

Kheira BERROUAINÉ

# Mémoire de Master 2

Memory

Février 2016

Kheira BERROUAINÉ  
Département de Mathématiques  
Université Abou Bekr Belkaid  
Tlemcen 13000  
Algérie

# Remerciement

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur Monsieur HOBAD Mekki pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée tout le long de mon travail, ses critiques et ces conseils m'ont été précieux. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Je remercie également Monsieur MESSIRDI Bachir et Madame Zhour NEDJRAOUI membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

J'adresse mes remerciements à Monsieur le Professeur Yebdri Mustapha, pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les deux années écoulées.

J'exprime également ma gratitude à Monsieur le Chef de Département de Mathématiques Monsieur Mebkhout miloud qui a été toujours disponible pour nous et nous a vraiment aidé dans tous les domaines.

Et enfin j'adresse mes sincères remerciements à mes chers parents qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser ce travail dans les meilleures conditions, mes chers frères Mouffek, Nabil et sa femme, Ilyes.

à la mémoire de mon frère soufiane.

A mes amies qui m'ont beaucoup aidé durant ces années d'études et mes collègues de département et surtout ma chère amie Hakima.



# Introduction

Une équation différentielle est une relation entre une fonction et ses dérivées. Ils décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés et forme le langage dans lequel les lois fondamentales des sciences physiques sont formulés.

La science nous décrit comme un système physique change d'un instant à l'autre. La théorie des équations différentielles nous fournit les outils et les techniques pour prendre cette information à court terme et obtenir le fonctionnement à long terme de tout l'organisme.

L'objet de ce mémoire est de donner quelques résultats concernant les équations différentielles et la résolution algébrique de ses équation.

Dans le premier chapitre, on donne des rappelles concernant la diagonalisation, trigonalisation, l'exponentielle d'une matrice est la résolution de système :  $X' = AX$ .

Le chapitre deux est consacré à l'étude des équations différentielles linéaires (théorème d'existence est l'unicité, la méthode de résolution).

Enfin, dans le troisième chapitre on donne le théorème de point fixe de Schauder aux équations différentielle qui ont une singularité en  $x = 0$ .

Le premier papier qui a traité les solutions singulières des EDO est celui de Lazer et Solimini [10], il a traité les singularités des équations différentielles semi-linéaires de la forme

$$x''(t) + a(t)x(t) = \frac{b(t)}{x^\lambda} + e(t).$$

avec  $a, b, e \in \mathcal{C}[0, 1]$  et  $\lambda > 0$ , A attiré l'attention de nombreux chercheurs au cours des deux dernières décennies [2, es, 7, 13]. Certaines conditions fortes introduites par Gordon [6] sont standard dans les travaux connexes [4, 12, 17, 19], avec une forte singularité à proximité  $x = 0$ .

En comparaison avec le cas de singularités fortes, l'étude de l'existence de solutions périodiques sous la présence de singularités faibles est plus récente et le nombre de références est beaucoup plus petit [5, 9, 14, 15, 16].

Certains outils classiques ont été utilisés dans la littérature pour étudier des équations singulières [11, 17, 19], la méthode de sur et sous solution [1, 3] et théorème de point fixe [8, 9, 15].

Si la fonction de Green  $G(t, s)$  associée est positive, alors il est donnée en [9] que l'équation précédente avec  $e(t) = 0$  a au moins deux solutions périodiques positives quand  $f(t, x)$  admet une singularité répulsive au voisinage de  $x = 0$  (autrement dit  $f(t, x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers zéro uniformément en  $t$ ).



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Réduction des matrices</b> .....	1
1.1	Diagonalisation .....	2
1.2	Trigonalisation .....	3
1.3	Exponentielle d'une matrice .....	5
1.3.1	Calculs d'exponentielles : .....	5
1.4	Résolution de $X' = AX$ : .....	7
1.5	Exemples : .....	8
<b>2</b>	<b>Équations différentielles linéaires ordinaires d'ordre n, réduction de l'ordre et résolution.</b> .....	11
2.1	Définition et réduction de l'ordre : .....	11
2.2	Résolvante et formule intégrale .....	13
2.2.1	Équation homogène .....	13
2.2.2	Propriété de la résolvante .....	14
2.2.3	Équation avec second membre .....	15
2.3	Le cas des équations à coefficients constants .....	17
2.4	Résolution des équations à coefficient constants .....	17
2.4.1	Résolution de l'équation sans second membre .....	17
2.4.2	Résolution de l'équation avec second membre .....	17
2.5	Exemples : .....	18
<b>3</b>	<b>Application de théorème du point fixe de Schauder à une équation différentielle singulière</b> .....	21
3.1	Introduction .....	21
3.2	Preliminaire .....	21
3.3	Résultat 1 : .....	22
3.4	Résultat 2 .....	29
	<b>Bibliographie</b> .....	30
	<b>Bibliography</b> .....	31





# Chapitre 1

## Réduction des matrices

**Définition 1 (Vecteur propre).** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Un vecteur propre de la matrice  $A$  est un vecteur  $X$  non nul telle que :

$$AX = \lambda X$$

ou  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  associée au vecteur propre  $X$ .

Le spectre de  $A$  c'est l'ensemble des valeurs propres de  $A$  et on le note :  $Sp(A)$

**Définition 2 (Polynôme caractéristique).** Soit  $A$  une matrice carrée le polynôme caractéristique de  $A$  est :

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

**Proposition 1.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\lambda$  est une racine du polynôme caractéristique.

**Preuve.** On suppose que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  donc

$$\begin{aligned} \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : AX = \lambda X &\implies \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : (A - \lambda I_n)X = 0 \\ &\iff \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : X \in \ker(A - \lambda I_n) \\ &\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas injective} \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \\ &\iff \mathcal{X}_A(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

□

**Théorème 1.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . alors  $\mathcal{X}_A$  est de degré  $n$  et :

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \lambda^n - Tr(A)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

**Preuve.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Appelons  $C_1, \dots, C_n$  les vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  qui ont pour coordonnées dans la base canonique  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{K}^n$ , les valeurs apparaissant en colonnes dans  $A$  et  $e_1, \dots, e_n$  les vecteurs de  $\mathcal{C}$ . donc :

$$\det(A - \lambda I_n) = \det_{\mathcal{C}}(C_1 - \lambda e_1, \dots, C_n - \lambda e_n)$$

On peut alors développer ce déterminant par n-linéarité et obtenir  $2^n$  termes en tout.

— Le terme constant correspond au choix de  $C_i$  à chaque étape du développement soit à  $\det_{\mathcal{C}}(C_1, \dots, C_n)$  dans l'expression de  $\mathcal{X}_A(\lambda)$ , il vaut donc :  $(-1)^n \cdot \det(A)$ .

- Le terme de plus haut degré correspond au choix de  $\lambda \cdot e_i$  à chaque étape du développement, donc à un seul terme de degré  $n$  et à un coefficient égal à :  $(-1)^n \det(e_1, \dots, e_n)$ .  
Dans l'expression de  $\mathcal{X}_A(\lambda)$ , il vaut donc :  $(-1)^n (-1)^n \cdot \det(I_n) = 1$ .
- Le terme de degré  $(n-1)$  enfin correspond à choisir  $(n-1)$  fois  $\lambda \cdot e_i$  à chaque étape du développement et une fois  $C_i$ , soit  $n$  combinaisons donnant finalement :

$$(-1)^{n-1} \sum_{C_k}^n \det(e_1, \dots, e_{k-1}, C_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$$

chacun de ces déterminants vaut :

$$\det_C(e_1, \dots, e_{k-1}, C_k, e_{k+1}, \dots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_{1,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & a_{k-1,k} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & a_{k,k} & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{k+1,k} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_{k,k}$$

Donc le coefficient de  $\lambda^{n-1}$  dans  $\mathcal{X}_A(\lambda)$  vaut :

$$(-1)^n (-1)^{n-1} \cdot [a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}] = -\text{Tr}(A)$$

□

**Définition 3** (Polynôme scindé).  $\mathcal{X}_A$  est dit scindé s'il est factorisable sur  $\mathbb{K}$  en un produit de termes du 1<sup>er</sup> degré.

## 1.1 Diagonalisation

**Définition 4** (Matrice carrées diagonalisable). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On dit que  $A$  est diagonalisable si et seulement si :  $A$  est semblable à une matrice diagonale, autrement dit : il existe  $P$  une matrice inversible,  $A'$  une matrice diagonale telle que :

$$A = P \cdot A' \cdot P^{-1}$$

**Théorème 2.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$A$  est diagonalisable si :

1.  $\mathcal{X}_A(X)$  est scindé .i.e

$$\mathcal{X}_A(X) = \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{\alpha_k}, \quad \sum_{k=1}^p \alpha_k = n, \quad \forall i, j = 1, \dots, p; \quad i \neq j \implies \lambda_i \neq \lambda_j$$

2.  $\forall i = 1, \dots, p : \dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$ .

**Proposition 2.** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des scalaires 2 à 2 distincts, ( $\lambda_i \neq \lambda_j$ ) alors les sous espaces propres  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$  sont en somme directe.

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = E$$

**Proposition 3.** Soit  $\mathbb{K}$ -e-v de dimension finie  $n$ .  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres 2 à 2 distinctes de  $A$  alors :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} \iff \dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p}$$

**Preuve. :**

"  $\Leftarrow$  "

$$\begin{aligned} \text{1 et 2} &\implies \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} = \alpha_1 + \dots + \alpha_p = n = \dim E. \\ &\implies A \text{ est diagonalisable.} \end{aligned}$$

"  $\implies$  "

1. Par absurde : On suppose que  $A$  est diagonalisable et  $\mathcal{X}_A(x)$  non scindé dans  $\mathbb{K}$ .  
 $\mathcal{X}_A(x) = Q(x)(x - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (x - \lambda_k)^{\alpha_k}$  avec  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k < n$ .

$$\implies \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_k < n.$$

$$\implies \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} \leq \dim E.$$

$\xrightarrow{\text{par la prop 2}}$   $A$  n'est pas diagonalisable. contradiction.

2. On suppose que  $A$  est diagonalisable et il existe  $j \in \{1, \dots, p\} / \dim E_{\lambda_j} < \alpha_j$ .

$$\implies \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_j} + \dim E_{\lambda_p} < \alpha_1 + \dots + \alpha_j + \alpha_p.$$

$$\implies \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} < n = \dim E.$$

$\implies A$  n'est pas diagonalisable contradiction.

□

## 1.2 Trigonalisation

**Définition 5** (Matrice carrée trigonalisable). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée, on dit que  $A$  est triangulaire si elle est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire : s'il existe une matrice  $T$  et une matrice inversible  $P$  telle que :

$$A = P \cdot T \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

**Théorème 3 (Critère de trigonalisation).** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . alors  $A$  est trigonalisable  $\iff \mathcal{X}_A(X)$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

**Preuve. :**

"  $\Rightarrow$  "

Supposons d'abord que  $A$  est trigonalisable. elle est donc semblable à une matrice triangulaire (métons supérieure).

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{X}_A(X) = (b_{11} - X) \cdots (b_{nn} - X).$$

$$\Rightarrow \mathcal{X}_A(X) \text{ est scindé.}$$

"  $\Leftarrow$  "

Supposons que  $\mathcal{X}_A(X)$  est scindé.

On raisonne par récurrence sur la dimension de l'espace.

1.  $n=1$  : On a :

$$A = a_{11} \Rightarrow \mathcal{X}_A(X) = (a_{11} - X)$$

est scindé et  $A$  est bien triangulaire supérieure.

2. Supposons que la propriété est vraie en dimension  $(n-1)$ .

3. On va montrer que la propriété est vraie en dimension  $n$ .

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  telle que  $\mathcal{X}_A(X) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X), \lambda_i \in \mathbb{K}$ .

comme  $\lambda_1$  est une valeur propre de  $A \Rightarrow$  il existe  $v_1 \in \mathbb{K}^n$  vecteur propre,  $v_1 \neq 0$  associé à  $\lambda_1$ .

C'est donc une famille libre, que l'on peut compléter à l'aide de vecteurs  $v_2, \dots, v_n$  en une base  $B$  de  $\mathbb{K}^n$ .

La matrice  $A$  dans cette base est semblable à  $A'$  et de la forme :

$$A' = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array} \right), \quad \text{ou : } \tilde{A} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}).$$

$$\Rightarrow \mathcal{X}_A(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} - XI_{n-1} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = (\lambda_1 - X) \mathcal{X}_{\tilde{A}}(X).$$

comme  $\mathcal{X}_A$  est scindé  $\Rightarrow \mathcal{X}_{\tilde{A}} = \prod_{i=2}^n (\lambda_i - X)$  est également scindé.

Donc l'hypothèse de récurrence s'applique :  $\exists \tilde{P}$  telle que  $\tilde{P}^{-1} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{P} = \tilde{T}$ , avec  $\tilde{T}$  matrice triangulaire supérieure  $(n-1) \times (n-1)$ .

on pose alors :

$$P = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \tilde{P} \end{array} \right).$$

$\Rightarrow \det P = \det \tilde{P} \Rightarrow P$  est inversible.

$$P^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \tilde{P}^{-1} \end{array} \right) \Rightarrow P^{-1} \cdot A \cdot P = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & c_1 & \cdots & c_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \tilde{T} \end{array} \right).$$

qui est triangulaire supérieure.

□

### 1.3 Exponentielle d'une matrice

**Définition 6.** On appelle exponentielle de matrice l'application :

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longrightarrow \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \end{aligned}$$

#### 1.3.1 Calculs d'exponentielles :

La première méthode pour calculer l'exponentielle de la matrice A est d'utiliser la définition de l'exponentielle comme somme de la série entière

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

ou bien à l'aide de la décomposition de Dunford, cette décomposition est bien adaptée à l'étude de l'exponentielle d'une matrice, on peut ramener certains problèmes à l'étude du cas diagonal et de cas nilpotente.

On suppose que le polynôme caractéristique  $\mathcal{X}_A(X)$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , on a donc l'existence et l'unicité de la décomposition de Dunford  $A = D + N$  avec D diagonalisable et N nilpotente et  $DN = ND$ .

#### 1. Le cas des matrices diagonalisables :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonalisable et soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres alors  $\exists P$  telle que :  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$  dans une base de  $\mathbb{K}^n$  de vecteurs propres  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , la matrice associée dans cette base est alors :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

on sait que :

$$\exp(D) = e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

alors :

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (P \cdot D \cdot P^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (P \cdot D^k \cdot P^{-1}) \\ &= P \cdot e^D \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

## 2. Le cas des matrices nilpotentes :

Si  $N$  est nilpotente, alors  $N^m = 0$ , ou  $m$  est l'indice de nilpotence.

D'après la définition de l'exponentielle, on s'aperçoit alors que cette dernière ne contient qu'un nombre fini de termes, on a donc :

$$\exp(N) = I_n + N + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^{m_\lambda-1}}{(m_\lambda-1)!} = \sum_{k=0}^{m_\lambda-1} \frac{N^k}{k!}$$

donc :

$$\exp(A) = e^A = e^\lambda \left( \sum_{k=0}^{m_\lambda-1} \frac{N^k}{k!} \right).$$

## 3. Le cas où $A$ n'est pas diagonalisable :

La méthode consiste à trigonaliser  $A$  et dans ce cas on va utiliser la décomposition de Jordan.

alors  $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible et  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonal par blocs de la manière suivante :

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

donc on a :

$$e^A = P \cdot e^J \cdot P^{-1} \quad \text{ou :} \quad e^J = \begin{pmatrix} e^{J_{\lambda_1}} & & 0 \\ & e^{J_{\lambda_2}} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{J_{\lambda_n}} \end{pmatrix}.$$

Il reste maintenant de calculer  $e^{J_{\lambda_i}}$ .

On a :  $J_{\lambda_i} = \lambda_i I_n + N_{i,k}$  avec  $N$  une matrice nilpotente telle que :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

puisque  $\lambda_i I_n$  et  $N_{i,k}$  commutent, on obtient :

$$e^{J_{\lambda_i}} = e^{\lambda_i I_n + N_{i,k}} = e^{\lambda_i I_n} \cdot e^{N_{i,k}}$$

avec :

$$e^N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(m_{\lambda_i} - 1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

alors :

$$e^{J_{\lambda}} = e^{\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(m_{\lambda} - 1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

finalement :

$$e^A = P \begin{pmatrix} e^{J_{\lambda_1}} & & 0 \\ & e^{J_{\lambda_2}} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{J_{\lambda_n}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

## 1.4 Résolution de $X' = AX$ :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Soit à résoudre le système différentiel linéaire à coefficients constants suivant :  $X' = AX$   
pour la résolution on va réduire la matrice  $A$ .

### 1. Le cas où $A$ est diagonalisable :

Si  $A$  est diagonalisable alors il existe  $P$  une matrice inversible et  $A'$  matrice diagonale telles que :  $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ .

On effectue le changement de fonction :

$$\begin{aligned} X = PY &\implies X' = PY' \\ &\implies Y = P^{-1}X \\ &\implies Y' = P^{-1}X' \end{aligned} \tag{1.1}$$

On a :  $X' = AX$  d'où :

$$\begin{aligned}
 PY' &= A \cdot PY \implies Y' = P^{-1} \cdot A \cdot PY \\
 &\implies Y = A'Y \\
 &\implies \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On est donc ramené à un système de la forme :

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n = c_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

On en tire  $X$  telle que  $X = PY$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Ce qui est s'écrit :

$$X = PK e^{A't}.$$

## 2. Le cas ou $A$ n'est pas diagonalisable :

Si  $A$  n'est pas diagonalisable mais qu'il existe une matrice  $T$  triangulaire et une matrice  $P$  inversible telle que  $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$ .

On effectue le changement de fonction suivant :

$$\begin{aligned}
 X &= PY \implies X' = PY' \\
 &\implies Y = P^{-1}X \\
 &\implies Y' = P^{-1}X'
 \end{aligned}$$

On a  $X' = AX$  d'où :

$$\begin{aligned}
 PY' &= A \cdot PY \implies Y' = P^{-1} \cdot A \cdot PY \\
 &\implies Y' = TY
 \end{aligned}$$

On est alors ramené à résoudre un système d'équation différentielles linéaire du 1<sup>er</sup> ordre en cascade, que l'on résoud à partir de la dernière équation (si  $T$  est triangulaire supérieure).

## 1.5 Exemples :

**Exemple 1.** Soit le système  $X' = AX$  telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \lambda^2 - 11\lambda + 28$$



les valeurs propres sont :  $\lambda_1 = 7$  et  $\lambda_2 = 4$ . donc A est semblable à une matrice diagonalisable telle que :  $A = P \cdot A' \cdot P^{-1}$  . Ou :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Par le changement de variable (1.1) On trouve :

$$Y' = A'Y$$

alors :

$$Y(t) = K \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

On tire X de la formule :  $X = PY$ , donc la solution de système est :

$$X(t) = K \begin{pmatrix} -e^{7t} & e^{4t} \\ e^{7t} & e^{4t} \end{pmatrix}$$

**Exemple 2.** Soit le système :  $X' = AX$  telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

leur polynôme caractéristique est :

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$$

donc les valeurs propres sont :  $\lambda_{1,2} = -1$  et  $\lambda_3 = 3$

alors le polynôme caractéristique est scinde.

la matrice de passage s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et la matrice triangulaire s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice diagonale par bloc. Pour cela on va calculer l'exponentiel de chaque bloc.

On a :

$$J_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice nilpotente alors :

$$e^{J_{-1}} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Par le changement de variable (1.1) on a :

$$Y(t) = K \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

donc :

$$X(t) = PY(t) = PK \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

## Chapitre 2

# Équations différentielles linéaires ordinaires d'ordre $n$ , réduction de l'ordre et résolution.

### 2.1 Définition et réduction de l'ordre :

**Définition 7.** On appelle équation différentielle linéaire d'ordre  $n$ , toute équation de la forme :

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = g(t) \quad (2.1)$$

ou :  $a_i \in \mathbb{K}$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, n-1$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{K}$  continue avec  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .

On peut ramener cette équation à une équation d'ordre 1 :

On a :

$$x^{(n)}(t) = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)}(t) + g(t).$$

Soit

$$X(t) = \begin{pmatrix} x^{(n-1)}(t) \\ \vdots \\ x(t) \end{pmatrix}$$

En dérivant :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x^{(n)}(t) \\ x^{(n-1)}(t) \\ \vdots \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)}(t) + g(t) \\ x^{(n-1)}(t) \\ \vdots \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & a_0(t) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(n-1)}(t) \\ x^{(n-2)}(t) \\ \vdots \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

on pose :

$$A = \begin{pmatrix} -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & a_0(t) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, G(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a bien un système différentiel du premier ordre :

12 2 Équations différentielles linéaires ordinaires d'ordre n, réduction de l'ordre et résolution.

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + G(t) & \forall t > 0. \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

**Théorème 1** (Théorème d'existence et d'unicité). Soit  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $G : I \rightarrow \mathbb{K}$  des fonctions continues .

pour tout  $X_0 \in \mathbb{K}$ , le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + G(t) & \forall t > 0 \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une solution unique définie sur  $I$ .

**Preuve.**

**1. L'existence :**

Nous cherchons une fonction continue  $X : I \rightarrow \mathbb{K}$  telle que :

$$\forall t \in I, X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(s)X(s) + G(s)) ds.$$

On définit les itérations de Picard :

$$\begin{cases} X_0(t) = X_0 \\ X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(s)X_n(s) + G(s)) ds \end{cases}$$

On se pose la question de la convergence uniforme de  $Y_n$  vers une certaine fonction  $X$  sur  $I$ . Pour cela nous allons évaluer la norme de  $X_{n+1} - X_n$ .

On a :

$$X_{n+1}(t) - X_n(t) = \int_{t_0}^t A(s)(X_n(s) - X_{n-1}(s)) ds$$

Par continuité de  $A$  nous pouvons majorer :

$$\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leq \alpha \int_{t_0}^t \|X_n(s) - X_{n-1}(s)\| ds$$

avec  $\alpha = \|A\|$ .

Nous avons :

$$\|X_1 - X_0\| \leq (\alpha\|X_0\| + \beta)|t - t_0|$$

avec  $\beta \in \mathbb{K}^*$ .

Par récurrence, nous déduisons que :

$$\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leq (\alpha\|X_0\| + \beta) \frac{(\alpha)^n |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \forall t \in I$$

donc la série  $\sum_{n=0}^{n-1} \frac{(\alpha)^n |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$  est convergente, ainsi par comparaison :

$\sum_{n=0}^{n-1} \|X_{n+1}(t) - X_n(t)\|$  est une série normalement convergente sur tout compacte .la convergence est par conséquent uniforme sur tout compacte :

$$\sum_{n=0}^{N-1} (X_{n+1}(t) - X_n(t)) = X_N - X_0$$

Cela prouve que  $X_n$  converge uniformément vers une certaine fonction  $X$  sur  $I$ . Les  $X_n$  étant continues sur  $I$ , nous déduisons que  $X$  est continue sur  $I$ .

on passe à la limite pour trouver :

$$\forall t \in I, X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(s)X(s) + G(s))ds$$

## 2. L'unicité :

Soit  $X_1, X_2$  deux solutions du problème de Cauchy telles que :

$$X_2(t) - X_1(t) = \int_{t_0}^t A(s)(X_2(s) - X_1(s))ds$$

donc :

$$\|X_2(t) - X_1(t)\| \leq \|X_2(t) - X_1(t)\| \alpha |t - t_0|$$

On passe à la limite on trouve que  $\|X_2(t) - X_1(t)\| = 0$ .

donc :

$$X_2(t) - X_1(t) = 0$$

alors :

$$X_2 = X_1.$$

□

## 2.2 Résolvante et formule intégrale

### 2.2.1 Équation homogène

On suppose d'abord que l'équation est homogène :

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{2.2}$$

et notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des solutions de l'équation (2.2)

**Proposition 4.** (Espace de solution) : L'ensemble  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

**Preuve.**

On a  $\mathcal{E}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Fixons un instant  $t_0 \in I$  et introduisons l'application

$$\begin{aligned} L_{t_0} : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathcal{E} \\ X_0 &\longrightarrow X(t, t_0, X_0) \end{aligned}$$

c'est clairement une application linéaire. L'unicité de la solution dans le théorème d'existence et l'unicité montre que  $L_{t_0}$  est injective.

l'unicité encore donne que pour  $X \in \mathcal{E}$  alors  $X = L_{t_0}(X_0)$ , ainsi  $L_{t_0}$  est surjective.

donc c'est un isomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  sur  $\mathcal{E}$  ce qui prouve le résultat. □

**Définition 8. (Résolvante) :**

Soit  $t \in I$ . On appelle résolvante de l'équation différentielle et homogène  $X'(t) = A(t)X(t)$  l'application :

$$\begin{aligned} R(t, t_0) : \quad \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X_0 &\longrightarrow X(t, t_0, X_0) \end{aligned}$$

Où  $X(t, t_0, X_0)$  est l'unique solution de (2.2) qui satisfait  $X(t_0) = X_0$ .

Il résulte du théorème d'existence et d'unicité que la résolvante est linéaire et bijective.

alors l'application  $R_A(t, t_0)$  peut s'identifier à une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Elle permet d'exprimer toute solution  $X(\cdot)$  avec condition initiale :  $X(t) = R_A(t, t_0)X(t_0)$

**Exemple 3. (cas autonome)**

Quand  $A(\cdot) \equiv A$  est constante, la résolvante est l'exponentielle de A :

$$R_A(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

### 2.2.2 Propriété de la résolvante

**Proposition 5. 1.**  $R_A(t, t_0)$  est solution de l'équation différentielle matricielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, t_0) = A(t)R_A(t, t_0) \\ R_A(t_0, t_0) = I \end{cases}$$

2. Pour tout  $t_1, t_2$  dans  $I$  :

$$R_A(t_2, t_0) = R_A(t_2, t_1)R_A(t_1, t_0)$$

3. Si  $A(\cdot)$  est de classe  $C^k$ , l'application  $t \longrightarrow R_A(t, t_0)$  est de classe  $C^{k+1}$ .

**Preuve.**

1. Pour tout  $X_0 \in \mathbb{K}^n$ ,  $R_A(t, t_0)X_0$  est solution de (2.2) et satisfait donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} R_A(t, t_0)X_0 = A(t)R_A(t, t_0)X_0$$

et du fait que  $R(t_0, t_0) = I_n$  par définition de la résolvante.

2. On fixe deux réels  $t_0, t_1$ .

Soit  $t \longrightarrow X(t)$  la solution vérifiant  $X(t_0) = X_0$ .

Posons enfin  $X_1 = X(t_1)$ . Par définition de la résolvante, on a pour tout  $t$  :

$$\begin{aligned} R(t, t_0)X_0 &= X(t) \\ &= R(t, t_1)X_1 \\ &= R(t, t_1)R(t_1, t_0)X_0 \end{aligned}$$

Pour  $t = t_2$  on a le résultat.

3. On a :

$$R_A(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right) K$$

Or  $A(t)$  est de classe  $C^k$  ce que implique que son intégrale est de classe  $C^{k+1}$  est puisque l'exponentielle est de classe  $C^\infty$  alors il résulte que  $R_A(t_0, t)$  est de classe  $C^{k+1}$ .

□

### 2.2.3 Équation avec second membre

Soit l'équation différentielle suivante :

$$X'(t) = A(t)X(t) + G(t) \quad (2.3)$$

La connaissance de la résolvante de l'équation(2.2) permet de déterminer la solution de l'équation (2.3) grâce à la formule de la variation de la constante.

**Théorème 2.** (*Formule de Duhamel*) : La solution de l'équation de problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + G(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

s'écrit :

$$X(t) = R(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)G(s)ds$$

**Preuve.** Par la méthode de la variation de la constante on pose :

$$Y(t) = R_A(t, t_0)^{-1}X(t), \quad \forall t \in I.$$

Calculons la dérivée de  $Y(\cdot)$  :

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}(R_A(t, t_0)^{-1})X(t) + R_A(t, t_0)^{-1}X'(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(R_A(t, t_0)^{-1})X(t) + R_A(t, t_0)^{-1}(A(t)X(t) + G(t)) \end{aligned}$$

On a :

$$R(t, t_0) \times R^{-1}(t, t_0) = I_n(t).$$

Après dérivation on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[R(t, t_0) \times R^{-1}(t, t_0)] &= \frac{\partial}{\partial t}I_n(t) \implies R^{-1}(t, t_0)\frac{\partial}{\partial t}R(t, t_0) + R(t, t_0)\frac{\partial}{\partial t}R^{-1}(t, t_0) = 0 \\ &\implies R(t, t_0)\frac{\partial}{\partial t}R^{-1}(t, t_0) = -\frac{\partial}{\partial t}R(t, t_0)R^{-1}(t, t_0) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(R_A(t, t_0)^{-1}) &= -R_A(t, t_0)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial t}R_A(t, t_0) \right) R_A(t, t_0)^{-1} \\ &= -R_A(t, t_0)^{-1}A(t)R_A(t, t_0)R_A(t, t_0)^{-1} \\ &= -R_A(t, t_0)^{-1}A(t) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Y'(t) &= -R_A(t, t_0)^{-1}A(t)X(t) + R_A(t, t_0)^{-1}(A(t)X(t) + G(t)) \\ &= -R_A(t, t_0)^{-1}A(t)X(t) + R_A(t, t_0)^{-1}A(t)X(t) + R_A(t, t_0)^{-1}G(t) \\ &= R_A(t, t_0)^{-1}G(t) \end{aligned}$$

Par conséquent en utilisant :

$$R_A(t, t_0)^{-1} = R_A(t_0, t)$$

et puisque :

$$Y(t_0) = R_A(t_0, t_0)X(t_0) = X(t_0) = X_0$$

alors :

$$R_A(t, t_0)^{-1}X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t R_A(t_0, s)G(s)ds$$

donc la formule générale s'écrit :

$$X(t) = R_A(t, t_0)X_0 + R_A(t, t_0) \int_{t_0}^t R_A(t_0, s)G(s)ds$$

et puisque :

$$R_A(t, t_0)R_A(t_0, s) = R_A(t, s)$$

alors il résulte que :

$$X(t) = R_A(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^t R_A(t, s)G(s)ds$$

□

Pour résoudre une équation différentielle linéaire il suffit de savoir résoudre la résolvante. Malheureusement, il est très rare de pouvoir donner une expression explicite de la résolvante. mais on peut obtenir des informations qualitatives sur la solution de l'équation grâce à l'étude de la résolvante.

**Proposition 6.** (Déterminant de la résolvante)

La fonction :  $\Delta(t) = \det R_A(t, t_0)$  est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \Delta'(t) = \text{Tr}(A(t))\Delta(t) \\ \Delta(t_0) = 1 \end{cases}$$

Ce qui implique :

$$\det R_A(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr}A(s)ds\right)$$

**Preuve.**

On a :  $\det'(A) \cdot H = \det(A)\text{Tr}(A^{-1} \cdot H)$ .

$$\begin{aligned} \Delta'(t) &= \det R_A(t, t_0)\text{Tr}(R_A(t, t_0)^{-1}R_A'(t, t_0)) \\ &= \det R_A(t, t_0)\text{Tr}(A(t)) \\ &= \Delta(t)\text{Tr}(A(t)) \end{aligned}$$

En intégrant on trouve :

$$\Delta(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s))ds\right) \implies \det R_A(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s))ds\right)$$

□



### 2.3 Le cas des équations à coefficients constants

Soit l'équation différentielle à coefficient constant :

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0x(t) = g(t)$$

**Théorème 3.** (Théorème d'existence et d'unicité) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $G : I \rightarrow \mathbb{K}$  des fonctions continues

pour tout  $X_0 \in \mathbb{K}$ , le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + G(t) & \forall t > 0 \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur  $I$ .

### 2.4 Résolution des équations à coefficient constants

Soit l'équation différentielle à coefficient constante :

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0x(t) = g(t)$$

cette équation peut être ramenée à une équation d'ordre 1 de la forme :

$$X'(t) = AX(t) + G(t) \tag{2.4}$$

on a l'existence et l'unicité de la solution., il reste de déterminer l'expression de cette solution. La solution générale s'écrit sous la forme :

$$X(t) = X_1(t) + X_p(t)$$

ou  $X_1$  est la solution de l'équation sans second membre et  $X_p$  est la solution particulière.

#### 2.4.1 Résolution de l'équation sans second membre

Soit l'équation sans second membre (équation homogène) :

$$X'(t) = AX(t)$$

d'après le chapitre 1 on sait que la solution s'écrit sous la forme :

$$X(t) = Pe^{(A't)}K$$

#### 2.4.2 Résolution de l'équation avec second membre

Par la méthode de variation de la constante :

On sait que :

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P \implies e^{(A't)} = P^{-1}e^{(At)}P$$

$$X(t) = Pe^{(A't)}K(t) \implies X'(t) = PA'e^{(A't)}K(t) + Pe^{(A't)}K'(t)$$

On remplace dans (2.4) on trouve :

$$P \cdot A'e^{(A't)}K(t) + Pe^{(A't)}K'(t) = A \cdot Pe^{(A't)} + G(t)$$

$$A'e^{(A't)}K(t) + e^{(A't)}K'(t) = P^{-1} \cdot A \cdot Pe^{(A't)} + P^{-1}G(t)$$

$$A'e^{(A't)}K(t) + e^{(A't)}K'(t) = A'e^{(A't)} + P^{-1}G(t)$$

il reste :

$$e^{(A't)}K'(t) = P^{-1}G(t)$$

donc :

$$K'(t) = \left(e^{(A't)}\right)^{-1} P^{-1}G(t)$$

donc

$$K(t) = \int_0^t \left(e^{(A's)}\right)^{-1} P^{-1}G(s)ds$$

## 2.5 Exemples :

**Exemple 4.** Soit le système  $X' = AX + g$  telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solution est de l'équation sans seconde membre est :

$$X(t) = K \begin{pmatrix} e^{7t} & -e^{4t} \\ e^{7t} & e^{4t} \end{pmatrix}$$

Par la méthode de la variation de la constante on trouve :

$$K(t) = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-7s} & 0 \\ 0 & e^{-4s} \end{pmatrix}$$

alors :

$$K(t) = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{-7} - 1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-4} - 1}{4} \end{pmatrix}$$

**Exemple 5.** Soit le système svt :  $X' = A(t)X$  tq :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2t + \frac{1}{t} & 0 & -t + \frac{1}{t} \\ t - \frac{1}{t} & 3t & t - \frac{1}{t} \\ \frac{2}{t} - 2t & 0 & \frac{2}{t} + t \end{pmatrix}$$

le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P_{A(t)}(\lambda) = (\lambda - 3t)^2 \left(\lambda - \frac{3}{t}\right)$$

Les valeurs propres de  $A(t)$  sont donc :  $\lambda_1 = \frac{3}{t}$  et  $\lambda_{2,3} = 3t$  qui est valeur propre double.  
La matrice de passage ici ne dépend pas de  $t$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A(t) est une matrice diagonalisable telle que :

$$A'(t) = \begin{pmatrix} 3t & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{t} \end{pmatrix}$$

On sait que :

$$X(t) = R(t, t_0)X_0$$

Ou :

$$R(t, t_0) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \ln \frac{t}{t_0} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$



## Chapitre 3

# Application de théorème du point fixe de Schauder à une équation différentielle singulière

### 3.1 Introduction

Soit l'équation de seconde ordre :

$$x'' + a(t)x = f(t, x) + e(t) \quad (3.1)$$

Ou  $a(t), e(t)$  sont des fonctions continues et 1-periodique en  $t$ , et la fonction non linéaire  $f(t, x)$  et continue en  $(t, x)$  et 1-periodique en  $t$ .

On s'intéresse au cas ou  $f(t, x)$  peut avoir une singularité en  $x = 0$ . Notre but est d'étudier l'existence d'une solution périodique positive de l'équation .

La preuve utilise le théorème de point fixe de Schauder. notre solution montre que dans des cas des singularités faibles on peut trouver une solution périodique.

**Définition 9.** (Fonction de Green) : Soit l'équation :

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t)$$

a une solution particulière :

$$x_p(t) = \int_0^t G(t, s)f(s)ds$$

avec  $G(t, s)$  est la fonction de Green qui est définie par :

$$G(t, s) = \frac{u(s)v(t) - v(s)u(t)}{w(s)}$$

Ou :  $u, v$  sont deux solution de l'équation sans seconde membre et :

$$w(s) = u(s)v'(s) - v(s)u'(s)$$

### 3.2 Préliminaire

On considère l'équation suivante

$$x'' + a(t)x = 0 \quad (3.2)$$

avec les conditions périodiques :

$$\begin{cases} x(0) = x(1) \\ x'(0) = x'(1) \end{cases}$$

supposons que l'équation(3.2) satisfait l'hypothèse suivante :

A). La fonction de Green associée  $G(t, s)$  est non-négatives pour tous :  $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

sous cette hypothèse on définit la fonction :

$$\gamma(t) = \int_0^1 G(t, s)e(s)ds$$

qui est la seule solution 1-periodique de l'équation linéaire :

$$x'' + a(t)x = e(t)$$

Quand  $a(t) = k^2$  alors la condition (A) est équivalente de dire que

$$0 < k^2 \leq \mu_1 = \pi^2.$$

Notons que  $\mu_1$  est la 1<sup>er</sup> valeur propre de problème linéaire avec les conditions de Dirichlet

$$x(0) = x(1).$$

Si  $a(t)$  une fonction non-constante. Soit  $K(q)$  la constante de Sobolev dans l'inégalité suivante :

$$C\|u\|_q^2 \leq \|u'\|_q^2 \quad \forall u \in H_0^1(0, 1).$$

La formule explicite de  $K(q)$  est :

$$K(q) = \begin{cases} \frac{2\pi}{q} \left(\frac{2}{2+q}\right)^{1-\frac{2}{q}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{q}\right)}\right)^2 & \text{si } 1 < q \leq \infty. \\ 4 & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

Où  $\Gamma$  est la fonction Gamma. ( $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} \exp^{-x} x^{t-1} dx$ ).

On note par  $p^*$  (respectivement  $p_*$ ) le sup (respectivement l'inf) essentiel pour une fonction donnée  $p \in L^1[0, 1]$ , si elle existe. Ainsi on écrit  $p \succ 0$  si  $p \geq 0$  presque par tout sur l'intervalle  $t \in [0, 1]$ .

**Théorème 4.** (Théorème de point fixe de Schauder) : Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $C$  un convexe fermé.

Si  $T$  est une application continue de  $C$  dans  $C$  telle que  $T(C)$  soit relativement compact alors  $T$  a un point fixe.

**Lemme 1** (P.J.Torres). On suppose que  $a(t) \geq 0$  et  $a \in L^p[0, 1]$  pour certain  $1 \leq p \leq \infty$ . Si :

$$\|a\|_p \leq K(2p^*)$$

alors l'hypothèse (A) est vérifiée.

### 3.3 Résultat 1 :

Dans cette section on va démontrer l'existence de la solution périodique positive de l'équation (3.1) alors on a le résultat suivant :

**Théorème 5.** [9] Supposant que  $a(t)$  satisfait (A). De plus on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H<sub>1</sub>) :  $\forall L > 0$ , il existe une fonction continue  $\phi_L > 0$  telles que :  $f(t, x) \geq \phi_L(t)$  pour tout  $(t, x) \in [0, 1] \times (0, L]$ .

(H<sub>2</sub>) : Il existe des fonctions continues, non-négatives  $g(x), h(x)$  et  $k(t)$ , telle que :

$$0 \leq f(t, x) \leq k(t)(g(x) + h(x)) \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times (0, \infty)$$

et  $g(x) > 0$  non-croissante et  $\frac{h(x)}{g(x)}$  est non-décroissante par rapport à  $x \in (0, \infty)$ .

(H<sub>3</sub>) : Il existe une constante positive  $R$  telle que :  $R > \Phi_{R^*} + \gamma^* > 0$  et

$$R \geq g(\Phi_{R^*} + \gamma^*) \left( 1 + \frac{h(R)}{g(R)} \right) K^* + \gamma^*$$

avec :

$$\gamma(t) = \int_0^1 G(t, s)e(s)ds, \quad \Phi_R(t) = \int_0^1 G(t, s)\phi_R(s)ds, \quad K(t) = \int_0^1 G(t, s)k(s)ds,$$

alors l'équation(3.1) admet au moins une solution périodique positive.

**Preuve.**

On note  $\mathcal{C}_1$  l'ensemble des fonctions continues 1-périodique. Une solution périodique de l'équation(3.1) est un point fixe de l'application complètement continue  $T$  de  $\mathcal{C}_1$  dans  $\mathcal{C}_1$  définie par :

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= \int_0^1 G(t, s)[f(s, x(s)) + e(s)]ds \\ &= \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds + \int_0^1 G(t, s)e(s)ds \\ &= \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds + \gamma(t). \end{aligned}$$

Soit  $R$  une constante positive satisfait (H<sub>3</sub>) et :

$$r = \Phi_{R^*} + \gamma^*$$

alors on a  $R > r > 0$ .

On définit l'ensemble :

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{C}_1 : r \leq x(t) \leq R, \quad \forall t \in [0, 1]\} \quad (3.3)$$

$\mathcal{A}$  est un ensemble convexe fermé.  $\mathcal{A}$  convexe :

Soit  $x, y \in \mathcal{A}$  alors

$$\begin{cases} r \leq x(t) \leq R \\ r \leq y(t) \leq R \end{cases}$$

Soit  $\lambda \in [0, 1]$  alors :

$$\begin{cases} \lambda r \leq \lambda x(t) \leq \lambda R \\ (1 - \lambda) r \leq (1 - \lambda) y(t) \leq (1 - \lambda) R \end{cases}$$

Par sommation on trouve :

$$\begin{cases} \lambda r + (1 - \lambda) r \leq \lambda x(t) + (1 - \lambda) y(t) \leq \lambda R + (1 - \lambda) R \\ r \leq \lambda x(t) + (1 - \lambda) y(t) \leq R \end{cases}$$

donc  $\mathcal{A}$  est convexe.

$\mathcal{A}$  fermé :

Soit  $(x_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x.$$

l'ensemble  $\mathcal{A}$  est fermée si  $x \in \mathcal{A}$ . On a :

$$\begin{aligned} r \leq x_n(t) \leq R &\implies r \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \leq R \\ &\implies r \leq x \leq R \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{A}$  est fermée.

pour  $x \in \mathcal{A}$  et pour  $t \in [0, 1]$  en utilise le fait que :

$$G(t, s) \geq 0, \quad \forall (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

on utilise la condition  $(H_1)$ , on a :

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &\geq \int_0^1 G(t, s) \phi_R(s) + \gamma(t) \\ &\geq \Phi_{R^*} + \gamma_* \\ &= r > 0 \end{aligned}$$

de l'autre côté, on utilise la condition  $(H_2)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds + \gamma(t) \\ &\leq \int_0^1 G(t, s) k(s) (g(x(s)) + h(x(s))) ds + \gamma(t) \\ &= \int_0^1 G(t, s) k(s) g(x(s)) \left( 1 + \frac{h(x(s))}{g(x(s))} \right) ds + \gamma(t) \end{aligned}$$

Or la fonction  $g$  est non-croissante :

$$r \leq x(t) \leq R \implies g(R) \leq g(x(t)) \leq g(r)$$

et  $\frac{h(x(s))}{g(x(s))}$  est non-décroissante alors :

$$\frac{h(r)}{g(r)} \leq \frac{h(x(s))}{g(x(s))} \leq \frac{h(R)}{g(R)}$$

alors :



$$\begin{aligned}
(Tx)(t) &\leq g(r) \left[ 1 + \frac{h(R)}{g(R)} \right] \int_0^1 G(t,s)k(s)ds + \gamma^* \\
&\leq g(r) \left[ 1 + \frac{h(R)}{g(R)} \right] K^* + \gamma^* \\
&\leq g(\Phi_{R_*} + \gamma_*) \left( 1 + \frac{h(R)}{g(R)} \right) K^* + \gamma^* \\
&\stackrel{H_3}{\leq} R
\end{aligned}$$

Conclusion :  $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ . Par une application directe de théorème de point fixe de Schauder, la preuve est complet.  $\square$

Comme application de Théorème 5, on considère le cas  $\gamma_* = 0$ . Le corollaire suivant est un résultat direct du Théorème 5.

**Corollaire 1.** *Supposons que  $a(t)$  satisfait la condition (A) et  $f(t, x)$  satisfait  $(H_1)$  et  $(H_2)$ . De plus on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées.*

$(H_3^*)$  : *Il existe une constante positive  $R$  telle que :  $R > \Phi_{R_*}$  et :*

$$g(\Phi_{R_*}) \left( 1 + \frac{h(R)}{g(R)} \right) K^* + \gamma^* \leq R$$

Si  $\gamma_* = 0$ , alors l'équation (3.1) a au moins une solution périodique positive.

**Exemple 6.** Supposant que  $a(t)$  satisfait (A) et  $b > 0, 0 < \lambda < 1$ .

Si  $\gamma_* = 0$ , alors l'équation (3.2) a au moins une solution périodique positive.

**Preuve.**

On applique le corollaire(1) : Prenons :

$$\phi_L(t) = \frac{b(t)}{L^\lambda} > 0, \quad k(t) = b(t), \quad g(x) = \frac{1}{x^\lambda}, \quad h(x) \equiv 0$$

On a :  $f(t, x) = \frac{b(t)}{x^\lambda}$  et puisque  $x \in (0, L]$  alors :  $f(t, x) \geq \phi_L(t)$  donc l'hypothèse  $(H_1)$  est vérifié.

Or les fonctions  $g, k, h$  sont des fonctions continues est :

$$f(t, x) \leq k(t) \left\{ \frac{1}{x^\lambda} + 0 \right\} \leq k(t) \{g(x) + h(x)\}$$

donc l'hypothèse  $(H_2)$  est aussi vérifié. On a aussi :

$$\Phi_R(t) = \int_0^1 G(t,s)\phi_R(s)ds = R^\lambda \underbrace{\int_0^1 G(t,s)b(s)ds}_{= \beta(t)}$$

alors :

$$\Phi_R(t) = \frac{\beta(t)}{R^\lambda}$$

donc :

$$g(\Phi_R(t)) = \frac{1}{\Phi_R(t)} = \left( \frac{R^\lambda}{\beta(t)} \right)^\lambda \geq \left( \frac{R^\lambda}{\beta_*} \right)^\lambda$$

$$K(t) = \int_0^1 G(t,s)k(s)ds = \int_0^1 G(t,s)b(s)ds \leq \beta^*$$

On applique  $(H_3)$  on trouve :

$$\left( \frac{R^\lambda}{\beta_*} \right)^\lambda [1 + 0]\beta^* + \gamma^* = \left( \frac{R^\lambda}{\beta_*} \right)^\lambda \beta^* + \gamma^* \leq R, \quad R > \frac{\beta_*}{R^\lambda}.$$

puisque  $0 < \lambda < 1$  on peut choisir  $R > 0$  suffisamment grand alors la preuve est complet.  $\square$

**Exemple 7.** Soit l'équation :

$$f(t, x) = x^{-\alpha} + \mu x^\beta \tag{3.4}$$

avec  $0 < \alpha < 1, \beta > 0$  et  $\mu$  un paramètre non négative. et  $\gamma_* = 0$  et  $b(t) \equiv 1$ .  
On définit les fonctions :

$$\phi_R(t) = L^{-\alpha}, \quad g(x) = x^{-\alpha}, \quad h(x) = \mu x^\beta, \quad k(t) = 1$$

On a :

$$x^{-\alpha} + \mu x^\beta \geq L^{-\alpha} = \phi_L(t)$$

donc  $(H_1)$  est vérifié. ainsi  $(H_2)$  est vérifié.

$$f(t, x) \leq 1 \{x^{-\alpha} + \mu x^\beta\}$$

On a :

$$\Phi_R(t) = \int_0^1 G(t,s)\phi_R(t)ds = \int_0^1 G(t,s)R^{-\alpha}ds = R^{-\alpha} \underbrace{\int_0^1 G(t,s)ds}_{=\omega(t)} \geq \frac{\omega_*}{R^\alpha}.$$

alors :

$$g(\Phi_*(t)) \leq \left( \frac{R^\lambda}{\omega_*} \right)^\lambda, \quad K(t) = \int_0^1 G(t,s)ds \leq \omega^*$$

reste à vérifier la condition  $(H_3^*)$

$$\begin{aligned} g(\Phi_{R_*}) \left( 1 + \frac{h(R)}{g(R)} \right) K^* + \gamma^* &= \left( \frac{R^\alpha}{\omega_*} \right)^\alpha \left[ 1 + \frac{\mu R^\beta}{R^{-\alpha}} \right] \omega^* + \gamma^* \\ &= \frac{R^{\alpha^2} \omega^*}{\omega_*^\alpha} \left[ \frac{R^{-\alpha} + \mu R^\beta}{R^{-\alpha}} \right] + \gamma^* \\ &= \frac{R^{1-\alpha^2} \omega^* + \mu R^{\alpha^2+\beta} \omega^* + \gamma^* \omega_*^\alpha R^{-\alpha}}{\omega_*^\alpha R^{-\alpha}} \\ &\leq R \end{aligned}$$

donc :

$$\mu R^{\alpha^2+\beta} \omega^* \leq R \omega_*^\alpha R^{-\alpha} - R^{\alpha^2-\alpha} \omega^* - \gamma^* \omega_*^\alpha R^{-\alpha}$$

ce qui permet d'avoir que

$$\begin{aligned} \mu &\leq \frac{R^{1-\alpha}\omega_*^\alpha - R^{\alpha^2-\alpha}\omega_* - \gamma^*\omega_*^\alpha R^{-\alpha}}{\omega_* R^{\alpha^2+\beta}} \\ &\leq \frac{R^{-\alpha^2+\alpha} \left( R^{1-\alpha^2}\omega_*^\alpha - R^{\alpha^2-\alpha}\omega_* - \gamma^*\omega_*^\alpha R^{-\alpha} \right)}{\omega_* R^{\alpha^2+\beta} R^{\alpha-\alpha^2}} \\ &\leq \frac{R^{1-\alpha^2}\omega_*^\alpha - \gamma^*\omega_*^\alpha R^{-\alpha^2} - \omega_*}{\omega_* R^{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

pour certains  $R > 0$  avec  $R^{\alpha+1} > \omega_*$ . l'équation à au moins une solution périodique positive pour :

$$0 < \mu < \mu_1 = \sup_{R \geq \omega_*^{\frac{1}{1+\alpha}}} \frac{R^{1-\alpha^2}\omega_*^\alpha - \gamma^*\omega_*^\alpha R^{-\alpha^2} - \omega_*}{\omega_* R^{\alpha+\beta}}$$

- Si  $\alpha + \beta < 1 - \alpha^2$  alors l'équation à au moins une solution positive périodique pour tout  $\mu \in \mathbb{R}_+$ .
- Si  $\alpha + \beta \geq 1 - \alpha^2$  alors l'équation à au moins une solution positive périodique pour tout  $\mu \in [0, \mu_1]$  ou  $\mu_1$  est un paramètre positive.

**Théorème 6.** [15] Supposant que  $a(t)$  satisfait (A) et  $f(t,x)$  satisfait  $(H_2)$ . De plus on suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite :

$(H_4)$  : Il existe  $R > 0$  telle que :

$$g(\gamma_*) \left( 1 + \frac{h(R)}{g(R)} \right) K^* + \gamma^* \leq R.$$

Si  $\gamma_* > 0$  alors l'équation(3.1) à au moins une solution positive périodique.

**Preuve.**

Soit  $R$  une constante positive satisfait  $(H_4)$  et soit  $r = \gamma_*$  alors  $R > r > 0$  puisque on a  $R > \gamma^*$ .

On va montrer que  $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ .

Pour tout  $x \in \mathcal{A}$  et  $t \in [0, 1]$  on a :

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds + \gamma(t) \\ &\geq \gamma_* = r > 0. \end{aligned}$$

et on a aussi :

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds + \gamma(t) \\ &\stackrel{H_2}{\leq} \int_0^1 G(t,s)k(s)(g(x(s)) + h(x(s))) ds + \gamma(t) \\ &= \int_0^1 G(t,s)k(s)g(x(s)) \left( 1 + \frac{h(x(s))}{g(x(s))} \right) ds + \gamma(t) \end{aligned}$$

la fonction  $g$  est non-croissante alors :

$$r \leq x(t) \leq R \implies g(R) \leq g(x(t)) \leq g(r)$$

et  $\frac{h(x(s))}{g(x(s))}$  est non-décroissante alors :

$$\frac{h(r)}{g(r)} \leq \frac{h(x(s))}{g(x(s))} \leq \frac{h(R)}{g(R)}$$

alors :

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &\leq g(r) \left[ 1 + \frac{h(R)}{g(R)} \right] \int_0^1 G(t,s)k(s)ds + \gamma^* \\ &\leq g(r) \left[ 1 + \frac{h(R)}{g(R)} \right] K^* + \gamma^* \\ &= g(\gamma_*) \left[ 1 + \frac{h(R)}{g(R)} \right] K^* + \gamma^* \\ &\stackrel{H_4}{\leq} R \end{aligned}$$

alors :  $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$  et par application de théorème de point fixe de Schauder alors T admet un point fixe. □

**Exemple 8.** Supposant que  $a(t)$  satisfait (A) et  $b > 0$ , et  $\lambda > 0$ . Avec  $\gamma_* > 0$ . On définit les fonctions :

$$\phi_R(t) = L^{-\lambda}, \quad g(x) = x^{-\lambda}, \quad h(x) \equiv 0, \quad k(t) = 1.$$

alors : l'hypothèse  $(H_2)$  est satisfaite.

ainsi l'hypothèse  $(H_4)$  nous donne :

$$g(\gamma_*) = \gamma_*^{-\lambda}, \quad K(t) = \int_0^1 G(t,s)k(t)ds \leq \beta^*.$$

donc :

$$g(\gamma_*) \left( 1 + \frac{h(x)}{g(x)} \right) K^* + \gamma^* = \frac{1}{\gamma_*^\lambda} \beta^* + \gamma^* \leq R, \quad \text{avec } R > 0$$

**Exemple 9.** Soit l'équation :

$$x'' + a(t)x = x^{-\alpha} + \mu x^\beta + e(t)$$

on a :

$$\phi_L(t) = L^{-\alpha}, \quad k(t) = 1, \quad g(x) = x^{-\alpha}, \quad h(x) = \mu x^\beta$$

avec

$$\forall e(t) : \quad \gamma_* > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0$$

L'hypothèse  $(H_2)$  est satisfaite et L'hypothèse  $(H_4)$  donne :

$$\begin{aligned} g(\gamma_*) \left( 1 + \frac{h(x)}{g(x)} \right) K^* + \gamma^* &= \frac{1}{\gamma_*^\alpha} \left( 1 + \frac{\mu R^\beta}{R^{-\lambda}} \right) \omega^* + \gamma^* \\ &\leq R \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\omega^* R^{-\alpha} + \mu R^\beta \omega^* + \gamma_*^\alpha \gamma^* R^{-\alpha} < R^{1-\alpha} \gamma_*^\alpha$$

donc :

$$\mu < \frac{R^{1-\alpha} \gamma_*^\alpha - \gamma_*^\alpha \gamma^* R^{-\alpha} - R^{-\alpha} \omega^*}{\omega^* R^\beta} = \frac{R \gamma_*^\alpha - \gamma_*^\alpha \gamma^* - \omega^*}{\omega^* R^{\alpha+\beta}}$$

- Si  $\alpha + \beta < 1$  alors l'équation à au moins une solution positive périodique pour tout  $\mu \in \mathbb{R}_+$ .
- Si  $\alpha + \beta \geq 1$  alors l'équation à au moins une solution positive périodique pour tout  $\mu \in [0, \mu_2]$ . ou  $\mu_2$  est un paramètre positive telle que :

$$0 < \mu < \mu_2 = \sup_{R>0} \frac{R\gamma_*^\alpha - \gamma_*^\alpha - \omega^*}{\omega^* R^{\alpha+\beta}}$$

### 3.4 Résultat 2

Dans le résultat de la section précédente, on a l'hypothèse  $(H_2)$  implique une particularité que la fonction non linéaire  $f(t, x)$  et non négative pour toute valeur de  $(t, x)$  dans le résultat suivant on voit comment généraliser le résultat précédent.

**Théorème 7.** [9] *Supposant que  $a(t)$  satisfait  $(A)$ , de plus on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

$(\tilde{H}_1)$  : *Il existe des fonctions continues, non négatives  $g(x), k(t)$  telle que :*

$$f(t, x) \leq k(t) \cdot g(x), \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times (0, \infty),$$

et  $g(x) > 0$  et non-croissante par rapport à  $x \in (0, \infty)$ .

$(\tilde{H}_2)$  : *On définit :*

$$R = g(\gamma_*)K^* + \gamma^*.$$

et on suppose que :  $f(t, x) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times (0, R]$ .

Si  $\gamma_* > 0$ , alors l'équation (3.1) à au moins une solution périodique positive.

**Preuve.**

Soit  $R > 0$  satisfait  $(\tilde{H}_2)$  et soit  $r = \gamma_*$  alors :  $R > r > 0$  puisque :  $R > \gamma^*$ .

$\forall x \in \mathcal{A}$  et  $t \in [0, 1], G(t, s) \geq 0$  on a :

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds + \gamma(t) \\ &\geq \gamma_* = r > 0 \end{aligned}$$

on a la fonction  $g$  est non-croissante alors :

$$r \leq x(t) \leq R \implies g(R) \leq g(x(t)) \leq g(r)$$

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds + \gamma(t) \\ &\stackrel{(\tilde{H}_1)}{\leq} \int_0^1 G(t, s)k(s)g(x(s))ds + \gamma(t) \\ &\leq g(r) \int_0^1 G(t, s)k(s)ds + \gamma^* \\ (Tx)(t) &\leq g(\gamma_*)K^* + \gamma^* = R \end{aligned}$$

donc  $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ . Par application de théorème de Schauder l'équation à au moins une solution périodique positive.  $\square$

**Exemple 10.** Soit l'équation :

$$x'' + a(t)x + \mu x^\beta = \frac{1}{x^\alpha} + e(t) \quad (3.5)$$

on a  $f(t, x) = \frac{1}{x^\alpha} - \mu x^\beta$ .

On définit les fonctions :

$$k(t) = 1, \quad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

On a :

$$k(t)g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

$$f(t, x) = \frac{1}{x^\alpha} - \mu x^\beta \leq \frac{1}{x^\alpha}, \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times (0, \infty)$$

donc  $(\tilde{H}_1)$  est vérifié.

$$g(\gamma_*) = \frac{1}{\gamma_*^\alpha}.$$

$$K(t) = \int_0^1 G(t, s)k(s)ds = \int_0^1 G(t, s)ds = \omega(t) = \omega^*$$

alors  $R$  qui est définie dans  $(\tilde{H}_2)$  est :

$$R = \frac{1}{\gamma_*^\alpha} \omega^* + \gamma^*$$

vérifions que  $f(t, s) \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^\alpha} - \mu x^\beta \geq 0 &\implies \frac{1 - \mu x^{\alpha+\beta}}{x^\alpha} \geq 0 \\ &\implies 1 - \mu x^{\alpha+\beta} \geq 0 \\ &\implies x^{\alpha+\beta} \geq \frac{1}{\mu} \\ &\implies \mu \leq x^{-\alpha-\beta} \end{aligned}$$

donc  $(\tilde{H}_2)$  est vérifiée si et seulement si :  $\mu \leq R^{-\alpha-\beta}$ .

Si  $\gamma_* > 0$  alors l'équation a au moins une solution périodique positive si  $0 \leq \mu \leq \mu_3$ .  
avec :

$$\mu_3 = \left( \frac{1}{\gamma_*^\alpha} \omega^* + \gamma^* \right)^{-\alpha-\beta}$$

# **Bibliography**