



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER
EN MATHÉMATIQUES

Option : Perturbations, Moyennisation et Applications
aux Biomathématiques (PeMAB)

Sujet :

Stabilité de Certains Systèmes Différentiels Discontinus

Candidate : Amina HAMMOUM

Date : 02/07/2017

Membres du Jury :

Président :	Karim YADI	Professeur, Université de Tlemcen
Examineur :	Abdellatif BENCHAIIB	MAA, Université de Tlemcen
Examineur :	Mustapha LAKRIB	Professeur, Université de Sidi Bel Abbès
Encadrant :	Nadira BOUKLI-HACENE	MCA, Université de Tlemcen

Année Universitaire 2016/2017

DÉDICACES

A mes parents
A mes sœurs et frères
A mes amies

REMERCIEMENTS

*Avant tout, je remercie **Allah** le tout puissant qui m'a donné la force, le courage, la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail.*

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes remerciements à mon encadrante Madame **Nadira BOUKLI- HACENE**, pour son aide, sa patience et le soutien moral qu'elle n'a cessé de me prodiguer tout au long de la réalisation de ce travail.*

*J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur **Karim Yadi** pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de mémoire.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur **Abdellatif BENCHAIB** et Monsieur **Mustapha LAKRIB** pour avoir accepté de faire partie du jury.*

Je conclurai en remerciant tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Tlemcen, le 5 juillet 2017.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACES	i
REMERCIEMENTS	ii
INTRODUCTION	2
1 RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE ORDINAIRE	3
1.1 INTRODUCTION	3
1.2 PROBLÈME DE CAUCHY	3
1.2.1 Exemples	4
1.3 THÉORÈME DE CAUCHY –LIPSCHITZ	5
1.3.1 Applications	7
1.4 MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS DIFFÉREN- TIELLES ORDINAIRES DU PREMIER ORDRE :	8
1.4.1 Méthodes de quadrature interpolatrice	8
1.4.2 Méthode d'Euler	9
1.4.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2	12
1.4.4 Méthode de Runge -Kutta d'ordre 4	14
2 SYSTEME DIFFERENTIEL ORDINAIRE	19
2.1 INTRODUCTION	19
2.2 SYSTÈME DIFFÉRENTIEL À SECOND MEMBRE CONTINU	19
2.2.1 Existence et unicité de la solution	19
2.2.2 Systèmes différentiels linéaires	20
2.2.3 Étude qualitative d'un système différentiel	21
2.3 SYSTÈME DIFFÉRENTIEL À SECOND MEMBRE DISCONTINU	26
2.3.1 La méthode convexe de Filippov	26
2.3.2 Comportement des solutions au voisinage d'un point de disconti- nuité	27
2.3.3 Théorèmes d'existence et d'unicité d'une solution au sens de Filippov	31
2.3.4 Étude d'un problème à second membre discontinu	34
CONCLUSION	46
BIBLIOGRAPHIE	47

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à la stabilité de certains systèmes différentiels discontinus par rapport à x . En utilisant la théorie de Filippov l'étude d'une équation différentielle se ramène à une étude d'une inclusion différentielle. Cette inclusion permet de définir une hypersurface de discontinuité. Selon la nature du système cette hypersurface est une section transversale ou un régime glissant.

Mots clés : Problème de Cauchy, méthodes numériques d'approximation, inclusion différentielle, multifonction, régime glissant.

Abstract

In this work, we are interested to the stability of some discontinuous differential systems with respect to x . Using the Filippov's theory the study of a differential equation is reduced to the study of a differential inclusion. This inclusion allows us to define an hypersurface of the points of discontinuity. Depending on the nature of the system this hypersurface is a cross section or a sliding mode.

Key words : Cauchy's problem, numerical approximation methods, differential inclusion, set-valued function, sliding mode.

INTRODUCTION

PARMI les problèmes de la théorie des équations différentielles ceux qui sont à second membre discontinu. Ces systèmes représentent un grand intérêt dans différents domaines comme la mécanique et l'électronique et l'automatique. La théorie de Cauchy-Lipschitz qui garantit l'existence et l'unicité de la solution n'est pas applicable dans ce cas. En effet, elle conduit à des résultats faux, voir [16]. Des recherches différentes sont effectuées pour pouvoir obtenir l'existence et l'unicité de la solution dans ce cas, suivant la nature de la discontinuité, par exemple si elle est par rapport à t en utilisant la théorie de Carathéodory et si elle est par rapport à x en utilisant la théorie de Filippov [11].

Dans ce mémoire on s'intéresse à la résolution de systèmes différentiels avec second membre discontinu par rapport à x .

Le *premier chapitre* est consacré aux équations différentielles scalaires, on rappelle quelques notions de base concernant le problème de Cauchy et le théorème d'existence et l'unicité de Cauchy Lipschitz, puis on donne quelques méthodes numériques pour l'approximation des solutions comme la méthode d'Euler et les méthodes de Runge Kutta d'ordre 2 et 4 [7, 9].

Dans le *deuxième chapitre* on s'intéresse aux systèmes différentiels. Ce chapitre est subdivisé en deux parties. Dans la première où le second membre est continu, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution dans \mathbb{R}^n , puis on donne la méthode de la résolution analytique dans le cas où le système est linéaire. On passe à l'étude qualitative d'un système différentiel où on donne quelques notions importantes comme la définition d'un point d'équilibre et la stabilité de l'origine au sens de Lyapounov [12, 22], la classification des points d'équilibre dans le plan et les deux méthodes permettant de déduire la stabilité de ces points (la méthode de linéarisation et la méthode de Lyapounov), à la fin de cette partie on va rappeler la notion de la bifurcation [2, 21].

Dans l'autre partie on va entamer l'étude de systèmes à second membre discontinu au sens de Filippov. On ramène l'étude de ce problème à une étude d'une inclusion différentielle grâce à la méthode convexe de Filippov. Après, on explique le comportement des solutions au voisinage d'un point de discontinuité (phénomène d'un régime glissant). On discute les propriétés d'existence et d'unicité donner par Filippov [11, 1, 19]. Finalement, on étudie un problème discontinu où on observe un paradoxe qui est un résultat de fausse application de la théorie de Cauchy en un point de discontinuité.

RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE ORDINAIRE

1

1.1 Introduction

Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue d'une seule variable et ses dérivées $x', x'', \dots, x^{(p)}$ et elle est d'ordre de plus haut degré de dérivation p .

Dans ce chapitre, on considère seulement des équations différentielles ordinaires du premier ordre, également notée EDO de la forme :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

car, toute équation différentielle d'ordre supérieur à 1 peut se mettre sous la forme d'un système d'équation différentielle ordinaire du premier ordre. Cette équation est autonome si f ne dépend pas explicitement de t .

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$f : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \longmapsto f(t, x) \end{array}$$

Une équation qui est définie sur un certain intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et dérivable, vérifiant l'équation différentielle (1.1) sur I est appelée une solution de l'équation (1.1).

1.2 Problème de Cauchy

Une EDO admet généralement une infinité de solutions. Pour choisir entre les différentes solutions celle qui décrit le problème, il faut considérer d'autres données et d'autres conditions qui dépendent de la valeur de la solution en instant initiale t_0 notée $x(t_0)$. Cette condition est appelée la condition initiale.

Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation (1.1) et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Résoudre un problème de Cauchy, c'est chercher toutes les fonctions définies sur un intervalle I , qui satisfont l'équation (1.1) et qui vérifient la condition initiale.

Proposition 1.1 Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) est équivalent à l'équation intégrale :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (1.3)$$

1.2.1 Exemples

Exemple 1.1 Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 3t \\ x(0) = \alpha. \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sa solution est définie sur toute \mathbb{R} . Elle est donnée par :

$$x(t) = t - \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{3} + \alpha e^{3t}.$$

Remarque 1.1 La solution dans cet exemple existe et elle est unique sur \mathbb{R} .

Exemple 1.2

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^3 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \forall t > 0$$

La solution est donnée par :

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$$

Qui n'est définie que pour $t \in [0, \frac{1}{2}[$.

Remarque 1.2 Cet exemple montre qu'un problème de Cauchy n'a pas toujours de solutions globales. Elle n'existe pas sur $t \in [\frac{1}{2}, +\infty[$.

En effet, la solution explose en $t = \frac{1}{2}$ et on a $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} x(t) = +\infty$.

Exemple 1.3

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt[3]{x(t)} \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \forall t > 0$$

On observe que $x_1(t) = 0$ est une solution.

De plus $x_2(t) = \sqrt{\frac{8t^3}{27}}$ et $x_3(t) = -\sqrt{\frac{8t^3}{27}}$ sont deux autres solutions du problème.

Remarque 1.3 Le problème admet trois solutions. Ceci montre qu'un problème de Cauchy n'a pas nécessairement une solution unique.

Remarque 1.4 Les exemples ci-dessus montrent que la condition de la continuité de $f(t,x)$ ne suffit pas pour assurer l'unicité de la solution.

Dans le paragraphe suivant on va donner des conditions pour que le problème de Cauchy admet une solution unique.

1.3 Théorème de Cauchy –Lipschitz

Dans la théorie des équations différentielles ordinaires les propriétés d'existence et d'unicité de la solution sont essentielles car dans la modélisation un système il faut qu'il admette une solution unique.

On dit qu'un problème de type de Cauchy est valable pour modéliser un phénomène physique ou biologique si on va répéter l'expérience exactement une deuxième fois sous les mêmes conditions on va obtenir exactement le même résultat et la même situation à la fin.

Pour pouvoir prédire l'état futur du système à partir de son état actuel il faut que le problème admette une solution unique.

Un moyen qui permet d'assurer que le problème admette une unique solution c'est d'imposer la condition de Lipschitz sur le second membre $f(t, x)$.

Définition 1.1 "Fonction lipschitzienne"

Soit une fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : [a, b] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

On dit que f est c -lipschitzienne en x s'il existe un c tel que pour tout t :

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq c |x_1 - x_2| \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Remarque 1.5 Si f est définie et de classe C^1 dans $[a, b] \times \mathbb{R}$ et $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq m \quad \forall (t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}.$$

alors, f satisfait la condition de Lipschitz par rapport à x sur $[a, b] \times \mathbb{R}$.

Théorème 1.1 [6] "Théorème de Cauchy Lipschitz"

Si f est continue dans $[a, b] \times \mathbb{R}$ et si f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément par rapport à la première alors le problème (1.2) admet une unique solution x . On dit que le problème est bien posé.

Remarque 1.6 Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'unicité des solutions des équations différentielles pour une condition initiale donnée. Autrement dit, à deux conditions initiales différentes, correspondent deux solutions différentes "les trajectoires partant de deux points initiaux différents ne peuvent se couper ou même se toucher".

Pour la démonstration du théorème on a besoin des rappels suivants :

Définition 1.2 "Une contraction"

Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow E$. On dit que f est contractante si :

$$\exists k \in]0, 1[, \forall (x, y) \in E \times E, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|.$$

Théorème 1.2 [6] "Théorème du point fixe de Picard"

Soient $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction contractante. Alors f admet un unique point fixe x^* solution de l'équation $f(x) = x$.

Proposition 1.2 Soit $f : E \rightarrow E$ tel que l'une de ces itérées f^n est contractante alors, f admet un seul point fixe dans E .

Démonstration. (Théorème 1) On remarque que le problème (1.2) est équivalent à l'équation (1.3), Autrement dit, une solution de notre équation différentielle est un point fixe de l'application A de $C_0([a, b], \mathbb{R})$ dans lui-même, qui à associe $A(y) : t \rightarrow A(y) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$.

Il semble donc naturel de chercher à montrer que A est contractante.

Notons L tel que f soit L -lipschitzienne en y :

$$\begin{aligned} |A(y_1)(t) - A(y_2)(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y_2(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_2(s)| ds \quad \text{car, } f \text{ est lipschitzienne en } y. \\ &\leq L(t - t_0) \|y_1 - y_2\|_\infty \end{aligned}$$

Avec : $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$.

On obtient ainsi :

$$\|A(y_1)(t) - A(y_2)(t)\|_\infty \leq L(b - a) \|y_1 - y_2\|_\infty .$$

Ce n'est pas forcément contractante.

En itérant A une nouvelle fois on trouve :

$$\begin{aligned} |A^2(y_1)(t) - A^2(y_2)(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, A(y_1)(s)) ds - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, A(y_2)(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, A(y_1)(s)) - f(s, A(y_2)(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |A(y_1)(s) - A(y_2)(s)| ds \\ &\leq L^2 \int_{t_0}^t (s - t_0) \|y_1 - y_2\|_\infty ds \\ &\leq L^2 \frac{(t - t_0)^2}{2} \|y_1 - y_2\|_\infty \end{aligned}$$

Donc :

$$\|A^2(y_1)(t) - A^2(y_2)(t)\|_\infty \leq L^2 \frac{(t - t_0)^2}{2} \|y_1 - y_2\|_\infty$$

En itérant n fois, on obtient par récurrence sur n :

$$\begin{aligned} \| A^n(y_1)(t) - A^n(y_2)(t) \|_\infty &\leq L^n \frac{(t - t_0)^n}{n!} \| y_1 - y_2 \|_\infty \\ &\leq L^n \frac{(b - a)^n}{n!} \| y_1 - y_2 \|_\infty \end{aligned}$$

Le terme $L^n \frac{(b-a)^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ car c'est le terme général d'une série convergente.

Donc, il existe un n^* assez grand tel que : $L^n \frac{(b-a)^n}{n!} < 1 \forall n \geq n^*$.

Pour $n = n^*$: A^n est contractante. On peut appliquer le théorème de point fixe à A^n .

Soit y^* ce point solution de $A^n(y) = y$. D'après la proposition 1.2 un point fixe de A^n est un point fixe de A .

Conclusion :

A admet un seul point fixe. D'où l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy. \square

1.3.1 Applications

Exemple 1.4 Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -x^3(t) + e^{-\frac{t^2}{2}} \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [1, 2]$$

$f(t, x) = -x^3(t) + e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue dans $\mathbb{R} \times [1, 2]$ car : c'est la somme d'une exponentielle et d'un polynôme.

$f(t, x)$ est lipschitzienne par rapport à x car :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 \implies \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = 3x^2 \leq 12$$

d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une seule solution x dans $\mathbb{R} \times [1, 2]$.

Exemple 1.5 Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = |x(t)| + \sin(x(t)) + e^{-\frac{t^2}{2}} \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [1, 2] \quad (1.4)$$

$f(t, x) = |x| + \sin(x) + e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue comme somme des fonctions continues sur $\mathbb{R} \times [1, 2]$.

$f(t, x)$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R} \times [1, 2]$ par rapport à la variable x car :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = |1 + \cos(x)| \leq 1 + |\cos(x)| \leq 2$$

Conclusion : D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une seule solution x sur $\mathbb{R} \times [1, 2]$.

1.4 Méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles ordinaires du premier ordre :

Résoudre une EDO explicitement n'est pas toujours facile sauf pour des cas simples.

Des méthodes numériques permettent de résoudre le problème de Cauchy (1.2) par des approximations de la solution exacte sur un intervalle $[a, b]$.

Le principe de ces méthodes est de discrétiser l'intervalle $[a, b]$ en choisissant un pas de discrétisation h .

On pose $t_n = t_0 + nh$, avec, $n = 0, 1, \dots, N_h$ ou N_h est le plus grand entier tel que $t_{N_h} < b$ et t_n une suite de nœuds de I .

On trouve des approximations de la solution exacte $z(t)$ pour chaque nœud t_n par une valeur $y_n(t_n)$.

En utilisant les méthodes d'intégration numérique on peut trouver la valeur $y_n(t_n)$ de chaque nœud. Cette classe des méthodes est appelée la classe des méthodes à un pas (où à pas séparés). Elle est caractérisée par le fait que, pour tout $n \geq 0$, la valeur approchée y_{n+1} de la solution au nœud t_{n+1} ne dépend que de la valeur y_n calculée à l'étape précédente.

1.4.1 Méthodes de quadrature interpolatrice

Soit l'intégrale $I(f)_{[a,b]} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$. On appelle la formule permettant de calculer l'approximation de $I(f)_{[a,b]}$ par la formule de Quadrature.

Définition 1.3 "Formule du rectangle à gauche"

La formule du rectangle à gauche est obtenue en remplaçant f par une constante égale à sa valeur en la borne gauche de l'intervalle $[a, b]$, ce qui donne :

$$I(f)_{[a,b]} = (b - a)f(a).$$

Définition 1.4 "Formule du rectangle à droite"

La formule du rectangle à droite est obtenue en remplaçant f par une constante égale à sa valeur en la borne droite de l'intervalle $[a, b]$:

$$I(f)_{[a,b]} = (b - a)f(b).$$

Définition 1.5 "Formule du rectangle ou point milieu"

La formule du rectangle ou du point milieu est obtenue en remplaçant f par une constante égale à la valeur de f au milieu de $[a, b]$

$$I(f)_{[a,b]} = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

Définition 1.6 "Formule du trapèze"

La formule du trapèze est obtenue en remplaçant f par le segment qui relie $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$ ce qui donne

$$I(f)_{[a,b]} = \frac{b - a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Définition 1.7 "Formule du Simpson"

la formule est donnée par :

$$I(f)_{[a,b]} = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

1.4.2 Méthode d'Euler

On considère le problème :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \in [a, b]$$

avec : f continue et lipschitzienne par rapport à y . Commençant par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en N sous intervalles de même longueur h .

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$: les points de subdivision.

$$h = \frac{b-a}{N}, t_{n+1} = t_n + h. \quad n = 0 \dots N$$

En intégrant les deux membres de l'équation de t_n à t_{n+1} :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \implies y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt = I(f)_{[a,b]}$$

En approchant $I(f)_{[a,b]}$ par la formule des rectangles à gauche.

On trouve :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \simeq (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y(t_n)).$$

On pose : $y_n = y(t_n)$.

on obtient la formule :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Ce qui permet de définir le processus d'Euler explicite :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (1.5)$$

Si on utilise la formule des rectangles à droite pour approcher $I(f)_{[a,b]}$ on obtient :

$$y_{n+1} - y_n = hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Ce qui permet de définir le processus d'Euler implicite car il ne permet pas d'expliquer directement y_{n+1} .

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (1.6)$$

Exemple numérique

On donne le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = y^2 \sin(t) \\ y(0) = 0.3 \end{cases} \quad I = [0, 2]$$

$$f(t, y) = y^2 \sin(t).$$

1. $f(t, y)$ est continue sur I .
2. $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin(t) \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq 2 |y| \leq 2b \leq 4$. Donc f est lipschitzienne par rapport à x uniformément par rapport à t .

Alors, d'après le théorème de Cauchy- Lipschitz il existe une seule solution. Le problème est bien posé.

La solution exacte z est donnée par :

$$z(t) = \frac{0.3}{0.3 \cos(t) + 0.7}$$

On va donner quatre valeurs de N ce qui donne des pas de discrétisation h différents et puis on va comparer les résultats obtenus et on détermine le pas h qui donne la bonne approximation.

Les données initiales sont données sur le tableau suivant :

$a = t_{min1}$	$b = t_{max1}$	y_0	N_1	N_2	N_3	N_4
0	2	0.3	10	20	30	60

En scilab, on peut programmer la méthode d'Euler avec les fonctions suivantes :
La fonction $f(t, y) = y^2 \sin(t)$ est définie dans le fichier "**fonc.sci**"

```
function z=fonc(v, x) //définition de la fonction de notre
    exemple
        z=x^2*sin(v);
endfunction
```

fonc.sci

La solution exacte $z(t)$ est placée dans le fichier "**solution exacte.sci**".

```
function u= solution_exacte(t)
    u=0.3./(0.3.*cos(t)+0.7)
endfunction
```

solution_exacte.sci

La méthode numérique d'Euler est définie dans le fichier "**Méthode d' Euler.sci**".

```

exec('fonc.sci') // appeler la fonction
function [t,y,h]=Methode_de_Euler(N,tmin,tmax) // Méthode d'
    Euler
h=(tmax-tmin)/N ; //N nombre des intervalles
//tmin – instant initial a
//tmax – instant final b
//h valeur du pas de discrétisation
t=linspace(tmin,tmax,N); // t vecteur obtenue en discrétisant
    l'intervalle [a,b] en N sous intervalles
y(1)=0.3; //y(1) contient la valeur initiale t(0)
for n=2:N //début d'itération
    p=fonc(t(n-1),y(n-1)); //fonc est une fonction dépend de t
    et y:f(t,y(t))
y(n)=y(n-1)+h*p
end //fin de la boucle for
endfunction //fin de la fonction Méthode d'Euler
    
```

Methode_de_Euler.sci

L'exécution de la méthode sera dans le fichier "Méthode d' Euler.sce".

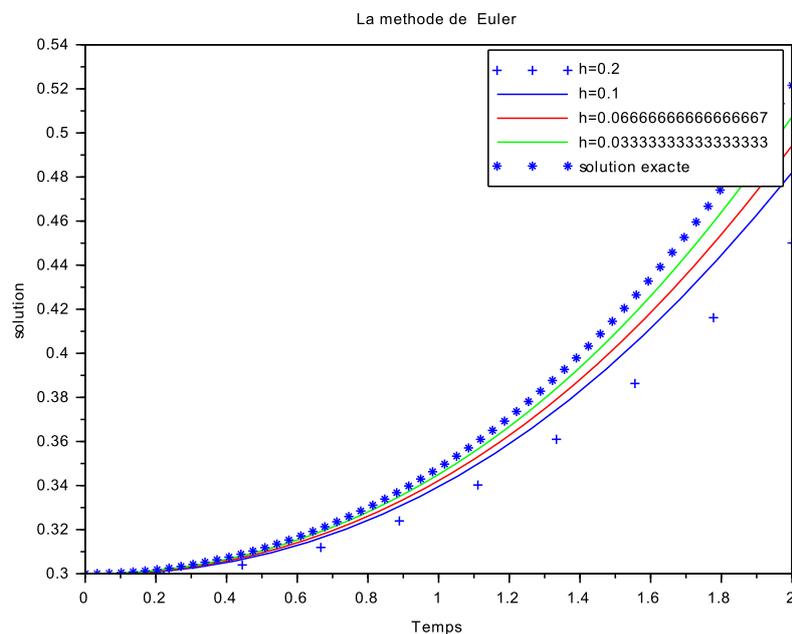


FIGURE 1.1 – Méthode d'Euler

Remarque 1.7 Suivant le graphe obtenu on peut dire que :
 A chaque fois que le nombre N augmente en d'autre terme le pas h diminue, la solution numérique obtenue converge rapidement vers la solution exacte z .

1.4.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

C'est le même principe que la méthode d'Euler. on cherche à approximer la solution exacte en utilisant la formule du point milieu pour l'approximation de l'intégrale $I(f)_{[a,b]}$ au lieu de la formule des rectangles à droite, on trouve :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt = hf(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n + \frac{h}{2}))$$

Le problème c'est qu'on n'a pas une valeur disponible $y(t_n + \frac{h}{2})$ pour calculer l'intégrale.

Une idée est de remplacer la valeur $y(t_n + \frac{h}{2})$ par la méthode d'Euler sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ avec le pas $\tilde{h} = \frac{h}{2}$. On trouve :

$$y(t_n + \tilde{h}) = y(t_n) + \tilde{h}f(t_n + y(t_n))$$

En remplaçant \tilde{h} par $\frac{h}{2}$ on obtient :

$$y(t_n + \frac{h}{2}) = y(t_n) + \frac{h}{2}f(t_n, y(t_n))$$

Donc :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2}f(t_n, y(t_n)))$$

Si on pose :

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_n, y(t_n)) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{1}{2}k_1) \end{cases}$$

On peut donner l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 comme :

$$y_{n+1} = y_n + k_2 \tag{1.7}$$

Exemple numérique

Le même exemple pour la méthode d'Euler, la méthode sera placée dans un fichier "Méthode RK2 .sci".

```

exec('fonc.sci') // appeler la fonction
function [t, y, h] = Methode_RK2(N, tmin, tmax) // Méthode de Runge
    Kutta d'ordre 2
//N nombre des intervalles
//tmin instant initial a
//tmax instant finale b
//fonc est une fonction dépend de t et y : f(t, y(t))
//y(1) contient la valeur initiale t(0)
h = (tmax-tmin)/N ; //h valeur du pas de discrétisation
t = linspace(tmin, tmax, N) ; //t vecteur obtenue en discrétisant l'intervalle [a, b] en N sous intervalles

```

```

y(1) = 0.3; // y contient les solutions de y(t(n)) n = 1, ..., N +
1
for n=2:N // le début de la boucle pour calculer les N ité
rations de l'algorithme
k1 = h*fonc(t(n-1),y(n-1));
k2 = h*fonc(t(n-1)+h*(1/2),y(n-1)+k1*(1/2));
y(n)=y(n-1)+k2;
end // fin de la boucle for
endfunction // fin de la fonction Méthode RK2

```

Methode_RK2.sci

L'exécution sera dans le fichier "Méthode RK2 .sce".

```

exec('Methode_RK2.sci') // appeler la méthode de RK2
exec('solution_exacte.sci') // appeler la solution exacte pour
la comparer avec celle de RK2
exec('fonc.sci') // appeler la fonction fonc
tmin1=0;
tmax1=2;
[t1,y1,h1]= Methode_RK2(10,tmin1,tmax1);
[t2,y2,h2]= Methode_RK2(20,tmin1,tmax1);
[t3,y3,h3]= Methode_RK2(30,tmin1,tmax1);
[t4,y4,h4]= Methode_RK2(60,tmin1,tmax1);
u1=solution_exacte(t4); // u1 c'est la solution exacte calculée
aux points de vecteur t4
plot(t1,y1,'*',t2,y2,'b',t3,y3,'r',t4,y4,'g') // tracer les
courbes obtenues pour les différents pas de discrétisation
plot(t4,u1,'+') // tracer la solution exacte
m=legend(['h="+string(h1)+"'; 'h="+string(h2)+"'; 'h="+string(
h3)+"'; 'h="+string(h4)+"'; 'solution exacte'])
title('La methode de RK2')
xlabel('Temps'); // l'axe des abscisses
ylabel('solution '); // l'axe des ordonnées

```

Methode_RK2.sce

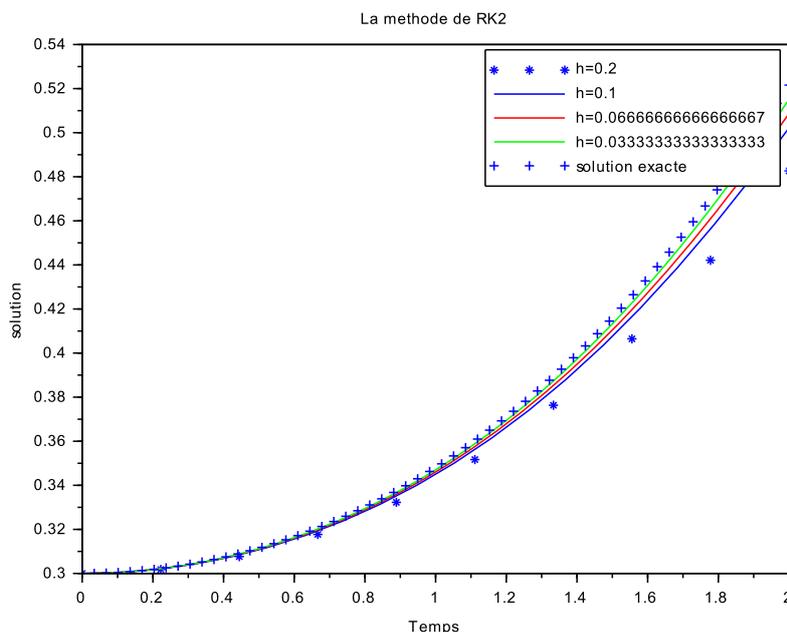


FIGURE 1.2 – Méthode de Rung Kutta 2

1.4.4 Méthode de Runge -Kutta d'ordre 4

Le principe de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est de remplacer l'intégrale $I(f)_{[a,b]}$ par la formule de Simpson.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \simeq \frac{h}{6} [f(t_n, y(t_n)) + \underbrace{4 f(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n + \frac{h}{2}))}_{A} + f(t_n + h, y(t_n + h))] \quad (1.8)$$

On va décomposer la valeur A en deux termes, ce qui donne :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \simeq \frac{h}{6} [f(t_n, y(t_n)) + \underbrace{2 f(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n + \frac{h}{2}))}_{B} + \underbrace{2 f(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n + \frac{h}{2})) + f(t_n + h, y(t_n + h))}_{C}]$$

On pose :

$$k_1 = hf(t_n, y(t_n)).$$

Calculons B :

Cherchons la valeur de $y(t_n + \frac{h}{2})$ par la formule d'Euler explicite :

$$y(t_n + \frac{h}{2}) = y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)) = y(t_n) + \frac{1}{2} k_1 \quad (1.9)$$

$$B = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (1.10)$$

On pose :

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (1.11)$$

Calculons C par la méthode d'Euler implicite :

$$y\left(t_n + \frac{h}{2}\right) = y(t_n) + \frac{h}{2}f\left(t_n + \frac{h}{2}, y\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) \quad (1.12)$$

En remplaçant la valeur $y\left(t + \frac{h}{2}\right)$ par la formule (1.9), on trouve :

$$y\left(t_n + \frac{h}{2}\right) = y(t_n) + \frac{h}{2}f\left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{1}{2}k_1\right)$$

Donc :

$$C = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{1}{2}k_2\right)$$

On pose :

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{1}{2}k_2\right) \quad (1.13)$$

Calculons $f(t_n + h, y(t_n + h))$.

En remplaçant $f(t_n + h, y(t_n + h))$ par la méthode du point milieu.

On trouve :

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y\left(t + \frac{h}{2}\right)\right) \quad (1.14)$$

En remplaçant $y\left(t + \frac{h}{2}\right)$ par la formule : $y\left(t + \frac{h}{2}\right) = y(t_n) + \frac{k_2}{2}$

$$f\left(t_n + h, y(t_n + h)\right) = f\left(t_n + h, y(t_n) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{k_2}{2}\right)\right)$$

On pose :

$$k_4 = hf\left(t_n + h, y(t_n) + k_3\right) \quad (1.15)$$

On peut définir la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 par :

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_n, y(t_n)) \\ k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 = hf(t_n + h, y(t_n) + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{cases} \quad (1.16)$$

Donc, on peut dire que la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 est une dépendance entre les intégrales calculées à chaque fois.

Exemple numérique

Le même exemple pour la méthode d'Euler, la méthode sera placée dans un fichier "Méthode RK4 .sci".

```

exec('fonc.sci')
function [t,y,h] =Methode_RK4(N,tmin,tmax) //Méthode de Runge
    Kutta d'ordre 4
//N:nombre des intervalles
//tmin:instant initial a
//tmax:instant final b
//fonc est une fonction de t et y : f(t,y(t))

h = (tmax-tmin)/N ;//valeur du pas de discrétisation
t = linspace(tmin,tmax,N) ;//t:vecteur obtenue on discrétisant l'intervalle t=[tmin,tmax]
y(1)=0.3; //y(1) contient la condition initiale y(to)
for n =2:N
k1=h*fonc(t(n-1),y(n-1));
k2=h*fonc(t(n-1)+1/2*h,y(n-1)+1/2*k1)
k3=h*fonc(t(n-1)+1/2*h,y(n-1)+1/2*k2)
k4=h*fonc(t(n-1)+h,y(n-1)+k3)
y(n) = y(n-1)+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4); //y contient les
    solutions de y(tn)n = 1, ...,N + 1
end
endfunction

```

Methode_RK4.sci

L'exécution sera dans le fichier "Méthode RK4 .sce".

```

exec('Methode_RK4.sci')//appeler la fonction de RK4
exec('solution_exacte.sci')//appeler la solution exacte pour
    la comparer avec celle de RK4
exec('fonc.sci')//appeler la fonction fonc
tmin1=0;
tmax1=2;
[t1,y1,h1]= Methode_RK4(10,tmin1,tmax1);
[t2,y2,h2]= Methode_RK4(20,tmin1,tmax1);
[t3,y3,h3]= Methode_RK4(30,tmin1,tmax1);
[t4,y4,h4]= Methode_RK4(60,tmin1,tmax1);
u1=solution_exacte(t4); //u1 c'est la solution exacte calculée
    aux points du vecteur t4
plot(t1,y1,'*',t2,y2,'b',t3,y3,'r',t4,y4,'g')//tracer les
    courbes obtenues pour les différents pas de discrétisation
plot(t4,u1,'+') //tracer la
    solution exacte
m=legend(['h='+string(h1)+''; 'h='+string(h2)+''; 'h='+string(
    h3)+''; 'h='+string(h4)+''; 'solution exacte'])

```

```
title('la méthode de RK4')
xlabel('Temps'); // l'axe des abscisses
ylabel('solution'); // l'axe des ordonnées
```

Methode_RK4.sce

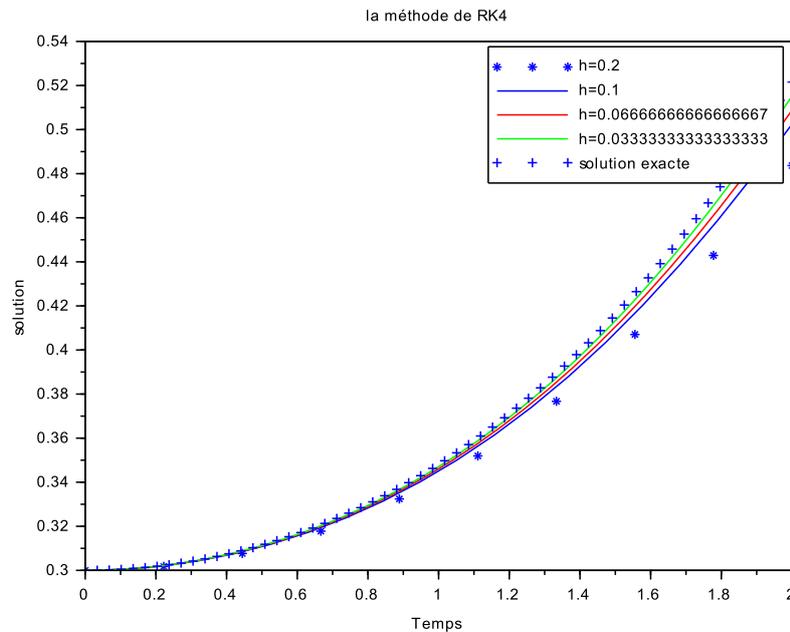


FIGURE 1.3 – Méthode de Rung Kutta 4

Pour voir la différence entre les trois méthodes avec la solution exacte on va écrire un nouveau programme “**Comparaison des méthodes.sce**”.

```
//appeler les fonctions d'Euler et RK2 et RK4 et la solution
exacte
exec('Methode_de_Euler.sci')
exec('Methode_RK2.sci')
exec('Methode_RK4.sci')
exec('solution_exacte.sci')
exec('fonc.sci')
tmin1=0;
tmax1=2;
//comparaison des methodes pour N=60
[t1,y1,h1]= Methode_de_Euler(60,tmin1,tmax1);
[t2,y2,h2]= Methode_RK2(60,tmin1,tmax1);
[t3,y3,h3]= Methode_RK4(60,tmin1,tmax1);
u1=solution_exacte(t3);
plot(t1,y1,'r',t2,y2,'b');
plot(t3,y3,'g')//tracer les graphes de toutes les solutions
title('Comparaison des methodes')
plot(t3,u1,'+')//tracer le graphe de la solution exacte
```

```
m=legend(['Methode_de_Euler'; 'Methode_RK2'; 'Methode_RK4';  
         'solution_exacte'])  
xlabel('Temps');  
ylabel('solution');
```

comparaison_des_methodes.sce

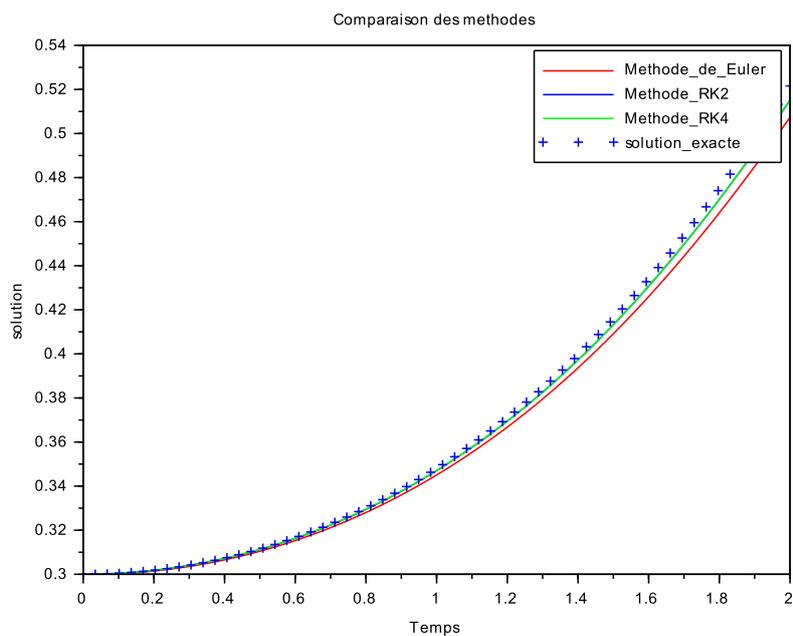


FIGURE 1.4 – Comparaison des méthodes

Remarque 1.8 Les méthodes de Runge Kutta d'ordre deux et quatre convergent vers la solution exacte plus vite que la méthode d'Euler.

SYSTEME DIFFERENTIEL ORDINAIRE

2

2.1 Introduction

Un système différentiel ordinaire est une équation différentielle ordinaire mais dans le cas vectoriel.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Un système différentiel est défini par :

$$X' = f(t, X) \quad (2.1)$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$.

2.2 Système différentiel à second membre continu

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et lipschitzienne par rapport à x . Dans ce cas l'existence et l'unicité sont assurés par le théorème de Cauchy- Lipschitz.

2.2.1 Existence et unicité de la solution

Pour résoudre l'équation différentielle (2.1), on va construire un domaine dans lequel une solution passant par un point $(t_0, X^0) \in U$ ne peut s'éloigner trop vite de X^0 et qu'elle reste bornée, avec X^0 la condition initiale donnée par :

$$X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

On note $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^n et $\bar{B}(X^0, R_0)$ la boule fermée de centre X^0 et de rayon R_0 . Comme U est supposé un ouvert, il existe un cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(X^0, R_0) \subset U$.

L'ensemble C est fermé borné donc compact par conséquent f est bornée sur C .

$$\exists M \in \mathbb{R} : M = \sup_{(t,X) \in C} \| f(t, X) \| < +\infty$$

On dit que C est un cylindre de sécurité pour l'équation (2.1) si toute solution $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy avec la condition (2.2) et $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\bar{B}(X^0, R_0)$.

Théorème 2.1 [9] Si $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne en X , alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(X^0, R_0) \subset U$. Le problème de Cauchy (2.1) avec la condition initiale (2.2) admet une unique solution exacte $X : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow U$.

Démonstration. Pour la preuve de ce théorème il suffit juste de répéter la même méthode du point fixe vu dans le paragraphe 3 dans le chapitre 1 pour l'ensemble $C^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(X^0, R_0))$. □

2.2.2 Systèmes différentiels linéaires

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Dans cette partie on s'intéresse au système différentiel linéaire de type :

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{2.3}$$

Où :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions $\{X^1, \dots, X^n\}$ du problème de Cauchy associé à l'équation (2.3) et la condition initiale (2.2) est un espace vectoriel de dimension n .

Si $\{X^1, \dots, X^n\}$ sont n solutions indépendantes on dit qu'elles forment un ensemble fondamental des solutions de ce problème. On définit la matrice $R(t)$ de $(n \times n)$:

$$R(t) = (X^1(t) \mid \dots \mid X^n(t)) \tag{2.4}$$

la matrice $R(t)$ est appelée une résolvante du système différentiel. On dit également que R est une matrice fondamentale.

Pour que les solutions soient indépendantes il suffit de vérifier que le déterminant de la matrice résolvante en t_0 est non nul .

Le déterminant de la matrice (2.4) est appelé Wronskien et on le note $W(t)$ $W : I \mapsto \mathbb{R}$.

Une solution X de (2.3) a la forme suivante :

$$X(t) = R(t).C \tag{2.5}$$

où, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est déterminé à l'aide de la condition initiale (2.2), en résolvant le système :

$$R(t_0).C = X^0 \tag{2.6}$$

Exemple de résolution avec A à coefficients constants et diagonalisable

Dans ce cas les solutions ont la forme : $X^j = e^{\lambda_j} v_j \quad j = 1 \dots n$
 les λ_j sont les valeurs propres de la matrice A est les v_j sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_j .
 La résolvante a la forme suivante :

$$R(t) = (e^{\lambda_1} v_1 \mid \dots \mid e^{\lambda_n} v_n)$$

Exemple 2.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ avec condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ associe au vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $\lambda_2 = 3$ associe au vecteur propre $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

la solution donc est donnée par :

$$X(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

2.2.3 Étude qualitative d'un système différentiel

En général on ne sait pas résoudre l'équation différentielle (2.1) même si le problème a l'air simple il y a très peu de cas où nous savons trouver des solutions explicites. Il est donc intéressant de faire une analyse qualitative des solutions pour donner une idée sur le comportement de ces dernières autour des solutions "spéciales". Dans cette partie on s'intéresse au système différentiel non linéaire autonome :

$$x' = f(x) \tag{2.7}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$.

les Points d'équilibre d'un système différentiel

Les solutions de l'équation :

$$f(x) = 0 \tag{2.8}$$

sont des points particuliers pour lesquels $x' = 0$. Les solutions qui passent par ces points n'évoluent pas avec t. On dit que ce sont les points d'équilibre. L'importance de l'analyse locale des solutions au voisinage de ces points tient au fait qu'elle permet de comprendre le comportement global des solutions dans les cas les plus simples.

Stabilité des points d'équilibre

Une fois les équilibres du système sont trouvés, il est intéressant de savoir s'ils sont stables ou non dans le sens où, si une petite perturbation de l'équilibre, est-ce

que la solution perturbée reviendra vers l'équilibre ou elle s'éloigne ?

Dans la suite on donne la définition de la stabilité au sens de Lyapounov à l'origine. On peut toujours ramener un équilibre x^* à l'origine en posant un changement de variable $y = x - x^*$.

Définition 2.1 *L'origine est dit stable pour le système (2.7) si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x \text{ solution de (2.7) } \|x(0)\| < \eta \implies \|x(t)\| < \varepsilon; \forall t \geq 0.$$

En d'autre terme toute solution partant de la petite boule B_η reste dans la grande boule B_ε .

Définition 2.2 *L'origine est dit instable si :*

$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0$, il existe au moins une solution de (2.7) tel que :

$$\|x(0)\| < \eta \text{ et } \exists t > 0 : \|x(t)\| \geq \varepsilon.$$

Définition 2.3 *l'origine est dit attractif s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution x on a :*

$$\|x(0)\| < r \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

l'origine est dit globalement attractif si pour toute solution x on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Définition 2.4 *L'origine est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif. Il est dit globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.*

Stabilité des systèmes différentiels linéaires

L'origine joue un rôle particulier pour les systèmes linéaires. En effet c'est le seul point d'équilibre de l'équation différentielle :

$$x' = Ax \tag{2.9}$$

Avec, $\det(A) \neq 0$.

Pour que l'origine soit asymptotiquement stable il faut que toutes les valeurs propres λ_i de A sont à partie réelle strictement négative. On dit dans ce cas que A est Hurwitz.

Classification des points d'équilibre dans le plan

-Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres négatives et différentes, $(0,0)$ est un nœud asymptotiquement stable.

-Si λ_1 et λ_2 sont toutes les deux positives et différentes, $(0,0)$ est un nœud (instable).

- Si une des valeurs propres est positive et l'autre négative, il existe au moins une

direction instable et on parle d'un point selle.

-Si les valeurs propres sont identiques et il n'y a qu'un seul vecteur propre. On parle d'un nœud impropre (stable ou instable).

- Dans le cas des valeurs propres conjuguées, les trajectoires sont des spirales (stable ou instable) lorsque la partie réelle des valeurs propres $\Re(\lambda_i) \neq 0$.

- Dans le cas où $\exists \Re(\lambda_i) = 0$ les trajectoires sont périodiques, il s'agit d'un centre.

Stabilité des systèmes différentiels non linéaires

Une première approche pour prédire la nature des points d'équilibre du système non linéaire (2.7) consiste à faire une linéarisation autour de point d'équilibre x^* en utilisant un développement de Taylor et en négligeant les terme supérieur à un, on obtient le système linéarisé suivant :

$$y' = Ay \tag{2.10}$$

où : $y = x - x^*$ avec : $A = \frac{\partial f}{\partial x} |_{x=x^*}$ est la matrice jacobienne au voisinage de x^* .

On ramène l'étude d'un système non linéaire à un système linéaire.

La question qui se pose est : est-ce-que l'étude de la stabilité de système linéarisé (2.10) nous renseigne sur la stabilité de système non-linéaires (2.7) ?

La réponse est oui, sauf dans le cas ou il existe une valeur propre a partie réelle $\Re(\lambda_i) = 0$.

En d'autre terme si l'origine du système linéaire est stable (respectivement instable) cela implique que le point d'équilibre du système non linéaire est stable (respectivement instable).

Pour voir pourquoi le cas où $\Re(\lambda_i) = 0$ ne donne pas le même comportement qualitatif entre les deux systèmes, on considère l'exemple suivant :

$$\begin{cases} x' = -y + ax(x^2 + y^2) \\ y' = x + ay(x^2 + y^2) \end{cases} \quad a \in \mathbb{R} \tag{2.11}$$

La linéarisation montre que l'origine est toujours un centre mais l'étude de système (2.11) par passage aux coordonnées polaires montre que (0.0) est stable si $a < 0$ et instable si $a > 0$.

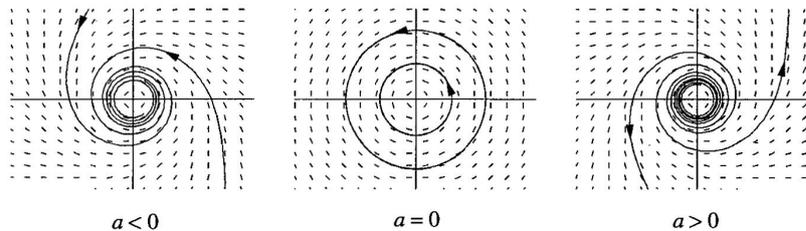


FIGURE 2.1 – Perturbation d'un centre linéaire.

Conclusion : la perturbation d'un centre de système linéaire ne donne pas un centre pour le système non linéaire.

Remarque 2.1 *La linéarisation ne donne pas des résultats de stabilité globale car l'étude est faite que pour un voisinage de l'équilibre .*

Une deuxième approche contrairement à la linéarisation permet de donner des résultats de stabilité globale ou d'au moins d'estimer le bassin d'attraction de l'équilibre c'est la méthode directe de Lyapounov.

Méthode directe de Lyapounov

Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in D$ et $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n , une fonction de Lyapounov définit comme :

$$V(0) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) > 0 \quad \forall x \in D - \{0\} \quad (2.12)$$

$$V'(x) \leq 0 \quad \forall x \in D \quad (2.13)$$

Alors, $x^* = 0$ est stable.

Si de plus :

$$V'(x) < 0 \quad \forall x \in D - \{0\} \quad (2.14)$$

Alors, $x^* = 0$ est asymptotiquement stable. Dans ce cas on veut estimer quel est l'ensemble des solutions qui tendent vers cet équilibre quand t tend vers l'infini ? cet ensemble est appelé bassin d'attraction.

Par la méthode de Lyapounov l'ensemble D est une estimation de son bassin d'attraction.

Si de plus $D = \mathbb{R}^n$ et $V(x)$ est radialement non bornée c'est-à-dire :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty \quad (2.15)$$

Alors, $x^* = 0$ est globalement asymptotiquement stable, par contre si $V(0) = 0$ et $\exists x_0$ tel que $V'(x_0) > 0$.

alors, $x^* = 0$ est instable.

Exemple 2.2

$$\begin{cases} x' = -x^3 \\ y' = -y^3 \end{cases}$$

On donne la fonction de Lyapounov suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (2.16)$$

$(0,0)$ est le seul point d'équilibre .

Cette fonction vérifie les conditions (2.12) et (2.14) et (2.15) donc $(0,0)$ est globalement asymptotiquement stable.

Remarque 2.2 *La méthode de linéarisation dans cet exemple ne donne rien. D'autre part la méthode de Lyapounov nous donne même la stabilité globale.*

Cycle limite

Dans le cas d'un système non linéaire il existe d'autre solution intéressante que la solution triviale, c'est le cas ou la solution est une trajectoire fermée isolée. Cette solution est appelée un cycle limite.

Fermée veut dire qu'il existe une période notée T telle que : $x(t + T) = x(t)$. Isolée veut dire que dans un très petit voisinage autour de cette solution il n'existe pas une autre solution fermée. En d'autre terme toutes les trajectoires spiralent autour de celle ci .

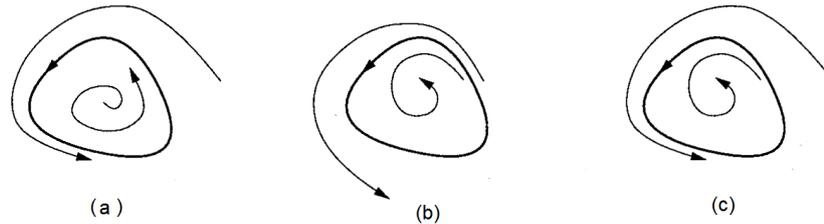


FIGURE 2.2 – (a) :cycle limite stable. (b) :cycle limite instable. (c) :cycle limite semi-stable.

Remarque 2.3 *Un cycle limite est un phénomène qui ne produit que pour les systèmes non linéaires. Un système linéaires peut avoir une solution fermée (le cas d'un centre) mais cette solution ne peut jamais être isolée.*

En effet, si une solution x est fermée alors par linéarité toute autre solution $c.x$, $c \neq 0$ est aussi fermée donc au voisinage de x il existe d'autre solution fermée.

Notion de bifurcation

Le phénomène de bifurcation se produit si le système dépend d'un paramètre noté r tel que s'il traverse une valeur critique r^* il peut produire un changement qualitatif dans le portrait de phase. Par exemple, un changement dans le nombre des points d'équilibre et les cycles limites (disparition ou naissance) ou bien un changement de stabilité. Une étude de bifurcation consiste donc à rechercher comment le portrait de phase de ce système se modifie lorsque l'on fait varier le paramètre r .

Exemple 2.3 (Bifurcation nœud-selle) soit le système suivant :

$$\begin{cases} x' = r + x^2 \\ y' = -y \end{cases}$$

Si $r < 0$ il existe deux points d'équilibre : $(-\sqrt{-r}, 0)$ qui est stable et $(\sqrt{-r}, 0)$ qui est un point selle.

Si $r = 0$ le seul point d'équilibre est $(0, 0)$ qui est instable.

Si $r > 0$ le système n'admet aucun point d'équilibre.

2.3 Système différentiel à second membre discontinu

Pour le système différentiel de type :

$$x'(t) = f(t, x) \quad (2.17)$$

avec $f(t, x)$ est discontinue par rapport à x le théorème de Cauchy Lipschitz pour l'existence et l'unicité n'est pas applicable.

Dans cette partie on introduit une autre théorie pour étudier ce cas c'est la théorie de Filippov.

L'idée de Filippov est de transformer l'étude de l'équation différentielle (2.17) à une inclusion différentielle.

En d'autre terme, au lieu de chercher une fonction x telle que sa dérivée coïncide avec $f(t, x)$ on cherche une fonction telle que la dérivée en t appartient à un ensemble $F(t, x)$:

$$x'(t) \in F(t, x). \quad (2.18)$$

La relation (2.18) est appelée une inclusion différentielle et l'ensemble $F(t, x)$ est le plus petit convexe fermé qui contient toutes les limites de $f(t, x)$. Il est appelé une multifonction ou une fonction multivoque.

Une multifonction est une application qui à un point associe un ensemble de points.

Exemple 2.4 Soit l'équation différentielle suivante, discontinue par rapport à x :

$$x'(t) = 1 - 2 \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

L'inclusion différentielle correspondante à l'équation (2.19) est :

$$x'(t) \in 1 - 2 \operatorname{Sgn}(x)$$

avec la condition initiale $x(t_0) = 0$ et :

$$\operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} \{-1\} & x < 0 \\ [-1, 1] & x = 0 \\ \{1\} & x > 0 \end{cases}$$

2.3.1 La méthode convexe de Filippov

Soit x^* un point de discontinuité de l'équation (2.17), Ce dernier définit une hypersurface Σ qui divise l'ensemble \mathbb{R}^n en deux sous espaces \mathcal{V}_- et \mathcal{V}_+ de sorte que :

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{V}_- \cup \Sigma \cup \mathcal{V}_+.$$

L'hypersurface Σ est défini par une fonction scalaire :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto h(x(t)) \end{aligned}$$

x^* est dans Σ si $h(x^*) = 0$.

Le vecteur normale \vec{n} qui est perpendiculaire à l'hypersurface Σ est donné par :

$$\vec{n} = \text{grad}(h(x(t))).$$

Une fonction $h(x(t))$ qui définit Σ n'est pas nécessairement unique pour cela en choisissant $h(x(t))$ de sorte que $\text{grad}(h(x(t))) \neq 0$.

On peut définir les sous espaces \mathcal{V}_- et \mathcal{V}_+ à l'aide de la fonction $h(x(t))$ comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_- &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x(t)) < 0\} \\ \Sigma &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x(t)) = 0\} \\ \mathcal{V}_+ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x(t)) > 0\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Remarque 2.4 La fonction f est supposé vérifier les conditions d'existence et d'unicité pour tout $x \notin \Sigma$. Donc pour tout $x \in \mathcal{V}_-$ ou $x \in \mathcal{V}_+$ la solution du problème (2.17) existe et elle est unique (d'après le théorème de Cauchy - Lipschitz).

Si $x \in \Sigma$, la multifonction $F(t, x)$ est définie comme le plus petit ensemble convexe fermée contenant toutes les limites de $f(t, z)$ quand z tend vers x et $z \notin \Sigma$.

$$F(t, x) = \bar{co}\{y \in \mathbb{R}^n \mid y = \lim_{z \rightarrow x} f(t, z), z \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma\}$$

avec : $\bar{co}\{A\}$ est le plus petit ensemble convexe fermée qui contient A .

On peut maintenant définir l'inclusion différentielle associée à l'équation (2.17) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ par :

$$x'(t) \in F(t, x(t)) = \begin{cases} f_-(t, x(t)) & x \in \mathcal{V}_- \\ \bar{co}\{f_-(t, x(t)), f_+(t, x(t))\} & x \in \Sigma \\ f_+(t, x(t)) & x \in \mathcal{V}_+ \end{cases} \quad (2.21)$$

avec : $\bar{co}\{f_-, f_+\} = \{(1 - q)f_- + qf_+, \forall q \in [0, 1]\}$.

la méthode de transformation d'une équation différentielle à second membre discontinu (2.17) à une inclusion différentielle (2.21) s'appelle la méthode convexe de Filippov.

2.3.2 Comportement des solutions au voisinage d'un point de discontinuité

Quand une solution x devient proche d'un point de discontinuité $x^* \in \Sigma$ l'ensemble $F(t, x)$ devient un segment linéaire reliant les deux points d'extrémités des vecteurs f_- et f_+ . Le comportement de la solution x au voisinage de x^* est déterminé par ce segment.

Deux situations peuvent apparaître :

1. Si le segment obtenue ne coupe pas l'hyperplan Σ et il est dans l'un des deux côtés \mathcal{V}_+ ou \mathcal{V}_- alors une solution x passant d'un coté à l'autre en traversant l'hypersurface Σ . Cette intersection est appelée une intersection transversale. Soient $n^\top(x)f_+$ et $n^\top(x)f_-$ les projections de $f_+(x)$ et $f_-(x)$ (respectivement)

sur l'hypersurface Σ .

On dit qu'il s'agit d'une intersection transversale si :

$$[n^\top(x)f_-(x)].[n^\top(x)f_+(x)] > 0.$$

Exemple 2.5 On considère le système différentiel discontinu suivant :

$$\begin{cases} x_1' = 4 + 2 \operatorname{sgn}(x_2 - c) \\ x_2' = -4 + 2 \operatorname{sgn}(x_2 - c) \end{cases} \quad (2.22)$$

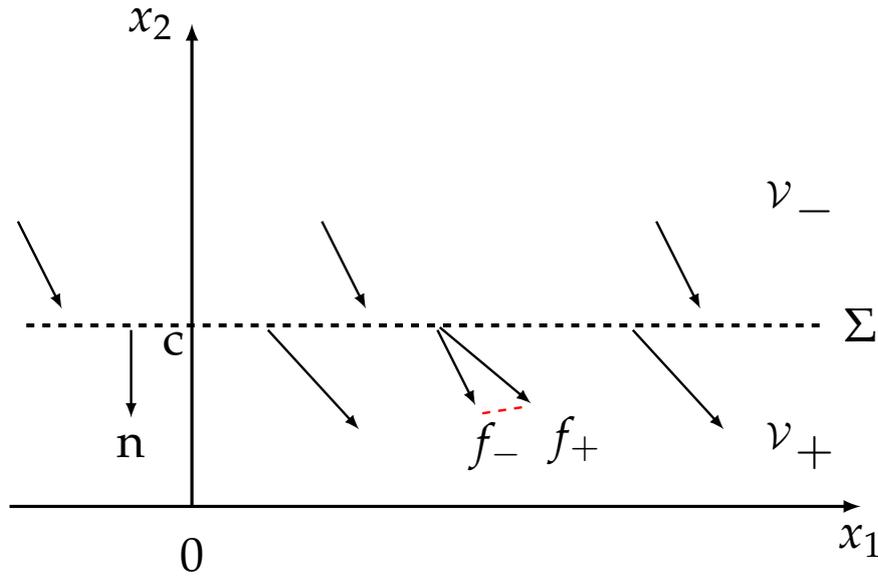


FIGURE 2.3 – Une intersection transversale.

Le point de la discontinuité est $x_2 = c$.

On prend la fonction $h(x) = c - x_2$ qui permet de définir par la relation (2.20) l'hypersurface de discontinuité $\Sigma = \{x_2 = c\}$ et les deux sous espaces \mathcal{V}_- et \mathcal{V}_+ par :

$$\mathcal{V}_+ = \{x_2 < c\}$$

$$\mathcal{V}_- = \{x_2 > c\}$$

On obtient l'inclusion différentielle associée à (2.22) définie par :

$$\begin{aligned} x_1' &\in 4 + 2 \operatorname{Sgn}(x_2 - c) \\ x_2' &\in -4 + 2 \operatorname{Sgn}(x_2 - c) \end{aligned}$$

Le vecteur normale n est donné par : $n = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, donc :

$$f_- = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{si : } x_2 \in \mathcal{V}_-$$

et :

$$f_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{si : } x_2 \in \mathcal{V}_+$$

Si $x_2 \in \mathcal{V}_- \cup \mathcal{V}_+$ alors :

$$\begin{cases} x_1' > 0 \\ x_2' < 0 \end{cases}$$

les deux vecteurs f_- et f_+ sont diriges vers le bas et le segment qui décrit $F(t, x)$ ne coupe pas Σ et il est dans \mathcal{V}_+ , le portrait de phase correspondant est dans la figure 2.3.

Une solution $x(t)$ avec une condition initiale $x_0 \in \mathcal{V}_-$ va arriver à Σ et puis elle va passer transversalement vers \mathcal{V}_+ .

2. S' il ya une intersection entre ce segment et Σ alors le point d'intersection est le point final d'un vecteur f^0 qui décrit la valeur : $x'(t) = f^0(t, x)$, $x \in \Sigma$.

$$f^0 = \alpha f_+ + (1 - \alpha) f_-, \quad \alpha = \frac{n^\top f_-}{n^\top (f_- - f_+)}.$$

Σ est définie un régime glissant. La condition d'existence d'un régime glissant est :

$$[n^\top(x) f_+(x)] \cdot [n^\top(x) f_-(x)] < 0.$$

Exemple 2.6 On considère le système différentiel discontinu suivant :

$$\begin{cases} x_1' = 4 + 2 \operatorname{sgn}(x_2 - c) \\ x_2' = 2 - 4 \operatorname{sgn}(x_2 - c) \end{cases}$$

L'hypersurface Σ et \mathcal{V}_+ , \mathcal{V}_- sont les mêmes que pour l'exemple 2.5.

$$f_- = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{si : } x_2 \in \mathcal{V}_-$$

et

$$f_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{si : } x_2 \in \mathcal{V}_+$$

Si $x_2 \in \mathcal{V}_-$, alors :

$$\begin{cases} x_1' > 0 \\ x_2' < 0 \end{cases}$$

Si $x_2 \in \mathcal{V}_+$ alors :

$$\begin{cases} x_1' > 0 \\ x_2' > 0 \end{cases}$$

Ici, il ya une intersection entre le segment et Σ , le portrait de phase est illustré dans la figure 2.4.

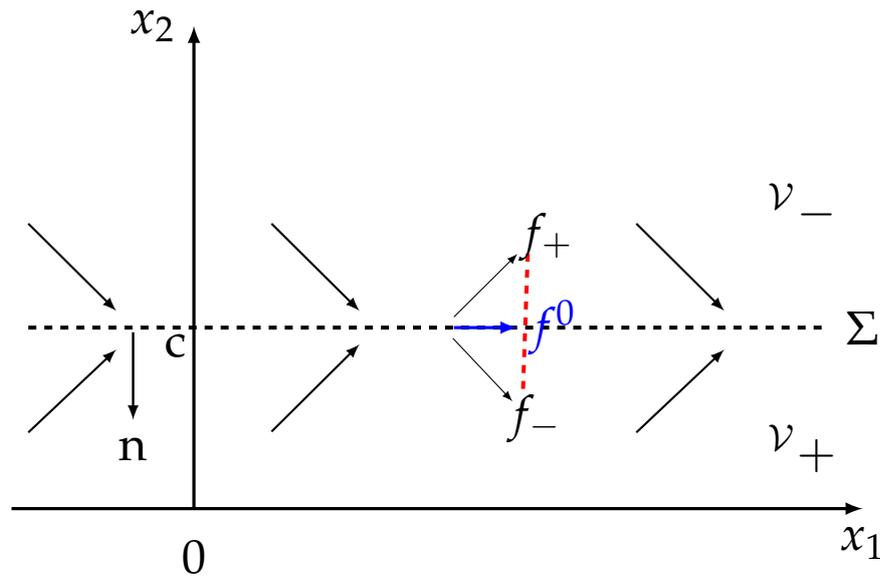


FIGURE 2.4 – Un régime glissant attractif.

Dans ce cas, toute solution qui est dans \mathcal{V}_+ ou \mathcal{V}_- se ramène à Σ et elle ne peut pas quitter cette surface.

C'est un régime glissant de plus puisque Σ est attractive on dit qu'il est un régime glissant attractif.

Un régime glissant est dit attractif si :

$$\begin{cases} n^\top(x) f_-(x) > 0 \\ n^\top(x) f_+(x) < 0 \end{cases}$$

Exemple 2.7 On considère le système différentiel discontinu suivant :

$$\begin{cases} x_1' = -4 - 2 \operatorname{sgn}(x_2 - c) \\ x_2' = -2 + 4 \operatorname{sgn}(x_2 - c) \end{cases}$$

Le portrait de phase est représenté dans la figure 2.5 ci-dessous.

Cet exemple montre qu'une solution qui est dans Σ reste toujours sur cette hypersurface mais une solution qui est au voisinage de Σ elle peut rester sur Σ ou elle va s'éloigner vers \mathcal{V}_+ ou \mathcal{V}_- . Ici, Σ n'est pas attractive et on appelle un régime glissant répulsif.

Un régime glissant est répulsif si :

$$\begin{cases} n^\top(x) f_-(x) < 0 \\ n^\top(x) f_+(x) > 0 \end{cases}$$

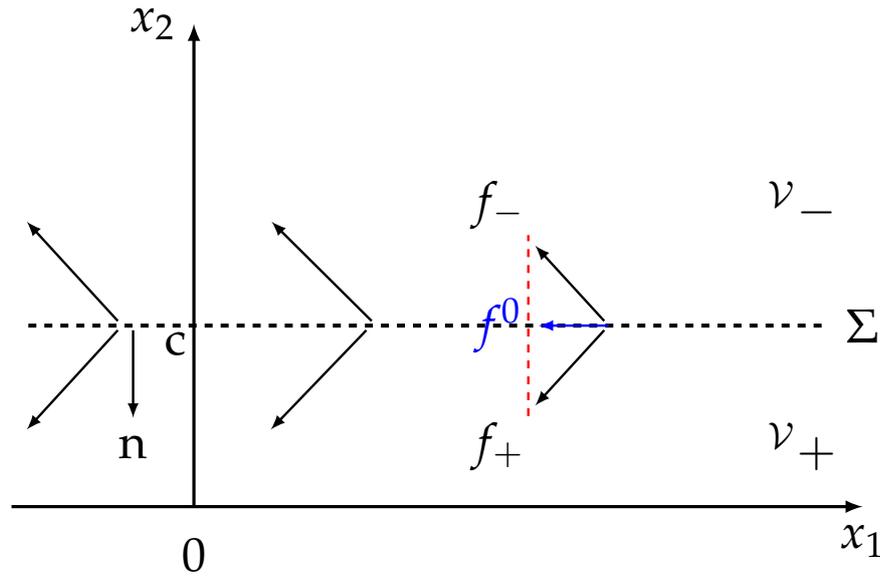


FIGURE 2.5 – Un régime glissant répulsif.

2.3.3 Théorèmes d'existence et d'unicité d'une solution au sens de Filippov

Pour donner les théorèmes d'existence et d'unicité on a besoin des rappels suivants :

Définition 2.5 (Fonction équicontinue). Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle I à valeur dans \mathbb{R} . On dit que la suite (f_n) est équicontinue si :

$$\forall u \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 \forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in I : |u - v| < \gamma \implies |f_n(u) - f_n(v)| < \varepsilon.$$

Théorème 2.2 [5] (Théorème d'Ascoli Arzelá). De toute suite de fonctions uniformément bornée et équicontinue sur un intervalle compact, on peut extraire une sous suite de fonctions uniformément convergente.

Définition 2.6 [1] (Une fonction semi-continue supérieurement). Soit $(X; \| \cdot \|)$ un espace de Banach, et $F : X \rightarrow \rho(X)$ une multifonction, $\rho(X)$ désigne toutes les parties de X . $F(x)$ est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) en x_0 , si pour tout ouvert $W \subset \rho(X)$ tel que $F(x_0) \subset W$, il existe un voisinage $V(x_0)$ dans X , tel que pour tout $x \in V(x_0)$, on a $F(x) \subset W$.

Exemple 2.8 Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \rho(\mathbb{R})$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

F est (s.c.s) en $x = 0$ car, $\forall W \in \rho(\mathbb{R}) : F(0) \subset W, W =]-1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon[, \forall \varepsilon > 0$. Avec W est le plus petit ouvert contenant $F(0)$, $\exists V(0) \subset \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in V(0)$ on a $F(x) \subset W$. On peut choisir $V(0) =]-1, 1[$, on aura : $\forall x \in]-1, 1[\implies F(x) \subset (]-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[)$ donc : $F(]-1, 1[) = [-1, 1] \subset W$.

Définition 2.7 (γ -solution). Une fonction y est dite γ - solution (solution approximative avec précision γ) de l'inclusion (2.18) avec $F(t, x)$ est s.c.s en t et x si y est absolument continue et vérifie presque partout

$$y'(t) \in F_\gamma(t, x)$$

avec : $F_\gamma(t, x)$ est un γ - voisinage de $F(t, x)$.

Lemme 2.1 [11] Soit $F(t, x)$ un ensemble non vide, s.c.s, fermée, convexe et borné. Si une suite $x_k(t)$ qui est une γ_k -solution de l'inclusion (2.18) converge uniformément alors sa limite notée $x(t)$ est une solution de (2.18).

Théorème 2.3 [11] Soit F une multifonction non vide ,semi- continue supérieurement, fermée, convexe et borné pour tout $x \in D$.

Alors $\forall (x_0, y_0) \in G$, il existe une solution du problème (2.21) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$, si le domaine G contient un cylindre :

$$Z(t_0 \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b)$$

la solution existe au moins sur l'intervalle

$$t_0 \leq t \leq t_0 + d, \quad d = \min\left\{a, \frac{b}{m}\right\}, \quad m = \sup_{(t,x) \in Z} |F(t, x)|$$

Démonstration. On fait la preuve par construction de la solution.

On prend :

$$h_k = \frac{d}{k}, \quad t_{ki} = t_0 + ih_k, \quad i = 0, 1, \dots, k \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

On pose : $x_k(t_{ki}) = x_{ki}$, si pour $i \geq 0$ la valeur $x_k(t_{ki})$ est supposé déjà connue et satisfait :

$$|x_{ki} - x_0| \leq m |t_{ki} - t_0| \quad (2.24)$$

Alors, pour une $v_{ki} \in F(t_{ki}, x_{ki})$ quelconque on définit $x_k(t)$ pour $t_{ki} < t \leq t_{k,i+1}$ par :

$$x_k(t) = x_{ki} + (t - t_{ki})v_{ki} \quad (2.25)$$

On a : $t_{ki} = t_0 + ih_k \leq t_0 + kh_k \leq t_0 + k\frac{d}{k} \leq t_0 + a$.

D'autre part d'après (2.24) :

$$|x_{ki} - x_0| \leq m |t_{ki} - t_0| \leq mkh_k \leq md \leq b;$$

Donc $(t_{ki}, x_{ki}) \in Z$, ce qui implique que : $|v_{ki}| \leq |F(t_{ki}, x_{ki})| \leq m$ et par (2.24) et (2.25), on a :

$$|x_k(t) - x_0| \leq m |t - t_0| \quad (t_{ki} \leq t \leq t_{k,i+1}) \quad (2.26)$$

La suite $x_k(t_{k,i+1}) = x_{k,i+1}$ est définie et vérifie l'inégalité (2.24), en remplaçant i par $i + 1$.

Par conséquent la suite x_k est construite successivement sur les intervalles $[t_k, t_{k+1}]$ et par l'équation (2.25), $x_k(t)$ est continue et on a :

$$|x_k'(t)| = \left| \frac{x_k(t) - x_{ki}}{t - t_{ki}} \right| = |v_{ki}| \leq m \quad t \neq t_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Donc $x_k(t)$ est absolument continue.

Puisque :

$$x_k'(t) = v_{ki} \in F(t_{ki}, x_{ki}), \quad 0 < t - t_{ki} < h_k, \quad |x_k(t) - x_{ki}| \leq h_k$$

alors, $x_k(t)$ est une δ_k solution de l'inclusion (2.21) avec :

$$\delta_k = \max\{h_k, mh_k\} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

d'après (2.26) et l'inégalité (2.27), $x_k'(t)$ est uniformément bornée et équicontinue. Par le théorème d'Ascoli Arzelà il existe une sous-suite de $x_k'(t)$ qui converge, sa limite est notée par $x(t)$.

Par le lemme 1 la limite $x(t)$ est une solution de l'inclusion (2.21).

Puisque $x_k(t_0) = x_0$, alors $x(t_0) = x_0$. □

Remarque 2.5 La méthode convexe de Filippov avec le théorème d'existence (2.3) définissent la solution au sens de Filippov pour les équations différentielles à second membre discontinu.

Définition 2.8 Une fonction absolument continue $x(t) : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite une solution de l'équation différentielle (2.17) au sens de Filippov si pour presque tout $t \in [0, \tau]$ la fonction x est une solution de l'inclusion différentielle (2.21).

Une solution d'une inclusion différentielle n'est pas nécessairement unique.

Condition suffisante pour l'unicité de la solution

Théorème 2.4 [11] "condition d'unicité"

Soit f une fonction continue dans D presque par partout. S'il existe une fonction sommable $l(t)$ telle que pour presque tout (t, x) et (t, y) dans D on a :

1. $|f(t, x)| \leq l(t)$;
2. Si $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que pour $|x - y| < \varepsilon_0$, on a $(x - y) \cdot (f(t, x) - f(t, y)) \leq l(t) |x - y|^2$.

ici le (\cdot) veut dire le produit scalaire.

Par la définition 2.8 l'équation différentielle 2.17 admet une unique solution dans D .

Démonstration. Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux solutions de l'équation (2.17), on pose $z(t) = x(t) - y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Puisque $|z|^2 = z \cdot z$

ce qui donne :

$$\frac{d|z|^2}{dt} = 2z \frac{dz}{dt} = 2(x - y) \cdot (f(t, x) - f(t, y)) \leq 2l(t) |x - y|^2 \quad (2.28)$$

On obtient une inégalité différentielle :

$$\frac{d|z|^2}{dt} \leq 2l(t)|z|^2. \quad (2.29)$$

On pose : $u(t) = |z|^2$
l'inégalité (2.29) devient :

$$\frac{du(t)}{dt} - 2l(t)u(t) \leq 0 \quad (2.30)$$

Le facteur intégrant $\mu(t)$ est donné par :

$$\mu(t) = e^{-2\int_{t_0}^t l(s)ds} \quad (2.31)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (2.30) par $\mu(t)$, on trouve :

$$e^{-2\int_{t_0}^t l(s)ds} \frac{du}{dt} - 2l(t)e^{-2\int_{t_0}^t l(s)ds} u(t) \leq 0 \implies \frac{d}{dt}(e^{-2\int_{t_0}^t l(s)ds} u) \leq 0 \quad (2.32)$$

On pose :

$$L(t) = \int_{t_0}^t l(s)ds$$

D'où : la fonction $|z|^2 e^{-2L(t)}$ est décroissante et puisque $z(t_0) = 0$ on trouve :

$$z = 0 \implies x - y = 0 \implies x = y \quad (2.33)$$

Donc la solution est unique .

□

2.3.4 Étude d'un problème à second membre discontinu

Sur un exemple concret [16], on démontre l'ambivalence de certains modèles différentiels présentant des discontinuités dans le second membre.

Position du problème

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AXf(X) + BX(1 - f(X)) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (2.34)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0.0175 & -31.5978 \\ -31.5978 & -90.0175 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.0175 & 31.5978 \\ 31.5978 & -90.0175 \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

L'étude de comportement du système (2.34) se fait sur les trois variétés $y > 0$, $y < 0$ et $y = 0$.

- **Étude sur la variété $y > 0$:**
si $y > 0$ alors $f = 1$, le système (2.34) devient :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (2.35)$$

- **Étude sur la variété $y < 0$:**
si $y < 0$ alors $f = 0$, le système (2.34) devient :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = BX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (2.36)$$

Pour déterminer la nature de l'origine des deux systèmes (2.35) et (2.36) qui sont de systèmes linéaires autonomes on a besoin de calculer les valeurs propres des matrice A et B.

Le calcul se fait à partir d'un programme en scilab suivant :

```
A=[0.0175, -31.5978; -31.5978, -90.0175]; //définition de la
matrice A
B=[0.0175, 31.5978; 31.5978, -90.0175]; //définition de la
matrice B
C=0.5*(A+B) //définition de la matrice C obtenue par la symé
trie
//spec() c'est la commande de scilab qui donne les valeurs et
les vecteurs propres
[vctA, vlrA]=spec(A) //vctA sont les vecteurs propres de A et
vlrA sont les valeurs propres de A
[vctB, vlrB]=spec(B)
[vctC, vlrC]=spec(C)
```

calcul.sce

On obtient les résultats suivants :
les valeurs propres de A et B :

$$\lambda = 10, \quad \mu = -100.$$

Les vecteurs propres de A :

$$u_1 = \begin{pmatrix} -0.9535 \\ 0.3012 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0.3012 \\ 0.9535 \end{pmatrix}$$

les vecteurs propres de B :

$$v_1 = \begin{pmatrix} -0.9535 \\ -0.3012 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0.3012 \\ -0.9535 \end{pmatrix}$$

Puisque il existe une valeur propre positive $\lambda = 10$ donc l'origine des deux systèmes (2.35) et (2.36) est un point selle .

le portrait de phase de A et B est donné par la figure 2.6.

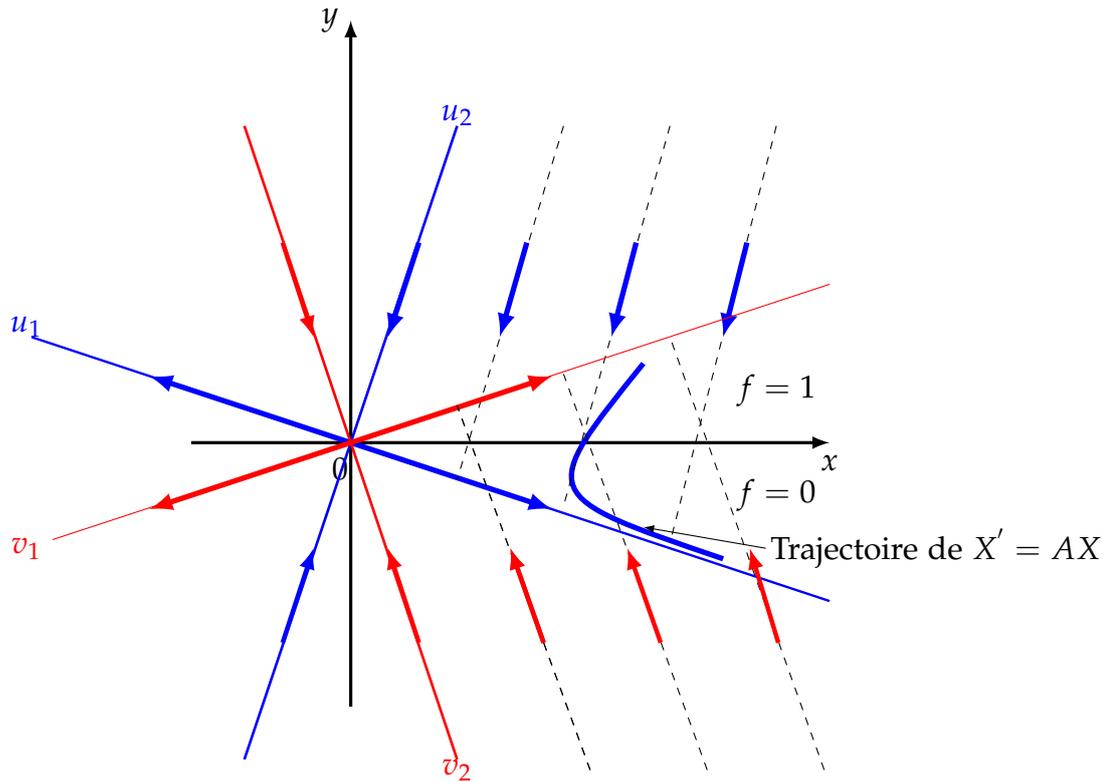


FIGURE 2.6 – Portraits de phase de A et B

Remarque 2.6 On remarque qu'il existe une symétrie par rapport à l'axe horizontal. Cette symétrie conduit à penser que la matrice $C = \frac{1}{2}(A + B)$ peut donner des renseignements pour étudier le comportement du système (2.34) sur la ligne de discontinuité $y = 0$ (cas $f = \frac{1}{2}$).

Si $f = \frac{1}{2}$, le système (2.34) devient :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = CX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (2.37)$$

Les valeurs propres de C sont :

$$\lambda_c = 0.0175 \quad \mu_c = -90.0175$$

Les vecteurs propres de C sont :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_c = 0.0175 > 0$ donc le système (2.37) est instable.

- Étude sur la ligne de discontinuité $y = 0$:

La ligne $y = 0$ définit un régime glissant attractif.

Question :

Est-ce que ce régime glissant correspond au système instable (2.37) ou à un comportement oscillant infiniment vite autour de cette ligne ?

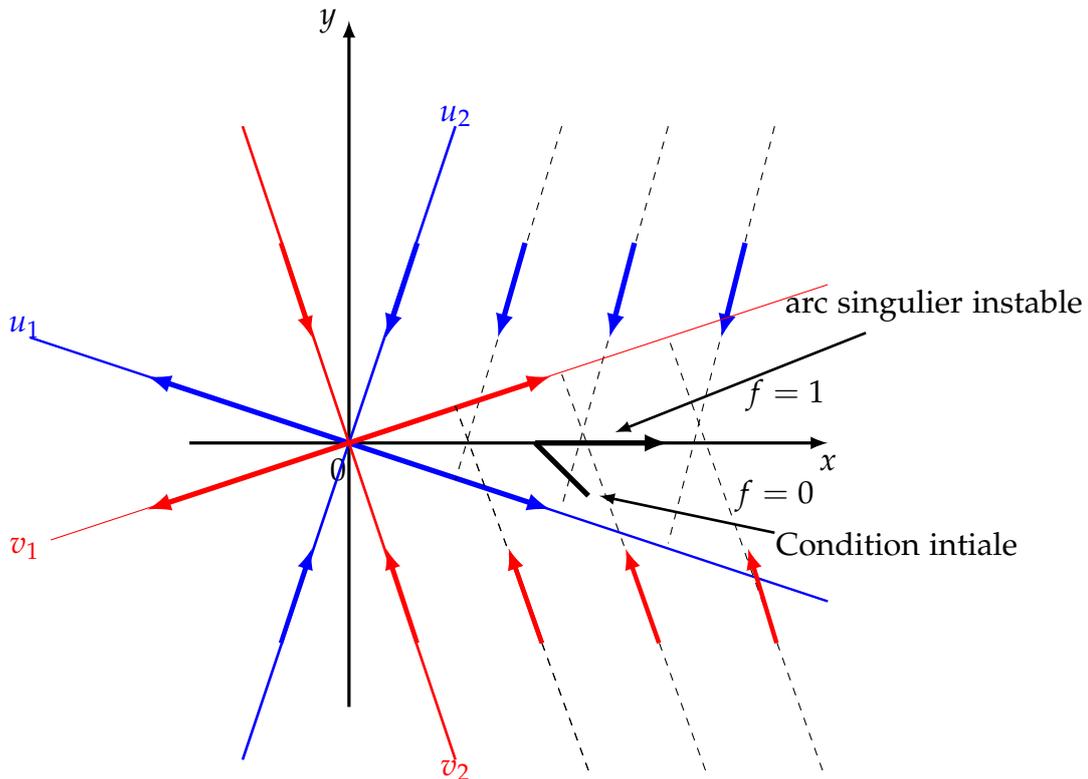


FIGURE 2.7 – Comportement instable

Dans le premier cas :

On peut voir le système (2.34) comme un système linéaire. La fonction f est une multifonction de graphe continue verticale en $y = 0$, $f(x, 0) = [0, 1]$.

Les trajectoires convergent vers la ligne $y = 0$ mais elles s'éloignent de l'origine car dans cette ligne les trajectoires correspondantes au système (2.37) qui est instable, voir figure 2.7.

Dans le deuxième cas : Au voisinage de ligne $y = 0$, $f(x, 0) = \{0, 1\}$, une trajectoire va remonter vers cette ligne d'une part en suivant le comportement de système (2.36) et puis elle va descendre d'autre part en suivant le comportement de système (2.35).

Dans ce cas le système est stable, c'est un comportement hystérétique au voisinage de $y = 0$, figure 2.8.

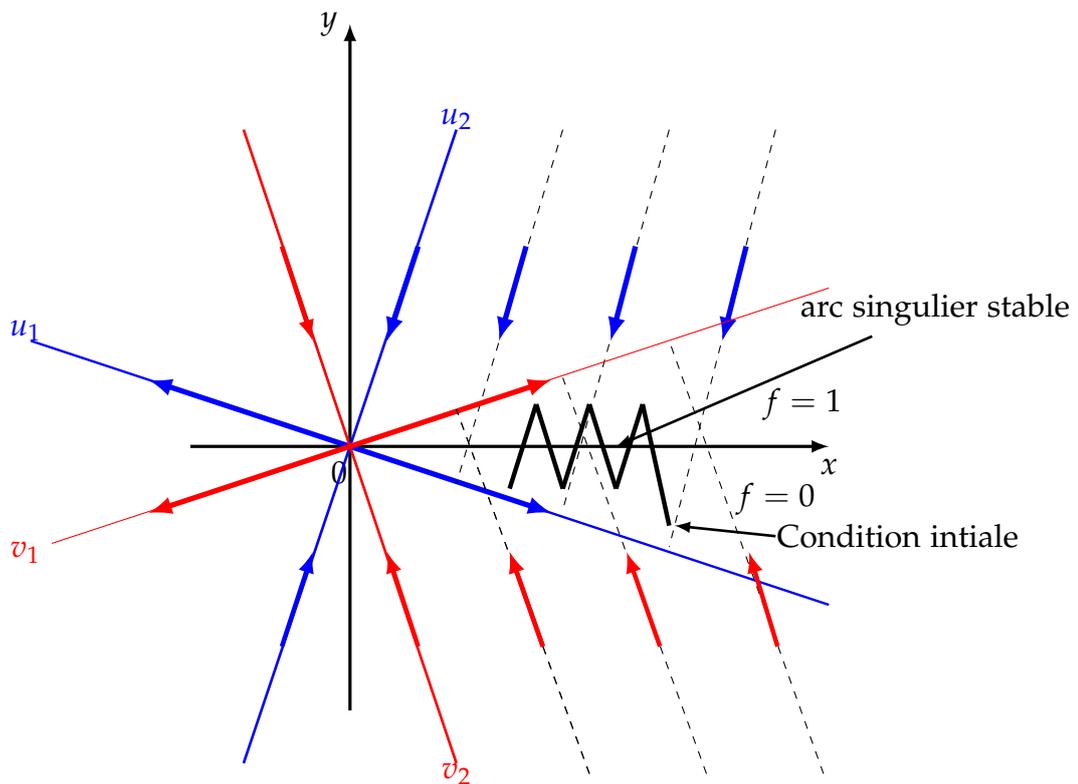


FIGURE 2.8 – Comportement stable

Interprétation physique

Dans la physique et plus précisément en électronique le système (2.34) modélise le circuit illustré par la figure 2.9.

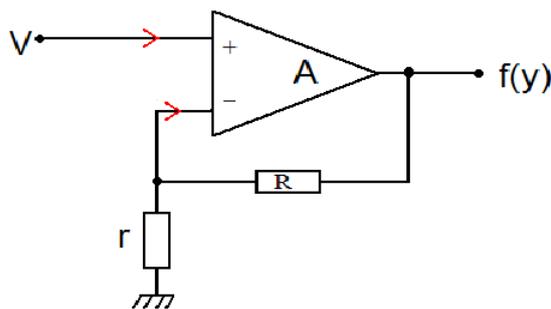


FIGURE 2.9 – Réalisation physique de f au moyen d'un amplificateur opérationnel

Si f est réalisée par un comparateur A sans hystérésis, alors la contre réaction définit par $\varepsilon = -\frac{r}{r+R} < 0$ impose un régime linéaire au voisinage de $y = 0$ voir figure 2.10,1. Si A est un comparateur avec hystérésis, alors la réaction $\varepsilon > 0$ impose un fonctionnement en commutation, voir figure 2.10,2.

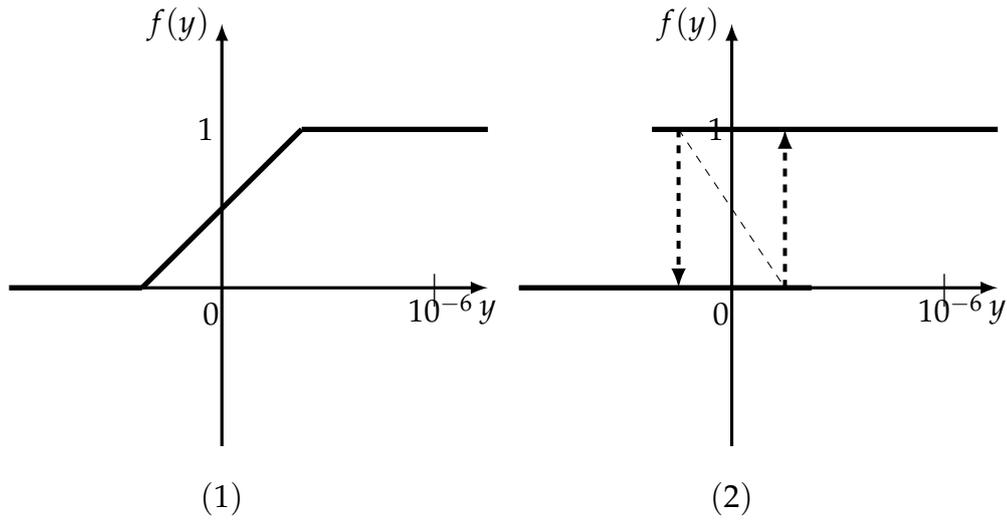


FIGURE 2.10 – Zoom au voisinage de la ligne de discontinuité de $f(1)$: régime linéaire $R > 0$,
(2) : cycle d'hystérésis $R < 0$.

Remarque 2.7 L'expérience montre qu'un simple changement d'un comparateur sans hystérésis par un comparateur avec hystérésis ($f = 0$ ou $f = 1$) change la nature du système (stable ou instable).

Approximations numérique

Pour l'approximation de la solution du problème (2.34), on considère la méthode d'Euler vue dans le chapitre 1, avec régularisation de la fonction f par la famille de fonctions continues :

$$f_r(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > \frac{1}{r} \\ ry & \text{si } 0 < y < \frac{1}{r} \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

On considère le système régularisé suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AXf_r(X) + BX(1 - f_r(X)) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (2.39)$$

Dans ce cas l'algorithme d'Euler est :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \Delta t [AX_n f_r(X_n) + BX_n(1 - f_r(X_n))] \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (2.40)$$

Le système (2.40) converge vers le système (2.34) si $r \rightarrow +\infty$, de plus la solution numérique obtenue par la méthode d'Euler converge vers la solution exacte si $h = \Delta t \rightarrow 0$.

Ces deux conditions donnent au moins deux situations différentes :

$$r\Delta t \rightarrow 0. \quad (2.41)$$

$$r\Delta t \longrightarrow +\infty. \quad (2.42)$$

La situation (2.41) correspond au cas d'instabilité, Δt est suffisamment petit pour pouvoir suivre la pente de f_r .

Elle est vue comme une fonction continue avec $f(x,0) = [0,1]$, voir figure 2.11,3.

La situation (2.42) correspond au cas de stabilité, car r est assez grand, donc la

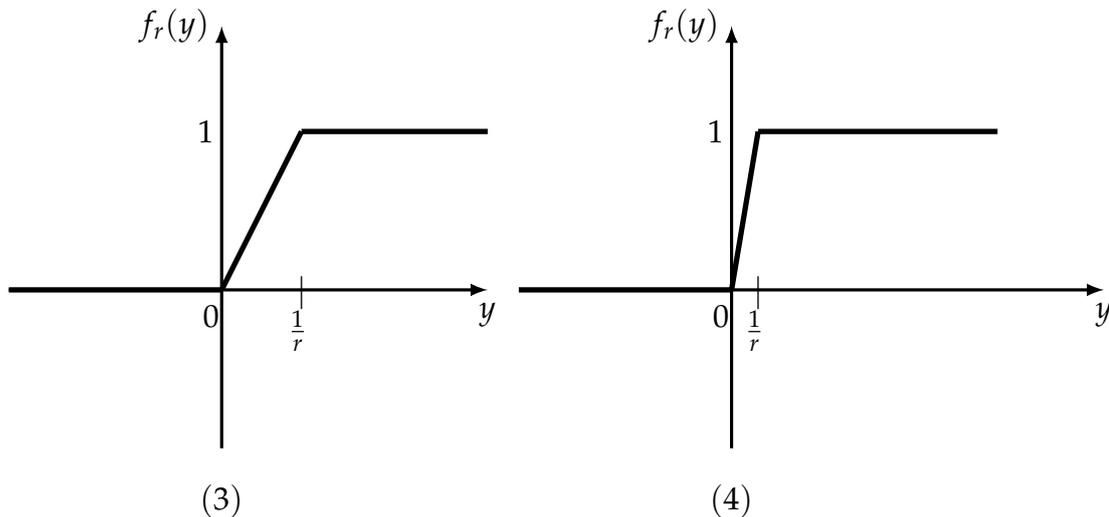


FIGURE 2.11 - (3) : cas de $r\Delta t \longrightarrow 0$

(4) : cas de $r\Delta t \longrightarrow +\infty$.

fonction est vue comme une fonction discontinue, voir figure 2.11,4.

les simulations ont été effectuées à partir du programme scilab avec $\Delta t = 10^{-4}$ et la condition initiale $X_0 = (1,0)^T$.

```

A=zeros(2,2);
B=zeros(2,2);
D=zeros(2,2);
A=[0.0175,-31.5978;-31.5978,-90.0175];
B=[0.0175,31.5978;31.5978,-90.0175];
T=10000;//nombres d'échantillons
X=zeros(2,1);
X(1)=1;//condition initiale
X(2)=0;
y=zeros(T,2);
dt=0.0001;//le pas de discrétisation
k=100;//k=r la pente de f
for n=1:T;//boucle sur le temps
    y(n,1)=X(1);y(n,2)=X(2);
    f=max(0,min(1,k*X(2)));//calcul de f
    X=X+dt*(f*A*X+(1-f)*B*X);//évolution de X
end;
plot(y(:,1));pause;
plot(y(:,2),'.'');pause;
plot(y(:,1),y(:,2),'.'');
    
```

```

m=legend(['k='+string(k)'']);
xlabel('x_n');
ylabel('t_n');

```

simnum.sce

On peut distinguer trois cas différents selon la valeur de r .

Cas $r\Delta t < \text{valeur critique}$:

Pour ces valeurs de r , il ya un petit changement dans l'évolution de x par rapport au temps voir figure(2.12). Par contre l'évolution de y est très rapide au début

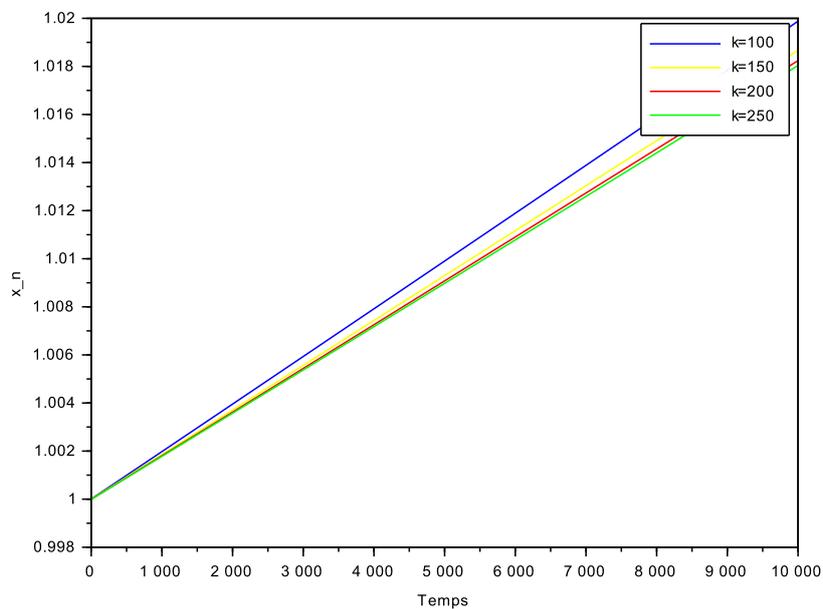


FIGURE 2.12 – Évolution de x_n par rapport au temps.

mais elle se stabilise sur zéro, voir figure 2.13.

cas $r\Delta t > \text{valeur critique}$:

la même observation du premier cas il ya une quasi invariance de x par rapport à r , voir figure 2.14.

Pour y : le système admet des oscillations autour de zéro, f_r représente un cycle d'hystérésis qui se stabilise en zéro, le système est stable, voir figure 2.15 .

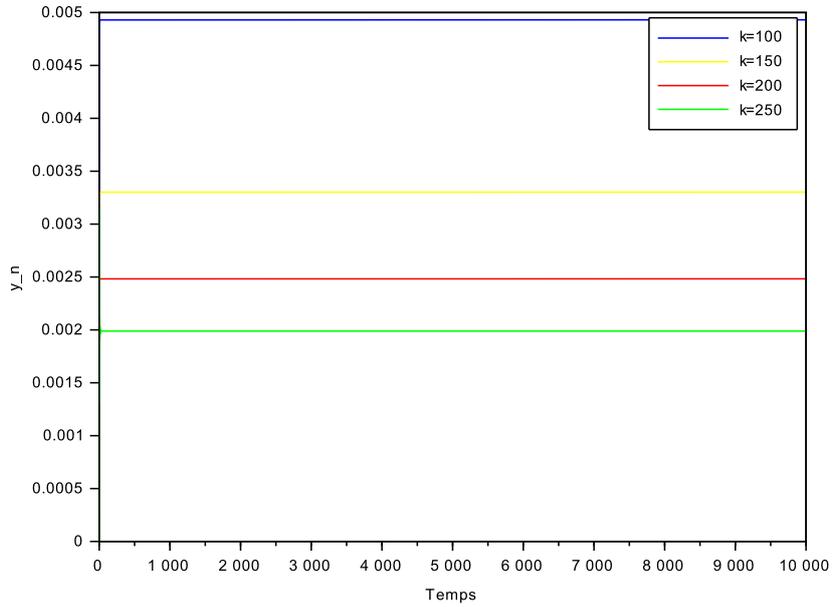


FIGURE 2.13 – Évolution de y_n par rapport au temps.

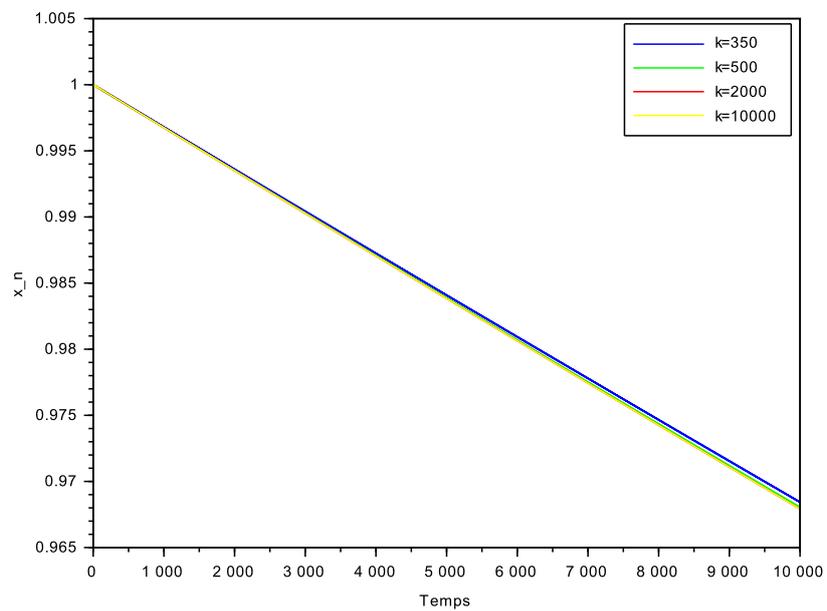


FIGURE 2.14 – Évolution de x_n par rapport au temps.

Zone critique et cycles limites : $r \in [310, 350]$

Pour cette zone le système est très sensible aux variations de r . les figures 2.16,2.17 présentent des cycles limites de faible amplitude. Le portrait de phase voir figure 2.18.

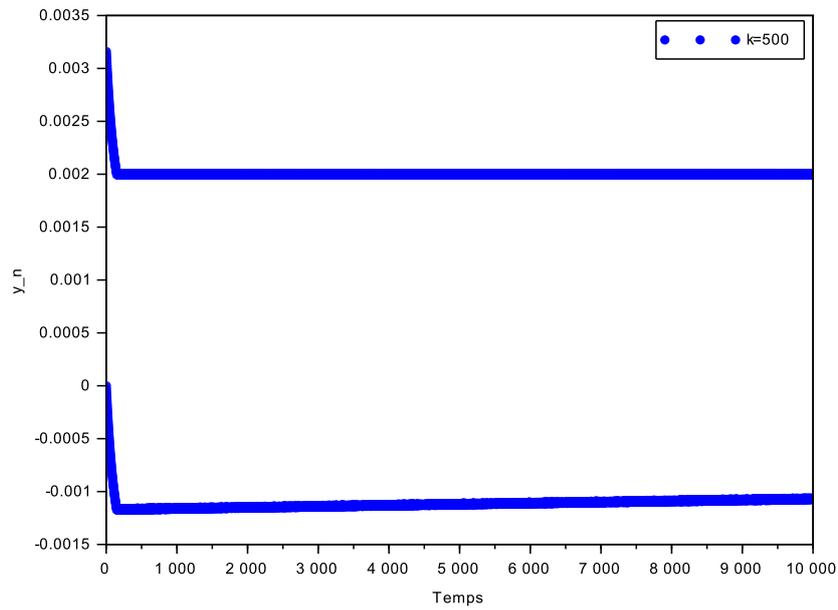


FIGURE 2.15 – Évolution de y_n par rapport au temps.

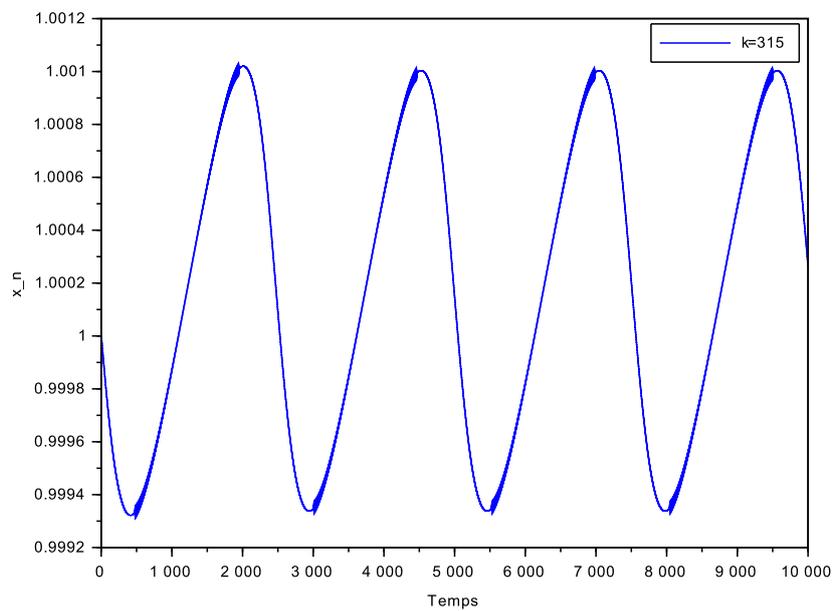


FIGURE 2.16 – Composantes x_n d'un cycle limite pour $r = 315$.

Résultat et conclusion

D'après l'étude qu'on a fait sur le système et la simulation numérique avec la fonction f_r on est arrivé à un paradoxe. Une utilisation abusive du résultat d'existence et d'unicité de Cauchy Lipschitz dans un contexte où il n'est pas utilisable

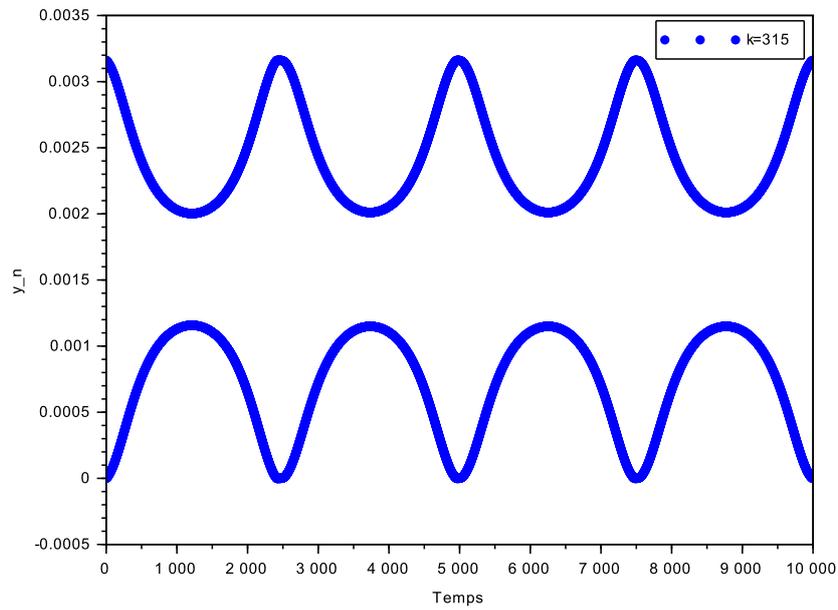


FIGURE 2.17 – Composantes y_n d'un cycle limite $r = 315$.

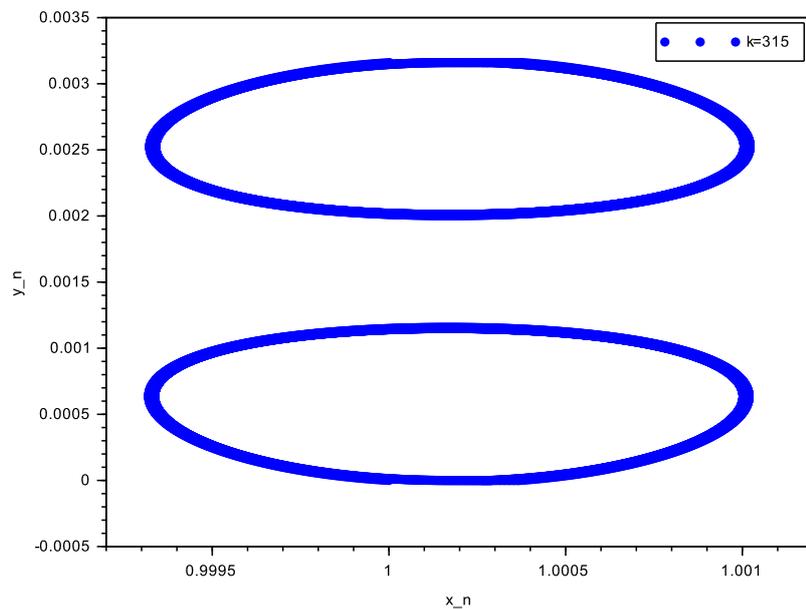


FIGURE 2.18 – Cycle limite pour $r = 315$.

est l'origine de conclusions erronées .

La fonction f qui est discontinue engendre des phénomènes dynamiques qualitativement différents de ceux obtenus au moyen de la fonction régularisée f_r .

Le modèle est insuffisant pour étudier numériquement le cas quand r est dans la zone critique car il ya une naissance d'une bifurcation due au changement de la

nature du système, dans ce cas l'étude reste floue ce qui nous impose d'utiliser d'autres outils mathématiques par exemple augmentation de l'état (ajouter une autre variable au système) ou introduire un élément permettant de mettre un lien entre le comportement stable et instable (notion d'observabilité).

CONCLUSION

Dans ce travail, on s'est intéressé à l'étude qualitative d'une classe de systèmes différentiels à second membre discontinu par rapport à x . On a rappelé quelques notions concernant les systèmes différentiels continus comme le théorème de Cauchy Lipschitz et la notion de la stabilité des points d'équilibre. On a utilisé quelques méthodes numériques pour donner une approximation de la solution exacte. On a expliqué le comportement de systèmes au voisinage d'un point de discontinuité et on a démontré l'existence et l'unicité de la solution au sens de Filippov. À la fin on a illustré notre étude par un contre exemple qui montre que les propriétés d'un système différentiel continu n'est pas applicable pour un système différentiel discontinu.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMAR. Y. A, *Équations différentielles à second membre discontinue*.
- [2] Auger. p, Lett. C, Poggiale J. C, *Modélisation mathématique en écologie*, 2^{em} édition : Cours et exercices corrigés, Dunod, 2015.
- [3] Basdevant. C, *Équations différentielles, étude théorique et schémas numériques, notes de cours d'Analyse*. Ingénieurs MACS - première année, université Paris-Nord, Année 2003 – 2004.
- [4] Benzoni-Gavage. S, *Calcul différentiel et équations différentielles : Cours et exercices corrigés*, Dunod, 2010.
- [5] Boularas. D, *Équations différentielles*, licence de mathématique, 2001 – 2002.
- [6] Budzinski. T, *Théorème de Cauchy-Lipschitz*, Montpellier, 2014.
- [7] Cuvelier. F, *E.D.O : Méthodes numériques (cours 3)*, 13 janvier 2015.
- [8] Da Silva E. G , *Méthodes et Analyse Numériques*, 2007.
- [9] DEMAILLY. J. P, *Analyse numérique et équations différentielles*, Nouvelle édition, 2006.
- [10] Faccanoni. G, *Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire*. Annales, 2013, 303.
- [11] Filippov A. F, *Differential equations with discontinuous righthand sides : control systems (Vol. 18)*. Springer Science, Business Media. 2013.
- [12] Khalil. H, *Nonlinear Systems*, Third Edition.
- [13] Leborgne. G, *Équations différentielles*, notes du cours d'équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, première année, 21 décembre 2006.
- [14] Legendre. G, *Méthodes numériques, introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique*, 4 janvier 2017.
- [15] Menjouet. L. P, *Équations différentielles ordinaires et partielles*, Université Claude Bernard, Lyon I.
- [16] Montseny. G, Plantié. L, *Systèmes différentiels discontinus : faux paradoxes et réalité*, Manifestations avec acte à diffusion limitée : Journées Doctorales d'Automatique (JDA'2001), Toulouse (France), 25 – 27 Septembre 2001, pp.141 – 146, N°01089.
- [17] Raimbault. J. L, *Équations différentielles*, cours et exercices, Université Paris XI, 2007.

- [18] Raymond. J. P, *Systèmes différentiels*, résumé de cours.
- [19] Rem. M, *Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-Type*, Eindhoven, 2000.
- [20] Stout. B, *Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles*, université de Provence, Février 2007.
- [21] Strogatz .S ,*Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview press,2014.
- [22] Yadi. k, Sari. T, *Systèmes non linéaires*, Université de Tlemcen, 2013.