

#### Définition (la matrice hessienne)

On définit la matrice hessienne de  $F$  en  $p_0$  comme :

$$H_f(p_0) := (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{avec} \quad h_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)$$

par rapport à un système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ .

On remarque que  $H_f(p_0)$  est une matrice symétrique .

#### Définition (point critique non dégénéré)

Un point critique  $p_0$  de  $F$  est non dégénéré si  $\det(H_f(p_0)) \neq 0$

#### Définition (Fonction de Morse)

Si  $p_0$  est un point critique non dégénéré de  $F$  , alors  $F$  est dite fonction de Morse dans un voisinage de  $p_0$ .

Soit  $p_0$  un point critique de  $F$  . Nous considérons le développement de Taylor au voisinage de ce point , nous aurons :

$$F(X) = F(p_0) - \sum_{i=1}^k c_i X_i^2 + \sum_{i=k+1}^n c_i X_i^2 + \text{termes d'ordre supérieur}$$

on appelle  $k$  l'indice de  $F$  en  $p_0$

#### Lemme de Morse :

Soit  $F$  une fonction de Morse au voisinage de  $p_0$  d'indice  $k$  . Dans un voisinage de  $p_0$  , il existe un changement de variables tel que dans les nouvelles coordonnées  $F$  devient  $G$  où :

$$G(X) = G(p_0) - \sum_{i=1}^k Y_i^2 + \sum_{i=k+1}^n Y_i^2$$

#### Remarque

Si  $k = 0$ ,  $\{X \in \mathbb{R}^n : F(X) = c\}$   $c > 0$  est homéomorphe localement à une sphère .

Si  $n = 2$  et  $k = 0$ , alors  $\{X \in \mathbb{R}^2 : F(X) = c\}$   $c > 0$  est homéomorphe localement à un cercle

► Conclusion :

Dans  $\mathbb{R}^2$ , si on arrive à montrer que l'indice de  $F$  en  $p_0$  est nul, on conclut qu'il existe une solution périodique autour de ce point critique  $p_0$ .

## Chapitre 2

# Modèle à une seule population

Une population est un groupe d'individus de même espèce qui interagissent entre eux, notamment au moment de la reproduction. Par définition, les individus d'une même population ont tous la possibilité de se rencontrer. C'est ce qui distingue la notion de population de celle d'espèce ; la population est l'unité d'étude dans de nombreux domaines des sciences de la vie.

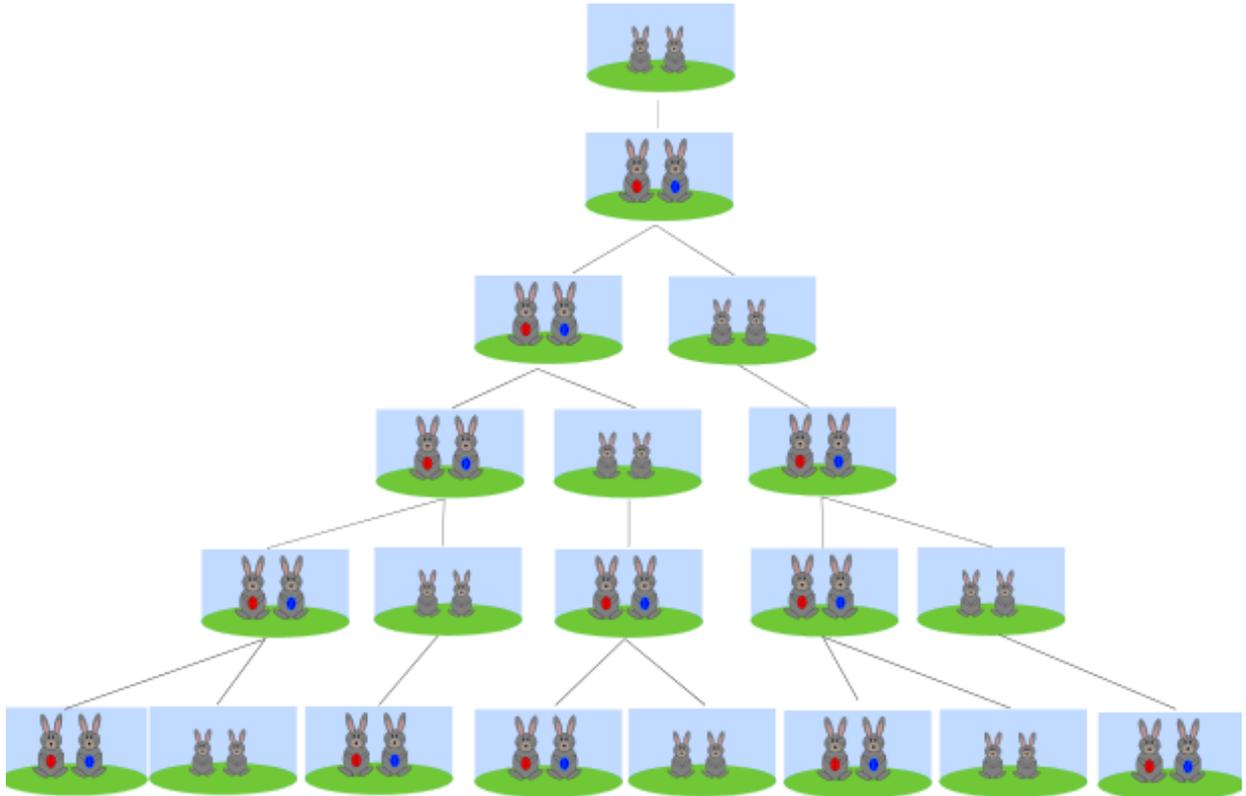
En particulier, la dynamique des populations s'intéresse aux changements incessants que subissent les populations, du fait de la disparition d'individus par mortalité ou émigration et de l'apparition de nouveaux individus par reproduction ou immigration. Elle étudie également les interactions entre populations d'une même espèce. La compréhension de ces processus dynamiques complexes se trouve aujourd'hui facilitée par divers modèles mathématiques. Ces modèles permettent de simuler l'évolution des populations et de prévoir les effets d'une perturbation de leur environnement.

### 2.1 Suite de Fibonacci

En 1202, Fibonacci s'intéressa au problème de croissance d'une population de lapins dans des circonstances idéales. Le problème est le suivant :

- on commence avec un couple de jeunes lapins,
- un lapin âgé d'un mois est capable de se reproduire,
- un couple de lapins (en âge de se reproduire) donne naissance à un autre couple de lapins tous les mois.

Fibonacci se posa la question suivante : combien y aura-t-il de couples de lapins après une année? La figure ci-dessous illustre l'évolution du nombre de couples de lapins au fur et à mesure des mois.



**FIG-9 : Croissance de population des lapins selon une suite de Fibonacci, jusqu'au 6<sup>eme</sup> mois**

### 2.1.1 Présentation mathématique

Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le n-ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n-ième mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;
- les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;
- chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une

nouvelle paire de lapereaux ;

· les lapins ne meurent jamais (donc la suite de Fibonacci est croissante).

Notons  $F_n$  le nombre de couples de lapins au début du mois  $n$ . Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce qu'on note :  $F_1 = F_2 = 1$ )

Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins ; on note alors  $F_3 = 2$

Plaçons-nous maintenant au mois  $n$  , et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois  $n + 2$  :  $F_{n+2}$  désigne la somme des couples de lapins au mois  $n + 1$  et des couples nouvellement engendrés.

Au mois  $n + 2$ , le terme de la suite  $F_{n+2}$  engendre que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant. On a donc, pour tout entier  $n$  strictement positif :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

On choisit alors de poser  $F_0 = 0$  , de manière que cette équation soit encore vérifiée pour  $n = 0$ .

On obtient ainsi la forme récurrente de la suite de Fibonacci : chaque terme de cette suite est la somme des deux termes précédents ; pour obtenir chacun de ces deux termes, il faut faire la somme de leurs termes précédents. . . et ainsi de suite.

### 2.1.2 Expression fonctionnelle

On souhaite établir une expression fonctionnelle de la suite de Fibonacci, c'est-à-dire une expression telle que le calcul du nombre de couples pour une valeur de  $n$  donnée ne présuppose la connaissance d'aucun nombre de couples pour une quelconque autre valeur de  $n$ , ce que ne permet pas la formule de récurrence. Comme la suite de Fibonacci est linéairement récurrente d'ordre deux, on peut écrire son équation caractéristique. On obtient une équation du second degré :

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Le calcul du discriminant de cette équation donne les deux solutions du polynôme :

$$x_1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \varphi' = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

où  $\varphi$  est le nombre d'or.

Les suites  $(\varphi^n)$  et  $(\varphi'^n)$  engendrent alors l'espace vectoriel des suites vérifiant

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Il en résulte que :

$$F_n = \alpha\varphi^n + \beta\varphi'^n$$

( $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes à déterminer à partir de  $F_0$ ,  $F_1$ )

Les conditions initiales  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$  conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } \beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Nous obtenons finalement l'expression fonctionnelle recherchée, qui porte le nom de formule

de **Binet** :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n), \text{ avec } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \varphi' = -\frac{1}{\varphi}.$$

(Ces calculs restent valables pour  $n$  entier négatif quand la suite est prolongée)

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $F_n$  est équivalent à  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ . Plus précisément,  $\varphi^n$  tend vers l'infini et  $\varphi'^n$  tend vers zéro car  $|\varphi'| < 1 < \varphi$ .

En fait, dès le rang  $n = 1$ , le deuxième terme  $\frac{\varphi'^n}{\sqrt{5}}$  est assez petit pour que les nombres de Fibonacci puissent être obtenus uniquement à partir du premier terme :

$F_n$  est l'entier le plus proche de  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$  (et il lui est supérieur ou inférieur, selon la parité de  $n$ ).

### **conclusion**

Fibonacci a proposé, avec l'exercice des lapins, le premier exemple de modélisation mathématique de l'évolution d'une population. Le modèle de Fibonacci est évidemment trop restreint pour décrire une population réelle de lapins car il a considéré une croissance constante et il a négligé la mortalité, suite à ceci la population est devenue indéfinie.

## 2.2 Le Modèle de Malthus (1798)

Thomas Robert Malthus en 1798 a présenté le premier modèle de la dynamique de population. Il a considéré une population constituée d'une seule espèce animale, homogène, c'est-à-dire, qu'il a négligé les variations d'âge, de taille, de périodicité éventuelle pour la natalité. De plus, il a supposé que cette population vit seule dans un milieu invariable. Dans le cas contraire (si elle coexiste avec d'autres espèces) il néglige toute sorte d'influences. De plus, Malthus a aussi considéré qu'il n'y a pas de pression du milieu, ce qui veut dire qu'il n'existe pas de facteurs externes comme la guerre, la famine, qui limitent le nombre de la population, nous faisons référence à [5]. Suite à ces considérations, il a observé, la forme discrète suivante :

$$\frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = r = cte$$

Il désigne par  $N_t$  l'effectif de la population à l'instant  $t$ . Mais pour avoir une forme continue, il a considéré un intervalle de temps très court, et a montré que l'accroissement du nombre  $N(t)$  d'individus de cette population est proportionnel à  $N(t)$ . Ce qui se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \quad (M.1)$$

Où  $r$  est un facteur constant de proportionnalité qui représente le taux de croissance. En intégrant l'équation précédente, on obtient :

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

Cette loi est appelée loi de croissance exponentielle ou loi de croissance malthusienne (voir, [6]). Son inconvénient, est le fait qu'elle ne tiennent pas compte des limites imposées à la croissance par le milieu. En effet, Darwin en 1859 a confirmé ceci, en montrant qu'il était impossible d'avoir une croissance infinie de populations. Il a clarifié cette impossibilité par l'exemple du couple d'éléphants qui, dans des conditions normales, couvrirait la surface de la terre en quelques siècles. Cependant, il a été constaté que les prévisions de la loi malthusienne

restent correctes seulement sur de petits effectifs. (Voir Figure10, [11])

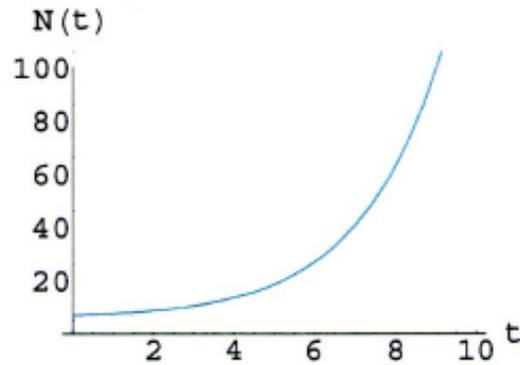


FIG-10 : Modèle de croissance de Malthus

### 2.3 Modèle logistique

C'est suite aux considérations précédentes, que le biologiste belge Pierre-François Verhulst [7] propose en 1838 un modèle amélioré tenant compte de la limitation imposée par l'effectif croissant de la population. Il suppose que le taux d'accroissement par capita de la population est donné par :

$$r\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) = f(N(t))$$

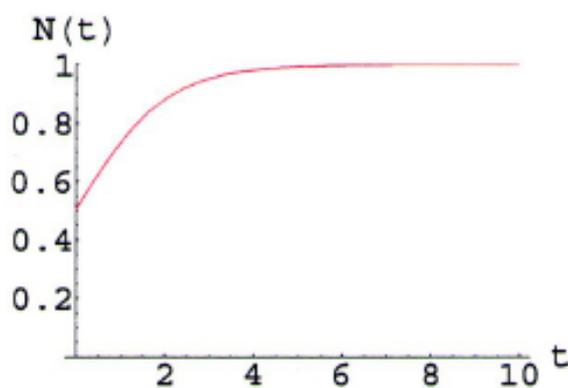
Donc

$$(M.2) \quad \frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - \frac{r}{k}[N(t)]^2 = f(N(t))N(t)$$

Cette équation a pour solution

$$N(t) = \frac{kN_0e^{rt}}{k - N_0 + N_0e^{rt}}$$

Voir (Figure 11,[11])



**FIG-11 : Modèle de croissance de P.F.Verhulst**

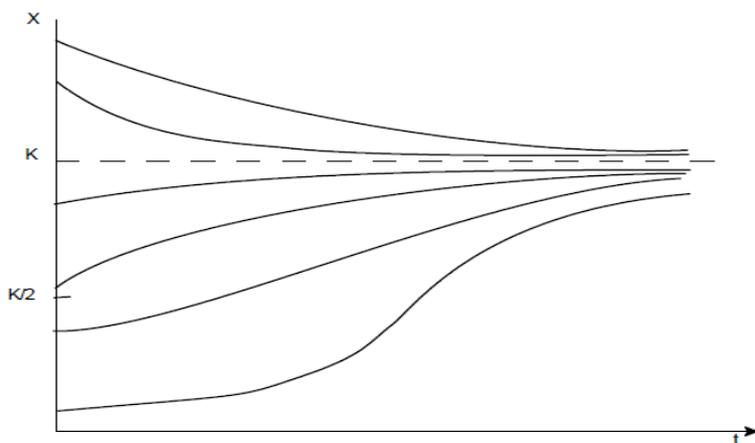
Nous admettons que la croissance est limitée par une sorte de " frottement " intérieur à la population, c'est -à -dire, qu'à ressources égales, plus le nombre d'individus est élevé, plus il est difficile de se nourrir, et de croître. Le facteur  $k$  ; ( $k$  est strictement positif), correspond à la capacité du milieu et représente la population limite au-delà de laquelle elle ne peut plus croître.

Si  $N(t_0) < k$  : La population croît et s'approche asymptotiquement. de  $k$  quand  $t \rightarrow +\infty$

Si  $N(t_0) < \frac{k}{2}$  ; il existe alors un point d'inflexion au point  $N(t) = \frac{k}{2}$  ,

Si  $N(t_0) > k$  ; la population décroît et elle s'approche asymptotiquement de  $k$  quand  $t \rightarrow +\infty$  , et dans le cas ou  $N(t_0) = k$  la population reste constante pour tout ( $t > 0$ )

(Voir Figure 12, [11] et [8]).



**FIG-12 : Représentation de l'approche asymptotique de la population vers le coefficient  $k$**

Cette loi, nommée par Verhulst loi logistique, est différente de celle de Malthus car elle impose une valeur limite à la population. Elle a été appliquée avec succès à beaucoup de situations réelles. Nous citons comme exemple le modèle de B.Gompertz en 1825 destiné à évaluer la vitesse de croissance d'une tumeur. Plusieurs auteurs ont présenté des modèles avec divers fonctions de croissance. Dans la table suivante nous regroupons les fonctions de croissance les plus remarquables.

Dans le paragraphe suivant, nous allons donner un aperçu sur quelques types de modèles avec deux populations, et les différentes modifications faites d'un modèle à un autre.

Source	$f(N(t))$
Malthus (1798)	$r$
Verhulst (1838)	$r(1 - \frac{N(t)}{k})$
Gompertz (1825)	$r \log(\frac{k}{N})$
Goel et al (1971) Gilpin et al (1976) Richards (1959)	$r \left(1 - (\frac{N(t)}{k})^\theta\right)$
Rosenzweig (1971)	$r \left(\left(\frac{N(t)}{k}\right)^\theta - 1\right) \quad 0 < \theta \leq 1$
Szathmary (1991)	$kN(t)$

**Table 1 : La fonction de croissance d'une population**

**conclusion**

Les modèles évoqués plus haut relèvent tous du champ des mathématiques dédiées aux équations différentielles ordinaires. La population est toujours considérée comme une entité, qui évolue dans un environnement homogène. Cela suppose implicitement, par exemple, que le taux de natalité est considéré comme constant pour tous les individus. Or ce taux dépend évidemment de l'âge des individus ou de leur stade de développement. La richesse des mathématiques offre d'autres approches de la dynamique des populations, qui prennent en compte cette structuration interne de la population en classes.

## Chapitre 3

# Modèle à deux populations

Quand différentes populations (issues d'espèces différentes) interagissent, la dynamique de chacune est affectée par les effectifs des autres. Elles forment une cascade de populations en interaction qui constitue une communauté

En écologie générale, le cas d'un système proie-prédateur fait l'objet d'une recherche intense depuis les années vingt du 19-ème siècle avec l'étude pionnière de Volterra, initialement développée sur des populations de poissons de la mer adriatique.

Nous aborderons un petit historique du modèle de Lotka-Volterra, une présentation et une étude de ce modèle.

### 3.1 Modèle de Lotka Volterra

Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra est le modèle le plus simple de relation de type proie-prédateur entre deux espèces. Il a été proposé par Volterra en 1926 pour expliquer l'évolution périodique de deux espèces de poissons de la mer adriatique. Volterra avait été consulté par le responsable de la pêche italienne à Trieste qui avait remarqué, juste après la première guerre mondiale (période durant laquelle la pêche avait été nettement réduite) un accroissement significatif du prédateur.

Des équations de la même forme furent introduite en 1922 par Lotka en cinétique chimique.

### 3.1.1 Présentation du modèle

Dans la publication du Volterra (1926) qui a pris la forme du célèbre modèle proie-prédateur, le premier chapitre de son ouvrage « Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie » étudie la coexistence de deux espèces dont l'une dévore l'autre. Considérons deux espèces, la première, la proie  $x(t)$ , qui aurait si elle était seule une croissance malthusienne, la seconde, le prédateur  $y(t)$ , qui se nourrit exclusivement de la première et en l'absence de cette dernière s'épuiserait progressivement et disparaîtrait. La mise en équation de la fonction représentant la prédation est basée sur la méthode des rencontres et sur l'hypothèse des équivalents élaborés par Volterra. La première considère que pour qu'il y ait prédation entre une espèce prédatrice et une espèce proie, il faut tout d'abord qu'il y ait rencontre entre ces deux espèces et que le nombre de rencontres entre eux est proportionnel au nombre des individus qui la compose. Le coefficient de proportionnalité étant égal à la probabilité de rencontre. La seconde consiste à supposer qu'il existe un rapport constant entre les disparitions et apparitions d'individus que provoquent les rencontres, i.e., que la prédation de la proie est équivalente à la croissance du prédateur. De plus, Volterra considère comme immédiat cet accroissement. Ceci conduit au système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

Avec  $a, b, c$  et  $d$  des constantes positives.

#### Description des Variables

Nous sommes entrainés de modéliser un système biologique composé de deux espèces : une espèce proie et une espèce prédatrice. Pour cela, nous notons  $X(t)$  et  $Y(t)$  le nombre de proies et de prédateurs au temps  $t$ . Les quantités sont donc des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{N}$ . Afin de disposer d'outils mathématiques, on préfère travailler avec des variables continues. C'est pourquoi, on considère deux nouvelles quantités :

$$x(t) = \frac{X(t)}{X_0} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{Y(t)}{Y_0}$$

Où  $X_0$  (respectivement  $Y_0$ ) est un nombre de proies (respectivement de prédateurs) fixé et grand. Les quantités  $x$  et  $y$  sont donc des proportions de proies et prédateurs. Les variations de  $x(t)$  et  $y(t)$  sont donc des quantités petites, si bien que l'on peut faire l'hypothèse que  $x(t)$  et  $y(t)$  sont des fonctions continues de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Pour la suite, on fera une hypothèse de régularité supplémentaire de supposer ces fonctions dérivables.

Enfin, considérons les taux de variation sur un intervalle  $\Delta t$  :

$$\frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{\Delta X(t)}{X(t)} \quad , \quad \frac{\Delta y(t)}{y(t)} = \frac{\Delta Y(t)}{Y(t)}$$

Si on suppose que les variations de  $X(t)$  (respectivement  $Y(t)$ ) sont petites par rapport à  $X(t)$  (respectivement  $Y(t)$ ) (ce qui paraît vraisemblable seulement pour des populations nombreuses), on peut passer à la limite :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)} \quad , \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y(t)}{y(t)} = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

Mise en équation en absence de prédateurs, les proies ont un taux de croissance constant :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a \quad \text{avec} \quad a > 0$$

De même, les prédateurs ont tendance à disparaître en l'absence de proies, faute de nourriture :

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -c \quad \text{avec} \quad c > 0$$

Il reste à prendre en compte les interactions entre les deux espèces : le taux de prédation (taux de décroissance des proies dû aux prédateurs) est supposé proportionnel au nombre de prédateurs. De la même façon, le taux de variation du nombre de prédateurs est proportionnel à la quantité de nourriture à leur disposition, c'est-à-dire au nombre de proies. Ces considérations nous conduisent aux équations suivantes :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t) \quad \text{et} \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx(t) \quad \text{avec} \quad b, d > 0$$

Du point de vue mathématique, il s'agit d'un système de deux équations différentielles,

auquel on ajoute des conditions initiales (population de départ de chacune des espèces) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + dx) \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \quad (1)$$

### 3.1.2 Etude du modèle de Lotka-Volterra

Il est important que le modèle soit fidèle aux observations faites dans la nature afin d'être utile dans un but prédictif. Comme nous ne savons pas calculer une solution exacte à l'aide d'une formule analytique, nous sommes contraints d'étudier le système différentiel (1) d'une manière qualitative.

#### Existence, unicité, positivité et bornitude de la solution

Montrons que notre système admet une solution.

Soit  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , le système (1) devient :

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{avec} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix} \quad (\star 1)$$

Comme la fonction  $f$  est de classe  $C^1$ , alors d'après le **théorème 1.1.3**  $f$  est localement lipschitzienne, et donc d'après le **théorème 1.1.4**, le problème de Cauchy  $(\star 1)$  admet une solution maximale unique. Soit  $I$  l'intervalle de définition de cette solution.

Pour que le modèle ait un intérêt biologique, nous supposons que les deux espèces sont présentes au départ, c'est-à-dire  $x_0 > 0$  et  $y_0 > 0$  et nous vérifions que la solution  $(x(t), y(t))$  de  $(\star 1)$  vérifie, pour tout  $t \in I$ ,  $x(t) > 0$  et  $y(t) > 0$ .

Faisons une démonstration par l'absurde, et supposons qu'il existe  $t \in I$  tel que  $x(t) < 0$  ou  $y(t) < 0$ . Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'une des deux fonctions  $x$  ou  $y$  s'annule. Si c'est  $x$ , il existe  $s \in I$  tel que  $x(s) = 0$ . Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_s \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{avec} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix} \quad (\star 2)$$

admet lui aussi une unique solution maximale. Or,  $t \mapsto (0, y_s e^{-c(t-s)})$  est une telle solution

sur  $\mathbb{R}$ . Par unicité, nous en déduisons que  $x(0) = 0$ , ce qui est contraire à l'hypothèse  $x_0 > 0$ .  
Et le même processus se fait pour  $y$ .

Pour l'existence globale, nous utilisons la proposition suivante :

**Proposition :**

Soit  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour  $x, y > 0$  par

$$H(x, y) = dx - c \ln(x) + by - a \ln(y)$$

Alors  $H$  est une intégrale première pour le système (1), i.e. si  $(x(t), y(t))$  est solution de (1) sur  $[0, T)$ , alors :

$$\forall t < T, \quad H(x(t), y(t)) = cste$$

*Démonstration*

Nous effectuons le calcul formel suivant :

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x(a - by)}{y(-c + dx)}$$

Après la séparation des variables, nous obtenons :

$$\frac{x'(-c + dx)}{x} = \frac{y'(a - by)}{y}$$

En intégrant, nous aurons :

$$-c \ln(x) + dx = a \ln(y) - by + C^{ste}$$

Et plutôt que de justifier que nous avons le droit de le faire, nous nous assurons que  $H(x(t), y(t))$  est bien défini et nous vérifions que  $\frac{\partial}{\partial t} H(x(t), y(t)) = 0$  en utilisant (1).

La connaissance de cette intégrale première nous permet de montrer le lemme suivant :

**Lemme :**

La solution maximale  $(x(t), y(t))$  est bornée.

*Démonstration* Cela provient de la coercivité de l'intégrale première. Il existe  $A > 0$  et

$B > 0$  tels que

$$\forall t > A, c \ln(x) < \frac{dx}{2} \text{ et } \forall y > B, a \ln(y) < \frac{by}{2}$$

D'autre part, il existe une constante  $\alpha$  telle que pour tous réels  $x$  et  $y$ ,

$$dx - c \ln(x) \geq \alpha \text{ et } by - a \ln(y) \geq \alpha$$

Ainsi, si  $x$  est en dehors du compact  $[0, A]$ ,

$$H(x(t), y(t)) > \frac{dx}{2} + \alpha$$

De même, si  $y$  est en dehors du compact  $[0, B]$ , alors ,

$$H(x(t), y(t)) > \frac{by}{2} + \alpha$$

Nous en déduisons que :

$$0 < x(t) < \max\{A, \frac{2}{d}(H(x_0, y_0) - \alpha)\} \text{ et } 0 < y(t) < \max\{B - \frac{2}{b}(H(x_0, y_0) - \alpha)\}$$

D'où le résultat.

D'après la **remarque 1.1.2** et le **lemme** précédent nous déduisons que la solution maximale  $(x(t), y(t))$  de (1) est définie pour tout  $t > 0$ .

### Etude de stabilité des points fixes

Cherchons les points d'équilibre du système (1).

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } a - by = 0 \\ y = 0 \text{ ou } -c + dx = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons deux points d'équilibre :  $(0, 0)$  et  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ .

Pour l'étude de la nature d'un point d'équilibre, nous calculons la différentielle (la matrice Jacobiënne) en ce point, dans notre cas la différentielle  $Df$  en  $(x, y)$  est :

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

■ Etude de l'équilibre  $(0, 0)$  :

La différentielle au point  $(0, 0)$  est donnée par :

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

admettant une valeur propre négative et une valeur propre positive, il s'agit d'un point selle. Nous pouvons même affiner le résultat et dire que la direction  $x$  est instable alors que la direction  $y$  est asymptotiquement stable.

■ Etude de l'équilibre  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  :

La différentielle au point  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  est donnée par :

$$Df\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Celui-ci admet deux valeurs propres  $\lambda = \pm\sqrt{ac}$ , conjuguées, de parties réelles nulles. La linéarisation ne nous permet pas de conclure sur la stabilité de ce point d'équilibre, nous pouvons seulement dire que le système (1) prévoit des centres (vu que la trace de la matrice Jacobiéenne est nulle et son déterminant est positif). La linéarisation dans ce cas est insuffisante, il faut chercher d'autre méthode pour connaître le portrait de phase globale. Pour cela nous allons montrer qu'il existe une solution périodique autour du point  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  par la théorie de Morse.

Nous avons comme intégrale première de (1),

$$H(x, y) = dx - c \ln(x) - a \ln(y) + by$$

Montrons que  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  est un point critique non dégénéré de  $H$  :

$$DH(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d - \frac{c}{x} = 0 \\ -\frac{a}{y} + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{c}{d} \\ y = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Donc  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  est un point critique de  $H$ .

Nous calculons la matrice hessienne de  $H$  en  $(x, y)$  :

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix}$$

Nous avons

$$\det \begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix} \Big|_{(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})} = \frac{b^2 d^2}{ac} \neq 0$$

Alors  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  est un point critique non dégénéré de  $H$ .

Et donc  $H$  est une fonction de Morse dans un voisinage de  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ ,

Nous faisons le développement de Taylor au point  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

$$H(x, y) = H(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) + DH(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})(x - \frac{c}{d}, y - \frac{a}{b}) + D^2 H(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})(x - \frac{c}{d}, y - \frac{a}{b})^2 + \dots$$

Après simplification, nous obtiendrons :

$$H(x, y) = H(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) + \frac{d^2}{c}(x - \frac{c}{d})^2 + \frac{b^2}{a}(y - \frac{a}{b})^2 + \dots$$

Donc l'indice  $k$  du point  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  est nul.

Par application de la théorie de Morse, nous concluons qu'il existe une solution périodique autour de l'équilibre  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ .

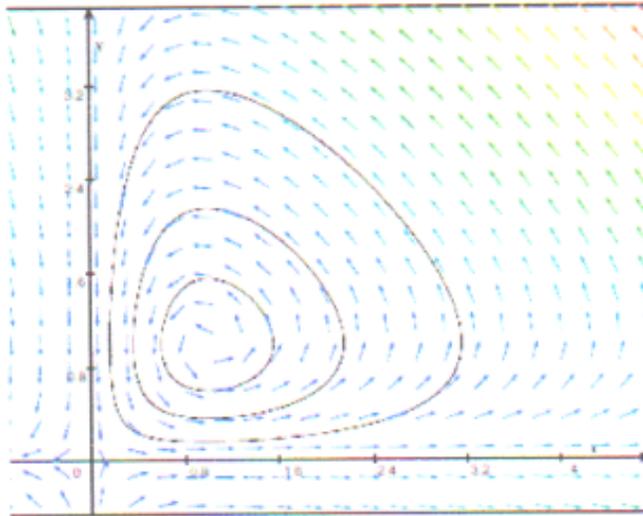


FIG-13 : Trajectoires avec  $a = b = c = d = 1$

### Portrait de phase

#### ■ Isocline nulles

Isocline verticale :

$$\dot{x} = x(a - by) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{a}{b}$$

Isocline horizontale :

$$\dot{y} = y(-c + dx) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{c}{d}$$

#### ■ Sens des flèches

Si  $x = 0$ , alors  $\dot{x} = 0$  et  $\dot{y} = -cy < 0$ .

Sur l'autre isocline  $y = \frac{a}{b}$ , on déduit le sens des flèches par continuité à partir du point d'intersection des deux isoclines verticales.

Si  $y = 0$ , alors  $\dot{y} = 0$  et  $\dot{x} = ax > 0$ .

Comme précédemment, le sens des flèches sur l'isocline  $x = \frac{c}{d}$  se déduit par continuité.

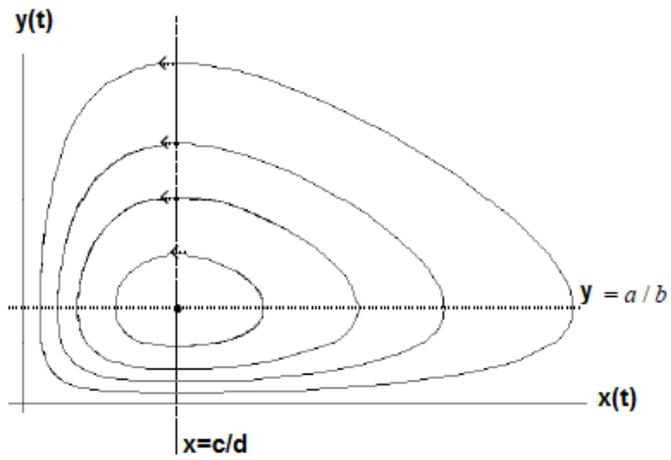


FIG-14 : Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra

■ Allure des chroniques :

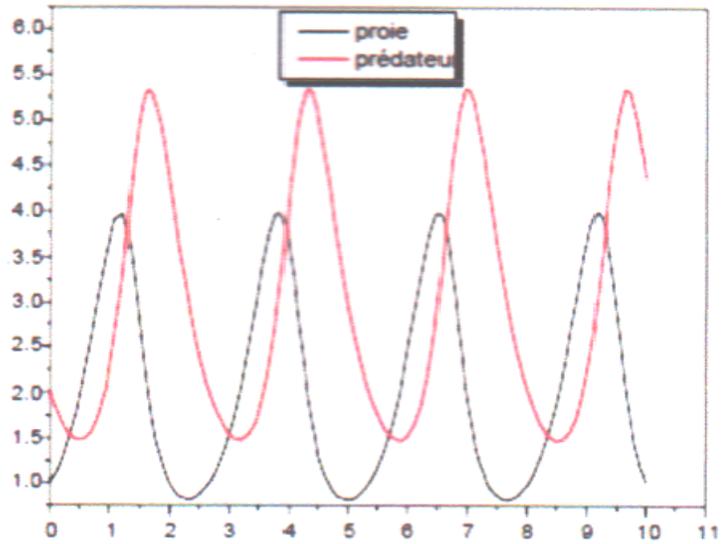


FIG-15 : Chronique du modèle de Lotka-Volterra  
( $x_0 = 1$  et  $y_0 = 2$ )

### 3.2 Modèle actuel

Les modèles proie-prédateur se résument par la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = X(t)f(X(t)) - g(X, Y)Y(t) \\ \frac{dY(t)}{dt} = \tau g(X, Y)Y(t) - mY(t) \end{cases}$$

où :

$f(X(t))$  est un taux d'accroissement pour la croissance de la proie en absence du prédateur, et  $X(t)f(X(t))$  est la quantité de nourriture consommée par la proie en absence du prédateur. L'hypothèse des équivalents [Volterra, 1931] implique que la prédation intervienne à la fois dans la croissance et décroissance puisque la mortalité des proies par prédation est équivalente à un accroissement immédiat des prédateurs.

$g(X, Y)$  est appelée " réponse fonctionnelle " elle exprime le taux de consommation de la proie (c'est à dire la consommation de proie par unité de prédateur) donc  $g(X, Y)Y(t)$  est la quantité de nourriture de proie consommée par le prédateur, elle est multipliée par le coefficient de conversion  $\tau$  (la constante positive  $\tau$  est un facteur de conversion toujours inférieur à 1).

Cette quantité  $\tau g(X, Y)Y(t)$  s'ajoute à la biomasse du prédateur. Pour cela elle est précédée d'un signe + . Par contre  $g(X, Y)Y(t)$  est précédée d'un signe - dans la première équation car elle se retranche de la biomasse de la proie .

$m =$  taux de mortalité du prédateur par unité de biomasse

Donc  $mY(t)$  est la quantité de biomasse du prédateur qui se retranche pour cause de mortalité de sa biomasse..

L'étude d'un modèle mathématique proie-prédateur est équivalente à l'étude d'un système de deux équations différentielles ordinaires avec des conditions initiales  $(X_0, Y_0)$  connues.

# Conclusion

La modélisation des dynamiques des populations s'est initialement développée à l'aide d'équations différentielles déterministes. Ces équations fournissent une relation entre une quantité inconnue ( la taille d'une population) et sa dérivée en fonction du temps. L'analyse théorique de ces équations est souvent possible et fournit des informations pertinentes. On peut également développer des outils informatiques qui permettent de simuler sur ordinateur une approximation d'une trajectoire de cette équation, c'est-à-dire l'évolution de l'effectif de la population à partir d'une taille de population initiale fixée.

Dans le futur nous pouvons faire l'étude de n'importe quel système dynamique de deux populations, à condition de bien décrire le modèle mathématique correspondant à ce système.les équations différentielles ont un rôle important dans l'étude mathématique du modèle.

# Bibliographie

- [1] A.Bensoussan, J.L.Lions ,G.Papanicolaou , **Asymptotic Analysis For Periodic Structures**, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [2] R. L.Borrelli, Coleman C S - **Differential Equations, A Modeling Perspective** (2nd Ed.)(Wiley 2004).
- [3] L.Fauchier-Magnan, P. Buser,O. Guichard. **Introduction à la théorie de Morse** (Février 2005).
- [4] H.I. FREEDMAN,"**Deterministic Mathématique Models in Population Ecology**",1987.
- [5] V. S.Ivlev, **Experimental Ecology of the feeding of fishes**. Yale University Press, New Haven, CT 1961.
- [6] T.R.Malthus . **Essai sur le Principe de Population**. Paris : Éditions Gonthier, 1963.
- [7] N.Mrabet. **Construction d'un modèle prédateur-proie et son étude mathématique**. Thèse de Doctorat d'état en Mathématique, Université Abou-Bakr Belkaid,Tlemcen,(2012).
- [8] L.Pontriaguine , **Équations différentielles ordinaires**. Edition Mir, Moscou, 1969.
- [9] F.VERHULST."**Non Linear Differential Equations and Dynamical Systems and Chaos**". Springer Verlag, 1985.
- [10] F.Verhulst.**Notice sur la loi que la population suit dans un accroissement. correspondances Mathématiques et physiques** (1838). 10 :113-121
- [11] V.Volterra. **Leçons sur la Théorie Mathématique De la Lutte Pour la Vie**, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[12] N.Vorobiev, **Caractères de divisibilité — Suite de Fibonacci**, coll. **Initiation aux Mathématiques**, Éditions Mir, Moscou, 1973

[13] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite\\_de\\_Fibonacci](https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci)

## **Résumé :**

L'objectif entrepris dans ce mémoire est l'étude des modèles mathématiques que ce soit à une seule ou deux populations (proie-prédateur). Ainsi, montrer par la même occasion le rôle des équations différentielles dans la dynamique de populations.

Mots clés : Dynamique de populations, Modèle de Malthus, Modèle de Verhulst, Modèle de Lotka-Volterra , équations différentielles.

## **Abstract :**

The objective undertaken in this memory is to study mathematical models in one or two populations (prey-predators). Thus, at the same time, show the role of differential equations in population dynamics.

Key words: Population dynamics, Malthus model, Verhulst model, Lotka-Volterra model, differential equations.

## **المخلص:**

الهدف الذي تم القيام به في هذه المذكرة هو دراسة النماذج الرياضية في واحد أو اثنين من السكان (الفريسة-المفترسة). وهكذا، في الوقت نفسه، تظهر دور المعادلات التفاضلية في ديناميات السكان.

الكلمات المفتاحية: ديناميات السكان، نموذج مالثوس، نموذج فير هولست، نموذج لوتكا-فولتيرا، المعادلات التفاضلية.