



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID-TLEMCEN-
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Projet de fin d'études pour l'obtention du diplôme de master
En
Génie Mécanique

Option

Maintenance industrielle

Présenté par

BOUZIDI IMANE

THÈME

**Etude des vibrations libres d'une boîte de vitesses par la
méthode des éléments finis**

Soutenu en octobre 2013

Devant le jury :

Mr. HOUMAT.A	PR	Président	UAB-Tlemcen
Mr. HMAZA-CHERIF.S.M	MC	Encadreur	UAB-Tlemcen
Mr. GUEZZEN.S	MC	Co-Encadreur	UAB-Tlemcen
Mr. CHORFI. S.M	MC	Examineur	UAB-Tlemcen
Mr. BOUKHALFA .A	MC	Examineur	UAB-Tlemcen

Remerciements

Avant de commencer cette thèse, j'aimerais faire quelques remerciements :

Je remercie **Mr. Hamza Cherif sidi Mohamed** pour l'encadrement, ses précieux conseils et toute la confiance qu'il m'a accordée tout au long de cette thèse. et **Mr. guezzan Samir** d'avoir accepté d'être mon Co-encadreur.

Mes remerciements s'adressent à **Mr. houmat Abderahim** qui a accepté de présider mon jury, puis à **Mr. boukhalfa Abdelkrim et Mr. Chorfi** qui ont accepté la lourde tâche de examiner et rapporter mon travail.

Je tiens également à remercier toutes personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

DEDICACE

Avant tout Je dédie cette thèse à **mes chers parents** que je prie de trouver ici l'expression de ma reconnaissance et de mon profond respect et de mes sentiments les plus affectueux en espérant vous satisfaire avec une réussite permanente.

Ainsi qu'à mes 2 frères **Amine** et **Ryad** a ma sœur **Radjae** je leurs souhaite toute la réussite dans leurs vies.

Ainsi qu'a tous mes amis, collègues de la spécialité '**maintenance industrielle** ' et en particulier un ami très cher et collègue que on a malheureusement perdu, que son âme repose en paix **Ternane Zohir**.

Et a mes copines que j'adore **Fatima, Fatima Zohra** et sans oublier ma cousine adorée **Imane**.

Et a toute la famille **BOUZIDI** et **HEDDADji**.

BOUZIDI IMANE

Résumé

La fonctionnalité de la boîte de vitesse est de transmettre la puissance fournie par un moteur aux roues du véhicule, Ce travail vise à prédire le comportement dynamique de la transmission par engrenage dans une boîte de vitesses.

On modélisera le comportement de la transmission par engrenage ; les engrenages qui sont assimilés a des cylindres rigides, les arbres qui sont introduits via des éléments finis de poutres de Timochenko, au niveau des nœuds du modèle globale. Pour former une équation générale qui nécessitera une résolution numérique.

Mots-clefs : boîte de vitesses, méthode des éléments finis, Timochenko, engrenages

Abstract

The functionality of gearboxes is to transmit the power supplied by a motor to the wheels of the vehicle.

This work aims to predict the dynamic behavior of transmission by gear in a gearbox. The behavior of transmission by gears will be modeled, the beams which are introduced via finites elements Timoshenko beams, additional at nodes of the global model. to form a general equation which will require a numerical/digital reduction.

Keywords: gearbox, Finites elements, Timoshenko, gears.

Nomenclature

$\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k, \varphi_k, \psi_k$	Degrés de liberté de flexion du nœud k.
θ_k	Degré de liberté de torsion du nœud k.
\mathbf{u}_k	Degré de liberté de traction compression du nœud k.
R_{b1}	Le rayon de base du pignon.
R_{b2}	Le rayon de base de la roue.
Ω_i	La vitesse de rotation.
$\dot{\Omega}$	L'accélération.
T	Energie cinétique.
U	Energie de déformation.
ρ	Masse volumique.
$[\bar{K}(\bar{\mathbf{F}}, \theta^*)]$	Matrice de raideur.
β	Angle d'hélice.
$[G(\theta^*)]$	Matrice géométrique.
I_{xk}	Inertie transversal de l'élément k.
$I_{\theta k}$	Inertie polaire de l'élément k.
$\mathbf{F}_a(\mathbf{t})$	Vecteur relatif aux effets d'inertie.
L	La longueur de l'élément.
S	Surfaces équivalentes de cisaillement.
E	Module d'Young.

G	Module de coulomb (cisaillement).
M_{ak}	Matrice de masse de l'arbre
K_{ak}	Matrice de raideur de l'arbre
d_{arbre}	Diamètre de l'arbre
σ :	Le tenseur de contrainte
ε	Le tenseur de déformation
M_{glob}	Matrice de masse globale
K_{glob}	Matrice de rigidité globale
W	fréquence propre

Listes des figures

Figure1.1 : Schéma de boîte de vitesse mécanique au niveau de STARR.....	3
Figure1.2 : schéma de fonctionnement de la boîte de vitesses.....	5
Figure1.3 la mise en situation de la boîte de vitesses dans un véhicule.....	6
Figure 2.1 : engrènement entre les roues dentées.....	13
Figure 2.2 : erreur de transmission d'après (Munro 1989).....	14
Figure 2.3 : Erreur de transmission quasi-statique sous charge sans défauts de géométrie	15
Figure 2.4 : Modulation d'amplitude caractéristique d'un défaut de faux-rond.....	21
Figure 2.5 : Définition de l'erreur de pas individuelle et de l'erreur de pas.....	22
Figure 2.6 : Exemple de mesure de l'erreur de pas cumulée.....	23
Figure 2.7 : Erreurs de profil, définition tirée de la norme ISO 1328.....	24
Figure 2.8 : Définition des défauts d'inclinaison et de déviation selon la norme ISO 1328...	25
Figure 2.9 : Caractérisation des défauts de déviation et d'inclinaison.....	26

Figure 3.1 : Modèle linéaire de Sener et Özgüven.....	33
Figure 3.2 : Modèle linéaire à excitations internes périodique.....	35
Figure 3.3 : Modèle masses-ressorts d'un engrenage.....	36
Figure 3.4 : Modèle de la structure élastique de la dent.....	37
Figure 3.5 : Maillage des lignes d'arbres et des roulements.....	40
Figure4.1 modèle globale : modèle dynamique global 3D d'un système à engrenage	45
Figure 4.2 degrés de liberté de l'engrenage (pignon /roue).....	46
Figure 4.3 Elément d'arbre à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud de type Timochenko.	51
Figure 5.1 Schéma de calcul global.....	62

Liste des tableaux

Tableau 6.1 données donnés du problème.....	64
Tableau 6.2 Poutre Appuyée-Appuyée	66
Tableau 6.3 Poutre Encastre –libre $\Omega=0$	66
Tableau 6.4 Poutre Encastre –libre $\Omega=2$	67
Tableau 6.5 Poutre Encastre -libre $\Omega=8$	67
Tableau 6.6 la variation de fréquences propres en fonction de la raideur.....	67

Sommaire

Résumé	
Nomenclature	
Introduction général.....	1

CHAPITRE 1 : généralité sur la boîte de vitesses mécanique

1.1 Introduction	3
1.2 Fonctionnement de la boîte de vitesses.....	4
1.3 Situation de la boîte de vitesses	6
1.4 Les types de la boîte de vitesses.....	7
1.5 Les éléments constitutifs de la boîte de vitesses (manuelle).....	8
1.5.1 Les engrenages.....	8
1.5.2 Les arbres	8
1.5.3 Les paliers	8
1.5.4 L'huile	9
1.5.5 Les synchroniseurs	9
1.5.6 La commande a boîte	9
1.5.7 Le carter	9
1.5.8 Lubrifiant.....	10
1.6 conseils pour bien préserver la boîte de vitesses.....	10
1.7 Conclusion	11

CHAPITRE 2 : sources d'excitations dans les transmissions par engrenages

2.1 Introduction	12
2.2 Sources d'excitations	12
2.2.1 L'erreur de transmission (indicateur du comportement)	13
2.2.2 Autres sources d'excitations.....	16
2.2.2.1 sources d'excitations internes	17
2.2.2.2 sources d'excitations externes.....	19
2.3 Etudes des erreurs et défauts	19
2.3.1 Les déformations élastiques	20
2.3.2 Erreurs de forme et de position	20
2.3.3 Les défauts de montage ou de positionnement.....	24
2.4 Technique de détection des défauts d'engrenage	26
2.4.1 Analyse des signaux acoustiques	27
2.4.2 Analyse des lubrifiants	28
2.5 Conclusion	29

CHAPITRE 3 : modélisation dynamique des engrenages

3.1 Introduction	30
3.2 Présentation des différents types des modèles des boîtes à engrenages	31

3.2.1 Modélisation statique	32
3.2.2 Modélisation dynamique	33
3.3 Discrétisation de la transmission	38
3.3.1 Modèles à un degré de liberté	38
3.3.2 Modèles à paramètres concentrés	38
3.3.3 Modèles éléments finis	39
3.3.3.1 lignes d'arbres	39
3.3.3.2 roulements	40
3.3.3.3 Carter	42
3.4 Conclusion	42

CHAPITRE 4 : modélisation par la méthode des éléments finis d'un système de transmission par engrenage d'une boîte de vitesses

4.1 Introduction	43
4.2 mise en équation d'un modèle dynamique	44
4.2.1 Élément engrenage	45
4.2.2 Élément arbre	46
4.3 Écriture des équations générales de mouvement	56
4.3.1 Assemblage des divers éléments de la boîte de vitesses	56
4.3.2 Résolution des équations de mouvement	56
4.4 Conclusion	57

CHAPITRE 5 : Organisation de la programmation

5.1 Introduction.....	61
5.2 Organigramme	61
5.3 Programme principal	61
5.4 Description du programme	63

CHAPITRE 6 : Résultats et interprétation

6.1 Introduction	64
6.2 données du problème	64
6.3 Résolution du système dynamique	65
6.4 Validations et comparaisons des résultats.....	65
6.5 Interprétation.....	68
6.6 Conclusion	68
Conclusion générale.....	69
Références bibliographique	

Introduction générale

La fonctionnalité des boîtes de vitesses est de transmettre la puissance fournie par un moteur aux roues du véhicule, en modifiant éventuellement le rapport entre la vitesse de rotation et le couple. Les engrenages sont les éléments principaux de ces mécanismes. La puissance est transmise par contact entre les pièces en mouvement relatifs. Les autres éléments: arbres, carter, paliers... ont un rôle certes nécessaire, mais d'accompagnement. Dans le cadre des études présentées dans ce mémoire L'engrenage, un pignon et une roue, ne peut pas être isolé de son contexte d'utilisation associé aux arbres de transmission eux-mêmes supportés par des paliers. De plus, il est indispensable d'observer le comportement, au plus près de l'engrenage car Les engrenages sont reconnus comme des sources internes de vibrations significatives et comme des éléments clés dans les mécanismes de transfert et d'amplification de ces vibrations. A ce titre, leur comportement dynamique a fait l'objet de nombreux travaux principalement au cours des 25 dernières années. Pour arriver à notre intérêt, nous avons articulé cette étude au tour de cinq chapitres :

Dans le premier chapitre on fera une introduction sur l'organe de l'étude en question qui est la boîte à vitesse son fonctionnement ses éléments constituants sa situation ...etc.

Dans le deuxième chapitre, différents types de sources d'excitations ont été citées (internes et externe) aussi les défauts des engrenages (Erreurs de forme et de position, Excentricité ou erreur de faux-rondEtc.) Et les techniques de détection de ces derniers soit par l'analyse du lubrifiant ou l'analyse des signaux acoustiques.

Pour le troisième chapitre on fera une introduction sur les deux types de modélisation soit statique ou dynamique, pour la dernière on verra plusieurs modèles (Modèles linéaires à raideur d'engrènement constante, Modèles linéaires à raideur d'engrènement variable (périodique), Modèles non linéaires à raideur d'engrènement variable).et a la fin de ce chapitre on verra les différents modèles de discrétisation de la transmission (Modèles à un degré de liberté, Modèles à paramètres concentrés, Modèles éléments finis).

Quant au quatrième chapitre c'est la modélisation dynamique de la boîte à vitesse en utilisant la méthode des éléments finis on prendra un modèle mécanique dynamique et on modélisera ces éléments (arbre (poutre de Timoshenko), engrenages) pour en déduire les matrices de masses et de rigidités puis faire à un assemblage de ces sous structures.

Et finalement le cinquième chapitre sera consacré au résultat et la résolution numérique de et discussion des résultats, on fera varier la rigidité d'engrènement pour obtenir les fréquences propres.

Chapitre 1 : généralité sur la boîte de vitesses mécanique

1. Introduction

La boîte de vitesses est un élément très important en mécanique. Depuis de nombreuses années, les ingénieurs ont sans cesse réduit son poids, son volume et son rendement. Ce mécanisme est quasiment indispensable pour un moteur thermique pour pouvoir adapter le couple et la vitesse de rotation, Les boîtes de vitesses servent dans un premier temps comme réducteur ou multiplicateur puis secondairement à lier cinématiquement les 2 autres composants.

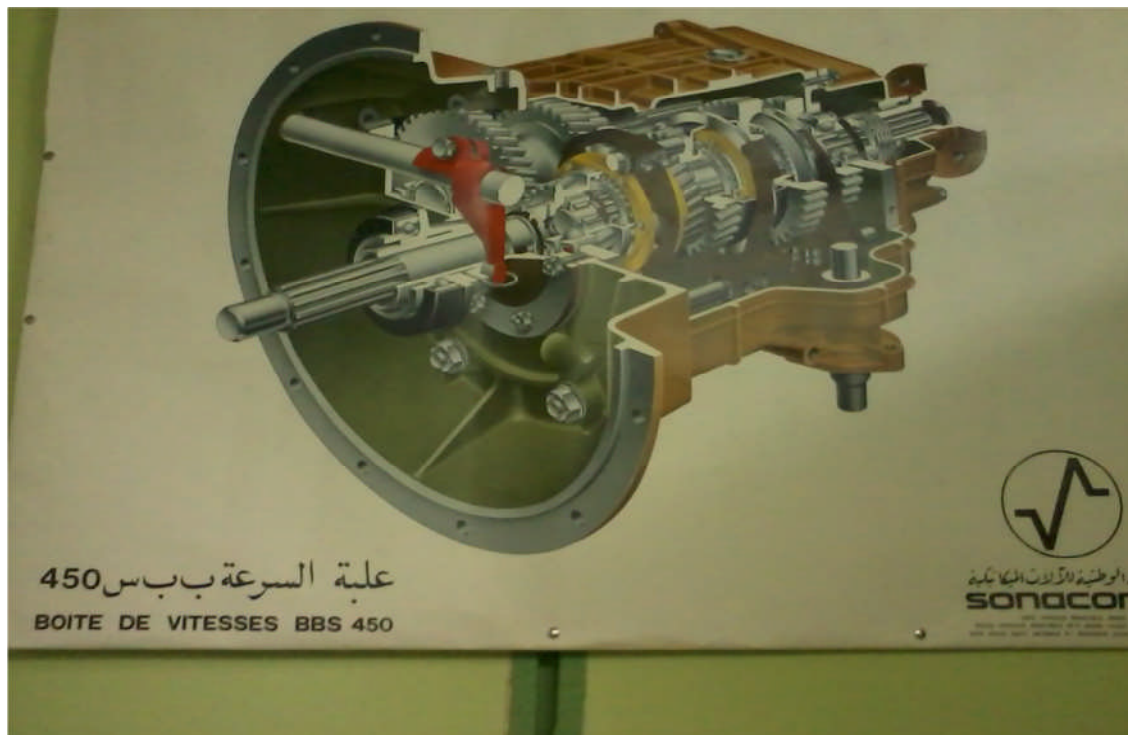


Figure 1.1 : Schéma de boîte de vitesses mécanique au niveau de STARR.

1.2 Fonctionnement de la boîte de vitesses

La fonctionnalité des boîtes de vitesses est de transmettre la puissance fournie par un moteur aux roues du véhicule, en modifiant éventuellement le rapport entre la vitesse de rotation et le couple.

Le principe de ce type de boîte repose sur le choix de plusieurs couples de pignons (appelés engrenages) offrant des rapports de transmission différents. Chaque engrenage est constitué d'un pignon d'entrée solidaire de l'arbre primaire, et d'un autre pignon de sortie en liaison pivot avec l'arbre secondaire. Un rapport est enclenché lorsqu'un des pignons de sortie devient solidaire de l'arbre secondaire. Pendant ce temps les autres pignons tournent librement. On dit qu'ils sont fous.

Après débrayage, pour rendre un pignon fou solidaire de son arbre, il faut dans un premier temps le synchroniser avec son arbre, c'est-à-dire annuler la vitesse de rotation relative, puis le bloquer en rotation. La manœuvre est assurée par un synchroniseur (synchro) et un crabot montés sur des cannelures, donc en liaison glissière avec l'arbre, et commandés en translation par l'une des fourchettes.

L'accouplement entre le crabot et le pignon correspondant s'effectue au moyen de dents, qui peuvent être frontales (créneaux) ou périphériques (cannelures). Les formes complémentaires des deux éléments assurent une transmission de la puissance par obstacle.

Le maintien du rapport enclenché se fait à l'aide d'un système de verrouillage des crabots sur l'arbre de sortie, mais aussi des coulisseaux de fourchette (entraînés par le levier de vitesses) sur le carter de la boîte.

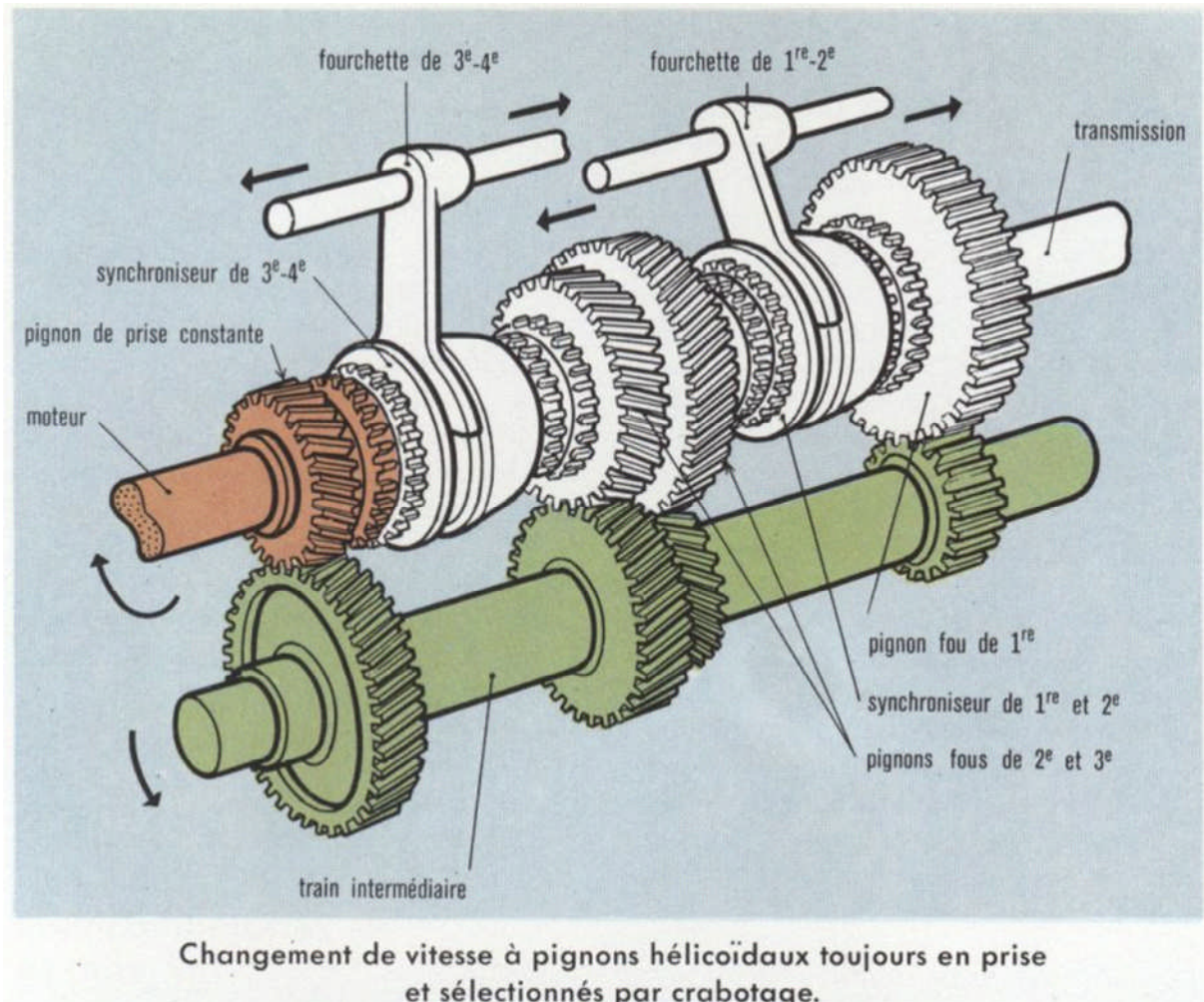


Figure 1.2 : schéma de fonctionnement de la boîte à vitesse [1]

1.3 Situation de la boîte de vitesses

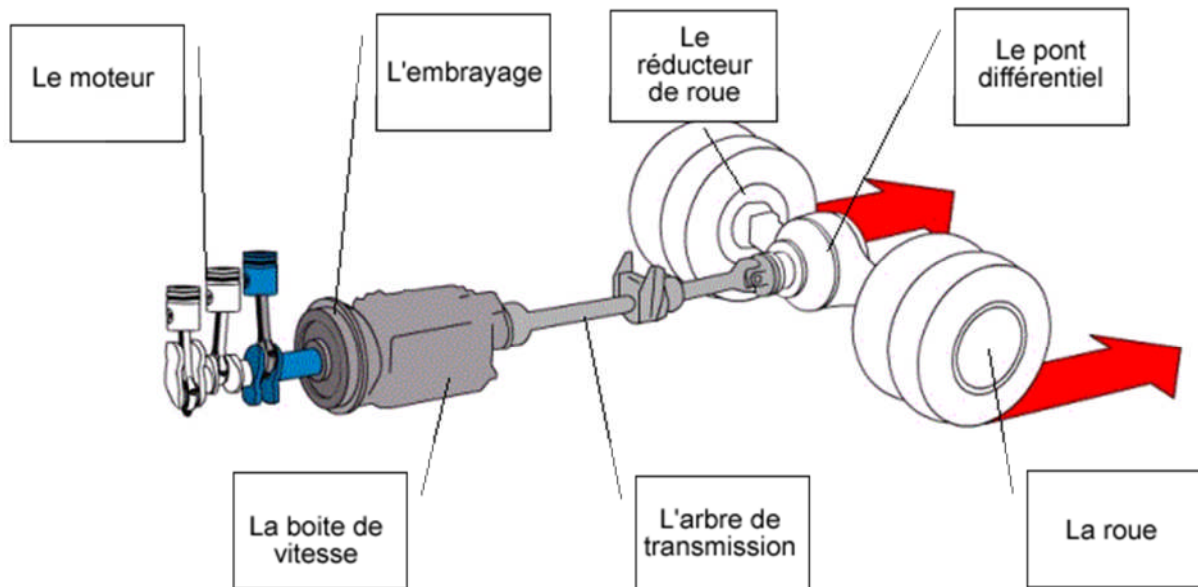


Figure 1.3 la mise en situation de la boîte à vitesses dans un véhicule [2]

Le système de transmission comprend l'ensemble des mécanismes situés entre le moteur et les roues motrices.

Moteur : Fournit l'énergie mécanique pour propulser le véhicule.

Embrayage : Permet d'établir progressivement l'accouplement au démarrage, ou de rompre la liaison entre le moteur et le reste de la transmission lors d'un changement de vitesse.

Boîte de vitesses : Permet de varier le couple moteur transmis la roue, suivant l'importance du couple résistant.

Entre boîte de vitesses et pont arrière : Il y a un arbre de transmission qui lie l'arbre de sortie de boîte à l'arbre d'entrée du pont.

Pont arrière (différentiel) : Partage le couple d'une façon égale sur les deux roues et dans le cas virage, permet aux roues intérieures et extérieures de tourner à des vitesses de rotation différentes.

1.4 Les types de la boîte de vitesses

Les 4 types de boîte de vitesses sont :

- a) **Les boîtes manuelles** : La boîte manuelle dite " à pignons toujours en prise " est la plus utilisée de nos jours; elle se distingue sur ce point des boîtes de machines outils qui disposent d'engrenages désaccouplés

- b) **Les boîtes automatiques** : La transmission automatique est un système capable d'assumer de manière autonome les fonctions de l'embrayage et de la boîte de vitesses. À l'identique d'une boîte de vitesses robotisée, c'est un système électro-hydraulique piloté par un calculateur électronique qui gère les passages de vitesses.

- c) **Les boîtes robotisées** : se sont des boites manuelles standards aux quelles on a greffée un système automatisé, électrotechnique souvent associé à l'hydraulique.

- d) **Les boites à crabots** : Utilisé en compétition (rallye notamment) et sur les motos, cette boîte possède l'avantage de pouvoir se passer d'embrayage et d'avoir un meilleur rendement, au prix d'une usure qui peut être rapide et d'un claquement lors des passages de vitesse.

1.5 Les éléments constitutifs de la boîte de vitesses (manuelle)

1.5.1 Les engrenages

Au cœur du problème dans le cadre de notre étude Les engrenages (hélicoïdale ou droite) sont les éléments principaux de ces mécanismes. La puissance est transmise par contact entre les pièces en mouvement relatifs. Les autres éléments : arbres, carter, paliers à roulement ... ont un rôle certes nécessaire, mais d'accompagnement.

1.5.2 Les arbres

Les arbres de transmission supportent les engrenages. L'arbre primaire P (ou arbre d'entrée de boîte) est muni à son extrémité du pignon 1 (ou roue dentée 1). Ce pignon 1 est en prise constante avec le pignon 2.

L'arbre secondaire S (ou arbre de sortie) est cannelé et porte le baladeur qui peut d'une part se craboter si on le déplace à droite (prise directe, on est en troisième) ou engrener si on le déplace à gauche (deuxième).

1.5.3 Les paliers

Un palier constitue la fonction de liaison nécessaire entre un arbre tournant et le carter fixe. Il existe deux types de palier, les roulements et les paliers lisses. Les paliers, nombreux dans une boîte de vitesses, doivent répondre aux critères suivants :

- a) Réaliser un parfait alignement des arbres.
- b) Ne pas présenter de bruit propre.
- c) Être de dimension réduite.
- d) Avoir un bon rendement.
- e) Être facile à assembler.
- f) Prix raisonnable.

1.5.4 L'huile

La boîte de vitesse est un élément de sécurité. Il est hors de question que ce mécanisme se bloque ou se grippe. Il est donc nécessaire que le mécanisme baigne dans l'huile pour réduire l'usure des pièces en frottement.

1.5.5 Les synchroniseurs

Appelé communément synchro, ils permettent par leur technologie, de mettre l'arbre et pignon à la même vitesse, on réalise alors une liaison encastrement.

Il existe deux types de synchro :

- **Le New-Process** : il privilégie l'efficacité et la douceur de passage
- **Le Borg-Warner** : il est plus économique mais moins efficace.

1.5.6 La commande a boite

Les différents éléments constituant la commande manuelle sont les fourchettes, les doigts de passage et les crosses et le dispositif anti-verrouillage.

1.5.7 Le carter

Enveloppe de l'élément mécanique en question (boîte à vitesse) proposant plusieurs rapports de transmission entre un arbre moteur et un arbre de sortie. Lors de conception il faut satisfaire ces conditions :

- **Étanchéité** : il faut donc que le carter soit étanche car l'huile ne doit pas d'échapper et les saletés ne doivent pas rentrer dans le carter. Il faut donc mettre des joints aux différentes entrées et sorties cinématiques.
- **Rigidité** : il doit être indéformable car il supporte un ensemble de pièces de précision.
- **Évacuation de la chaleur** : L'énergie calorifique se dégage du au effort dans les arbres et les engrenages. Il est donc nécessaire de réguler la température afin d'augmenter la longévité de la boîte. On utilise donc un lubrifiant et dans certains cas un dispositif de refroidissement par pompe et échangeur.
- **Silence de fonctionnement** : La boîte de vitesse est un élément très bruyant sur un véhicule. Si l'insonorisation est mauvaise, on peut entendre des bruits de sirène et des craquements de boîte désagréable pour le conducteur.

1.5.8 Lubrifiant

C'est un élément très important pour la boîte de vitesses car sans lui, il y aurait échauffement des composants dus aux efforts trop importants. Il faut éviter les contacts métal-métal et donc évacuer les calories générées. Il faut penser aussi à la circulation du fluide dans le capteur sinon il ne pourrait pas se régénérer et les particules de métal ne pourraient pas descendre au fond du carter

1.6 Des conseils pour bien préserver la boîte de vitesses

Comme tout organe mécanique la boîte de vitesses est exposée à des défaillances pour cela les conseils suivants peuvent éliminer ou minimiser ces défaillances et augmenter la durée de vie de la boîte de vitesses.

- Bien choisir la vitesse selon la charge et le lieu.
- Éviter de passer la vitesse avec régime élevé.

- Dégrader avec un régime adéquat du moteur.
- Utiliser l'huile propre.
- Respecter le niveau afin d'éviter l'échauffement.
- Vérifier la fixation de la boîte.
- Régler l'embrayage pour préserver la boîte.
- Respecter la périodicité de vidange.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre on fait une introduction sur la boîte vitesse son rôle, ses types, ses composants qui feront l'objet de notre étude par la suite, et à la fin on a donné quelques conseils pour augmenter sa durée de vie et éviter le maximum toute défaillance qui pourrait nuire cet élément.

Chapitre2 :

Sources d'excitations dans les transmissions par engrenages

2. Excitation vibratoire générer par l'engrènement

2.1 Introduction

L'engrenage est l'organe de transmission de puissance par excellence. Il répond parfaitement aux exigences de rendement, de précision et de puissance spécifique imposées dans les architectures mécaniques modernes. Depuis peu, les critères de confort acoustique et de tenue vibratoire sont à l'origine d'une nouvelle pression technologique sur ce composant. L'engrènement apparaît, alors, comme la source principale d'excitation, tant sonore que vibratoire. Ce chapitre présente une synthèse des résultats bibliographiques sur les excitations attribuées à l'engrènement et met en évidence les principaux paramètres influents.

2.2 Sources d'excitations dans les transmissions par engrenages

La réponse vibratoire d'une transmission par engrenages est générée par des excitations internes et externes. Par opposition aux sources d'excitation externes, les sources d'excitation internes sont celles qui résultent du principe de fonctionnement de la transmission. Il est généralement admis qu'en l'absence de chocs entre les dents, l'erreur de transmission constitue la principale origine du bruit rayonné par une transmission par engrenages. On se propose ici de décrire plus précisément cette erreur avant de présenter succinctement les autres sources d'excitation.

2.2.1 L'erreur de transmission (indicateur du comportement)

Les premiers travaux sur la dynamique des engrenages Harris [3] ont fait apparaître l'importance du caractère irrégulier de l'engrènement. Ils ont conduit à la définition et à l'utilisation de l'erreur de transmission comme indicateur du comportement.

Cette grandeur est Aujourd'hui unanimement considérée comme la source principale d'excitation dans les transmissions par engrenages (Welbourn [4], Mark [5]) Rappelons qu'elle caractérise l'écart entre la position réelle de la roue menée et la position qu'elle devrait occuper si la transmission était parfaite (profils parfaitement conjugués et indéformables). Elle peut être exprimée sous forme angulaire ou sous forme linéaire si elle est ramenée dans le plan d'action (**Fig2.1**). L'erreur de transmission est un indicateur global du comportement traduisant aussi bien les effets des défauts de fabrication que les phénomènes cinématiques et dynamiques. Par conséquent, il est important de situer clairement le contexte d'analyse.

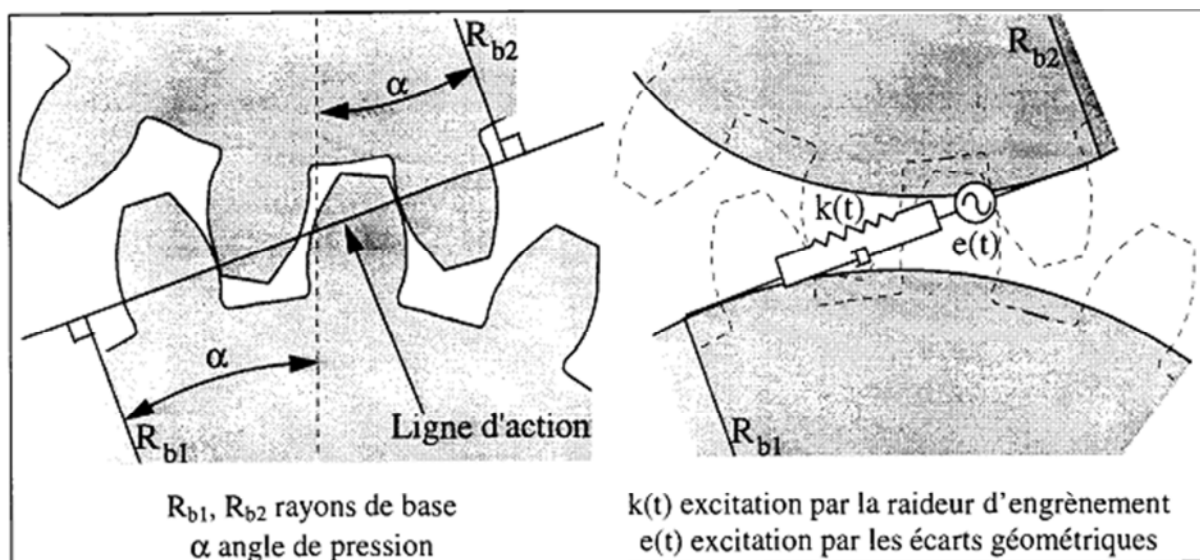


Figure 2.1 : engrènement entre les roues dentées

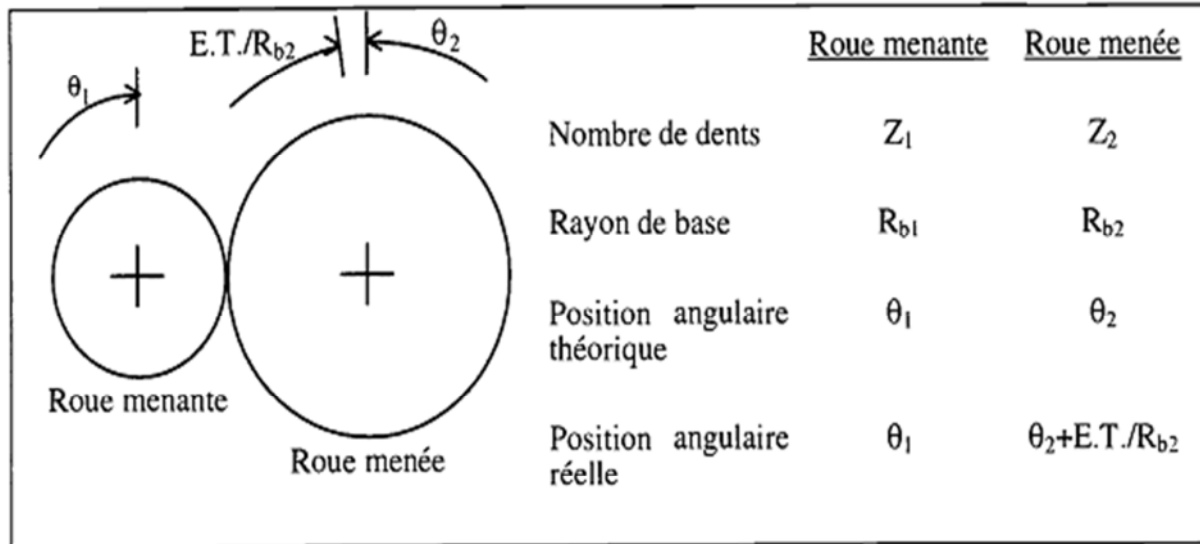


Figure 2.2: erreur de transmission d'après Munro [6]

On distingue classiquement :

- L'erreur de transmission statique ou quasi-statique sans charge ou erreur cinématique.
- L'erreur de transmission statique ou quasi-statique sous charge.
- L'erreur de transmission dynamique.

A. Erreur de transmission quasi-statique sans charge (erreur cinématique)

Cette erreur correspond à des engrenages ne transmettant aucune puissance pour une vitesse de rotation quasiment nulle, elle intègre donc l'influence des défauts de géométries des dents, c'est-à-dire la non-conformité entre le profil théorique de la dent et le profil réel. Ces défauts globaux de non conformité résultent de la fabrication de l'engrenage (défauts de faux

Chapitre 2

Ronds, erreurs de pas, excentricités, etc.) Mais également du montage des engrenages sur les lignes d'arbre (parallélisme, excentricité, etc.).

B. Erreur de transmission statique ou quasi-statique sous charge

L'erreur de transmission statique sous charge (TE_S) résulte, en plus des erreurs liées à l'erreur cinématique, des déflexions de dentures lorsque l'engrenage transmet une charge à très faible vitesse.

Cette erreur inclut donc les déformations de l'engrenage mais également de ses composants extérieurs (arbres, paliers, roulements,...). (TE_S) Est couramment utilisée afin d'étudier les effets des écarts géométriques tels que les corrections de profils, les défauts de montage,

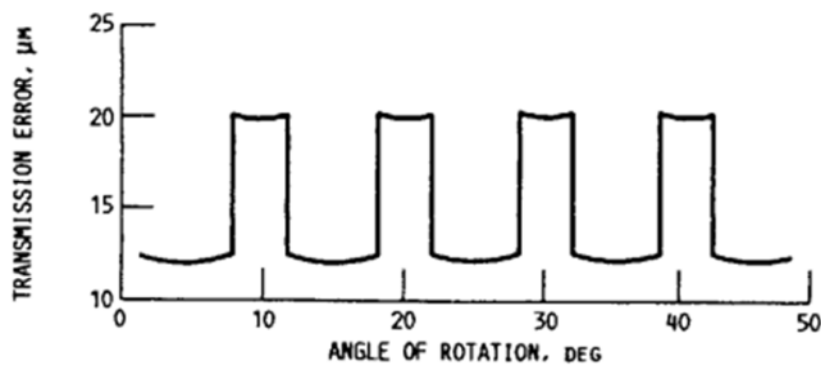


Figure 2.3 : Erreur de transmission quasi-statique sous charge sans défauts de géométrie (Lin & Col. [7]).

C. Erreur de transmission dynamique

L'erreur de transmission dynamique est une image du comportement vibratoire et acoustique d'engrenages en fonctionnement sous charge. Certains auteurs, comme Munro [8], ont ainsi pu mettre en évidence des phénomènes de séparation momentanée de dentures suivis de chocs à travers la mesure de ce paramètre.

Maatar [9] et Velez & Maatar [10] et [11] ont proposé quand à eux une méthodologie basée sur la description locale des conditions de contacts entre les dentures, pour laquelle cette erreur ne constitue plus une source d'excitation mais le résultat du comportement du réducteur. Les équations du mouvement et les conditions associées aux contacts normaux entre dentures sont résolus simultanément et les erreurs de transmission apparaissent alors comme des résultats de la simulation et non pas comme des données du problème.

En conclusion, malgré certaines limitations, le concept d'erreur de transmission s'avère particulièrement bien adapté pour caractériser le comportement dynamique d'engrenages (principalement pour des largeurs de denture faibles) et constitue un indicateur intéressant en termes de vibro-acoustique.

2.2.2 Autres sources d'excitations

Les sources d'excitation vibratoire ou acoustique d'une transmission sont multiples. On distingue les sources internes, propres au fonctionnement de la transmission, les sources externes, elles sont associées aux fluctuations des couples moteur et résistant, aux variations de vitesses des mobiles mais également aux vibrations transmises via les points de fixation sur la structure d'accueil.

2.2.2.1 sources d'excitation internes

- *Chocs entre dents*

Certaines conditions de fonctionnement des engrenages peuvent conduire à des pertes de contact entre les dents en prise. Le rétablissement du contact, soit sur le flanc actif de la dent conjuguée, soit sur le flanc opposé de la dent suivante, se traduit par un choc. Ces phénomènes de chocs sont décrits, sous le nom de cliquetis (*rattling noise*) pour des engrenages non chargés (Singh 1989) [12] et sous le nom de martèlement (*hammering noise*) pour des engrenages chargés (Pfeiffer 1992) [13].

Ils sont induits par l'entraînement de pignons fous (pignons très peu chargés). Les chocs entre dents constituent une préoccupation importante dans le domaine des transports terrestres, car, dans certaines conditions de fonctionnement très particulières, ils sont à l'origine de nuisances acoustiques importantes. Aussi, ils font l'objet de différentes études. Le contact entre les dents en prise est représenté par une raideur non linéaire qui devient nulle lorsque le contact est rompu.

- *Impacts à l'engagement*

Les déformations élastiques et les défauts de géométrie des dents peuvent conduire à des impacts au moment de l'entrée des dents dans la zone de contact. Les forces générées par ces impacts sont transmises au carter via les roues dentées, les arbres et les roulements et peuvent conduire à un bruit important à la fréquence d'engrènement (Houser 1988) [15]. Toutefois, cette source d'excitation peut facilement être éliminée en effectuant des corrections de denture appropriées.

Chapitre 2

- *Forces de frottements*

Lors du processus d'engrènement, les deux surfaces actives appartenant à un couple de dents en prise roulent et glissent l'une par rapport à l'autre. La vitesse de glissement, tangente au profil pour un engrenage parfait infiniment rigide, est nulle au niveau du point primitif et varie de façon linéaire avec la position du point de contact sur la ligne d'action. Il existe, pour les engrenages réels, d'autres mécanismes de glissement des surfaces en contact. L'ensemble de ces phénomènes physiques est à l'origine de forces de frottement. La variation, au cours de l'engrènement, des forces de frottement induit nécessairement une fluctuation du couple transmis qui excite le carter, via les lignes d'arbres et les roulements. Toutefois, selon Smith (1983) [14], la contribution de cette source d'excitation reste minime.

- *Projections d'huile*

Par ailleurs, le processus d'engrènement génère des projections d'huile qui peuvent exciter le carter de la transmission (Houser 1988) [15]. Les mécanismes mis en jeu et leur influence sur le bruit des transmissions n'ont, à notre connaissance, pas été abordés.

- *Excitations induites par les roulements*

Enfin, les défauts des roulements et la fluctuation périodique de leurs caractéristiques de raideur sont à l'origine d'une excitation du carter. Ces phénomènes ne sont pas propres aux transmissions par engrenages. On peut dire que les roulements constituent eux-mêmes une source de rayonnement acoustique, mais celle-ci reste secondaire devant le bruit rayonné par le carter.

2.2.2.2 sources d'excitation externes

- *Le groupe moteur*

Parmi les différentes sources d'excitation vibratoires externes d'une chaîne de transmission cinématique, l'organe moteur est le plus souvent considéré comme la principale. Le fonctionnement du moteur génère des fluctuations de couple dont l'amplitude peut être grande. Ces excitations externes, en règle générale, elles se caractérisent, en régime de fonctionnement stationnaire, par des perturbations périodiques associées à la fréquence de rotation de la ligne d'arbre moteur.

2.3 Etude des erreurs et défauts des engrenages

L'engrenage est l'organe de transmission par excellence. Il répond parfaitement aux exigences de rendement, de précision et de puissance spécifique imposées dans les architectures mécaniques modernes. Depuis peu, les critères de confort acoustique et de tenue vibratoire sont à l'origine d'une nouvelle pression technologique sur ce composant. L'engrènement apparaît, alors, comme la source principale d'excitation, tant sonore que vibratoire.

2.3.1 Les déformations élastiques

Les déformations élastiques peuvent être scindées en deux catégories : les déformations des dentures et les déformations de leurs supports. La déflexion des supports (arbres, paliers et roulements) se traduit par un défaut de positionnement des deux roues et en particulier un défaut d'alignement. Les déformations élastiques des dentures se traduisent par une déflexion des dents chargées qui provoque des contacts prématurés, des interférences et des chocs générateurs de bruit et de vibrations.

2.3.2 Erreurs de forme et de position

Les défauts géométriques dont nous allons présenter les effets dans ce paragraphe sont généralement générés lors de la fabrication des dentures, de l'assemblage des roues dentées sur leurs supports ou lors du fonctionnement (usure).

Ils sont caractéristiques de la qualité de réalisation de la denture et, au travers de l'erreur de transmission quasi-statique, conduisent à définir la classe de qualité d'une denture suivant des normes (AGMA, ISO). De plus, une denture présentant des défauts importants, et donc répertoriée comme telle dans la norme, produira des niveaux acoustiques et vibratoires élevés. Le contraire n'est pas nécessairement vrai et certains exemples le prouvent.

- **Excentricité ou erreur de faux-rond**

Ce défaut traduit la non-concentricité entre l'axe du cylindre primitif de denture et l'axe de rotation de l'arbre auquel la denture est liée. Il se traduit par l'introduction d'une modulation d'amplitude harmonique à la rotation des arbres sur les signaux d'erreur de transmission et de bruit d'engrènement (**Figure 2.4**).

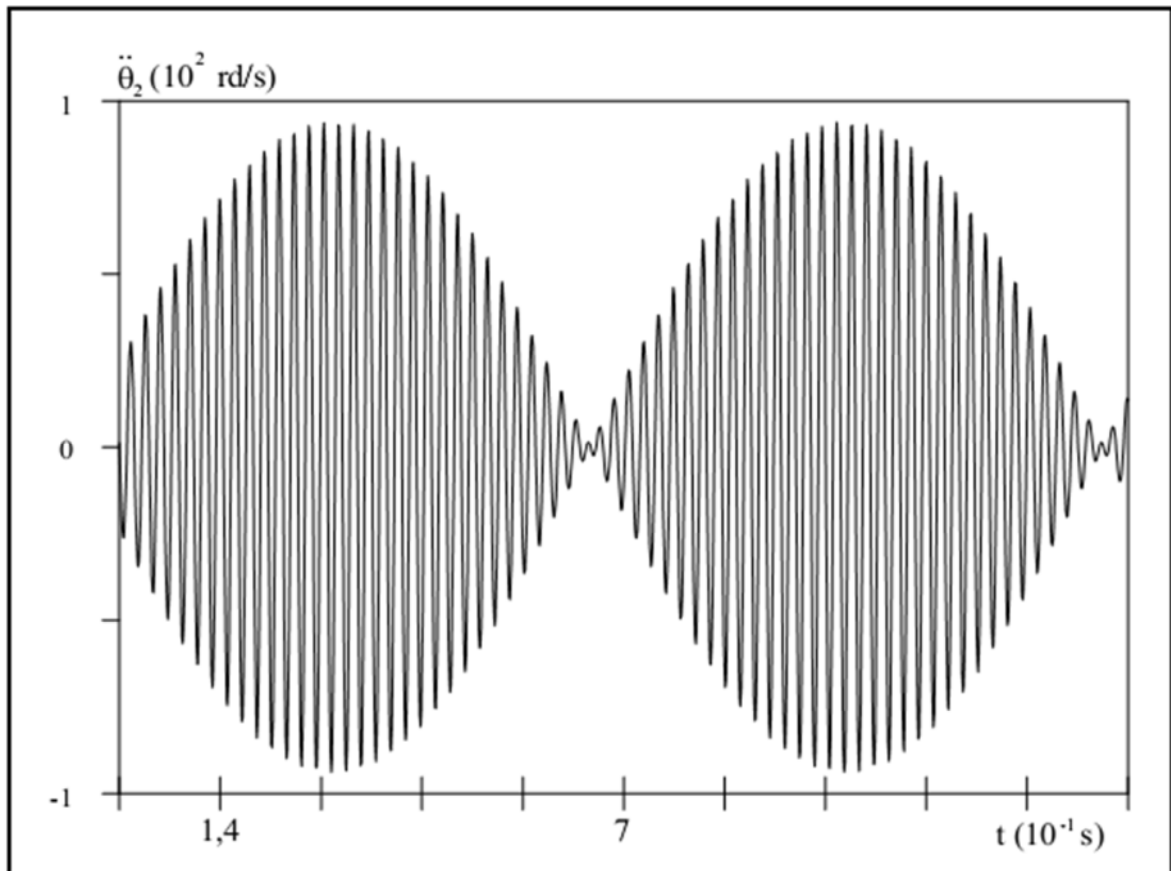


Figure 2.4 : Modulation d'amplitude caractéristique d'un défaut de faux-rond
(Sabot & Perret-Liaudet 1992) [16]

Ce défaut est présent dans la totalité des transmissions par engrenage et reste la source principale de modulation du bruit d'engrènement. Notons également que les excentricités des roues dentées et des arbres supports peuvent se cumuler et conduire à des configurations de montage particulièrement bruyantes.

- **Les erreurs de pas**

L'erreur de pas caractérise, dans le plan apparent de l'engrenage, le défaut de localisation angulaire d'une dent par rapport à sa position théorique. Deux grandeurs représentatives de la qualité de réalisation d'un engrenage sont associées à cette erreur. Ces grandeurs sont l'erreur de pas individuelle et l'erreur de pas cumulée (**Fig. 2.5**).

Chapitre 2

L'erreur de pas cumulée (cumul algébrique des erreurs de pas individuelles) conduit à une modulation basse fréquence harmonique à la rotation des arbres (**Fig. 2.6**). Ces effets sont identiques à ceux associés aux défauts d'excentricité. Les deux erreurs se cumulent et sont généralement prises en compte simultanément (Munro 1990-a) [17].

L'erreur de pas individuelle correspond à l'écart entre la position réelle de la dent et sa position théorique. Mark (1984) [18] et Welbourn (1970) [19] montrent que son influence se répercute sur la totalité du spectre (bruit et erreur de transmission) et qu'il n'existe pas de composante à la fréquence d'engrènement.

De plus, Winter & col. (1989) [20] indiquent que l'influence de ces erreurs est plus importante sur des engrenages de faible qualité et faiblement chargés que pour des engrenages lourdement chargés et de meilleure qualité. Les irrégularités qu'elles introduisent sont alors gommées par les déformations de denture.

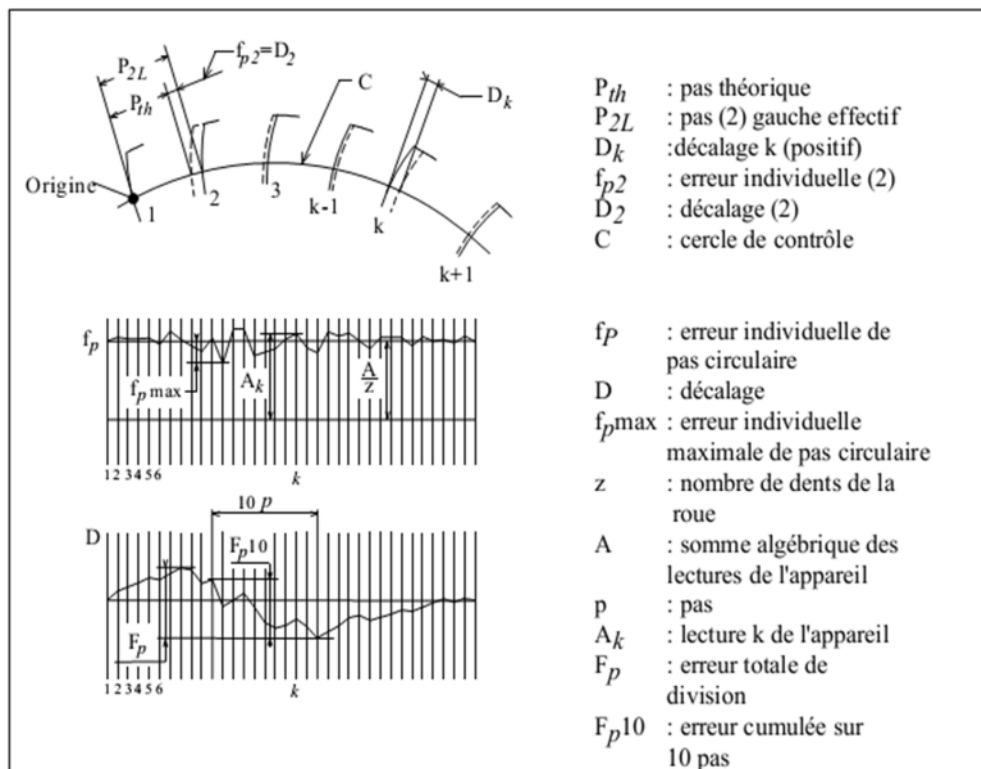


Figure 2.5: Définition de l'erreur de pas individuelle et de l'erreur de pas cumulée (norme ISO 1328)

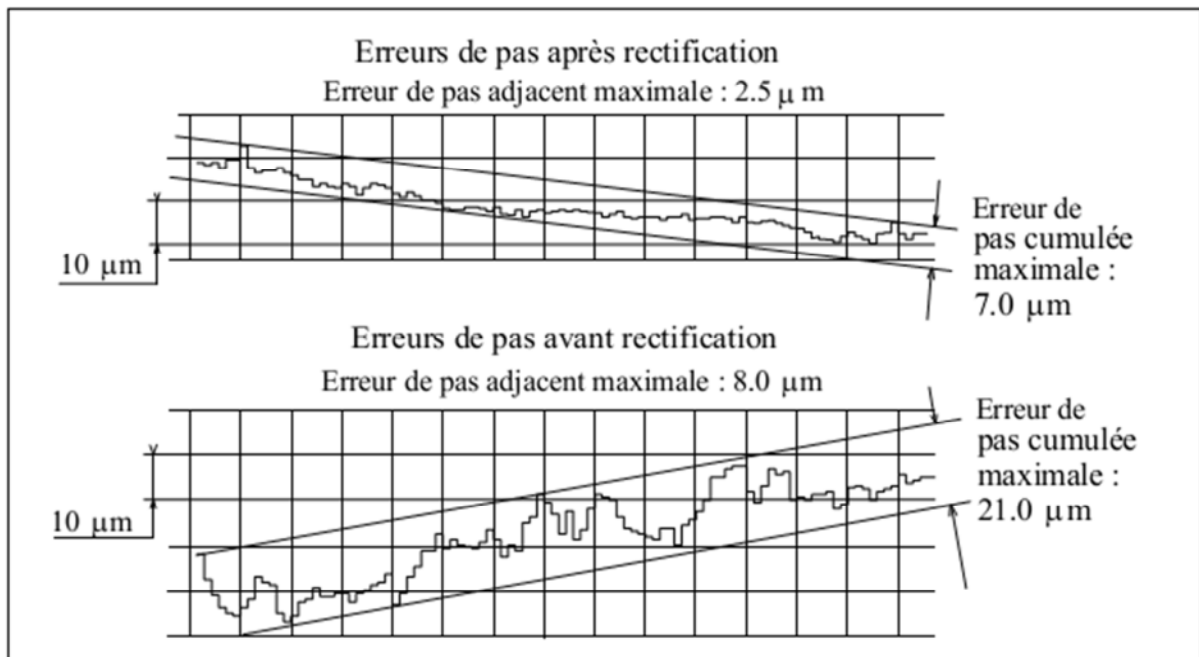


Figure 2.6 : Exemple de mesure de l'erreur de pas cumulée (Welbourn 1972) [21]

- **Erreur de profil**

Les erreurs de profil sont représentatives des écarts existant entre le profil théorique de la denture et le profil réel. Le profil théorique peut être en développante de cercle, de forme parabolique ou présenter une dépouille s'il a subi une correction volontaire (**Fig.2.7**). Ces erreurs peuvent être générées lors de la fabrication ou au cours du fonctionnement par l'usure et la détérioration des profils.

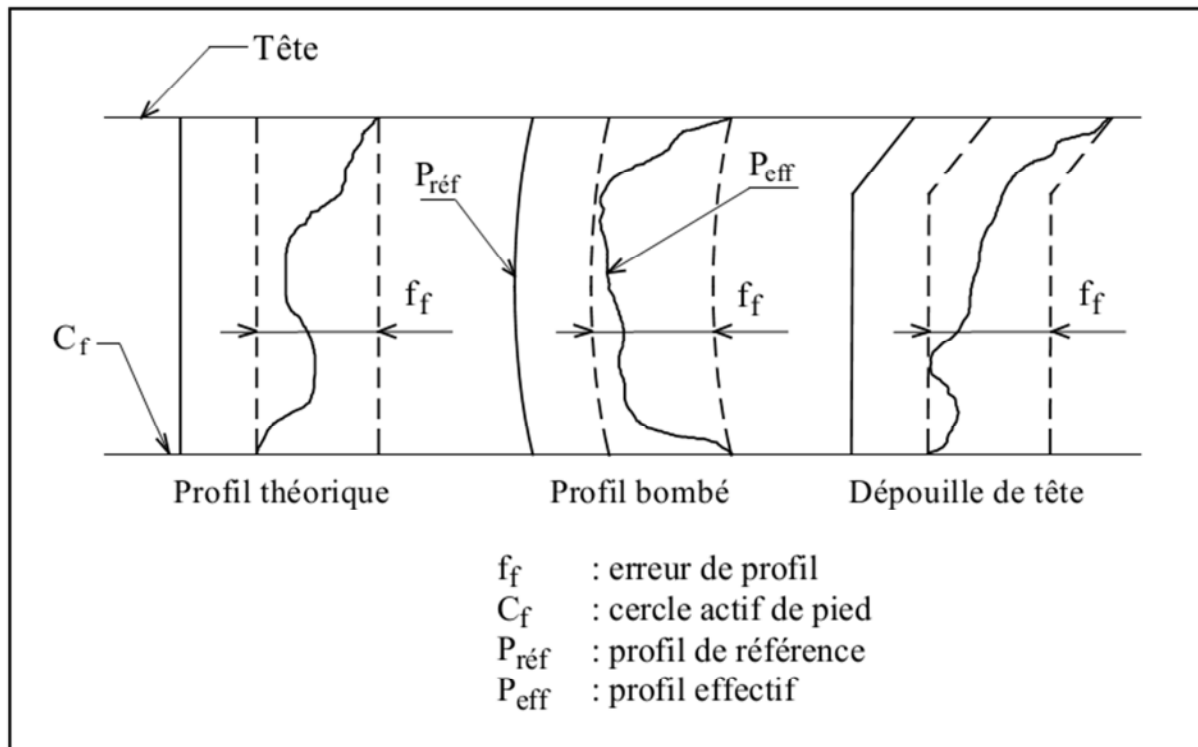


Figure 2.7 : Erreurs de profil, définition tirée de la norme ISO 1328

2.3.3 Les défauts de montage ou de positionnement

Ces défauts sont généralement sous-estimés alors qu'ils peuvent expliquer les différences de niveau sonore observées sur des transmissions d'architecture absolument identique (série de boîtes de vitesses par exemple). L'ensemble de ces défauts caractérise le positionnement relatif des deux roues dentées résultant du montage ou de la déformation de la structure (arbres, paliers et carter) lors de l'application du chargement. Ils sont représentés par le défaut d'entraxe (écart entre l'entraxe de conception de la denture et l'entraxe réel) et les défauts de parallélisme entre les axes des roues.

- **Défaut d'entraxe**

L'entraxe est un paramètre particulièrement important. Il agit directement sur le jeu de fonctionnement et modifie la géométrie du contact (localisation des points de contact).

- **défauts d'inclinaison et de déviation**

La norme caractérise les défauts d'alignement par deux angles appelés angle d'inclinaison et angle de déviation (**Fig. 2.8**). L'angle d'inclinaison est associé à une rotation dans le plan des axes, et l'angle de déviation conduit à une délocalisation latérale des portées de denture (**Fig. 2.9**).

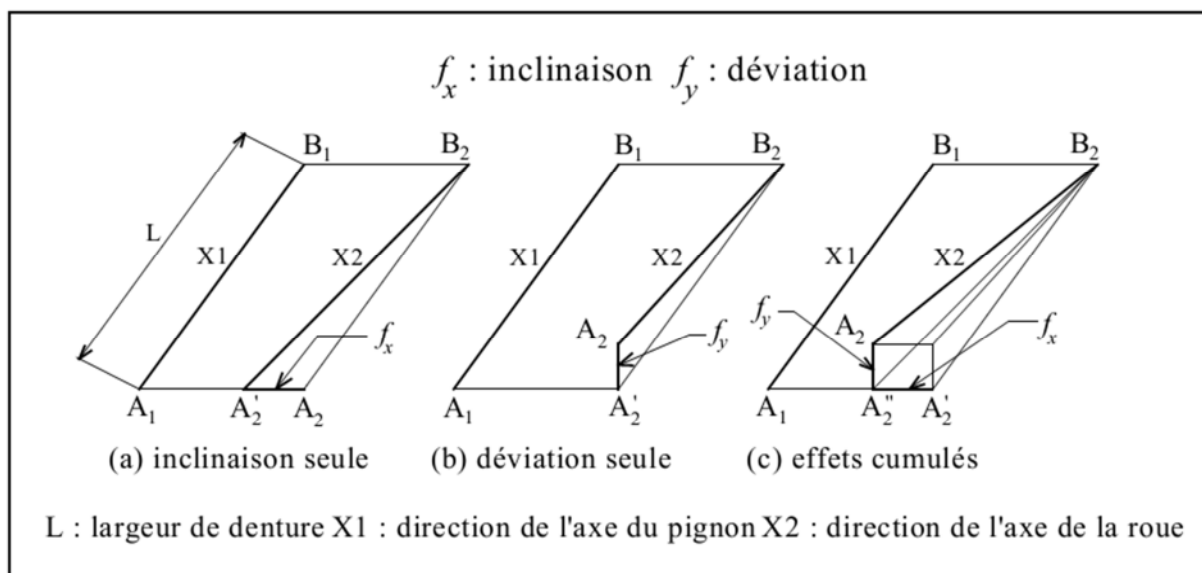


Figure 2.8 : Définition des défauts d'inclinaison et de déviation selon la norme ISO 1328

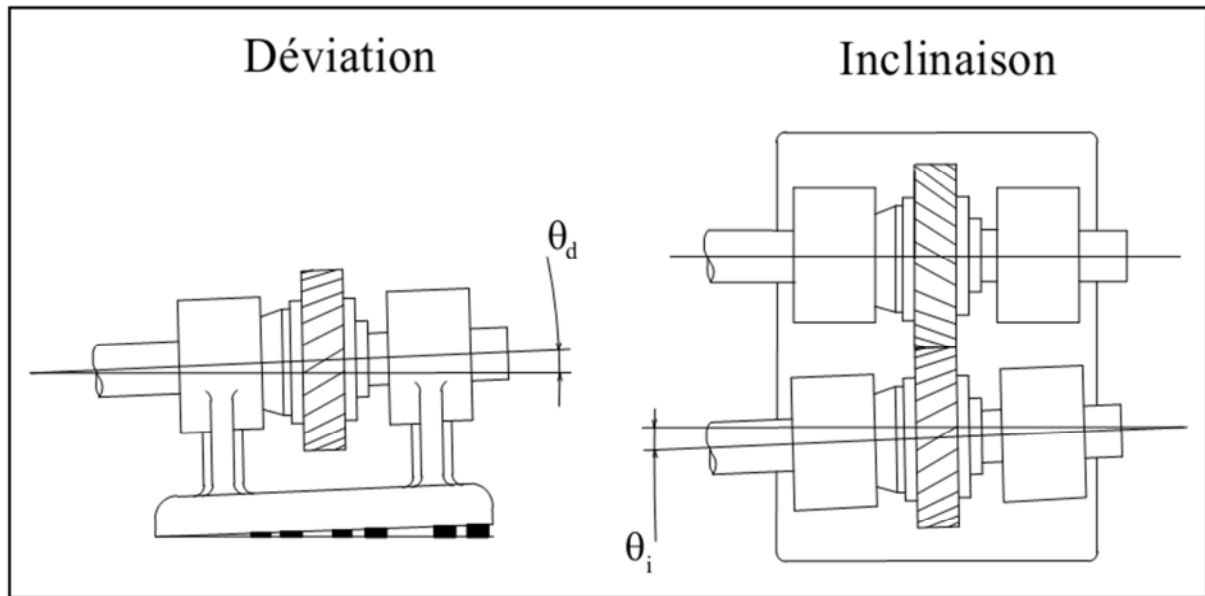


Figure 2.9 : Caractérisation des défauts de déviation et d'inclinaison

(Umezawa et col.1986-b) [22].

2.4 Techniques de détection des défauts d'engrenage

L'apparition des défauts d'engrenage dans un système mécanique est un phénomène inévitable. Cependant, plusieurs études ont été faites afin de réduire la présence de ces défauts, d'augmenter le temps de fonctionnement de l'engrenage en état sain et d'améliorer les performances des trains d'engrenage. Ces études nécessitent la connaissance des caractéristiques des défauts qui peuvent être collectées par plusieurs techniques de détection.

2.4.1 Analyse des signaux acoustiques

L'analyse des signaux vibratoires a été largement utilisée dans le diagnostic des transmissions à engrenages. Ceci peut être dû à une meilleure compréhension des mécanismes de vibrations des engrenages. En outre, tout changement dans le signal de vibration peut être facilement attribué aux caractéristiques dynamiques de l'engrenage et de son défaut.

Les transmissions mécaniques à engrenages génèrent des vibrations et du bruit lors du fonctionnement normal. La présence des défauts et des écarts de forme dans l'engrenage peut être une source d'excitation de ces phénomènes. Il est démontré précédemment que les défauts locaux d'engrenage ont un impact direct sur les signaux sonores. Les impulsions dues au défaut sont observées dans les signaux acoustiques à chaque tour du pignon. En présence de plus en plus de défauts locaux, les signaux acoustiques de l'engrenage ont des caractéristiques non-stationnaires.

D'autre part, en présence de défaut, la phase et l'amplitude indiquent clairement deux signes de défauts sur les signaux:

- a) le premier est l'apparition des activités à basse fréquence en dehors de la région de fréquence fondamentale d'engrènement.
- b) le deuxième signe est la concentration de l'énergie du signal sur la seconde moitié de la distribution des amplitudes des ondelettes.

Ces signes de présence de défaut sont d'autant plus identifiables que les défauts sont plus graves et plus accentués. Après un certain temps de fonctionnement, l'apparition puis la progression et le développement des avaries de contact augmente la rugosité de surface et donc les niveaux des émissions acoustiques, les émissions acoustiques sont également influencées par la température du film d'huile et les Caractéristiques dynamiques du banc d'essai. L'augmentation de la température d'huile entraîne une réduction de l'épaisseur du film d'huile, ce qui favorise les contacts métal à métal en augmentant les niveaux sonores.

En outre, les auteurs postulent que les facteurs qui déterminent le niveau de déclenchement des émissions acoustiques sont la rugosité de surface des dents d'engrenage, l'assemblage des engrenages et des paliers, et la température d'huile.

2.4.2 Analyse des lubrifiants

Le lubrifiant représente l'élément primordial qui intervient dans le fonctionnement des organes (moteurs, boîtes de transmission, roulements) et des équipements industriels. Le choix et la mise en œuvre du lubrifiant définissent sa fiabilité, sa tenue mécanique et sa longévité.

L'état du lubrifiant reflète l'état du système dans lequel il circule et offre une meilleure connaissance de la machine. En effet, l'analyse du lubrifiant renseigne sur :

- l'état du fluide (adaptation au système, adaptation de l'espacement de vidange, niveau de performance).
- l'état de la pollution et de contamination du fluide par des liquides, des solides et/ou des produits de décomposition) et l'état d'usure (normale, dangereuse ou accidentelle).

L'analyse de lubrifiant constitue donc un moyen efficace de surveillance des réducteurs à engrenages basé sur le suivi régulier des différentes caractéristiques du fluide telles que la viscosité, l'acidité, la présence de particules métalliques, la taille des particules, etc.... assuré par analyses physico-chimique et le contrôle du taux de contamination (chromatographie, photométrie, spectrométrie...).

Chapitre 2

Toutefois, la détection de défauts d'engrenages par analyse de lubrifiant ne peut pas être efficace dans le cas des avaries à évolution rapide et vient fréquemment en complément des analyses vibratoires pour confirmer des hypothèses.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a pu voir les sources des excitations dans la transmission par engrenages et que l'erreur de transmission reste le premier indicateur de comportement et la source principale d'excitation et elle est suivie par d'autres erreurs que sa soit de forme ou de position et on a vu aussi que il y'a deux types de sources d'excitation soit interne ou externe. Et finalement les méthodes de détections de ces défauts.

Chapitre 3 :

Modélisation dynamique des engrenages

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire une méthode permettant de calculer la réponse dynamique d'une transmission par engrenages excitée par l'erreur statique de transmission sous charge. D'abord, nous recensons les différents types des modèles des boîtes à engrenages puis les différents types de modèles dynamiques utilisés pour décrire les vibrations des engrenages. Après avoir analysé les avantages et inconvénients respectifs de ces modèles et des méthodes de résolution exploitées pour résoudre les équations de mouvement qui leur sont associées, nous présentons les différents types de discrétisation retenus pour décrire les transmissions par engrenages. Ensuite, nous présentons la méthode de calcul que nous avons adoptée. Elle est basée sur une discrétisation, par la méthode des éléments finis, de l'ensemble des composantes de la transmission (engrenage, lignes d'arbres, roulements et carter). Cette démarche a pour but non plus d'étudier le comportement de l'engrenage isolé de son environnement direct mais de permettre l'analyse des interactions dynamiques existant entre l'engrenage, les lignes d'arbres, les roulements et le carter. Le comportement dynamique de la transmission par engrenages est décrit par un système d'équations.

3.2 Présentation des différents types des modèles des boîtes à engrenages

Le but de ce paragraphe est de montrer les différents modèles des systèmes à engrenages.

3.2.1. Modélisation statique

L'étude du comportement mécanique des engrenages est très ancienne [23]. En 1955, Weber et Banaschek [24] ont utilisé la théorie de l'élasticité afin d'exprimer la déflexion sous charge des dents en fonction de la géométrie de l'engrenage en décomposant cette déformation totale en trois principales contributions :

- a) la déformation due à la flexion de la dent.
- b) la déformation due à la contribution du corps d'engrenage.
- c) la déformation de contact entre le couple de dents.

En se basant sur la comparaison des résultats expérimentaux et analytiques pour différents angles de pression, rapports de réduction, nombres de dents, et différentes positions de la charge, une formulation pour l'évaluation des déflexions et contraintes pour des engrenages à dentures droites est présentée dans [25]. D'autres travaux de recherche ont été consacrés à l'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'ensemble de l'engrenage, y compris la zone de contact entre les dents, afin de calculer la rigidité des dents [26]. Des formules approchées comme celles présentées dans la norme ISO-6336 [27] ou DIN-3990 [28] permettent d'estimer rapidement la raideur d'engrènement. Elles reposent sur des formules de régression Établies sur la base des résultats analytiques de Weber et Banaschek [24]. Des formulations similaires ont été également proposées dans le cadre de la norme américaine AGMA [29].

3.2.2 Modélisation dynamique

Le comportement dynamique des engrenages a été abondamment étudié au cours des 30 dernières années. Les modèles torsionnels initiaux à un seul degré de liberté ont progressivement évolués vers des représentations tridimensionnelles intégrant les couplages entre les différents degrés de liberté du système (torsion, flexion, traction et compression). La classification traditionnelle de ces modèles dynamiques est basée essentiellement sur la nature du comportement dynamique de l'engrenage (linéaire ou non-linéaire) et sur la description des conditions de contact lors de l'engrènement. Comme on va le montrer ci-dessous :

A. Modèles linéaires à raideur d'engrènement constante

Les modèles dynamiques d'engrenages sont considérés linéaires lorsque la contribution du non linéarité hertzienne due aux conditions de contact ainsi que les éventuelles pertes de contact en cours de mouvement sont négligées. Certains modèles linéaires supposent en outre que la raideur d'engrènement est indépendante de la vitesse de rotation et que ses variations temporelles sont négligeables. Dans ces conditions, les équations du mouvement sont des équations différentielles à coefficients constants classiques et permettent d'accéder à des fréquences naturelles et modes propres de la transmission. Ce type d'approche est particulièrement adapté aux engrenages possédant un rapport de conduite élevé dont les variations de longueur de contact avec le temps sont très faibles. Sener et Özgüven [30] utilisent le modèle linéaire présenté sur **la Figure3-1** pour étudier le comportement dynamique d'un système d'engrenages en tenant compte de son environnement (les arbres portant les engrenages et deux inerties représentant le moteur et le frein).

Chapitre 3

Dans ce modèle, les excitations naturelles dues à l'engrènement sont introduites via la notion d'erreur de transmission tout en supposant que la raideur d'engrènement est constante. Dans ces conditions, le système différentiel est à coefficients constants et sa résolution est relativement aisée.

Il est conclu que le calcul des facteurs dynamiques, en utilisant ce modèle linéaire afin d'inclure les effets des arbres, est une très bonne alternative aux modèles plus sophistiqués beaucoup plus coûteux à utiliser.

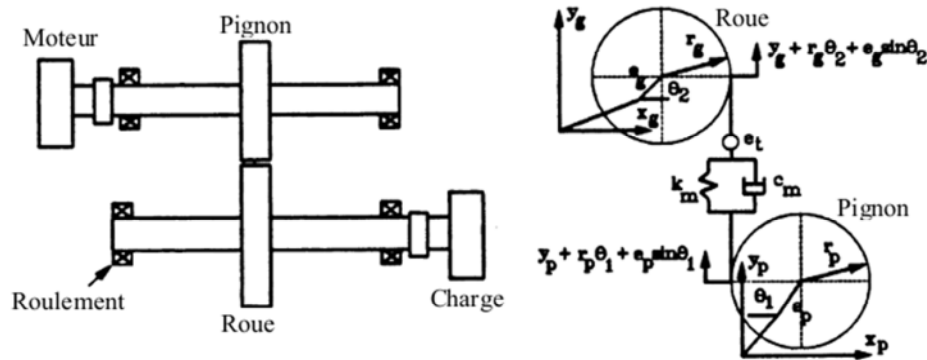


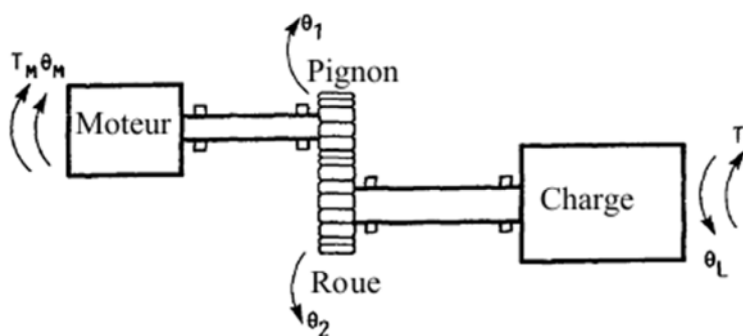
Figure 3-1 : Modèle linéaire de Sener et Özgüven [30]

B. Modèles linéaires à raideur d'engrènement variable (périodique)

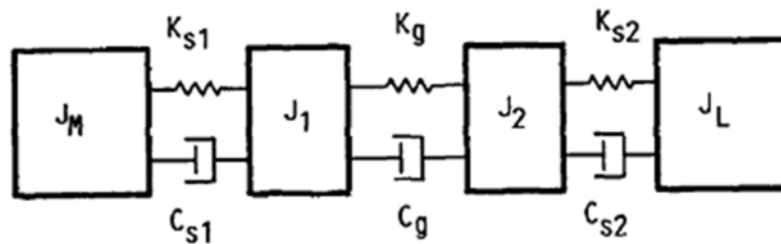
Dans cette catégorie, les hypothèses précédentes conduisant à un modèle linéaire sont maintenues, mais la raideur d'engrènement est considérée variable. Le système d'engrenages est alors caractérisé par des équations différentielles à coefficients périodiques dont la période t_m est la période d'engrènement définie en fonction de la fréquence de rotation f_r et du nombre de dents du pignon z_1 par :

$$t_m = \frac{1}{z_1 f_r} \quad 3.1$$

Ce type de modèle a été utilisé dans [31] pour étudier l'effet de corrections de profil de denture sur l'erreur de transmission statique et le chargement dynamique sur les flancs des dents d'un engrenage droit. Le modèle dynamique d'engrenages droits, représenté (**Figure 3-2**), est un modèle de torsion à quatre degrés de liberté. Les raideurs et les moments d'inerties des différentes composantes du système sont obtenus à partir des principes fondamentaux de la mécanique des matériaux. Les équations de mouvement contiennent des termes d'excitations dues aux variations périodiques de la raideur d'engrènement et à la présence d'erreurs de profils. Ces équations sont linéarisées en décomposant la période d'engrènement en petits intervalles. Des corrections de profil linéaires ou paraboliques ont été introduites dans le modèle afin de comparer et discuter l'influence individuelle de chaque correction sur le changement dynamique sur l'engrenage.



(A) : Modèle simple de transmission par engrenages



(B) : Modèle symbolique

Figure 3-2 : Modèle linéaire à excitations internes périodique [31]

c. Modèles non linéaires à raideur d'engrènement variable

Les modèles dynamiques non linéaires à raideur d'engrènement variable représentent les modèles d'engrenages les plus sophistiqués, pouvant tenir compte de plusieurs phénomènes qui peuvent se produire lors du fonctionnement, notamment à l'approche des fréquences critiques et à la présence des défauts de géométrie ou de montage, etc....comme les pertes de contact entre dents et des déplacements dépendant de la rigidité d'engrènement.

Küçükay [32] a proposé une introduction claire à la modélisation dynamique des systèmes à engrenages et a montré l'importance de définir clairement le but du modèle, la gamme de fréquences d'intérêt et surtout les sources d'excitations considérées. Les équations du mouvement ont été obtenues d'une façon générale en utilisant des vecteurs de structure qui contiennent des informations sur le couplage géométrique entre les nœuds. En outre, l'auteur donne une brève introduction qualitative pour l'interprétation de la réponse dynamique d'un système non-linéaire et l'analyse de sa stabilité. Velez et Maatar [33] ont proposé un modèle dynamique non linéaire d'engrenages cylindriques à denture droite ou hélicoïdale.

Chapitre 3

Le pignon et la roue sont assimilés à des cylindres rigides reliés à des arbres flexibles. Le contact entre les dents est supposé linéique et se fait exclusivement dans le plan d'action.

Les lignes de contact sont discrétisées en plusieurs segments (**Figure 3-3**) de sorte que l'élasticité des dents est simulée par une distribution de raideurs élémentaires indépendantes représentatives des segments en contact.

A chaque pas de temps, la somme de ces raideurs élémentaires donne la raideur d'engrènement totale instantanée et cette discrétisation permet d'introduire d'une manière simple les défauts et les écarts de forme dans la variation temporelle de la raideur d'engrènement globale. Les équations du mouvement ont été mises en place en utilisant les équations de Lagrange et en écrivant les énergies cinétiques et potentielles de chaque élément du système mécanique global (couple d'engrènement, arbres, paliers ...) [34].

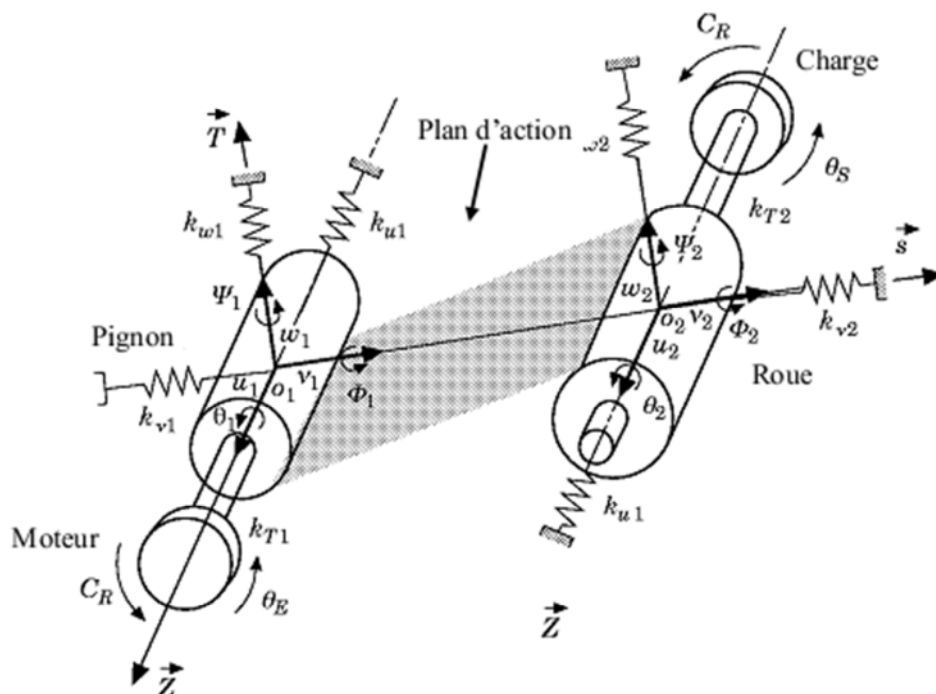


Figure 3-3 : Modèle masses-ressorts d'un engrènement [33]

Chapitre 3

Dans [35] et [36], Ajmi et Velex ont étendu ce modèle afin d'étudier les engrenages cylindriques à denture larges[37] et considérer les distorsions des corps d'engrenages en ajoutant des éléments finis d'arbre pour les corps et des fondations élastiques pour les rigidités de dentures (**Figure 3-4**).

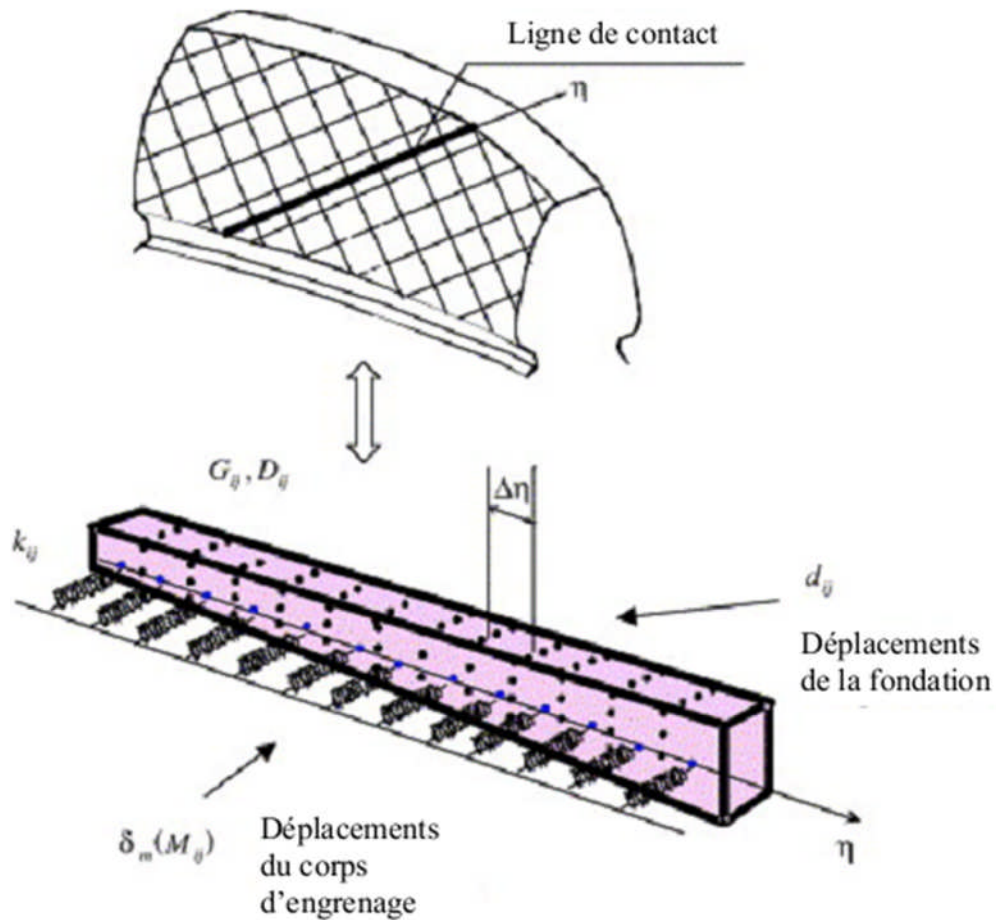


Figure 3-4 : Modèle de la structure élastique de la dent [37]

3.3 Discrétisation de la transmission

3.3.1 Modèles à un degré de liberté

Un grand nombre des travaux consacrés au comportement dynamique des engrenages a été réalisé à l'aide d'un modèle élémentaire de torsion pure à 1 seul degré de liberté. Les deux roues sont représentées par deux inerties en rotation qui sont reliées par une raideur en torsion. Ces modèles ont permis de calculer l'erreur dynamique de transmission exprimée sous forme d'un écart angulaire, ainsi que les surcharges dynamiques s'exerçant sur les dentures. Différents auteurs ont aussi étudié l'effet des paramètres de conception et des écarts de géométrie.

3.3.2 Modèles à paramètres concentrés

Les premiers modèles prenant en compte les lignes d'arbres sont des modèles à paramètres concentrés. Souvent, seuls les degrés de liberté en torsion sont conservés en raison des difficultés rencontrées lors de la résolution des équations de mouvement à coefficients variables. Les différents auteurs supposent qu'il n'existe pas de couplage entre les différents types de vibrations (torsion, flexion et mouvement axial). Ces modèles semblent bien adaptés pour l'étude des surcharges dynamiques de dispositifs à arbres courts et support rigide.

Velex [38] souligne par ailleurs que, au voisinage des fréquences critiques pour les dentures, les vibrations de torsion contribuent de façon majoritaire aux déformations des engrenages, ce qui justifie selon lui l'utilisation des modèles de torsion pure.

Özgülven [39] signale que quelques auteurs ont intégré les vibrations de flexion des arbres et des paliers au sein de modèles à paramètres concentrés à faible nombre de degrés de liberté. Özgülven souligne aussi la nécessité de mettre en place des modèles dynamiques qui intègrent correctement l'ensemble des déformations des lignes d'arbres et des paliers. Ida a notamment montré que, les couplages élastiques entre les déformations de torsion et les déformations de flexion sont importants et que, même si les déformations de torsion sont dominantes, les fréquences propres d'une transmission par engrenages sont très affectées par les déformations de flexion des lignes d'arbres.

3.3.3 Modèles éléments finis

Depuis une quinzaine d'années, l'utilisation des éléments finis a permis une modélisation des lignes d'arbres et des paliers avec prise en compte des déformations de torsion, de flexion et de traction-compression. Cette technique de discrétisation a été utilisée par, Kahraman (1989) [40] Qu'on va utiliser par la suite dans notre modèle dynamique.

3.3.3.1 Lignes d'arbres

Voire **figure 3.5** Les roues dentées sont modélisées par des cylindres rigides et leurs mouvements sont décrits par 6 degrés de liberté (3translations et 3 rotations). Les déformations dynamiques des corps de roue ne sont donc pas prises en compte dans le modèle. Par ailleurs, Vexx (Rémond et al. 1992) [41] souligne que pour des engrenages larges, un seul degré de liberté est insuffisant pour décrire le comportement en torsion de la roue dentée. Toutefois, d'après la définition d'un engrenage large (largeur de denture/diamètre supérieur à l'unité), seules quelques applications très particulières sont concernées par ce problème.

Chapitre 3

La raideur d'engrènement est modélisée par une matrice qui couple les degrés de liberté des deux roues dentées. Cette matrice de raideur intègre les déformations des dents en prise et, quelquefois, celles des corps de roue. Seules les caractéristiques moyennes de la raideur sont intégrées au sein du modèle éléments finis.

Les arbres sont discrétisés par des éléments de poutre à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud. Les inerties correspondant au moteur et à la charge et les raideurs des accouplements ne sont pas toujours intégrées dans les modèles. On souligne que ces grandeurs n'affectent que le comportement basse fréquence de la transmission. Les vitesses de rotation des transmissions par engrenages étant relativement peu élevées, les effets gyroscopiques ne sont généralement pas pris en compte.

3.3.3.2 Roulements

Comme nous l'avons vu précédemment, les paliers à roulements peuvent constituer une source d'excitation interne secondaire de la transmission. Cet aspect n'est pas encore intégré dans les modèles des transmissions. Les roulements sont alors considérés uniquement comme éléments de couplage élastique entre les lignes d'arbres et le carter de la transmission. Le comportement des roulements est gouverné par les jeux fonctionnels et par les contacts hertiens entre les éléments roulants et les bagues intérieure et extérieure. Les raideurs des roulements sont donc des fonctions non linéaires de la charge. Ces non-linéarités peuvent fortement influencer le comportement dynamique de la transmission. Pourtant, les roulements sont généralement modélisés par des éléments de raideur linéaire. Karhman (1989, 1993) [42] introduisent une raideur axiale et deux raideurs radiales pour chaque roulement. Karhman calcule notamment les surcharges dynamiques sur les dentures, ainsi que les efforts axiaux et radiaux transmis au carter par les roulements.

Chapitre 3

Bien que les carters soient principalement sollicités en flexion, les raideurs angulaires des carter ne sont que très rarement prises en compte. Ces raideurs ont toutefois été introduites, notamment ils ont pu décrire le roulement par une matrice de couplage linéaire entre les degrés de liberté de la bague intérieure et ceux de la bague extérieure. Les raideurs des roulements sont calculées à partir des équations non linéaires qui relient le chargement aux déplacements relatifs de la bague intérieure (supposée rigide) par rapport à la bague extérieure (Supposée rigide). Les résultats obtenus sont linéarisés autour de la position correspondant à l'équilibre statique du système. Il faut noter que le calcul de cet équilibre statique présente quelques difficultés puisqu'il nécessite une modélisation complète de la transmission et une connaissance préalable de la raideur des roulements.

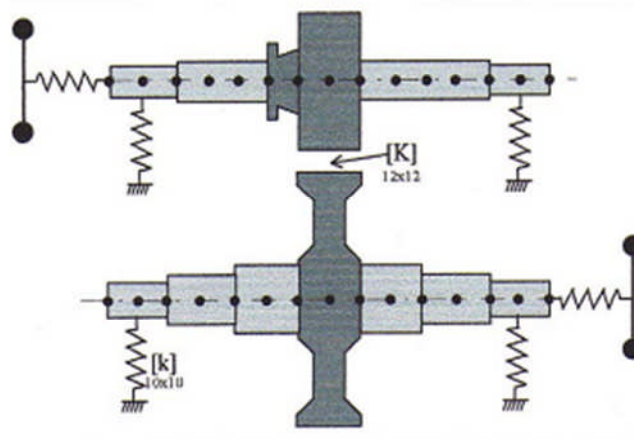


Figure 3.5: Maillage des lignes d'arbres et des roulements.

3.3.3.3 Carter

Dans l'ensemble des articles cités jusqu'ici, le carter est supposé infiniment rigide. Les différents auteurs considèrent que la raideur du carter est très supérieure à celle des autres éléments de la transmission. De plus, la plupart des méthodes de résolution des équations de mouvement à coefficients périodiques ne permettent pas de traiter les systèmes à grand nombre de degrés de liberté de manière efficace. Bien que les auteurs proposent de nouvelles architectures de carter potentiellement intéressantes, les hypothèses simplificatrices qu'ils utilisent conduisent à des modèles qui ne sont pas satisfaisants.

3.4 Conclusion

La modélisation des engrenages se décompose en deux catégories (statique ou dynamique) comme nous l'avons déjà expliqué pour notre étude nous avons choisie la modélisation dynamique, et elle-même contient plusieurs modèles (Modèles linéaires à raideur d'engrènement constante, Modèles linéaires à raideur d'engrènement variable (périodique), Modèles non linéaires à raideur d'engrènement variable). Et on a montré la discrétisation de la transmission qui comporte 3 modèles et nous avons sélectionné dans ce travail un seul modèle qui est le modèle d'éléments finis.

Chapitre 4 :

Modélisation par la méthode des éléments finis d'un système de transmission par engrenage d'une boîte de vitesses

4.1 Introduction

Un système d'engrenages quelconque sera caractérisé d'un point de vue dynamique par des matrices de masse M_{glob} et de rigidité K_{glob} ainsi que des vecteurs seconds membres construits par l'assemblage des matrices élémentaires des divers composants du système. Ainsi, il est possible les divers équations en les regroupant d'une part coté engrenage d'autre part coté arbre, palier, carter dans cette thèse les carters ne sont pas introduits et les effets gyroscopiques ne seront pas considérés car leur influence est jugée négligeable dans la gamme de vitesse exploité.

4.2 mise en équation d'un modèle dynamique

- Les hypothèses

- Les efforts gyroscopiques sont considéré nuls.
- Nous écartons volontairement les effets de l'amortissement.

- Description du modèle

Le modèle masses- ressorts d'un engrenage cylindrique a denture droite ou hélicoïdale est représenté dans la figure (4.1) il est composé de :

1^{er} élément : les arbres d'entrée (coté moteur) et de sortie (coté frein) sont introduit comme des poutres de Timoshenko par la méthode des éléments finis a deux nœud, chaque nœud comporte 6DDL.

2^{ème} élément : le couple d'engrenage (pignon et roue) est caractérisé par un modèle à paramètre concentré, cet élément est modélisé par masse et ressort entre les 2 nœuds.

3^{ème} élément : les paliers sont introduits de façon simplifiée par l'intermédiaire de ressorts de ressort de traction-compression et de torsion.ces raideurs additionnelles sont ajoutée au niveau des nœuds du modèle globale.

4^{ème} : qui comporte 2 parties une motrice (moteur) et l'autre réceptrice (frein) qui sont caractérisées par leurs masses et leurs inerties l'introduction dans le modèle globale de ces éléments ne sera que par l'ajout d'une matrice élémentaire diagonale de masse M_{mot} , M_{fr} l'ajout ne sera que par un seul nœud de 6ddl, à un nœud de l'arbre d'entrée (arbre du pignon) et l'autre placé a un nœud de l'arbre de sortie (arbre de la roue).

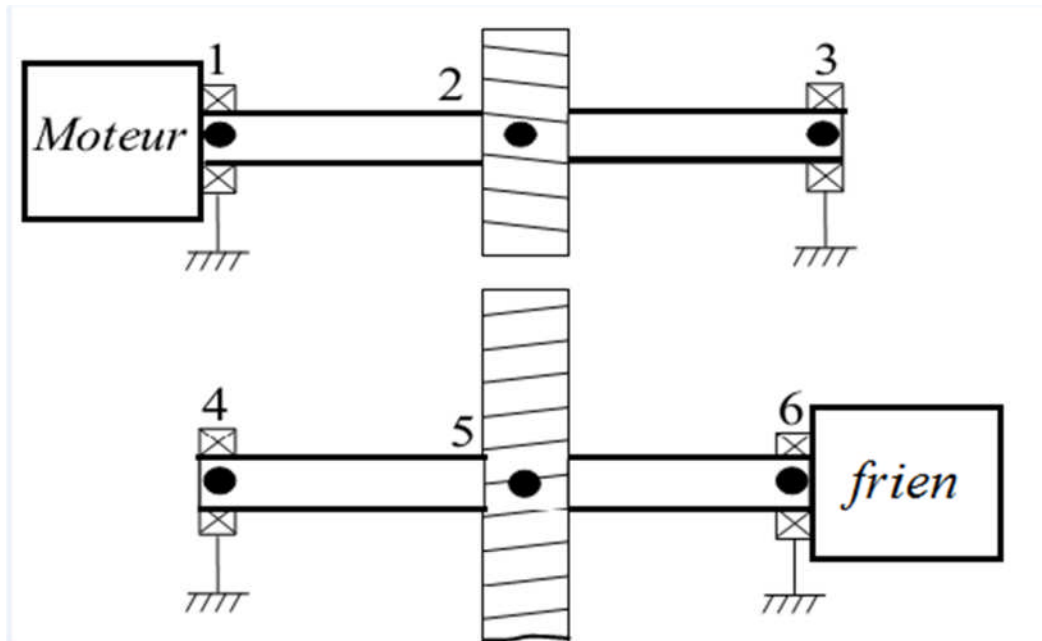


Figure4.1 : modèle globale : modèle dynamique global 3D d'un système à engrenage.

Le modèle du système à engrenage comporte 6 nœuds et à chaque nœud est associé 6 ddl ; $(v_k, w_k, \varphi_k, \Psi_k)$ de flexion et θ_k de torsion et u_k de traction-compression avec $k \in \{1, 2, 3 \dots 6\}$ Les degrés de liberté du couple d'engrenage (pignon/roue) sont représentés dans la figure (4.2) suivante :

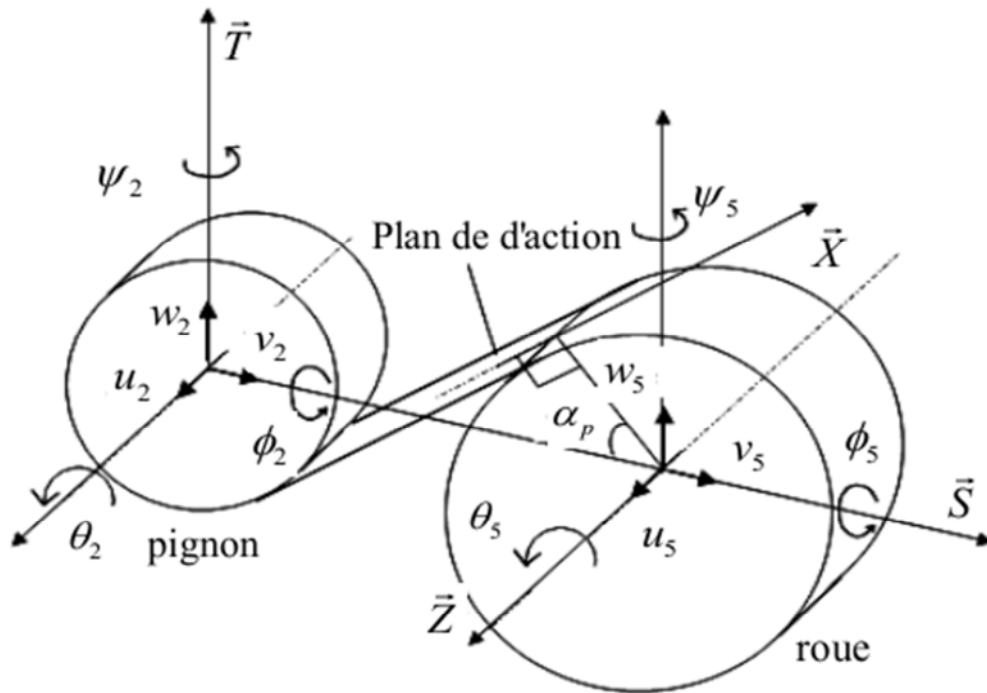


Figure 4.2 degrés de liberté de l'engrenage (pignon /roue)

Selon **Velex [10]** le pignon et la roue sont assimilés à des cylindres rigides reliés aux arbres flexibles, l'élasticité des dents est simulée par une distribution de raideurs élémentaires indépendantes, au cours de la rotation du couple d'engrenage, les lignes de contact se déplacent sur le plan d'action avec la vitesse $V = R_{bi} \cdot \Omega_1$.

Avec,

R_{bi} : le rayon de base du pignon.

Ω_1 : La vitesse de rotation du pignon rad/s.

- Modèle dynamique : équation du mouvement

La mise en équation des systèmes mécaniques s'effectue à partir des équations de Lagrange qui, pour un système à N degrés de liberté, s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad 4.1$$

q_j, \dot{q}_j représentent respectivement les déplacements et vitesses généralisés des N degrés de liberté, T l'énergie cinétique, D l'énergie de dissipation et U l'énergie potentielle, Q_i étant la force généralisée appliquées au degré q_j .

L'énergie de dissipation fait appel à l'amortissement visqueux, très difficile à quantifier dans le cas d'engrenages. Nous écartons volontairement les effets de l'amortissement. Nous supposons, dans l'ensemble de l'étude, que le chargement est suffisamment important pour prévenir toute perte de contact.

Dans le cadre de la modélisation adoptée, les largeurs des engrenages sont considérées suffisamment petites devant les diamètres primitifs pour considérer que les cylindres de bases sont assimilables à des disques.

Le calcul de l'énergie potentielle associée aux déformations élastiques et l'application des Équations de Lagrange permettent de déterminer la matrice rigidité associée à l'engrènement. La matrice de masse est, quant à elle, déterminée à partir de l'expression de l'énergie cinétique des deux couronnes dentées.

Le système global est obtenu par l'assemblage des sous systèmes (élémentaires), en effet chaque énergie du système totale représente la somme des énergies de ces éléments par la suite on va étudier chaque éléments isolé puis on effectuera l'assemblage afin d'obtenir l'équation générale du système globale.

4.2.1 Élément engrenage

- Expression énergie cinétique [43]

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{w}_i^2) + \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot (\dot{\gamma}_i^2 + \dot{\psi}_i^2) + \frac{1}{2} \cdot J_i \cdot (\dot{\theta}_i^2 + \Omega_i^2 + 2 \cdot \Omega_i (\dot{\theta}_i + \dot{\psi}_i \cdot \gamma_i)) \quad 4.2$$

Avec :

$$m_i = \rho \cdot \pi \cdot R_{bi}^2 \cdot e_i, \quad I_i = \frac{m_i}{12} \cdot (3 \cdot R_{bi}^2) \quad , \quad \text{et } J_i = m_i \cdot \frac{R_{bi}^2}{2}$$

R_{bi} : Rayon de base du pignon

Ω_i : Étant la vitesse de rotation stationnaire de la roue i

La matrice de masse se déduit facilement de cette expression à l'aide des équations de Lagrange. C'est une matrice diagonale qui s'exprime, dans le repère associé au plan d'action, par :

$$[M] = \text{diag}(m_2, m_2, m_2, I_2, J_2, I_2, m_1, m_1, m_1, I_1, J_1, I_1)$$

Relativement au vecteur $\{\ddot{X}\} = \{\ddot{u}_2, \ddot{v}_2, \ddot{w}_2, \ddot{\gamma}_2, \ddot{\theta}_2, \ddot{\psi}_2, \ddot{u}_1, \ddot{v}_1, \ddot{w}_1, \ddot{\gamma}_1, \ddot{\theta}_1, \ddot{\psi}_1\}$

- Expressions de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation élastique [43] associée est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \cdot K(\bar{F}, \theta^*) \cdot \Sigma^2 \quad 4.3$$

L'écrasement de denture, peut s'écrire au point I, des efforts appliqués entre les dentures :

$$\Sigma = (-u_1 + u_2 + R_{b1} \cdot \theta_1 + R_{b2} \cdot \theta_2 + \eta_1(\bar{F}, \theta^*)(\psi_1 - \psi_2)) \cdot \cos(\beta) + (-v_1 + v_2 - R_{b1} \cdot \gamma_1 - R_{b2} \cdot \gamma_2 + (\mu_1(\bar{F}, \theta^*) \cdot \psi_1 + l_1(\bar{F}, \theta^*) \cdot \psi_2)) \cdot \sin(\beta).$$

L'application des équations de Lagrange permet de calculer la matrice de rigidité $[\bar{K}(\bar{F}, \theta^*)]$

Associée à la liaison créée par l'engrènement. Cette matrice s'exprime dans le repère attaché au plan d'action par :

$$[\bar{K}(\bar{F}, \theta^*)] = K(\bar{F}, \theta^*) \cdot [G(\theta^*)] \quad 4.4$$

$$K(\bar{F}, \theta^*) = \frac{F_S}{\alpha(\bar{F}, \theta^*)} \quad 4.5$$

$$\alpha(\bar{F}, \theta^*) = \frac{\xi(\bar{F}, \theta^*) R_{b2}}{\cos(\beta)} \quad 4.6$$

Ou $[G(\theta^*)]$ est la matrice « géométrique » décrite ci-dessous [43], et $K(\bar{F}, \theta^*)$ est la rigidité d'engrènement.

$$[G(\theta^*)] = \begin{bmatrix} c & cs & 0 & -R_{b2}.cs & R_{b2}.c^2 & l_1.cs - \eta_1.c^2 & -c^2 & -cs & 0 & -R_{b1}.cs & -R_{b1}.c^2 & \eta_1.c^2 + \mu_1.s^2 \\ cs & s^2 & 0 & -R_{b2}.s^2 & R_{b2}.cs & l_1.s^2 - \eta_1.cs & -cs & -s^2 & 0 & -R_{b1}.s^2 & R_{b1}.cs & \eta_1.cs + \mu_1.s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -cs & -s^2 & 0 & R_{b2}.s^2 & -R_{b2}.cs & \eta_1.cs - l_1.s^2 & cs & s^2 & 0 & R_{b1}.s^2 & -R_{b1}.cs & -\mu_1.s^2 - \eta_1.cs \\ c^2 & cs & 0 & -R_{b2}.cs & R_{b2}.c^2 & l_1.cs - \eta_1.c^2 & -c^2 & -cs & 0 & -R_{b1}.cs & R_{b1}.c^2 & \eta_1.c^2 + \mu_1.cs \\ c & s & 0 & -R_{b2}.s & R_{b2}.c & l_1.s - \eta_1.c & -c & -s & 0 & -R_{b1}.s & R_{b1}.c & \eta_1.c + \mu_1.s \\ -c^2 & -cs & 0 & R_{b2}.cs & -R_{b2}.cs & \eta_1.c^2 - l_1.cs & c^2 & cs & 0 & R_{b1}.cs & -R_{b1}.c^2 & -\eta_1.c^2 + \mu_1.cs \\ -cs & s^2 & 0 & R_{b2}.s^2 & -R_{b2}.cs & \eta_1.cs - l_1.s^2 & cs & s^2 & 0 & R_{b1}.s^2 & -R_{b1}.cs & -\eta_1.cs + \mu_1.s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -cs & -s^2 & 0 & R_{b2}.s^2 & -R_{b2}.cs & \eta_1.cs - l_1.s^2 & cs & s^2 & 0 & R_{b1}.s^2 & R_{b1}.cs & -\mu_1.s^2 - \eta_1.cs \\ c^2 & cs & 0 & -R_{b2}.cs & R_{b2}.c^2 & l_1.cs - \eta_1.c^2 & -c^2 & -cs & 0 & -R_{b1}.cs & R_{b1}.c^2 & \eta_1.c^2 + \mu_1.cs \\ c & s & 0 & -R_{b2}.s & R_{b2}.c & l_1.s - \eta_1.c & -c & -s & 0 & -R_{b1}.s & R_{b1}.c & \eta_1.c + \mu_1.s \end{bmatrix}$$

Relativement au vecteur déplacement :

$$\{X\} = \{u_2, v_2, w_2, \gamma_2, \theta_2, \psi_2, u_1, v_1, w_1, \gamma_1, \theta_1, \psi_1\}$$

Avec $c = \cos(\beta)$, $s = \sin(\beta)$, $cs = \sin(\beta) \cdot \cos(\beta)$, $s^2 = \sin^2(\beta)$, $c^2 = \cos^2(\beta)$.

4.2.2 Élément arbre

Les arbres sont modélisés par des éléments de type poutre circulaire à deux nœuds en flexion, torsion et traction - compression avec effets de cisaillement (Velex [16], Bard [12]). Chaque nœud possède six degrés de liberté, trois translations (u, v, w) et trois rotations (φ, ψ, θ) soit au total douze degrés de liberté par élément d'arbre.

La figure (4.3) Présente l'élément d'arbre standard (type poutre) à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud utilisé pour discrétiser les arbres de transmission de l'engrenage étudié.

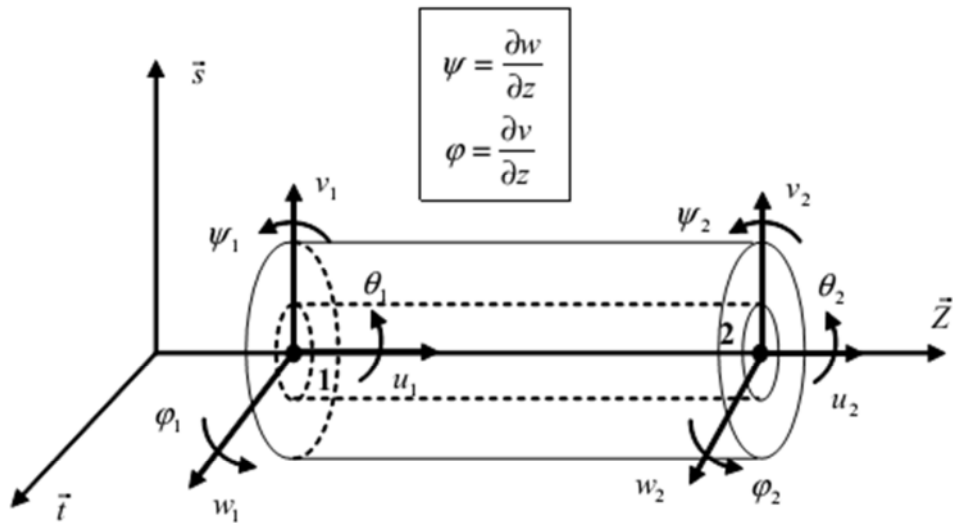


Figure 4.3 Elément d'arbre à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud de type Timochenko

- Expression de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique de l'élément de poutre k de section circulaire constante s_k et de longueur l_k s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \int v^2 dm \quad / \quad dm = \rho dv. \tag{4.7}$$

$$dv = \int \sigma ds \tag{4.8}$$

σ : Contrainte normal.

V : champ de déplacement.

$$T_{ak} = \frac{1}{2} \rho \left[S_k \int_0^{L_k} (\dot{u}_k^2 + \dot{v}_k^2 + \dot{w}_k^2) dz + I_{\theta k} \int_0^{L_k} (\dot{\theta}_k + \Omega_a)^2 dz + I_{xk} \int_0^{L_k} (\dot{\varphi}_k^2 + \dot{\psi}_k^2) dz \right] \quad [45] \quad 4.9$$

Avec :

- I_{xk} : le moment d'inertie transverse par rapport aux axes \vec{s} et \vec{t} .
- $I_{\theta k}$: le moment d'inertie polaire de l'élément d'arbre par rapport à l'axe \vec{z} .
- ρ : masse volumique.
- Ω_a : la vitesse de rotation de l'arbre.

L'application des équations de Lagrange à l'énergie cinétique T_a de l'élément de poutre.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T_{ak}}{\partial \dot{q}} \right] - \left[\frac{\partial T_{ak}}{\partial q} \right] = [M_{ak}] \{\ddot{q}\} + F_a(t) \quad 4.10$$

- q : représente le vecteur du 12 degrés de liberté de l'élément.
- M_{ak} : la matrice de masse à termes constants.
- $F_a(t) = \dot{\Omega}_a \frac{\rho I_{\theta k}}{3} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ vecteur relatif aux effets d'inertie de l'élément k Ce vecteur constitue une partie des excitations du système mécanique que l'on retrouve dans le second membre global du système d'équations du mouvement.

En négligeant les effets d'inerties, la matrice de masse [43] relative au vecteur :

$\{\ddot{q}\} = [\ddot{u}_1, \ddot{v}_1, \ddot{w}_1, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\psi}_1, \ddot{\theta}_1, \ddot{u}_2, \ddot{v}_2, \ddot{w}_2, \ddot{\varphi}_2, \ddot{\psi}_2, \ddot{\theta}_2]^T$ s'écrit :

$$M = \begin{bmatrix} 140x_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70x_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 & b & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & a & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & e & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & f & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & e & 0 & 0 & d & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{mt} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{mt}}{2} \\ 70x_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140x_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & d & 0 & 0 & a & 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & b & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & f & 0 & 0 & 0 & 0 & c & e & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 & f & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{mt}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{mt} \end{bmatrix}$$

Avec :

- $x_m = \frac{\rho S L}{420}$, $x_{mt} = \frac{\rho I_\theta L}{3}$, $x_{mf} = \frac{\rho I_x}{30L}$
- $a = 156x_m + 36x_{mf}$, $c = (22x_m + 3x_{mf})L$, $d = (13x_m - 3x_{mf})L$
- $e = 4L^2(x_m + x_{mf})$, $f = -L^2(3x_m + L^2x_{mf})$

• Expression de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation du même élément poutre de section circulaire constante S et de longueur L en flexion, traction-compression et torsion donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma \cdot \varepsilon \, dv \tag{4.11}$$

σ : est le tenseur de contraintes

ε : est le tenseur de déformation

$$U_{ak} = \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot S \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \cdot dz + \frac{1}{2} \int_0^L G \cdot I_{\theta k} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \cdot dz + \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot I_{xk} \cdot \left(\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 \right) \cdot dz \quad [43] \quad 4.12$$

- I_{θ} : moment d'inertie polaire
- L : longueur de l'élément
- E : module d'Young
- S : surface équivalente de cisaillement
- I_x : moment d'inertie transverse
- G : module de coulomb (cisaillement).

L'application de l'équation de Lagrange conduit à l'expression de la matrice raideur k_{ak} dont

Tous les termes sont constants (Développée par la suite).

$$\frac{\partial U_{ak}}{\partial q} = [k_{ak}] \{q_a\} \quad 4.13$$

La matrice de raideur [43] relative au vecteur

$$\{q\} = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \varphi_1 \ \psi_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \varphi_2 \ \psi_2 \ \theta_2]^T \text{ s'écrit :}$$

$$[K_{ak}] = \begin{bmatrix} K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & aL & 0 & 0 & -2a & 0 & 0 & aL & 0 \\ 0 & 0 & 2a & -aL & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a & -aL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -aL & b & 0 & 0 & 0 & 0 & aL & c & 0 & 0 \\ 0 & aL & 0 & 0 & b & 0 & 0 & -aL & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_\theta \\ -K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & 0 & -aL & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & -aL & 0 \\ 0 & 0 & -2a & aL & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & aL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -aL & c & 0 & 0 & 0 & 0 & aL & b & 0 & 0 \\ 0 & aL & 0 & 0 & c & 0 & 0 & -aL & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_\theta \end{bmatrix}$$

Avec :

- $a = \frac{12E.S I_x}{G S L^2}$ le facteur d'influence au cisaillement
- $K_u = \frac{E S}{L}$
- $K_f = \frac{E I_x}{(1+f)L^3}$
- $K_\theta = \frac{G I_\theta}{L}$
- $a = 6 K_f$,
- $b = (4 + f)^2 L^2 K_f$,
- $c = (2 - f)^2 L^2 K_f$

4.2.3. Palier

Compte tenu de la modélisation faite dans de ce travail, les paliers ne sont introduits que de façon simplifiée par l'intermédiaire de ressorts de traction -compression et de torsion, Ces raideurs additionnelles sont ajoutées au niveau des nœuds du modèle global du réducteur et constitue une matrice de raideur K_{pk} relative au palier k en première approximation, les termes de couplage sont ignorés et les matrices correspondantes sont diagonales de dimension 6.

$$U_P = \frac{1}{2} \{q_k\}^T [K_P] \{q_k\} \quad 4.14$$

En notant (k_{pu}, k_{pv}, k_{pw}) les raideurs de traction associées aux degrés de liberté de translation (u, v, w) du nœud selon les axes $(\vec{s}, \vec{t}, \vec{z})$ et $(k_{p\varphi}, k_{p\psi}, k_{p\theta})$ les raideurs de rotations associées aux degrés de liberté de torsion (φ, ψ, θ) du même nœud selon les même axes la matrice se met alors sous forme diagonal.

$$[k_{pk}] = [diag(k_{pu}, k_{pv}, k_{pw}, k_{p\varphi}, k_{p\psi}, k_{p\theta})]$$

La matrice de raideur est relative au vecteur $\{q\}$

$$\{q\} = \{v_k, w_k, u_k, \varphi_k, \Psi_k, \theta_k\}$$

4.2.4 Modèle de moteur et de frein

Le moteur et le frein sont caractérisés uniquement par leurs masses et leurs inerties. Ainsi, l'introduction dans le modèle global de ces éléments ne se fera que par ajout d'une matrice élémentaire diagonale de masses M_{mot} pour le moteur et M_{fr} pour le frein. L'ajout ne se fait alors que sur un seul nœud elles sont de dimension 6

En notant m_{mot} , I_{mot} , I_{pmot} la masse, l'inertie transverse et polaire du moteur, m_{fr} , I_{fr} ,

I_{pfr} La masse, l'inertie transverse et polaire du frein, les matrices élémentaires s'écrivent :

$$[M_{\text{mot}}] = [\text{diag} (m_{\text{mot}}, m_{\text{mot}}, m_{\text{mot}}, I_{\text{mot}}, I_{\text{mot}}, I_{\text{pmot}})] \quad [43]$$

$$[M_{\text{fr}}] = [\text{diag} (m_{\text{fr}}, m_{\text{fr}}, m_{\text{fr}}, I_{\text{fr}}, I_{\text{fr}}, I_{\text{pfr}})] \quad [43]$$

L'introduction de ces éléments engendre des efforts consécutifs aux vitesses de rotation non constantes. Ces vecteurs de force se mettent sous la forme :

$$F_{\text{mot}}(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I_{\text{pmot}} \ \dot{\Omega}_1]^T$$

$$F_{\text{fr}}(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I_{\text{pfr}} \ \dot{\Omega}_2]^T$$

4.3 ECRITURE DES EQUATIONS GENERALES DE MOUVEMENT

4.3.1 Assemblage des divers éléments de la boîte de vitesses

L'assemblage des matrices masses et raideurs du couple d'engrenage et, des éléments d'arbres et l'adjonction des matrices raideurs des paliers, de masse et de raideurs d'accouplement élastique, de masse du moteur et du frein conduisent à un système d'équation dont la forme matricielle générale est la suivante :

$$M_{\text{glob}}\ddot{X} + K_{\text{glob}}X = F_{\text{glob}} \quad 4.15$$

Avec :

$$M_{\text{glob}} = M_{\text{eng}} + \sum_{i=1}^{N_a} M_{ai} + M_{\text{mot}} + M_{\text{fr}} \quad \text{La matrice masse globale}$$

$$K_{\text{glob}} = K_{\text{eng}} + \sum_{i=1}^{N_a} K_{ai} + \sum_{j=1}^{N_p} K_{pj} \quad \text{La matrice raideur globale}$$

$$F_{\text{glob}} = F_0(t) - F_{\text{eng}} - \sum_{i=1}^{N_a} F_{ai}(t) - F_{\text{mot}}(t) - F_{\text{fr}}(t) \quad \text{Le second membre global}$$

N_a, N_p Le nombre d'éléments d'arbres, de palier.

Le vecteur $F_0(t)$ est issu de l'écriture du travail virtuel des efforts extérieurs au système. Il est alors composé uniquement des couples moteur et résistant s'appliquant aux degrés de liberté de torsion adéquats. Ces couples sont liés par le théorème de l'énergie cinétique qui, en négligeant les pertes, conduit à la relation [43] :

$$\sum_{j=1}^2 (\sum_{i=1}^{N_a} I_{ai} + \sum_{j=1}^2 I_j) \Omega_j \dot{\Omega}_j + I_{mot} \Omega_1 \dot{\Omega}_1 + I_{fr} \Omega_2 \dot{\Omega}_2 = C_m \Omega_1 + C_R \Omega_2 \quad 4.16$$

Avec

- I_{ai} l'inertie polaire de l'élément d'arbre.

- I_j l'inertie polaire d'un engrenage.

Le couple résistant s'écrit alors en fonction du couple moteur, du rapport de réduction $u = -\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$. Mais également de l'accélération angulaire du pignon multipliée par les termes inertiels des arbres moteur et récepteur

$$C_R = \frac{C_m}{u} + \left((\sum_{i=1}^{N_a} I_{ai} + \sum_{j=1}^2 I_j) \left(u - \frac{1}{u} \right) + u I_{mot} - \frac{1}{u} I_{fr} \right) \dot{\Omega}_1 \quad 4.17$$

4.3.2 RESOLUTION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT

Les équations de mouvement étant trop nombreuses, une résolution numérique s'impose.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre on a modélisé la transmission par engrenage d'une boîte de vitesses par la méthode des éléments finis on a pris un modèle dynamique et on a modélisé ses élément en sous structures (engrenages, arbre, palier, rien et moteur) afin d'obtenir les matrices masses et de raideurs pour les ajoutée au modèle globale par rapport au nœud spécifier déjà dans le modèle 3D. On obtient alors une équation générale qui nécessite une résolution numérique.

Chapitre 5 : Organisation de la programmation

5.1 Introduction :

Dans ce chapitre les étapes de calcul sont éclairées. Un programme en MATHCAD est réalisé pour déterminer les fréquences propres du système.

5.2 Organigramme :

L'organigramme suivant montre toutes les étapes de calcul réalisées de la lecture des données jusqu'à l'affichage des résultats.

5.3 Programme principal :

Le programme principal pour la résolution des équations de mouvement transformées et les différentes étapes utilisées sont décrites dans la suite de cette étude :

1. Lecture des données physiques et géométriques de l'arbre
2. Introduction des conditions aux limites
3. Calcul des matrices masse, rigidité et vecteur force
4. Formation du système d'équations algébrique
5. Formation du problème aux valeurs propres
6. Calcule des fréquences propres

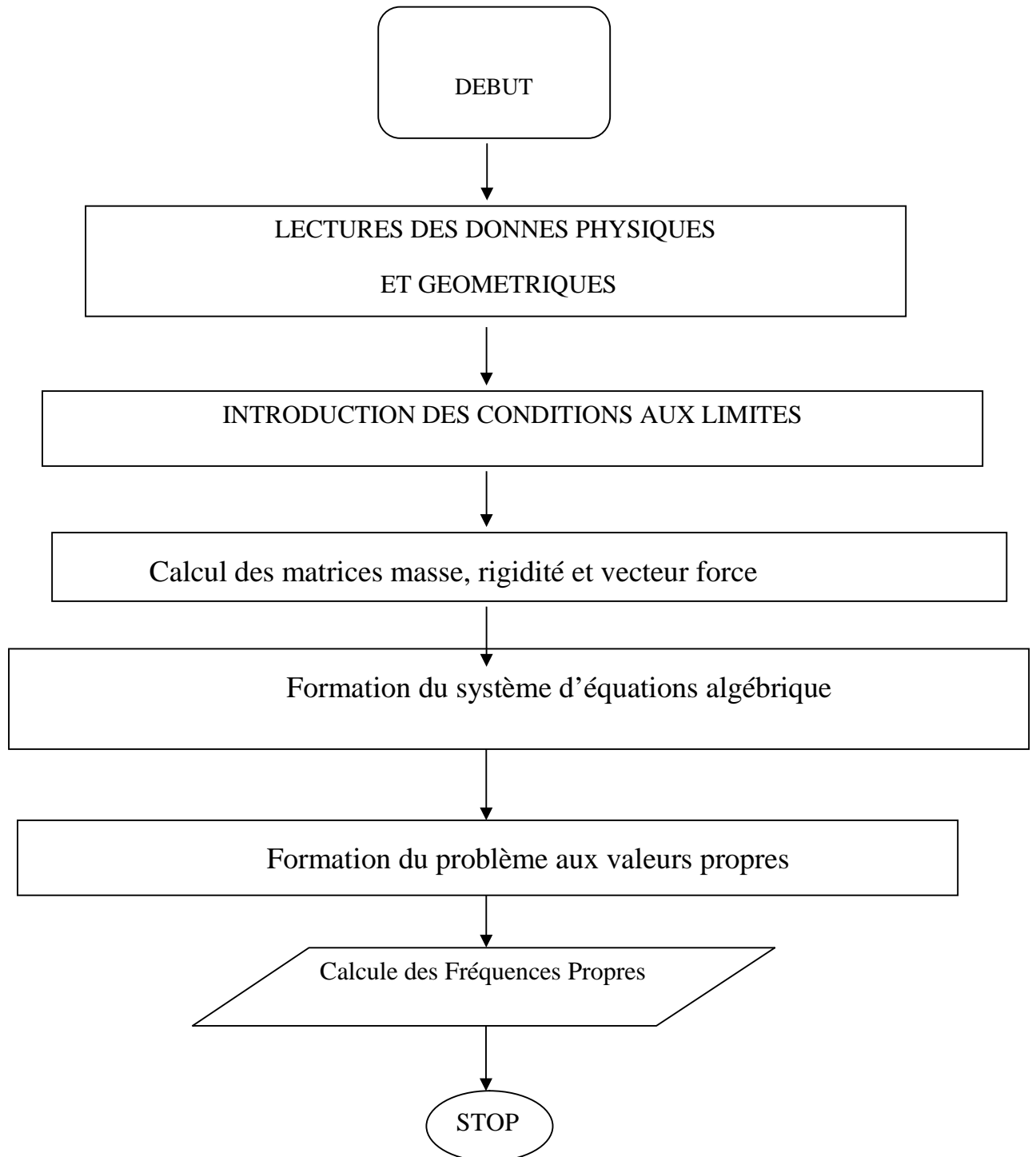


Figure 5.1 : Schéma de calcul global

5.4 Description du programme :

1. Fichier de données

Tous les paramètres les données physiques et géométriques utilisés, décrivant l'arbre, sont données dans un fichier « DONNEES.txt » au début du programme

Les données du problème sont:

E : Module d'élasticité

ρ : Masse volumique

A : Section droite de l'arbre

Ω : Vitesses de rotation de l'arbre

L : Longueur de l'arbre

I_{yy} : Moment d'inertie de l'arbre suivant l'axe y

I_{zz} : Moment d'inertie de l'arbre suivant l'axe z

N : Nombre de terme.

2. Résolution du problème aux valeurs propres

Résolution du problème aux valeurs propres se fait numériquement pour déterminer à la fin les fréquences propres du système, en utilisant la fonction *eigenvals* de Mathcad. Les résultats obtenus sont les fréquences propres du système.

3. Affichage des fréquences propres

Les résultats obtenus sont affichés dans un fichier de sortie appelé « RESULTS.txt ».

Chapitre 6 : Résultats et interprétation

6.1 Introduction

Dans ce chapitre on va résoudre l'équation du mouvement et obtenir les fréquences propres associés, après avoir obtenu la matrice masse global et la matrice raideur global.

6.2 données du problème

Tableau6.1 données du problème

Données géométriques	Données mécaniques
$L = 1\text{m}$	$\rho_{acier} = 7500 \text{ kg/m}^3$
$\beta = 20^\circ$	$I_x = 3.066 \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2$
$R_{b1} = 0.043\text{m}$	$I_\theta = 6.133 \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2$
$R_{b2} = 0.043\text{m}$	$G_{acier} = 93.33 \text{ Gpa}$
$s = 0.20\text{m}$	$E_{acier} = 210\text{Gpa}$
$d_{arbre} = 0.09 \text{ m}$	masses de la roue et pignon $m1, m2 = 0.7 \text{ kg}$
$\xi = 0.01\text{m}$	$I\theta_2 \text{ et } I\theta_1 = 0.002 \text{ kg.m}^2$
	$F_s = 50 \text{ N/m}$
	$I1 \text{ et } I2 = 0.0035 \text{ kg.m}^2$

6.3 Résolution du système dynamique

Après avoir fait l'assemblage et le calcul numérique on va obtenir une équation sous cette forme générale qui est la suivante :

$$M_{\text{glob}}\ddot{X} + K_{\text{glob}}X = F_{\text{glob}} \quad 6.1$$

On fera un programme sur Mathcad qui nous aidera pour l'assemblage des matrices élémentaires pour chaque élément engrenage et arbre et cela pour calculer les fréquences propres du système.

$$w = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad 6.2$$

W : fréquence propre du système (rad /s)

6.4 Validations et comparaisons des résultats

Les résultats obtenus seront validés avec des résultats de la littérature. Différentes conditions aux limites sont considérées.

Dans ce cas l'arbre est dans un état stationnaire $\Omega = 0$, les résultats du paramètre de fréquence obtenu par calcul MEF sont validés avec ceux obtenus par la solution exacte, pour différentes conditions aux limites. Les paramètres de fréquence et de vitesse utilisés dans ce cas sont donné par :

$$\omega^* = \omega L^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad 6.3$$

$$\Omega^* = \Omega L^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad 6.4$$

Tableau 6.2 : Poutre Appuyée-Appuyée : $\Omega^* = 0$

N	Mode			
	1	2	3	4
2	9.560	39.022	87.175	156.107
4	9.966	39.425	88.799	157.813
Exacte	9.986	39.478	88.826	157.913

Tableau 6.3 : Poutre Encastre –libre: $\Omega^* = 0$

N	Mode			
	1	2	3	4
2	3.499	21.951	60.886	119.955
4	3.502	22.018	61.621	120.897
[6]	3.516	22.034	61.697	120.902

Les tableaux (6.2) et (6.3) montrent que la convergence des quatre premiers modes est assurée en faisant augmenter le nombre d'éléments jusqu'à 4 pour une poutre Encastree-Libre et une poutre Appuyée-Appuyée. Les résultats obtenus sont identiques aux résultats de la solution exacte.

Le problème traité concerne un arbre en mouvement de rotation. La solution obtenue en faisant varier Ω dans le cas d'une poutre

Encastre –Libre est comparée avec la solution exacte [6].

Tableau 6.4 : Poutre Encastre –libre : $\Omega^* = 2$

N				
	1	2	3	4
4	1.456	5.465	19.503	23.914
Solution	1.516	5.516	20.034	24.034
[6]	1.516	5.516	20.034	24.034

Tableau 6.5: Poutre Encastre -libre : $\Omega^* = 8$

N				
	1	2	3	4
4	11.516	14.034	30.034	53.697
[6]	11.516	14.034	30.034	53.697

On va obtenir les fréquences propres de ce système dans le cas des vibrations libres pour cela on va varier la raideur d'engrènements et on va obtenir un pour chaque raideur une fréquence différente et on aura le tableau suivant :

Tableau 6.6 la variation de fréquences propres en fonction de la raideur

Rigidité d'engrènement N/m	Les fréquences propres du système (rad/s)				
$K= 2.847.10^5$	0.17	0.076	0.09	0.11	0.193
$K= 1.898.10^5$	0.073	0.09	0.112	0.193	0.281
$K= 9.490.10^4$	0.074	0.09	0.114	0.193	0.281
$K= 6.643.10^4$	0.075	0.10	0.114	0.193	0.28
$K= 2.847.10^4$	0.076	0.11	0.115	0.193	0.29

6.5 Interprétation

On prend pour 1^{ère} raideur d'engrènement on remarque que les fréquences propres pour cette raideur augmentent par la suite.

Et si on fait l'analyse par colonne on voit que plus la raideur d'engrènement diminue plus les fréquences propres du système augmentent donc pour $K=2.847.10^4$ N/m que la fréquence est max par chaque colonne.

6.6 Conclusion

Pour cette étude on pu constater l'influence de la rigidité d'engrènement sur un système mécanique et c'est cela qui par le temps va influence le mécanisme dans notre cas la boîte de vitesses.

Conclusion générale

L'objet principal de ce travail était la définition et l'étude de modèles dynamiques globaux, en Fonctionnement, des boîtes de vitesses et, plus généralement, des mécanismes de transmission de puissance par engrenages. Cette étude s'inscrit dans la continuité des travaux de modélisation du comportement dynamique des systèmes mécaniques. La mise en place des modèles dynamiques globaux de comportement a été un travail "transversal", de synthèse de travaux de recherches "verticaux" réalisés sur les éléments "isolés" des mécanismes considérés : arbres, engrenages, palier. Et également, une "appropriation" des méthodes de modélisation et d'analyse numérique associées aux problèmes de la dynamique des milieux continus. Dans cette optique, une nouvelle formulation ou présentation de techniques calculatoires ainsi qu'un assemblage des éléments "isolés, pour une description du comportement global d'un système mécanique, ont conduit à des résultats nouveaux et originaux.

D'après l'étude bibliographiques on a fait une introduction générale sur la boîte de vitesses qui est l'objet de notre étude on a pu recensés aussi les types de sources d'excitations que sa soit externe ou interne. Et on a conclu que l'erreur de transmission reste la source principale de l'excitation dans la transmission par engrenages. On a vu aussi les techniques de détections Des défauts d'engrenages soit par Analyse des signaux acoustiques ou Analyse des lubrifiants. Et pour la modélisation des engrenages y'a deux types (statique et dynamique) dans le cadre de cette étude on a opté pour une modélisation dynamique et cette dernière contient différents types des modèles des boîtes à engrenages qui sont les suivants Modèles linéaires à raideur d'engrènement constante, Modèles linéaires à raideur d'engrènement variable (périodique), Modèles non linéaires à raideur d'engrènement variable

Pour ce travail nous avons adopté la méthode des éléments finis comme méthode de calcul, on a pris un modèle dynamique mécanique après l'avoir discrétisé en sous structures pour obtenir des matrices masses, rigidités élémentaires pour chaque élément (arbre, engrenage) on a assemblé ces matrices pour obtenir l'équation générale du mouvement du système global pour la résoudre ensuite et obtenir les fréquences propres.

Conclusion générale

Après avoir obtenu les fréquences propres en variant la rigidité d'engrènement on a remarqué que cette dernière a une grande influence sur le système mécanique pour notre cas c'était la boîte de vitesses sur le long terme elle va causée des défaillances ou même un arrêt.

Donc si on arrive bien a contrôler cette dernière que sa soit par correction des dentures ou lubrificationEtc.) on pourra bien éviter certain problèmes. Et d'après mon étude j'ai pu constater que dans la transmission par engrenage que cette dernière est la source principale des excitations et que les contrôlé et les étudier n'est qu'un point vers l'avant pour augmenter la durée de vie de chaque mécanisme ou machine.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] schéma de fonctionnement de la boîte à vitesse www.wiki.org
- [2] la mise en situation de la boîte à vitesse dans un véhicule www.wiki.org
- [3] **Harris S. L.** Dynamic loads on the teeth of spur gears. Proceedings Institution of Mechanical Engineers, 1958, Vol 172, p. 87-112.
- [4] **Welbourn D. B.** Gear errors and their resultant noise spectra. Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, 1969-70, Vol 184, Part 30, p. 131-139.
- [5] **Mark** Analysis of the vibratory excitation of gear systems: Basic theory. Journal of the Acoustical Society of America, 1978, Vol 63, N° 5, p.1409-1430.
- [6] **Munro R. G. The D.C.** component of gear transmission error. Proceedings of the 5Pth PASME International Power Transmission and Gearing, Chicago, 1989, Vol 1, p. 467-470.
- [7] **Lin & Col LIN, H. H., TOWNSEND, D. P., OSWALD, F. B.** Profile modification to minimize spur gear dynamic loading. Proceedings of the 5PthPASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, 1989, Vol 1, p. 455-465.
- [8] **Munro R. G.** The dynamic behavior of spur gears. PhD, University of Cambridge, Cambridge, 1962, 95p.
- [9] **Maatar M.** Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages simple étage. Influence des écarts de forme et des défauts de montage. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, Villeurbanne, 1995, 192p.
- [10] **VELEX, P., MAATAR, M.** A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour. Journal of Sound and Vibration, 1996, Vol 191, N° 5, p. 629-660.
- [11] **VELEX, P., MAATAR, M.** Quasi-static and dynamic analysis of narrow-faced helical gears with profile and lead modifications. Proceedings of the 7PthPASME International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, 1996, p. 181-193.
- [12] **SINGH R., XIE H., COMPARIN R. J.,** 1989, "Analysis of Automotive Neutral Gear Rattle». Journal of Sound and Vibration, Vol. 131 (2), p. 177-196.
- [13] **PFEIFFER F., PRESTL W.,** 1992, "Hammering in Gears". 3ème congrès mondial des engrenages et des transmissions, Paris, p. 93 1-945.

- [14] **Smith J. D.**, 1983, "Gears and their Vibration: A basic Approach to Understand Gear Noise". Marcel Dekker, New-York.
- [15] **HOUSER D. R.**, 1988, "Gear Noise- State of the Art'. Proceedings of the 17th International Conference on Noise Control Engineering, Avignon, p. 601-606.
- [16] **SABOT J. & PERRET-LIAUET J.**, "Excitation dynamique d'un carter de boîte de vitesses par l'erreur de transmission", 3ème Congrè Mondial des engrenages et des transmissions, Fév. 1992, Paris, pp. 829-840.
- [17] **(Munro 1990-a) MUNRO R. G.**, "A review of theory and measurement of gear transmission error", Proc. First International Conference Gearbox Noise and Vibration, Cambridge, April 1990, pp. 3-10.
- [18] **Mark (1984) MARK W. D.**, "Gear noise origins", Gears and Power Transmission Systems for Helicopters and Turboprops. Proc. AGARD Conf., Lisbon, 1984, 13 p., Preprint N° 369.
- [19] **Welbourn (1970) WELBOURN D. B.**, "Gear errors and their resultant noise spectra", Proc. of the I.M.E., 1969-70, Vol. 184, paper 16, part 30, pp. 131-139.
- [20] **Winter & col. (1989) WINTER H., GERBER H. & MULLER R.**, 1989, "Investigation on the excitation of vibrations and noise at spur and helical gears", Proc. 1989 International Power Transmission and gearing conference. Chicago, 1989. pp. 765-772.
- [21] **Welbourn 1972 WELBOURN D. B.**, "Forcing frequencies due to gears", Proc. Vibrations in rotating systems conference, I.M.E., Londres, Feb. 1972, p. 25-36
- [22] **Umezawa ET col.1986-b UMEZAWA K., SUZUKI T., HOUJOH H. & BAGIASNA K.**, "Influence of misalignment on vibration of helical gear", Proc. 2nd World Congress on Gearing, Paris, Mars 1986, pp. 615-626.
- [23] **Walker, H.**, "Gear tooth deflection and profile modification". The Engineer, 166 (4319), pp. 434-436, 1938.
- [24] **Weber, C., Banaschek, K.** Formänderung und Profilrücknahme bei Gerad- und Schrägverzahnten Antriebstechnik. Heft 11, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, Germany, 1953.
- [25] **Cornell, R. W.** "Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth", ASME, J. Mech. Des., vol. 103, pp. 447-459, 1981.
- [26] **Arafa, M. H., Megahed, M. M.**, "Evaluation of spur gear mesh compliance using the finite element method". Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers -C- J. Of Mechanical Engine Science, 213 (6), pp. 569-580, 1999.
- [27] International Organization for Standardization, 1996. ISO 6336, Calculation of load capacity of spur and helical gears, part 1-5. Genève, Switzerland.

- [28] Deutsches Institute für Normung e. V. DIN 3990, Tragfähigkeits-berechnung von Stirnrädern, Teil 1-5. Germany.
- [29] American Gear Manufacturers Association. AGMA 2001, Fundamental rating factors and calculation methods for involutes spur and helical gear teeth. USA.
- [30] Şener, Ö. S., Özgüven, H. N. “Dynamic Analysis of Geared Shaft Systems By Using a Continuous System Model”, J. of Sound and Vibe, Vol. 166, no. 3, pp. 539–556, 1993.
- [31] Lin, H. H., Oswald, F. B., Townsend, D. P., “Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications”, Mechanism and Machine Theory, Vol. 29, no. 8, pp. 1115–1129, 1994.
- [32] Küçükay, F., Dynamik der Zahnradgetriebe. Springer-Verlag, 1987.
- [33] Velex, P., Maatar, M. “A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behavior formulae,” J. Sound. Vol. 191, pp. 629–660, 1996.
- [34] Maatar, M. Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages simple étage. Influence des écarts déforme et des défauts de montage. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1995. N°95 ISAL 0028. 192 p.
- [35] Ajmi, M. Introduction des couplages élastiques dans la modélisation du comportement statique et dynamique d'engrenages à dentures larges. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2000. N°2000 ISAL 0013, 151 p
- [36] Velex, P., Ajmi, M. “Dynamic tooth loads and quasi-static transmission errors in helical gears – Approximate dynamic factor formulae”, Mechanism and Machine Theory, Vol. 42, 2007; pp. 1512–1526.
- [37] Ajmi, M. Velex, P., “A model for simulating the quasi-static and dynamic behavior of solid wide-faced spur and helical gears”, Mechanism and Machine Theory, Vol. 40, no. 2, pp. 173–190, 2005.
- [38] Velex, P. "Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles". These de doctorat; INSA Lyon 1988 N° 88 ISAL 0032, 188p
- [39] Özgüven, H.N., Houser, D.R., 1988, "Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error", J. of Sound and Vibration, 125(1), 71-83
- [40] Kahraman, A., Singh R., 1989, "Non linear dynamics of a spur gear pair", J. of Sound and Vibration, 142(1), 49-75.
- [41] Velex, P. "Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles". These de doctorat; INSA Lyon 1988 N° 88 ISAL 0032, 188p
- [42] Kahraman, A., Singh R., 1989, "Non linear dynamics of a spur gear pair", J. of Sound and Vibration, 142(1), 49-75.

[43] **Guillaume SIKA, 2008**, dynamiques des transmissions en régime transitoire.

[44] **Christophe BARD, 1995**, modélisation du comportement dynamique.