



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER
EN MATHÉMATIQUES

Option : Perturbations, Moyennisation et Applications
aux Biomathématiques (PeMAB)

Sujet :

**Sur les solutions périodiques de modèles avec retard de
dynamiques de population d'une seule espèce**

Candidate : **Amina CHERRAF**

Date : 28/06/2017

Membres du Jury :

Président :	Karim YADI,	Professeur, Université de Tlemcen
Examineurs :	Ali MOUSSAOUI, Tewfik MAHDJOURB,	Professeur, Université de Tlemcen MCA, Université de Tlemcen
Encadreur :	Mustapha LAKRIB,	Professeur, Université de Sidi Bel Abbès

Année Universitaire 2016/2017

DÉDICACES

A mon père, ma mère, mes sœurs Manel et Ikhlassa et toute ma famille.

REMERCIEMENTS

EN préambules à ce mémoire, je remercie ALLAH qui m'a donné la patience et le courage durant ces longues années d'études.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude au Professeur Mustapha LAKRIB, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je désire aussi remercier les enseignants du Département de Mathématiques. Je tiens à remercier spécialement le chef du département, Monsieur Benmiloud MABKHOUT.

Je remercie les membres du jury de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'évaluer et d'examiner ce mémoire, et tout particulièrement le Professeur Karim YADI pour ces efforts et ces conseils durant notre cursus de master. J'adresse mes sincères remerciements au Professeur Ali MOUSSAOUI et au Docteur Tewfik MAHJOUR d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Un très grand et spécial remerciement pour mes parents qui me prennent la main et me montrent le chemin, et qui m'ont appris à avoir confiance en moi. Leurs conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite. Merci mes parents pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent.

Merci à ma famille de m'avoir supporté et mes meilleurs amis qui étaient toujours là pour m'aider. Merci à tous mes compagnons de promotion sans exception.

Tlemcen, juin 2017.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACES	i
REMERCIEMENTS	ii
TABLE DES FIGURES	iv
INTRODUCTION	1
1 PRÉLIMINAIRES	2
1.1 COMPLÈTE CONTINUITÉ ET LEMME DE COMPARAISON	2
1.2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À RETARD : STABILITÉ ET OSCILLATION .	2
1.3 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE À RETARDS ET À COEFFICIENT	
CONSTANTS	3
1.4 SUITE DE STURM ET STABILITÉ LINÉAIRE	4
1.4.1 Existence du retard critique	5
1.4.2 Racines réelles strictement positives et suite de Sturm	7
1.5 POINT ÉJECTIF ET POINT FIXE	7
2 MODÈLES À UNE SEULE ESPÈCE	10
2.1 INTRODUCTION	10
2.2 MODÈLE GÉNÉRAL DE POPULATION POUR UNE SEULE ESPÈCE AVEC RE-	
TARD	10
2.2.1 Modèle spécifique	16
2.2.2 Paramètres dépendant du retard	23
2.3 UN AUTRE MODÈLE GÉNÉRAL	24
2.3.1 Cas du taux de mortalité constant	26
2.3.2 Paramètres dépendant du retard	31

TABLE DES FIGURES

2.1	La fonction de croissance, $b(x)x$, et la fonction de décroissance, dx .	17
2.2	La fonction $b(x)$, sa tangente, et une ligne de pente supérieure à la tangente	28
2.3	Solutions de l'équation $x'(t) = (be^{-ax(t-\tau)} - d)x(t)$, avec $a = 0.1, b = 10, d = 1$, de condition initiale $\bar{x} + 10t$ dans $[-\tau, 0]$ avec $\tau_c = 0.6822$. Le graphe supérieur est pour $\tau = 0.5$, et celui, inférieur, pour $\tau = 1$.	31
2.4	Solutions de l'équation (2.35) avec $a = 0.1, b = 10, d = 1, \mu = 0.7$, de condition initiale constante, identiquement égale à 5, sur $[-\tau, 0]$. Les graphes sont pour $\tau = 2, \tau = 0.7$ et $\tau = 4$, respectivement	33

INTRODUCTION

DANS l'étude de la dynamique des populations, l'utilisation d'équations différentielles pour étudier les populations d'espèces est bien établie. Les modèles de croissance exponentielle et logistique sont les plus courants. Nous nous sommes fixé comme objectif dans ce mémoire de présenter une étude sur une classe de modèles d'équations différentielles pour une seule espèce qui implique un temps de retard.

Les systèmes d'équations différentielles à retard occupent désormais une place de première importance dans tous les domaines de la science, en particulier dans la modélisation de phénomènes biologiques telle que la dynamique de la population, l'épidémiologie, etc.

L'objectif de ce mémoire est de déterminer si l'introduction d'un retard peut enrichir la dynamique des modèles considérés, ou si leur comportement est essentiellement le même que celui des modèles d'équations différentielles ordinaires qu'il modifie. En particulier, nous y sommes intéressés à étudier l'existence de solutions périodiques pour ces modèles.

Ce mémoire se compose de deux chapitres et d'une bibliographie. Dans le premier chapitre, on donne des définitions et quelques propriétés des équations différentielles à retard et quelques outils dont on a besoin dans le chapitre suivant. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de quelques types d'équations différentielles à retard scalaires.

Il est à souligner que ce travail est basé essentiellement sur le Chapitre 3 de la thèse : "Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology" par "Jonathan Erwin Forde [6].

Dans ce chapitre, nous allons introduire des notations, définitions et résultats qui seront utilisés dans le chapitre suivant (voir [5, 6, 8, 9]).

1.1 Complète continuité et lemme de comparaison

Définition 1.1 Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F . On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en un ensemble relativement compact dans F .

Lemme 1.1 (Lemme de comparaison) On considère le problème à valeur initiale suivant, associé à une équation différentielle scalaire,

$$x'(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

où $f : \mathbb{R} \times J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$, est une fonction continue en t et localement lipschitzienne en x . Soit $[t_0, T[$ (T peut être infini) le demi-intervalle maximal d'existence de la solution x de (1.1), et soit y une fonction continue dont la dérivée supérieure droite D^+y satisfait l'inégalité différentielle

$$D^+y \leq f(t, y), \quad y(t_0) \leq x_0$$

avec $y(t) \in J \forall t \in [t_0, T[$, alors

$$y(t) \leq x(t), \quad \forall t \in [t_0, T[.$$

1.2 Equations différentielles à retard : Stabilité et oscillation

Soit $\tau \geq 0$. On note par $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[-\tau, 0]$ et à valeurs dans \mathbb{R}_+ muni de la topologie de la convergence uniforme

$$\|\phi\| = \sup\{\phi(\theta) : -r \leq \theta \leq 0\}.$$

Soit $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée et soit le problème à valeur initiale suivant

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau)), \quad t > 0; \quad x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (1.2)$$

Définition 1.2 Un équilibre $x = \bar{x}$ de (1.2) est dit stable si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|\phi(t) - \bar{x}| \leq \delta$ pour $t \in [-\tau, 0]$ implique que toutes solutions x de (1.2), de condition initiale ϕ , satisfait l'inégalité $|x(t) - \bar{x}| < \epsilon$ pour tout $t \geq 0$.

Si de plus il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|\phi(t) - \bar{x}| \leq \delta_0$ pour $t \in [-\tau, 0]$ implique que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$, alors \bar{x} est dit asymptotiquement stable.

Définition 1.3 On dit qu'un équilibre est linéairement stable s'il est stable pour le linéarisé au voisinage de cet équilibre.

Définition 1.4 On dit qu'une solution x de (1.2) est oscillatoire par rapport à une certaine valeur \bar{x} , s'il existe une suite (t_n) avec $t_n \geq 0$ et $t_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, telle que $x(t_n) = \bar{x}$. Sinon on dit qu'elle est non oscillatoire.

Dans le cas où $\bar{x} = 0$, on dit simplement que x est oscillatoire ou non oscillatoire, respectivement.

1.3 Équation différentielle linéaire à retards et à coefficient constants

On considère l'équation différentielle à retards du premier ordre suivante

$$x'(t) = \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i), \quad (1.3)$$

où A_i est une matrice constante $n \times n$ pour tout i , et $0 \leq \tau_i \leq \tau$ pour tout i , avec $\tau > 0$ fixé. L'équation caractéristique associée à (1.3) est

$$\det(\lambda I - \sum_{i=1}^m A_i e^{-\lambda \tau_i}) = 0. \quad (1.4)$$

On a les deux résultats suivants.

Théorème 1.1 Soit ρ un nombre réel donné. L'équation caractéristique (1.4) admet au plus un nombre fini de racines λ tel que $Re(\lambda) \geq \rho$.

En conséquence, pour $\rho = 0$, ce résultat affirme que "la plupart" des racines de l'équation (1.4) ont une partie réelle strictement négative.

Théorème 1.2 Soit ρ un nombre réel donné. Si $Re(\lambda) < \rho$, où λ est une racine de l'équation caractéristique (1.4), alors il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$, la solution x de (1.3) satisfait l'inégalité suivante

$$\|x(t; \phi)\| \leq M \|\phi\| e^{\rho t}, \quad \forall t \geq 0.$$

En combinant ces deux résultats, on arrive au résultat suivant.

Corollaire 1.1 Si $Re(\lambda) < 0$, pour tout λ solution de l'équation caractéristique (1.4), alors il existe des constantes $M, \delta > 0$ telles que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$, la solution x de (1.3) satisfait

$$\|x(t; \phi)\| \leq M \|\phi\| e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

En d'autre terme, si toutes les racines de l'équation caractéristique (1.4) ont une partie réelle strictement négative, les solutions de l'équation de (1.3) décroissent exponentiellement vers 0, de la même manière que dans le cas les équations différentielles ordinaires ($\tau = 0$).

Sur l'équation à retard $z'(t) = az(t - \tau) - bz(t)$

Nous rencontrerons souvent l'équation différentielle linéaire à retard suivante

$$z'(t) = az(t - \tau) - bz(t) \quad (1.5)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, avec $b > 0$.

Lemme 1.2 Si $|a| < b$, alors toutes les solutions de l'équation (1.5) tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

Démonstration. En cherchant une solution de la forme $e^{\lambda t}$, on obtient l'équation caractéristique associée (1.5),

$$\lambda = ae^{-\lambda\tau} - b. \quad (1.6)$$

On commence par montrer que la partie réelle de toute solution de cette équation caractéristique est négative. Posons $\lambda = \mu + i\sigma$. Alors on a

$$\begin{aligned} \mu + i\sigma &= ae^{-\mu\tau}e^{-i\sigma\tau} - b \\ &= ae^{-\mu\tau}(\cos(\sigma\tau) + i\sin(\sigma\tau)) - b. \end{aligned}$$

En considérant la partie réelle de cette équation, on obtient

$$\mu + b = ae^{-\mu\tau} \cos(\sigma\tau). \quad (1.7)$$

Si $\mu \geq 0$, alors on a

$$b \leq \mu + b = ae^{-\mu\tau} \cos(\sigma\tau) \leq ae^{-\mu\tau} \leq a,$$

e qui est en contradiction avec l'hypothèse $|a| < b$.

Ainsi, toutes les racines ont une partie réelle strictement négative. C'est alors une simple application du Corollaire 1.1 qui permet de déduire que toutes les solutions z de l'équation (1.5) ont une borne de forme

$$|z(t)| \leq Me^{-\delta t}, \quad \text{avec } \delta > 0.$$

Alors, on voit que les solutions s'approchent de 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. □

1.4 Suite de Sturm et stabilité linéaire

Une certaine méthode permettant d'analyser la stabilité de l'équilibre d'une équation différentielle à retard est présentée dans cette partie. L'introduction d'un retard augmente la difficulté de localiser les racines de l'équation caractéristique.

Une fois qu'un retard intervient dans un modèle, il est souvent intéressant de déterminer si la longueur du retard peut changer ou non les caractéristiques de la stabilité d'un équilibre. Un équilibre stable peut devenir instable si, en fait, en augmentant le retard, la partie réelle d'une racine caractéristique passe d'une valeur strictement négative à une valeur strictement positive, et cela ne se produit que si cette racine traverse l'axe imaginaire.

1.4.1 Existence du retard critique

A l'équilibre, l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle à retard considérée aura la forme

$$P(\lambda, \tau) \equiv P_1(\lambda) + e^{-\lambda\tau}P_2(\lambda) = 0, \quad (1.8)$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes. On peut réécrire (1.8) comme ceci

$$\sum_{j=0}^N a_j \lambda^j + e^{-\lambda\tau} \sum_{j=0}^M b_j \lambda^j = 0.$$

On suppose que l'équilibre en lequel on a linéarisé est stable en l'absence du retard (i.e., lorsque $\tau = 0$). Alors, pour $\tau = 0$ toutes les racines du polynôme caractéristique ont une partie réelle strictement négative. Comme τ varie, ces racines changent. On est intéressé par toutes les valeurs critiques de τ pour lesquelles la partie réelle d'une racine de l'équation caractéristique transite d'une valeur strictement négative à une valeur strictement positive. Si cela se produit, il doit y avoir une limite, une valeur critique de τ , de sorte que l'équation caractéristique ait une racine purement imaginaire (voir [8]).

On considère alors le cas d'une racine purement imaginaire, i.e, $\lambda = i\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$P_1(i\sigma) + P_2(i\sigma)e^{-i\sigma\tau} = 0.$$

On sépare les parties réelle et imaginaire du polynôme (1.8), en écrivant l'exponentielle sous sa forme trigonométrique, pour obtenir

$$R_1(\sigma) + iQ(\sigma) + (R_2(\sigma) + iQ_2(\sigma))(\cos(\sigma\tau) - i \sin(\sigma\tau)) = 0 \quad (1.9)$$

avec

$$R_1(\sigma) = \sum_j (-1)^{j+1} a_{2j} \sigma^{2j},$$

$$Q_1(\sigma) = \sum_j (-1)^j a_{2j+1} \sigma^{2j+1},$$

$$R_2(\sigma) = \sum_j (-1)^{j+1} b_{2j} \sigma^{2j},$$

$$Q_2(\sigma) = \sum_j (-1)^j b_{2j+1} \sigma^{2j+1}.$$

On note que puisque $i\sigma$ est purement imaginaire, R_1 et R_2 sont des polynômes paires de σ , tandis que Q_1 et Q_2 sont des polynômes impaires.

Afin que (1.9) soit vraie, les parties réelle et imaginaire de son membre à gauche doivent être nulles. On obtient alors les deux équations suivantes

$$R_1(\sigma) + R_2(\sigma) \cos(\sigma\tau) + Q_2(\sigma) \sin(\sigma\tau) = 0,$$

$$Q_1(\sigma) - R_2(\sigma) \sin(\sigma\tau) + Q_2(\sigma) \cos(\sigma\tau) = 0,$$

qui donnent

$$-R_1(\sigma) = R_2(\sigma) \cos(\sigma\tau) + Q_2(\sigma\tau), \quad (1.10)$$

$$Q_1(\sigma) = R_2(\sigma) \sin(\sigma\tau) - Q_2(\sigma) \cos(\sigma\tau), \quad (1.11)$$

avec

$$R_1(\sigma)^2 + Q_1(\sigma)^2 = R_2(\sigma)^2 + Q_2(\sigma)^2. \quad (1.12)$$

On remarque deux propriétés dans l'équation (1.12). Premièrement, c'est une équation polynomiale. Les termes trigonométriques disparaissent, et le retard, τ , a été éliminé. Deuxièmement, c'est une égalité de polynômes pairs.

On définit une nouvelle variable $\mu = \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$. Alors l'équation (1.11) peut être écrite en termes de μ comme

$$S(\mu) = 0. \quad (1.13)$$

où S est un polynôme. Noter que l'on s'intéresse uniquement à σ réel, et donc si toutes les racines réelles de S sont négatives, il n'y a pas de solution σ^* commune à (1.11) et à (1.12). Si au contraire, S admet une racine réelle strictement positive, alors il existe une racine réelle strictement positive $\sigma^* = \pm\sqrt{\mu^*}$, commune aux deux équations (1.11) et (1.12). Pour voir cela, on suppose qu'on a trouvé σ^* tel que

$$R_1(\sigma^*)^2 + Q_1(\sigma^*)^2 = R_2(\sigma^*)^2 + Q_2(\sigma^*)^2. \quad (1.14)$$

Soit $C = \sqrt{R_2(\sigma^*)^2 + Q_2(\sigma^*)^2}$. L'équation (1.14) peut être interprété comme l'équation d'un cercle de rayon C et le point $(-R_1(\sigma^*), Q_1(\sigma^*))$ se trouve sur ce cercle. Maintenant, on revient aux équations pour les parties réelle et imaginaire de l'équation caractéristique. Celles-ci peuvent maintenant être écrit comme suit

$$-R_1(\sigma^*) = C \left(\frac{R_2(\sigma^*)}{C} \cos(\sigma^*\tau) + \frac{Q_2(\sigma^*)}{C} \sin(\sigma^*\tau) \right),$$

$$Q_1(\sigma^*) = C \left(\frac{R_2(\sigma^*)}{C} \sin(\sigma^*\tau) - \frac{Q_2(\sigma^*)}{C} \cos(\sigma^*\tau) \right).$$

On peut écrire alors $\frac{R_2(\sigma^*)}{C} = \cos \alpha$ et $\frac{Q_2(\sigma^*)}{C} = \sin \alpha$, et de là

$$R_1(\sigma^*) = C \cos(\sigma^*\tau - \alpha),$$

$$Q_1(\sigma^*) = C \sin(\sigma^*\tau - \alpha).$$

Puisque le point $(-R_1(\sigma^*), Q_1(\sigma^*))$ se trouve sur le cercle de rayon C , alors il existe une valeur positive $\tau = \tau^*$ qui satisfait simultanément les deux équations.

Lorsque le polynôme (1.13) possède plus d'une racine réelle strictement positive, on s'intéresse alors à étudier celle associée au plus petit retard, τ^* .

1.4.2 Racines réelles strictement positives et suite de Sturm

Une fois l'équation polynomiale (1.13) obtenue, à la lumière de l'analyse présentée au Paragraphe 1.4.1, on s'intéresse alors à la détermination de ses racines réelles positives. Une approche générale pour résoudre ce problème est l'approche par la suite de Sturm que nous rappelons ici.

On suppose que le polynôme P , de degré s et à coefficients réels, n'admet que des racines distinctes. On pose $P = S_0$ et $P' = S_1$. On obtient alors la suite finie suivante, de polynômes, par l'algorithme de division

$$\begin{aligned} S_0 &= q_0 S_1 - S_2, \\ S_1 &= q_1 S_2 - S_3, \\ &\vdots \\ S_{s-2} &= q_{s-2} S_{s-1} - C, \end{aligned}$$

où C est une constante.

La suite des polynômes de Sturm, $S_0, S_1, \dots, S_{s-1}, S_s (= C)$, est appelé chaîne de Sturm. On peut déterminer le nombre de racines réelles positives du polynôme P dans n'importe quel intervalle de la manière suivante : Evaluer la chaîne de Sturm à chaque extrémité de l'intervalle, et obtenir une suite de signes. Le nombre de racines réelles dans l'intervalle est la différence entre le nombre de changements de signes dans la suite à chaque extrémité (voir [14]).

Exemple 1.1 Soit $P(x) = x^2 - 1$. Dans ce cas $P'(x) = 2x$. Alors la division euclidienne donne

$$x^2 - 1 = \frac{x}{2}(2x) - 1.$$

La chaîne de Sturm est ici : $P_0(x) = x^2 - 1$, $P_1(x) = 2x$ et $P_2(x) = 1$. Si on s'intéresse à l'intervalle $[0, \infty[$, alors la chaîne des signes est

$$\text{en } 0 : \quad -, 0, +$$

et

$$\text{en } \infty : \quad +, +, +.$$

Il y a un changement de signe dans la première suite et il n'y a pas dans la dernière. On conclut qu'il existe une seule racine réelle strictement positive pour P dans l'intervalle $[0, \infty[$.

1.5 Point éjectif et point fixe

L'outil principal pour prouver l'existence de solutions périodiques est le théorème ci-dessous à partir d'une analyse fonctionnelle non linéaire. Avant d'énoncer le théorème, nous rappelons la définition d'un point éjectif pour une fonction donnée.

Définition 1.5 Soit X un espace de Banach, K un sous ensemble de X , et $x_0 \in K$. Le point x_0 est dit point éjectif de l'application $A : X/\{x_0\} \rightarrow X$ s'il existe un voisinage $G \subset X$ de x_0 tel que, si $y \in G \cap K$, $y \neq x_0$, il existe un entier $m = m(y) > 0$ tel que $A^{(m)}(y) \notin G \cap K$.

Intuitivement, un point est éjectif s'il est entouré d'un voisinage de points, que l'application enverra à l'extérieur du voisinage.

Nous énonçons maintenant le théorème de point fixe suivant, qui sera utilisé dans le chapitre suivant.

Théorème 1.3 [14]. Si K est un sous espace fermé, bornée, convexe et de dimension infinie d'un espace de Banach X , et $A : K/\{x_0\} \rightarrow K$ est une application complètement continue, et $x_0 \in K$ est éjectif, alors il existe un point fixe de A dans $K/\{x_0\}$.

Dans l'application du Théorème 1.3 à une équation différentielle à retard, l'application A est l'équivalence de l'application de Poincaré pour les équation différentielle ordinaire. Plus précisément, on considère un sous espace K tel que toute solution $x = x(\phi)$ de l'équation différentielle à retard, de condition initial $\phi \in K$, revient à K au bout d'un certain temps $\tau(\phi) > 0$; c'est-à-dire, $x_{\tau(\phi)}(\phi) \in K$ si $\phi \in K$. L'application $A : K \rightarrow K$ est définie par $A\phi = x_{\tau(\phi)}(\phi)$. K est choisi fermé, convexe et borné (généralement de dimension infinie), et A doit être complètement continue. Alors il existe ϕ tel que $A\phi = \phi$, ce qui implique que $x_{\tau(\phi)}(\phi) = \phi$, et $x_t(\phi)$ est une solution périodique, de période τ , de l'équation différentielle à retard considérée. Si de plus, on montre que tous les solution constantes dans K sont éjectives, alors cette solution périodique est non constante.

Il est donc important de déterminer une méthode pour vérifier qu'une solution constante d'une équation différentielle à retard est éjective.

Il existe deux méthodes souvent utilisées dans la littérature. La première a été utilisé par Nussbaum [14], qui prouve l'éjectivité à partir de la définition. La deuxième a été introduite par Chow et Hale [3]. Elle repose sur une certaine décomposition de l'espace de Banach $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R})$. Nous la décrivons dans ce qui suit.

On considère l'équation différentielle fonctionnelle à retard suivante

$$x'(t) = Lx_t + f(x_t), \tag{1.15}$$

avec $L : \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire et continue, et $f : \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

L'équation linéarisée associée à l'équation (1.15) en $x_t = 0$ est

$$y'(t) = Ly_t \tag{1.16}$$

Pour toute valeur propre λ de l'équation caractéristique correspond à l'équation (1.16), il existe une décomposition de $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R})$ de sorte que $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}) = P_\lambda \oplus Q_\lambda$, où P_λ et Q_λ sont invariants par l'opérateur solution de l'équation (1.15).

Soit π_λ et $I - \pi_\lambda$ les opérateurs de projection définis par cette décomposition.

Théorème 1.4 *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Il existe une valeur propre λ de l'équation caractéristique correspond à (1.16) telle que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.*
2. *Il existe un ensemble convexe et fermé $K \subseteq \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R})$, $0 \in K$, et $\delta > 0$ tels que*

$$\sigma = \sigma(\delta) \equiv \inf\{\|\pi_\lambda \phi\| : \phi \in K, \|\phi\| = \delta\} > 0.$$

3. *Il existe une fonction complètement continue $\tau : \setminus\{0\} \rightarrow [\alpha, \infty[$, $\alpha \geq 0$, telle que l'application A définie par*

$$A\phi = x_{\tau(\phi)}(\phi), \quad \phi \in K \setminus \{0\},$$

envoie $K \setminus \{0\}$ dans K et est complètement continue.

Alors 0 est un point éjectif de A .

MODÈLES À UNE SEULE ESPÈCE

2

2.1 Introduction

Dans la première partie de ce chapitre sera exploré un modèle d'équations différentielles à retard du type

$$x'(t) = b(x(t - \tau))x(t - \tau) - d(x(t))x(t), \quad (2.1)$$

dont les propriétés de base seront déterminées, en incluant les types de fonctions b et d qui pourraient conduire à l'existence de solutions périodiques.

Le modèle (2.1) dans le cas où $b(x) = be^{-ax}$ et d est constante, sera alors étudié en détail au Paragraphe 2.2.1.

Au Paragraphe 2.2.2, des termes dépendant du retard sont ajoutés au paramètres b dans le modèle traité au paragraphe précédent. Les effets de ce rajout sont explorés, et des conditions sont données pour l'existence et l'instabilité linéaire de l'équilibre positif.

Dans la deuxième partie du chapitre sera considéré le modèle suivant

$$x'(t) = [b(x(t - \tau)) - d(x(t))]x(t). \quad (2.2)$$

Dans le Paragraphe 2.3.1, le modèle (2.2) dans le cas où le taux de mortalité par habitant est constant ($d(x) = d = cte$) est exploré en détail.

Enfin, dans le Paragraphe 2.3.2 le modèle considéré au paragraphe précédent est repris en remplaçant la fonction b par le terme $be^{-a\tau}$, qui exprime l'introduction d'une dépendance au retard d'un des paramètres de l'équation (2.2).

Le présent chapitre s'appuie, principalement, sur le Chapitre 3 de la thèse : "Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology" par "Jonathan Erwin Forde [6].

2.2 Modèle général de population pour une seule espèce avec retard

La première classe de modèles que nous examinons est du type

$$x'(t) = b(x(t - \tau))x(t - \tau) - d(x(t))x(t) \quad (2.3)$$

où b est une fonction continue, strictement positive et strictement décroissante, qui représente le taux de croissance par habitant de la population, qui décroît lorsque la population augmente. C'est un exemple de croissance limitée en densité, dont le modèle logistique est un autre exemple. Le retard dans ce cas peut représenter une période de gestation ou de maturation, donc le nombre d'individus pouvant être comptabilisé dans la population dépend des niveaux de la population à un moment précédent. d est une fonction croissante et strictement positive. Elle représente le taux de mortalité par habitant qui peut croître par compétition intraspécifique.

Les modèles de ce type ont été largement utilisés dans la littérature de biologie mathématique, surtout lorsqu'on s'intéresse à la modélisation de phénomènes oscillatoires. En dynamique de populations, par exemple, Blythe dans [2] et Wangorsky et Cunnigham dans [17], explorent le modèle général, tandis que Taylor et Sokal dans [16] considère un modèle spécifique à la population de mouches domestiques. Ces modèles sont également utilisés dans d'autres domaines de la biologie telle que la physiologie [10]. Tandis que les phénomènes oscillatoires sont considérés, peu de résultats sur l'existence de solutions périodiques existent pour ces modèles. Un tel résultat est prouvé par Kuang dans [9], par exemple.

Maintenant, en considérant l'équation (2.3) on a le résultat de base suivant.

Lemme 2.1 *Pour des conditions initiales strictement positives, les solutions de (2.3), où b est une fonction strictement positive, restent strictement positives pour tout t .*

Démonstration. On fait un raisonnement par intervalle de temps de longueur le retard. Par hypothèse $x(t) > 0$ pour tout $t \in [-\tau, 0]$. Pour $t \in [0, \tau]$, on a $t - \tau \in [-\tau, 0]$ et donc $x(t - \tau) > 0$. Par suite on a

$$x'(t) > -d(x(t))x(t).$$

D'après le Lemme 1.1 (Lemme de comparaison), on obtient

$$x(t) > e^{-\int_0^t d(x(s))ds}.$$

Donc si $T \in [0, \tau]$ est le premier instant pour lequel $x(t) = 0$, alors on a $x'(T) > 0$. D'autre part, $x(t) > 0$ pour $t \in [-\tau, 0]$ donc pour que $x(T) = 0$ il faut que $x'(T) < 0$; ce qui est une contradiction. Ainsi, on a $x(t) > 0$ dans cet intervalle.

On réitère le procédé ci-dessus pour montrer que $x(t) > 0$ pour tout $t \in [\tau, 2\tau]$, et ainsi de suite. Donc, en définitif, pour tout $t \geq 0$, les solutions sont strictement positives. \square

Remarque 2.1 *La condition de positivité de b est nécessaire, malgré l'analogie avec, par exemple, le modèle logistique habituel (élaboré dans le cadre des équations différentielles ordinaires). S'il existe un \tilde{x} tel que $b(\tilde{x}) < 0$, alors il y a des passées (comme conditions initiales) positives qui produisent un futur négatif. On pourrait simplement définir le passé en tant que condition initiale pour être \tilde{x} sur $[-\tau, -\epsilon]$ pour un certain $\epsilon > 0$, et le rendre continue sur $[-\epsilon, 0]$ afin que $x(0)$ soit suffisamment petit; disons $x(0) = -b(\tilde{x})(\tau - \epsilon)\tilde{x}/2$. On voit alors que la solution sera négative dans l'intervalle $[0, \tau]$.*

En effet, si $x(t) \geq 0$ sur $[0, \tau - \epsilon]$, alors

$$\begin{aligned} x(\tau - \epsilon) &\leq x(0) + \int_0^{\tau - \epsilon} b(x(s - \tau))x(s - \tau)ds \\ &= x(0) + \int_0^{\tau - \epsilon} b(\tilde{x})\tilde{x}ds \\ &= -\frac{b(\tilde{x})}{2}(\tau - \epsilon)\tilde{x} + b(\tilde{x})(\tau - \epsilon)\tilde{x} \\ &= \frac{b(\tilde{x})}{2}(\tau - \epsilon)\tilde{x} < 0, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec la positivité de x sur l'intervalle $[0, \tau - \epsilon]$.

On va maintenant présenter trois résultats qui décrivent la répartition la plus générale des comportements possibles des équations différentielles à retard (2.3). Ces résultats sont plus généraux en ce sens que la condition que b est décroissante et d est croissante, est abandonnée. Il est utile de souligner que le premier cas que nous allons considérer en détail et qui sera couvert par le Théorème 2.1 est le seul à avoir une dynamique intéressante à long terme.

Théorème 2.1 *Si dans (2.3), b est une fonction strictement positive, vérifiant*

$$\sup_{x>0}(b(x)) < \inf_{x>0}(d(x)),$$

alors l'équilibre nul est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration. Soit $B = \sup_{x>0}(b(x))$ et $D = \inf_{x>0}(d(x))$. On a alors

$$x'(t) < Bx(t - \tau) - Dx(t).$$

Donc on compare la dynamique de l'équation (2.3) avec celle de l'équation

$$y'(t) = By(t - \tau) - Dy(t).$$

On suppose que $x(t) = y(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$. On définit les nouvelles variables $x_1(t) = e^{Dt}x(t)$ et $y_1(t) = e^{Dt}y(t)$. Avec un simple calcul on obtient

$$x_1'(t) = e^{Dt}[x(t)(D - d(x(t))) + b(x(t - \tau))x(t - \tau)],$$

$$y_1'(t) = Be^{Dt}y(t - \tau).$$

Maintenant on examine la différence $w_1(t) = y_1(t) - x_1(t)$. On a alors

$$\begin{aligned}
 w_1'(t) &= y_1'(t) - x_1'(t) \\
 &= Be^{Dt}y(t - \tau) \\
 &\quad - e^{Dt}[x(t)(D - d(x(t))) + b(x(t))x(t - \tau)] \\
 &\geq Be^{Dt}y(t - \tau) - e^{Dt}b(x(t - \tau))x(t - \tau) \\
 &\geq e^{Dt}[By(t - \tau) - Bx(t - \tau)] \\
 &= Bw_1(t - \tau).
 \end{aligned}$$

On a par hypothèse $w_1(t) = 0$ pour $t \in [-\tau, 0]$. Alors pour $t \in [0, \tau]$, $w_1(t - \tau) = 0$. D'après la dernière inégalité on constate que w_1 est croissante sur $[0, \tau]$ et alors $w_1(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, \tau]$.

En réitérant le raisonnement ci-dessus, on obtient que : $w_1 \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, et donc $y(t) \geq x(t)$ pour tout $t \geq 0$. Or d'après le Lemme 1.2, en tenant compte des hypothèses du Théorème 2.1, toutes les solutions de $y'(t) = By(t - \tau) - Dy(t)$ convergent vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. Donc toutes les solutions de (2.3) convergent vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. \square

Théorème 2.2 *On suppose dans (2.3) que les fonctions b et d sont strictement positives. On suppose qu'il existe \bar{x} tel que $\text{sign}(b(x) - d(x)) = -\text{sign}(x - \bar{x})$ et $b'(\bar{x}) < d'(\bar{x})$, alors \bar{x} est un équilibre positive de l'équation (2.3) et l'équilibre triviale est instable. Si de plus*

$$b'(\bar{x})\bar{x} > -2d(\bar{x}) - d'(\bar{x})\bar{x} \quad (2.4)$$

alors \bar{x} est linéairement stable pour tout τ . Sinon, il existe $\tau_c > 0$ tel que \bar{x} est stable pour $\tau < \tau_c$ et instable pour $\tau > \tau_c$.

Démonstration. Pour commencer, \bar{x} est le seul point d'équilibre positif, puisque $b(x) - d(x) = 0$ si et seulement si $x = \bar{x}$. La linéarisation au voisinage de cet équilibre donne l'équation

$$x'(t) = (d(\bar{x}) + b'(\bar{x})\bar{x})x(t - \tau) - (d(\bar{x}) + d'(\bar{x})\bar{x})x(t), \quad (2.5)$$

qui a comme équation caractéristique

$$\lambda = \alpha x(t - \tau) - \beta x(t),$$

où $\alpha = d(\bar{x}) + b'(\bar{x})\bar{x}$ et $\beta = d(\bar{x}) + d'(\bar{x})\bar{x}$.

On a par hypothèse $b'(\bar{x}) < d'(\bar{x})$ et donc $\alpha < \beta$. Or, on sait que si $|\alpha| < |\beta| = \beta$, alors toutes les racines de l'équation caractéristique ont une partie réelle négative. Comme la condition (2.4) entraîne que $\alpha > -\beta$, cela implique, au final, que $|\alpha| < \beta$.

Si ce n'est pas le cas, i.e., $\alpha < -\beta$, on applique la méthode présentée au chapitre précédent au Paragraphe 1.4.

Pour $\tau = 0$, la seule racine caractéristique est $\lambda = \alpha - \beta < 0$. D'où, par continuité des racines caractéristiques par arpport à τ , on déduit que pour des retards petits la racine $\lambda = \alpha - \beta$ reste négative et donc le système reste stable. Le polynôme correspondant à l'équation caractéristique est $\sigma - \alpha^2 - \beta^2$, qui a une racine réelle strictement positive. Il y a donc un τ_c pour lequel l'équation caractéristique a une racine purement imaginaire. Comme τ augmente après τ_c , les racines traverse l'axe imaginaire pour aller vers le demi-plan droit. La suite de Sturm associée est $\lambda - \alpha + \beta, 1, -\alpha + \beta$. On s'intéresse à l'intervalle $[0, +\infty]$. La chaine de signes correspondant est :

en 0 : +, +, +,

en ∞ : +, +, +.

Il n'y a pas de changement de signe ; ce qui montre que cette racine n'existe pas. Ainsi pour $\tau > \tau_c$, l'état stationnaire est instable. \square

Cooke, Drissche et Zou dans [4], montre que si $(b(x)x)' > 0$ pour tout x , alors l'équilibre positif est asymptotiquement stable. Des résultats plus généraux concernant la stabilité linéaire de l'équation (2.3) sont également obtenus dans [4]. Ces résultats sont contenus dans le Théorème 2.2. La seule situation qui n'est pas couverte par ce dernier théorème est lorsque $b(x) \geq d(x)$ pour tout x . Dans ce cas, il n'existe pas d'équilibre positif, mais l'équilibre trivial est toujours instable. Cette situation est couverte par le théorème suivant.

Théorème 2.3 Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} d(x) \quad (2.6)$$

alors toute solution de (2.3), de condition initiale strictement positive, est non bornée.

Remarque 2.2 En particulier, il n'existe pas de solutions périodiques dans les conditions du Théorème 2.3.

La preuve du Théorème 2.3 se fait via une paire de lemmes.

Lemme 2.2 Sous la condition (2.6), une solution x de l'équation (2.3), de condition initiale strictement positive, est bornée si et seulement si $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Démonstration. Soit x une solution de l'équation (2.3), de condition initiale strictement positive. Puisque x est continue, si $x(t) \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow \infty$, alors elle est bornée.

Maintenant on suppose que x est bornée, i.e., il existe $M > 0$ tel que : $x(t) < M, \forall t > 0$. Dans ce cas on définit $N = b(M) - d(M)$. Comme b est strictement décroissante et d est strictement croissante, on a $b(x(t)) - d(x(t)) \geq N, \forall t$.

La forme intégrale de l'équation (2.3), avec comme condition initiale $x(0)$, donne

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(0) + \int_0^t [b(x(s-\tau))x(s-\tau) - d(x(s))x(s)]ds \\
 &= x(0) + \int_{-\tau}^0 b(x(s))x(s)ds + \int_0^{t-\tau} (b(x(s)) - d(x(s)))x(s)ds \\
 &\quad - \int_{t-\tau}^t d(x(s))x(s)ds \\
 &= A + \int_0^{t-\tau} (b(x(s)) - d(x(s)))x(s)ds - \int_{t-\tau}^t d(x(s))x(s)ds \\
 &\geq A + \int_0^{t-\tau} Nx(s)ds - \int_{t-\tau}^t d(M)Mds \\
 &= A - d(M)M\tau + \int_0^{t-\tau} Nx(s)ds
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

où $A = x(0) + \int_{-\tau}^0 b(x(s))x(s)ds$. Cette borne inférieure de x doit être bornée pour tout t . En particulier, l'intégral $\int_0^\infty Nx(s)ds$ doit être fini, ce qui implique que $x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ car x est toujours positive. \square

Lemme 2.3 *Sous les conditions du Théorème 2.3, l'équation différentielle à retard (2.3) n'admet pas de solutions qui tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Démonstration. Reprenons l'expression suivante de x , déduite de (2.7) rencontrée dans la preuve du Théorème 2.2 :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(0) + \int_{-\tau}^0 b(x(s))x(s)ds + \int_0^{t-\tau} (b(x(s)) - d(x(s)))x(s)ds \\
 &\quad - \int_{t-\tau}^t d(x(s))x(s)ds.
 \end{aligned}$$

Les 3 premiers termes de cette expression sont positifs et le dernier terme est négatif.

On pose $B = \int_{-\tau}^0 b(x(s))x(s)ds$ et on suppose que $x(t) \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow \infty$. Il existe alors $T > 0$ tel que $\forall t > T, x(t) < \frac{B}{2d(M)\tau} = \epsilon$ où M est la limite supérieure de $x(t)$.

Maintenant pour $t > T$, on a

$$\int_{t-\tau}^t d(x(s))x(s)ds \leq \int_{t-\tau}^t d(M)\frac{B}{2d(M)\tau}ds = \frac{B}{2}.$$

Donc, pour $t > T$, $x(t) > \frac{B}{2}$; ce qui contredit le fait que $x(t)$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. \square

Les Lemmes 2.2 et 2.3 montrent qu'une solution de (2.3), de condition initiale strictement positive, sous la condition (2.6) doit être non bornée, et donc le Théorème 2.3 est prouvé.

2.2.1 Modèle spécifique

On va maintenant s'intéresser aux équations du type

$$x'(t) = bx(t - \tau)e^{ax(t-\tau)} - dx(t). \quad (2.8)$$

Ce type d'équations est un cas particulier de (2.3) avec $b(x) = be^{ax}$. On suppose que b et d sont des constantes strictement positives avec $b > d$. Donc on est dans le cas du Théorème 2.2 où l'équilibre non triviale existe.

Il est à noter que cette forme particulière du modèle plus générale, avec un taux de mortalité constant par habitant et un taux de natalité exponentiellement décroissant par habitant a fait l'objet de plusieurs études comme, par exemple, dans [2, 7, 12, 13].

Commençons par examiner les détails de ce cas. L'équilibre positif \bar{x} existe si $be^{-a\bar{x}} = d$, i.e., $\bar{x} = \frac{1}{a} \ln \frac{b}{d}$. D'après le Théorème 2.2, \bar{x} est stable pour tout τ si et seulement si

$$b'(\bar{x})\bar{x} > -2d(\bar{x}) - d'(\bar{x})\bar{x}.$$

Ce qui se traduit ici par

$$\frac{d}{dx} be^{-ax} \Big|_{x=\bar{x}} > -2\frac{d}{\bar{x}}.$$

Cela équivaut à la condition $b < de^2$.

Maintenant on suppose que $b > de^2$, et on pose $\alpha = \ln \frac{b}{d} - 1$. Alors $\alpha > 1$ et l'équation caractéristique est donnée par

$$\lambda = -d\alpha e^{-\lambda\tau} - d.$$

Si $\tau = 0$, alors $\lambda = -d\alpha - d$.

On suppose que $\tau > 0$ et que $\lambda = i\sigma, \sigma > 0$, est une racine purement imaginaire et on la remplace dans l'équation caractéristique

$$i\sigma = -d\alpha e^{-i\sigma\tau} - d = -d\alpha \cos(\sigma\tau) - d - id\alpha \sin(\sigma\tau).$$

Les parties réelles et imaginaires de cette équation sont

$$d = -d\alpha \cos(\sigma\tau), \quad \sigma = d\alpha \sin(\sigma\tau).$$

Après sommation des carrées, on obtient $\sigma^2 + d^2 = d^2\alpha^2$, i.e. $\sigma = d(\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$. On réécrit les parties réelle et imaginaire de l'équation caractéristique, pour obtenir

$$\cos(\sigma\tau) = -\frac{1}{\alpha} < 0, \quad \sin(\sigma\tau) = \frac{(\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\alpha} > 0.$$

Donc pour τ_c , le retard critique pour lequel une valeur propre traverse vers le demi-plan droit, $\sigma\tau_c \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, et le retard critique est

$$\tau_c = \frac{1}{d(\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \cos^{-1} \left(-\frac{1}{\alpha} \right). \quad (2.9)$$

Pour $\tau > \tau_c$ l'équilibre positif est instable.

Dans la suite, on supposera que $b > de^2$.

a) Solutions oscillantes

Nous allons considérer comme ensemble des conditions initiales, l'ensemble

$$K = \{ \phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^+) : \phi(-\tau) = \bar{x}, \phi(t) > \bar{x}, \forall t \in]-\tau, 0] \}$$

et soit $b(x) = be^{-ax}$.

Pour $x(t) > \bar{x}$, une solution de (2.8), de condition initiale dans K , sera strictement décroissante. En effet, le graphe de $b(x)x$ se trouve en dessous de celle de dx quand $x > \bar{x}$ (voir figure 2.1).

On définit aussi une nouvelle valeur $x_m < \bar{x}$ tel que $x_m b(x_m) = dx_m$. Dans la région $]x_m, \bar{x}[$, le graphe de $xb(x)$ se trouve au-dessus de dx , et si une solution reste dans cette région, elle doit être croissante.

On va vérifier maintenant que toute solution de (2.8), de condition initiale dans $K \setminus \{ \bar{x} \}$, doit osciller autour de \bar{x} indéfiniment.

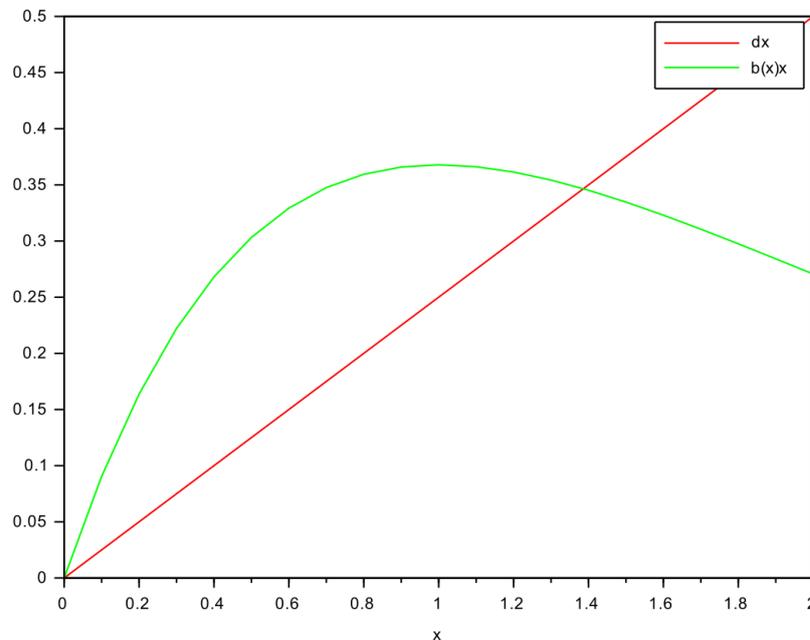


FIGURE 2.1 – La fonction de croissance, $b(x)x$, et la fonction de décroissance, dx

Lemme 2.4 Si $\phi \in K$, alors il existe $0 < t_1 < t_2$ tels que si x est une solution de (2.8), de condition initiale ϕ , alors $x(t_1) = x(t_2) = \bar{x}$, $x'(t_1) < 0$ et $x'(t_2) > 0$ et $x(t) \neq \bar{x}$ pour tout $t \in]t_1, t_2[$.

Démonstration. On suppose que $x(t) > \bar{x}$ pour tout t . Alors x est une fonction décroissante et bornée inférieurement. Ainsi, x a une limite, et on a x' doit s'approcher de 0 lorsque x s'approche de cette limite. Donc, d'après l'équation différentielle, on a : $x(t) \rightarrow \bar{x}$.

Pour prouver que les solutions, de conditions initiales dans K , ne peuvent pas rester au-dessus de \bar{x} et avoir \bar{x} comme limite, on doit maintenant examiner la longueur du retard τ_c de manière précise. On sait que l'équilibre non trivial est instable si et seulement si $\tau > \tau_c$ et on a vu que $\sigma\tau_c \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Rappelons que la partie imaginaire de l'équation caractéristique quand $\tau = \tau_c$, est $\sigma = d\alpha \sin(\sigma\tau)$. On obtient les inégalités suivantes, puisque l'équilibre non trivial est instable on obtient

$$\sigma\tau > \sigma\tau_c > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau > \frac{\pi}{2} \frac{1}{d\alpha \sin(\sigma\tau)} > \frac{\pi}{2} \frac{1}{d\alpha} > \frac{1}{d\alpha}.$$

La forme de l'inégalité que l'on va choisir est

$$-d\alpha < -\frac{1}{\tau}.$$

Maintenant on considère la fonction $B(x) = xb(x)$. Prenons la dérivée au point $x = \bar{x}$, on obtient $B'(\bar{x}) = -d\alpha < 0$. Notons, en particulier, que B est décroissante au voisinage de \bar{x} . Pour toute pente $s \in]B'(\bar{x}), 0[$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $0 < x - \bar{x} \leq \delta$, $B(x) - B(\bar{x}) < s(x - \bar{x})$. En particulier, on prend $s = -\frac{1}{\tau}$. Soit $T > \tau$ tel que $x(T) = \bar{x} + \delta$. Alors pour $t \in [T, T + \tau]$ on a

$$x'(t) = B(x(t - \tau)) - d(x(t)) < B(x(t - \tau)) - d\bar{x} < B(x(T)) - B(\bar{x})$$

en tenant compte du fait que x est strictement décroissante pour $t > 0$ et que B est strictement décroissante dans un voisinage de \bar{x} . Comme $B(\bar{x}) = d\bar{x}$, alors

$$x'(t) < -\frac{1}{\tau}(x(\tau) - \bar{x}) = -\frac{\delta}{\tau}.$$

Mais si $x'(t) < -\frac{\delta}{\tau}$ dans l'intervalle $[T, T + \tau]$, alors d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, on a : $x(T + \tau) < x(T) - \tau \frac{\delta}{\tau} = \bar{x}$; ce qui contredit l'hypothèse que x reste au-dessus de \bar{x} . On est amené à la conclusion qu'il existe t_1 tel que $x(t_1) = \bar{x}$, $x(t) > \bar{x}$ pour $t \in]0, t_1[$, et $x'(t_1) < 0$, comme voulu.

Pour $t \in]t_1, t_1 + \tau[$, $x(t) \leq \bar{x}$. Pour voir ceci, on suppose que $x(t) = \bar{x}$, alors

$$x'(t) = x(t - \tau)b(x(t - \tau)) - d\bar{x} \geq 0.$$

Ce qui implique que $x(t - \tau)b(x(t - \tau)) \geq d\bar{x}$. Mais cela n'est pas possible, car pour le temps $t - \tau$, $xb(x)$ est inférieur à $d\bar{x}$ comme le montre la figure 2.1.

On suppose maintenant que $x(t) < \bar{x}$ pour tout $t > t_1$. Intégrons (2.8) pour obtenir

$$\begin{aligned} x(t) - \bar{x} &= \int_{t_1-\tau}^t b(x(s))x(s)ds + \int_{t_1}^{t-\tau} (b(x(s)) - d)x(s)ds - \int_{t-\tau}^t dx(s)ds \\ &\geq \int_{t_1}^{t-\tau} (b(x(s)) - d)x(s)ds + A - d\tau\bar{x}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

où $A = \int_{t_1-\tau}^{t_1} b(x(s))x(s)ds$, qui est fixé par la valeur de la solution avant d'entrer dans la région $x < \bar{x}$.

Si l'intégrale $\int_{t_1}^{t-\tau} (b(x(s)) - d)x(s)ds$ ne converge pas alors $x(t) \rightarrow \infty$, car l'intégrand est positif. Comme cela contredit l'hypothèse que $x(t) < \bar{x}$, on doit avoir que l'intégrale converge. En particulier, l'intégrand doit s'approcher de zéro, cela peut se produire si et seulement si x s'approche de 0 ou \bar{x} . On peut écarter le cas de $x(t) \rightarrow 0$ eu égard de l'inégalité (2.10). En effet, si $x(t) \rightarrow 0$, $\int_{t-\tau}^t dx(s)ds$ devient arbitrairement petit et ainsi $x(t) - \bar{x} > 0$; ce qui contredit l'hypothèse que $x(t) < \bar{x}$.

On conclue que si $x(t) < \bar{x}$ alors $x(t) \rightarrow \bar{x}$. Si c'est le cas, alors il existe un temps T de sorte que $x(t) > \bar{x}$ pour tout $t > T$, et pour ces temps x est croissante.

La preuve de l'existence de t_2 tel que la solution x doit croître en traversant la valeur \bar{x} à l'instant t_2 est analogue à la preuve de l'existence de t_1 , ci-dessus, et est donc omise. \square

Corollaire 2.1 *Toute solution de l'équation différentielle à retard (2.8), de condition initiale strictement positive, rencontre la valeur \bar{x} un nombre infini de fois.*

Démonstration. Si on suppose que la solution x satisfait $x(t) > \bar{x}$ pour tout $t > T$ ou $x(t) < \bar{x}$ pour $t > T$, alors l'argumentaire utilisé dans la preuve du Lemme 2.4 nous donne une contradiction. \square

b) Extension des résultats

Kunag, dans [9], montre l'existence de solutions périodiques pour certaines équations à retard du type

$$x'(t) = B(x(t - \tau)) - D(x(t)). \quad (2.11)$$

On suppose que \bar{x} est le seul point d'équilibre strictement positif, et x_M est le maximum de B avec $\bar{x} > x_M$.

Pour le cas de l'équation (2.11) on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

A_1) B est strictement décroissante, $B(0) > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = 0$.

A_2) Il existe $\underline{x} \in [x_M, \bar{x}]$ tel que $B(x^*) > D(\underline{x})$ où $x^* = D^{-1}(B(\underline{x}))$.

Lemme 2.5 *On suppose que B dans (2.11) vérifie les conditions (A_1) et (A_2) et $x(s) \in [\underline{x}, x^*]$ pour $s \in [t_0 - \tau, t_0]$ alors $x(t) \in [\underline{x}, x^*]$ pour $t > t_0$.*

Démonstration. Soit $0 \leq \tilde{x} \leq \underline{x}$ tel que pour $x \in [\tilde{x}, \underline{x}]$, on a $B(D^{-1}(B(x))) > D(x)$. Si le lemme n'est pas vrai alors il existe deux cas à considérer :

- i) il existe $\bar{t} > 0$, $\tilde{x} < x(\bar{t}) < \underline{x}$, $x(\bar{t}) < x(t) < x^*$ pour $t_0 - \tau < t < \bar{t}$, et $x'(\bar{t}) < 0$.
- ii) il existe $\bar{t} > 0$, $x(\bar{t}) > x^*$, $\underline{x} \leq x(t) \leq x(\bar{t})$ pour $t_0 - \tau < t < \bar{t}$, et $x'(\bar{t}) > 0$.

Si on considère le cas i), alors du fait que $x(\bar{t}) < \underline{x}$ et $x'(\bar{t}) < 0$, on a

$$B(x(\bar{t} - \tau)) < D(x(\bar{t})). \quad (2.12)$$

Puisque que $B(x) \geq D(x)$ pour $x \in [0, \bar{x}]$, et D est strictement croissante, (2.12) implique que $x(\bar{t} - \tau) > \bar{x}$. Si $\bar{x} < x(\bar{t} - \tau) \leq x^*$, alors la monotonie de f avec la condition (A_2) implique que

$$B(x(\bar{t} - \tau)) > B(x^*) > D(\underline{x}).$$

La monotonie de D entraîne que

$$B(x(\bar{t} - \tau)) > D(\underline{x}) > D(x(\bar{t})),$$

ce qui est en contradiction avec (2.12).

On suppose maintenant que ii) est vérifié. $x'(\bar{t}) > 0$ implique que

$$B(x(\bar{t} - \tau)) > D(x(\bar{t})).$$

La monotonie de D implique que

$$B(x(\bar{t} - \tau)) > D(x^*) = D(D^{-1}(B(\underline{x}))) = B(\underline{x}).$$

Maintenant la monotonie de B entraîne que

$$x(\bar{t} - \tau) < \underline{x},$$

ce qui contredit l'hypothèse $\underline{x} < x(t) < x(\bar{t})$ pour $t_0 - \tau < t < \bar{t}$. □

Dans le reste de ce paragraphe on suppose que la condition initiale pour (2.11) satisfait

$$x(s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad \underline{x} \leq \phi(s) \leq x^*,$$

où $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R})$. Le Lemme 2.5 implique que $\underline{x} \leq x(t) \leq x^*$ pour $t \geq 0$. Dans l'intervalle $[\underline{x}, x^*]$, $-B(x)$ et $D(x)$ sont toutes les deux strictement croissante. Sans perte de généralité, on suppose que B satisfait la condition (A_1) . De plus, pour simplifier, on suppose que $\tau = 1$. L'équation (2.11) se réduit ainsi à

$$x'(t) = B(x(t-1)) - D(x(t)). \quad (2.13)$$

Soit $\alpha = -B'(\bar{x})$ et $\beta = D'(\bar{x})$. Alors, le linéarisé de l'équation (2.13) autour de l'équilibre à la forme

$$x'(t) = -\alpha x(t-1) - \beta x(t), \quad (2.14)$$

qui a comme équation caractéristique

$$\lambda + \beta + \alpha e^{-\lambda} = 0. \quad (2.15)$$

On note que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Lemme 2.6 Soit $\alpha > \alpha_\beta$, où α_β est la plus petite solution strictement positive de

$$\beta + \alpha \cos \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 0.$$

Alors l'équation (2.15) admet une solution λ avec $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ et $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}(\lambda) < \pi$.

Pour présenter les résultats principaux de ce paragraphe, on a besoin d'introduire les notations suivantes

$$v = \max\{D'(x) : x \in [\underline{x}, x^*]\};$$

$$K = \left\{ \phi(s) : \phi \in \mathcal{C}([-1, 0], \mathbb{R}), \phi(-1) = \bar{x}, \underline{x} \leq \phi(s) \leq x^*, (\phi(s) - \bar{x})e^{vs} \right.$$

est une fonction croissante pour $s \in [-1, 0]$ };

$$K_1 = K \setminus \{\bar{x}\},$$

Théorème 2.4 On suppose que les conditions (A_1) et (A_2) sont vérifiées, et $\alpha > \max\{1, \alpha_\beta\}$. Alors l'équation (2.13) admet une solution périodique non constante x avec une période supérieure à 2. De plus, on a $\underline{x} \leq x(t) \leq x^*$.

Le lemme suivant est nécessaire pour montrer qu'il existe un opérateur A qui envoie K dans lui-même.

Lemme 2.7 [9] On suppose que les hypothèses du Théorème 2.4 sont satisfaites. Soit $x = x(\cdot, \phi)$, $\phi \in K_1$, la solution de (2.13). Alors :

1. Il existe une suite $\{z_i\}_{i=1}^\infty$, $0 < z_1 < z_2 < \dots$, telle que : $x'(z_{2k-1}) < 0$, $x'(z_{2k}) > 0$, pour $k = 1, 2, \dots$.
2. La fonction $e^{vt}(x(t) - \bar{x})$ est décroissante sur l'intervalle $]z_{2k}, z_{2k-1} + 1[$ et croissante sur l'intervalle $]z_{2k}, z_{2k} + 1[$, $k = 1, 2, 3, \dots$.
3. Il existe une constante $q > 0$ tel que, pour $\phi \in K$, $z_2 \leq q$.

Maintenant on définit l'opérateur A par

$$A(\phi(s)) = x(z_2(\phi) + \bar{x} + s, \phi), \quad s \in [-1, 0], \quad \phi \in K_1,$$

$$A(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Lemme 2.8 [9] L'application $z_2 : K_1 \rightarrow]1, \infty[$ et $A : K \rightarrow K$ sont complètement continues.

Lemme 2.9 Soit $\bar{\alpha} = \max\{1, \alpha_\beta\}$, $\delta = \min\{x^* - \bar{x}, \bar{x} - \underline{x}\}$, et J un compact de $]\bar{\alpha}, \infty[$. Alors

$$\mu = \inf\{\pi_{\lambda(\phi)}\phi : \phi \in K, \|\phi - \bar{x}\| = \delta, \alpha \in J\} > 0.$$

Démonstration. Soit $\lambda = \lambda(\alpha)$ une solution de (2.15) donnée par le Lemme 2.6,

$\phi(\theta) = \frac{e^{\lambda\theta}}{1 + \lambda + \beta}$, $\theta \in [-1, 0]$, $\psi(s) = e^{-\lambda s}$, $s \in [0, 1]$, $\Phi = (\phi, \bar{\phi})$, $\Psi = (\psi, \bar{\psi})$. La

forme bilinéaire de (2.14) est

$$(\psi, \phi) = \psi(0)\phi(0) - \alpha \int_{-1}^0 \psi(z+1)\phi(\xi)d\xi. \quad (2.16)$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
 (\psi, \phi) &= \frac{1}{1 + \lambda + \beta} \left[1 - \alpha \int_{-1}^0 e^{-\lambda(\xi+1)} e^{\lambda\xi} d\xi \right] \\
 &= \frac{1}{1 + \lambda + \beta} \left[1 - \alpha \int_{-1}^0 e^{-\lambda} d\xi \right] \\
 &= \frac{1 - \alpha e^{-\lambda}}{1 + \lambda + \beta} = 1,
 \end{aligned}$$

car $\lambda + \beta = -\alpha e^{-\lambda}$. De plus

$$(\bar{\psi}, \phi) = \frac{1}{1 + \lambda + \beta} \left[1 - \alpha \int_{-1}^0 e^{-\bar{\lambda}(\xi+1)} e^{\lambda\xi} d\xi \right]$$

et

$$\begin{aligned}
 1 - \alpha \int_{-1}^0 e^{-\bar{\lambda}(\xi+1)} e^{\lambda\xi} d\xi &= 1 - \alpha \int_{-1}^0 e^{\bar{\lambda}} e^{\xi(\lambda - \bar{\lambda})} d\xi \\
 &= 1 - \frac{\alpha}{\lambda - \bar{\lambda}} e^{-\bar{\lambda}} (1 - e^{\bar{\lambda} - \lambda}) \\
 &= \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} (\lambda - \bar{\lambda} - \alpha e^{-\bar{\lambda}} + \alpha e^{-\lambda}) \\
 &= \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} (-\beta + \beta) = 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquent $(\bar{\psi}, \bar{\phi}) = 1$, $(\psi, \bar{\phi}) = 0$. Donc la forme bilinéaire (Ψ, Φ) est l'identité. Par conséquent, pour tout $\phi \in \mathcal{C}([-1, 0], \mathbb{R})$, $\pi_\lambda \phi = \Phi(\Psi, \phi)$. Pour montrer que la conclusion du lemme est vraie, on montre que

$$\inf\{ |(\Psi, \Phi - \bar{x})| : \phi \in K, \|\phi - \bar{x}\| = \delta, \alpha \in J\} > 0.$$

Si $\phi \in K$, $\|\phi - \bar{x}\| = \delta$, alors $\phi(0) - \bar{x} \geq \delta e^{-1}$ et

$$(\psi, \phi - \bar{x}, \alpha) \equiv (\psi, \phi - \bar{x}) = \operatorname{Re}(\phi) + i \operatorname{Im}(\phi),$$

$$\operatorname{Re}(\phi) = \phi(0) - \bar{x} - \alpha \int_{-1}^0 (\phi(\theta) - \bar{x}) e^{-\gamma(\theta+1)} \cos \sigma(\theta + 1) d\theta,$$

$$\operatorname{Im}(\phi) = \alpha \int_{-1}^0 (\phi(\theta) - \bar{x}) e^{-\gamma(\theta+1)} \sin \sigma(\theta + 1) d\theta,$$

où $\lambda = \gamma + i\sigma$, $\gamma > 0$, $\sigma \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Puisque J est compact, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \sigma = \sigma(\alpha) < \pi - \epsilon$ pour $\alpha \in J$. Maintenant on suppose qu'il existe une suite $\phi_n \in K$, $\phi_n(0)$, $\alpha_n \in J$ telle que $(\psi, \phi_n - \bar{x}, \alpha_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On peut supposer que $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $\phi_n(0) - \bar{x} \rightarrow \eta \geq \delta e^{-1}$ lorsque $n \rightarrow \infty$, car J est un compact et $\delta e^{-1} \leq \phi_n(0) - \bar{x} \leq \delta$. Comme $\operatorname{Im}(\phi_n) \rightarrow 0$, on doit avoir $\phi_n(\theta) - \bar{x} \rightarrow 0$,

$-1 \leq \theta < 0$. Ainsi, $Re(\phi_n) \rightarrow \eta$ quand $n \rightarrow +\infty$. C'est une contradiction avec $Re(\phi_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, et donc le lemme est prouvé. \square

Finalement, on arrive à la démonstration du Théorème 2.4.

Démonstration Théorème 2.4. K est un ensemble fermée, bornée et convexe de dimension infinie. A est un opérateur complètement continu, d'après le Lemme 2.8, et \bar{x} est un point fixe ejectif de A d'après le Théorème 1.4 et le Lemme 2.9. Alors, d'après le Théorème 1.3, on conclut que A admet un point fixe ϕ dans K_1 , qui correspond à une solution périodique non constante $x = x(\cdot, \phi)$ de période supérieure à 2. \square

2.2.2 Paramètres dépendant du retard

Dans le modèle considéré précédemment, nous allons examiner l'effet de la dépendance de l'un des paramètres de la longueur du retard τ . Plus précisément, soit l'équation différentielle à retard suivante

$$x'(t) = be^{-\mu\tau}x(t-\tau)e^{-ax(t-\tau)} - dx(t). \quad (2.17)$$

Le premier terme de cette équation représente le taux de recrutement ou de natalité, la modification de ses paramètres peut représenter la diminution de la survie au cours d'une période d'incubation ou de maturation. On va examiner l'effet de cette dépendance du retard sur l'existence et la stabilité de l'équilibre non trivial.

La difficulté mathématique imposée par cette dépendance par rapport au retard est double. Tout d'abord, l'emplacement de l'équilibre va maintenant varier avec la longueur du retard. Ensuite la forme de l'équation caractéristique va changer en raison de l'introduction direct du retard dans les paramètres, et les changements indirectes résultant de la localisation variable de l'état stationnaire.

On commence par la recherche de l'équilibre du modèle (2.17) par la résolution de l'équation $x'(t) = 0$, ce qui implique

$$be^{-\mu\tau}e^{-a\bar{x}}\bar{x} - d\bar{x} = 0.$$

Cette relation donne l'équilibre trivial qui existe toujours et l'équilibre non trivial qui est donné par

$$\bar{x} = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{b}{de^{\mu\tau}} \right).$$

On peut voir que \bar{x} existe si et seulement $\tau < \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{b}{d} \right)$.

En particulier, si $\tau > \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{b}{d} \right)$, l'équilibre trivial est le seul point d'équilibre.

Dans ce cas, on a

$$x'(t) \leq be^{-\mu\tau}x(t-\tau) - dx(t)$$

avec $be^{\mu\tau} < d$, et donc les solutions tendent vers 0, faisant de l'équilibre identiquement nul, un équilibre globalement asymptotiquement stable.

Maintenant, on examine l'équation caractéristique pour l'équilibre non nul, qui existe lorsque $\tau < \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{b}{d} \right)$.

On linéarise l'équation (2.17) et on introduit une solution exponentielle pour obtenir l'équation caractéristique

$$\lambda = -d\alpha(\tau)e^{-\lambda\tau} - d \quad (2.18)$$

où $\alpha(\tau) = 1 - \ln \left(\frac{b}{de^{\mu\tau}} \right)$.

Notons que cette équation caractéristique est essentiellement la même que pour le cas qui ne dépend pas du retard, seul le coefficient $\alpha(\tau)$ est concerné par la dépendance au retard. Dans le cas où les paramètres sont indépendants du retard, on trouve un retard critique τ_c , donnée par l'équation (2.9), telle que l'équation caractéristique

$$\lambda = -d\alpha e^{-\lambda\tau} - d$$

admet des racines à partie réelle positive si et seulement si $\tau > \tau_c$. Grâce à ces résultats, on déduit une condition impliquant l'instabilité de l'équilibre non trivial de (2.17).

Théorème 2.5 *L'équilibre non trivial de l'équation différentielle à retard (2.17) est instable si et seulement si*

$$\tau > \frac{1}{d(\alpha(\tau)^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \cos^{-1} \left(-\frac{1}{\alpha(\tau)} \right). \quad (2.19)$$

Remarque 1 *On remarque en particulier que $\alpha(\tau)^2 - 1 > 0$, qui devrait être satisfaite pour qu'un changement de stabilité se produise dans le cas sans dépendance par rapport au retard.*

Alors on a

Théorème 2.6 *L'équilibre non trivial de (2.17) existe et est instable si et seulement si $\tau < \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{b}{d} \right)$, et l'inégalité (2.19) est satisfaite. Dans ce cas, toute solution de (2.17), de condition initiale positive, oscille autour de cette équilibre.*

2.3 Un autre modèle général

Nous nous intéressons ici au modèle suivant

$$x'(t) = (b(x(t - \tau)) - d(x(t)))x(t), \quad (2.20)$$

où b et d sont strictement décroissante et strictement croissante, respectivement. Contrairement au modèle (2.3), dans ce modèle, seules les composantes non linéaires du terme de naissance sont retardées. Le modèle logistique retardé est un cas particulier de l'équation (2.20). La dynamique de cette forme intègre le modèle proie-prédateur et celui de la chaîne alimentaire (voir, par exemple [11]).

La condition de l'existence de l'équilibre non trivial est la même que celle associée à l'équation (2.3), mais la linéarisation est différente. Comme auparavant, on a les deux résultats suivants.

Théorème 2.7 *Si $b(0) < d(0)$, alors l'équation (2.20) n'admet pas d'équilibre positif, et l'équilibre trivial est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. On a $x'(t) \leq (b(0) - d(0))x(t)$ entraîne, d'après le Lemme 1.1 (lemme de comparaison), que toutes les solutions de (2.20) sont bornées par $x(0)e^{(b(0)-d(0))t}$ qui tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$, puisque $b(0) < d(0)$. \square

Théorème 2.8 *Si*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} d(x) \quad (2.21)$$

dans l'équation (2.20), alors toute solution de (2.20), de condition initiale strictement positive, tend vers ∞ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Démonstration. Soit x une solution de (2.20), de condition initiale positive. Les fonctions b et d étant strictement décroissante et strictement croissante, respectivement, moyennant la condition (2.21), on déduit que $\max_{x \geq 0} d(x) < \min_{x \geq 0} b(x)$, et donc on a : $x'(t)$ est positive pour tout t . Si x était bornée, alors elle admettrait une limite $L > 0$, mais cela impliquerait

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = (b(L) - d(L))L;$$

ce qui est impossible. Alors x est non bornée. \square

Le cas le plus général de ce modèle est toutefois lorsque les graphes de b et d se coupent, i.e., quand l'équilibre positif existe.

Soit $x \equiv \bar{x}$ le seul point d'équilibre de l'équation (2.20), i.e. $b(\bar{x}) = d(\bar{x})$. Alors le linéarisé de l'équation (2.20) au voisinage de cet équilibre est donné par

$$x'(t) = b'(\bar{x})\bar{x}x(t - \tau) - d'(\bar{x})\bar{x}x(t).$$

En remplaçant la solution $x(t)$ par $e^{\lambda t}$, on obtient l'équation caractéristique

$$\lambda = -ae^{-\lambda\tau} - c, \quad (2.22)$$

où

$$a = -b'(\bar{x})\bar{x} > 0 \quad \text{et} \quad c = d'(\bar{x})\bar{x}.$$

Lorsque le retard τ est suffisamment petit, l'équation (2.22) admet uniquement des racines avec partie réelle négative, et l'équilibre est stable. Ces résultats sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 2.9 *Si $d'(\bar{x}) > -b'(\bar{x})$, alors l'équilibre non trivial \bar{x} est linéairement stable pour tout τ . Pour $d'(\bar{x}) < -b'(\bar{x})$, il existe un τ_c tel que pour $\tau < \tau_c$, \bar{x} est stable, et pour $\tau > \tau_c$, il est instable.*

Démonstration. Dans l'équation caractéristique (2.22), on pose $\lambda = \mu + i\sigma$, puis on sépare les parties réelle et imaginaire de cette équation pour obtenir

$$\mu + c = -ae^{-\mu\tau} \cos(\sigma\tau) \quad (2.23)$$

$$\sigma = ae^{-\mu\tau} \sin(\sigma\tau). \quad (2.24)$$

Si $c > a$ et $\mu \geq 0$, alors la valeur absolue du membre de gauche de la partie réelle de (2.23) est supérieure à la valeur absolue du membre de droite. Donc seules les racines à partie réelle négative existent pour tout τ . Ceci prouve la première partie du théorème.

Si $a > c$, on utilise le raisonnement élaboré dans le Paragraphe 1.4. Pour $\tau = 0$, l'équilibre est stable ($\lambda = -a - c < 0$). L'équation polynomiale dérivée dans ce cas est $\sigma^2 + c^2 - a^2 = 0$. Elle a une solution si et seulement si $a > c$. En effet, il n'y a que des racines imaginaires possible. Comme τ augmente après τ_c , les racines traversent l'axe imaginaire en allant vers le demi-plan droit, et donc l'équilibre est instable pour tout $\tau > \tau_c$; ce qui complète la preuve de la deuxième partie du théorème. \square

2.3.1 Cas du taux de mortalité constant

Nous allons supposer ici que $d(x) = d = cte$ et considérer l'équation différentielle à retard correspondante

$$x'(t) = (b(x(t - \tau)) - d)x(t). \quad (2.25)$$

On se concentre sur le cas intéressant où $b(0) > d$, b est décroissante et où il existe un seul \bar{x} tel que $b(\bar{x}) = d$. Dans ce cas, on présente des résultats montrant que (2.25) admet des solutions périodiques dans le cas où l'équilibre trivial est instable.

On commence par l'analyse de la stabilité linéaire. L'équilibre non trivial \bar{x} existe et le linéarisé en ce point est

$$x'(t) = b'(\bar{x})\bar{x}x(t - \tau) \quad (2.26)$$

qui conduit à l'équation caractéristique

$$\lambda = -\beta e^{-\lambda\tau}, \quad (2.27)$$

où $\beta = -b'(\bar{x})\bar{x} > 0$.

On remarque que pour $\tau = 0$, l'équilibre est stable, puisque l'équation caractéristique admet une seule racine qui est négative.

Si on sépare les composantes de la valeur propre $\lambda = \mu + i\sigma$, alors les parties réelle et imaginaire de l'équation caractéristique sont

$$\mu = -\beta e^{-\mu\tau} \cos(\sigma\tau), \quad (2.28)$$

$$\sigma = \beta e^{-\mu\tau} \sin(\sigma\tau). \quad (2.29)$$

Maintenant, si on suppose que (2.27) admet une racine purement imaginaire, les équations (2.28) et (2.29) deviennent

$$0 = -\beta \cos(\sigma\tau), \quad (2.30)$$

$$\sigma = \beta \sin(\sigma\tau). \quad (2.31)$$

On cherche alors la plus petite valeur positive de τ telle qu'il existe une solution $\sigma > 0$. D'après l'équation (2.30), on voit que $\sigma\tau = \frac{\pi}{2}$ est la plus petite valeur pour ce produit. On utilise cette valeur dans l'équation (2.31), pour trouver $\sigma = \beta = -b'(\bar{x})\bar{x}$. Donc on voit que la valeur critique τ_c correspondant à la première valeur propre avec partie réelle positive est $\tau_c = \frac{\pi}{2\sigma'}$, i.e.

$$\tau_c = \frac{-\pi}{2b'(\bar{x})\bar{x}'}$$

et pour $\tau > \tau_c$, l'équilibre non triviale \bar{x} est instable.

Toute racine caractéristique de (2.27) avec partie réelle positive est également simple. Sinon nous devons avoir

$$\lambda = -\beta e^{-\lambda\tau}$$

et

$$1 = \beta\tau e^{-\lambda\tau}.$$

On remplace la première formule dans la deuxième pour obtenir

$$1 = -\tau\lambda. \quad (2.32)$$

Si $Re(\lambda) > 0$ alors (2.32) est impossible.

Présentons maintenant quelques caractéristiques auxquelles il sera fait référence dans les preuves des résultats présentés par la suite.

Si on choisit un retard τ tel que l'équilibre \bar{x} est instable alors $b'(\bar{x}) < -\frac{\pi}{2\bar{x}\tau}$. En outre, si $\mu > 0$ alors $\cos(\sigma\tau) < 0$ (d'après l'équation (2.28)) et $\sin(\sigma\tau) > 0$. Donc $\sigma\tau \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Lemme 2.10 Soit x une solution de l'équation (2.25), avec $x(t_0) = \bar{x}$ et $x(t) < \bar{x}$ pour tout $t \in [t_0 - \tau, t_0]$. Alors pour tout $t > t_0$, $x(t) < \bar{x}e^{(b(0)-d)\tau} = M$.

Démonstration. La solution x est strictement croissante sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \tau]$, car $b(x(t - \tau)) > d$ sur cet intervalle. Comme b est une fonction strictement décroissante, on a : $x'(t) \leq (b(0) - d)x(t)$, et donc $x(t_0 + \tau) \leq M$.

Pour $t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$, on a $b(x(t - \tau)) < d$, et donc x est strictement décroissante sur cet intervalle. Si x reste au dessus de \bar{x} pour tout $t \geq t_0$, alors elle est toujours décroissante et $x(t) < M$, pour tout $t \geq t_0$. \square

On considère maintenant comme ensemble des conditions initiales, associé à l'équation (2.25), l'ensemble

$$K = \{\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+) : \phi(-\tau) = \bar{x}, \phi \text{ croissante et } \phi(0) \leq M\}.$$

On va vérifier que pour toute solution x de (2.25), de condition initiale $\phi \in K_1 = K \setminus \{\bar{x}\}$, il existe un instant $\tilde{t} = \tilde{t}(\phi)$ tel que $x(\tilde{t} + s)$ soit dans K_1 .

Théorème 2.10 Soit x une solution de (2.25), de condition initiale $\phi \in K_1$. Alors il existe un instant t_1 tel que $x(t_1) = \bar{x}$ et $x'(t_1) < 0$. D'autre part, il existe un instant $t_2 > t_1 + \tau$ tel que $x(t_2) = \bar{x}$ et $x'(t_2) > 0$. Si $\tilde{t} = t_2 + \tau$, alors la fonction définie par $x(\tilde{t} + s)$ pour $-\tau \leq s \leq 0$ est dans K_1 .

Démonstration. Supposons que t_1 n'existe pas, alors pour les $t > 0$, x est strictement décroissante et bornée inférieurement par \bar{x} . Il s'ensuit que $x(t)$ s'approche d'une limite L quand $t \rightarrow \infty$; ce qui n'est possible que si $L = \bar{x}$. En effet, comme $b'(\bar{x}) < \frac{-\pi}{2\bar{x}\tau}$, alors pour tout $\alpha < \frac{\pi}{2}$ et pour tout x tel que $|x - \bar{x}| < \delta' = \delta'(\alpha)$, on a

$$b(x) - b(\bar{x}) \leq -\frac{\alpha}{\tau\bar{x}}(x - \bar{x}).$$

En particulier, cela reste vrai pour $\alpha = 1$ (Voir Figure 2.2). Choisissons $\delta < \min\{x(\tau), \delta'(1)\}$. Pour $x - \bar{x} > \delta$, on a

$$b(x) - d < b(\bar{x} + \delta) - d < -\frac{\delta}{\tau\bar{x}},$$

en tenant compte du fait que $b(\bar{x}) = d$.

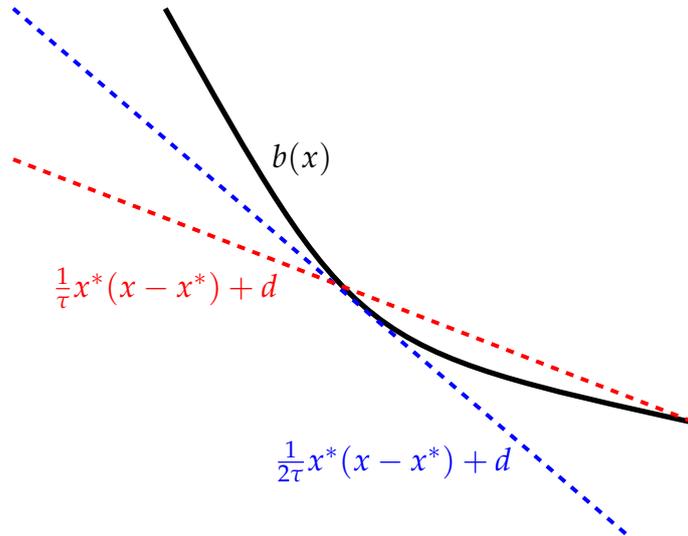


FIGURE 2.2 – La fonction $b(x)$, sa tangente, et une ligne de pente supérieure à la tangente

Maintenant, soit T un instant tel que $x(T) = \bar{x} + \delta$. Par définition de δ , on a : $T > \tau$ et $x(t) > \bar{x} + \delta$ pour $t \in [T - \tau, T[$. D'où, pour $t \in [T, T + \tau]$, on a

$$x'(t) = (b(x(t - \tau)) - d)x(t) \leq (b(x(t - \tau)) - d)\bar{x} \leq -\frac{1}{\tau\bar{x}}\delta\bar{x} = -\frac{\delta}{\tau}.$$

D'où l'on déduit que : $x(T + \tau) < x(T) - \frac{\delta}{\tau}\tau = \bar{x}$; ce qui est une contradiction.

On vient, ainsi, de vérifier que toute solution de (2.25), de condition initiale dans K_1 , doit passer à travers l'équilibre non trivial à un certain instant t_1 . Au delà de ce temps de croisement, la solution continue à décroître pendant une durée de temps de longueur τ , et alors elle commence à croître. On vérifie maintenant que la solution doit atteindre l'équilibre non trivial à nouveau. On a

$$b(x) - b(\bar{x}) \geq -\frac{1}{\tau\bar{x}}(x - \bar{x}) = \frac{1}{\tau\bar{x}(x - \bar{x})}.$$

A partir de là, pour montrer l'existence de t_2 , la démonstration suit le même cheminement que plus haut, et donc, elle est omise. \square

L'étape suivante consiste à montrer que l'équilibre \bar{x} est un point éjectif de l'opérateur solution. Pour cela, nous allons utiliser une méthode décrite par Kuang dans [9] et prouver par Chow et Hale dans [3]. Si l'on considère l'équation linéaire

$$x'(t) = -\beta x(t - \tau),$$

alors pour toute valeur propre λ , il existe une décomposition de l'espace des conditions initiales $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+) = P_\lambda \oplus Q_\lambda$ en sous-ensemble invariants sous l'opérateur de solution, où P_λ est un sous espace vectoriel généralisé engendré par la valeur propre λ . Soit π_λ la projection de ϕ sur P_λ .

Le théorème suivant sera utilisé pour montrer que l'équilibre \bar{x} est éjectif.

Théorème 2.11 *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Il existe une racine caractéristique λ avec $Re(\lambda) > 0$.*
2. *Il existe un ensemble fermé convexe K contenant \bar{x} et il existe $\delta > 0$ tels que*

$$\inf\{\|\pi_\lambda(\phi)\| : \phi \in K, \|\phi\| = \delta\} > 0.$$

3. *Il existe une fonction complètement continue $\tau : K \setminus \{\bar{x}\} \rightarrow [\alpha, \infty[$, $\alpha \geq 0$, telle que l'application définie par*

$$A\phi = x_{\tau(\phi)}(\phi), \quad \phi \in K \setminus \{\bar{x}\}, \quad \text{avec } x_{\tau(\phi)}(\phi) = x(\tau(\phi) + \phi),$$

envoie $K \setminus \{\bar{x}\}$ dans K et est complètement continue.

Alors \bar{x} est un point éjectif.

Démonstration. Comme la valeur propre λ est simple, P_λ est un espace unidimensionnel. On définit

$$\phi_1(\theta) = \frac{1}{(1 + \lambda\tau)} e^{\lambda\theta}, \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0],$$

$$\psi(s) = e^{-\lambda s}, \text{ pour } s \in [0, \tau],$$

et les formes bilinéaires Φ_1 et Ψ par

$$\Phi_1 = (\phi_1, \bar{\phi}_1) \quad \text{et} \quad \Psi = (\psi, \bar{\psi}).$$

Pour l'opérateur linéaire L défini par (2.26) et $\phi \in K_1$ on définit une mesure $\eta(\theta)$, par

$$L(\phi) = -\beta\phi(-\tau) = \int_{-\tau}^0 d\eta(\theta)\phi(\theta)$$

$$\eta(-\tau) = 0, \eta(\theta) = -\beta, \text{ pour } \theta \in]-\tau, 0].$$

On calcule maintenant la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} (\psi, \phi_1) &= \psi(0)\phi_1(0) - \int_{-\tau}^0 \int_0^\theta \psi(\xi - \theta)\phi_1(\xi)d\xi d\eta(\theta) \\ &= \gamma + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^\xi \psi(\xi - \theta)\phi_1(\xi)d\eta(\theta)d\xi \quad \text{où } \gamma = \psi(0)\phi_1(0) \\ &= \gamma - \int_{-\tau}^0 \beta\psi(\xi + \tau)\phi_1(\xi)d\xi \\ &= \gamma - \gamma\beta \int_{-\tau}^0 e^{-(\xi+\tau)\lambda} e^{\lambda\xi} d\xi \\ &= \gamma(1 - \beta\tau e^{-\lambda\tau}) = \gamma(1 + \lambda\tau) = 1. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma}(\bar{\psi}, \phi_1) &= 1 - \beta \int_{-\tau}^0 e^{-\bar{\lambda}(\xi+\tau)} e^{\lambda\xi} d\xi \\ &= 1 - \beta e^{\bar{\lambda}\tau} \left[\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} e^{(\lambda - \bar{\lambda})\xi} \right]_{-\tau}^0 \\ &= 1 - \beta \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} (e^{-\bar{\lambda}\tau} e^{-\lambda\tau}) \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} (\lambda + \beta e^{-\lambda\tau} - (\bar{\lambda} + \beta e^{-\bar{\lambda}\tau})) = 0. \end{aligned}$$

Des calculs précédents on déduit que : $(\psi, \bar{\phi}_1) = 0$ et $(\bar{\psi}, \bar{\phi}_1) = 1$.

Ainsi la forme bilinéaire (Ψ, Φ_1) est l'identité, et donc pour tout $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$, on a : $\pi_\lambda \phi = \Phi_1(\Psi, \phi)$.

Nous devons donc vérifier que

$$\inf\{\|(\psi, \phi - \bar{x})\| : \phi \in K_1, \|\phi - \bar{x}\| = \delta\} > 0.$$

Soit $\lambda = \mu + i\sigma$ et rappelons que pour $\mu > 0$, on a : $\sigma \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. On peut calculer les coefficients $(\psi, \phi - \bar{x})$, et séparer les parties réelle et imaginaire comme ceci :

$$\text{Partie réelle : } \phi(0) - \bar{x} - \beta \int_{-\tau}^0 e^{-\mu(\xi+\tau)} (\phi(\xi) - \bar{x}) \cos(\xi + \tau) \sigma d\xi \quad (2.33)$$

et

$$\text{Partie imaginaire : } \beta \int_{-\tau}^0 e^{-\mu(\xi+\tau)} (\phi(\xi) - \bar{x}) \sin(\xi + \tau) \sigma d\xi. \quad (2.34)$$

Si la borne inférieure est 0, alors il existe une suite $\phi_n \in K_1$ avec $\|\phi_n - \bar{x}\| = \delta$, et alors, les deux parties réelle et imaginaire ci-dessus s'annulent. Pour les valeurs considérées de σ et ξ , $\sin(\xi + \tau)\sigma > 0$ et borné loin de 0 quand ξ est près de 0. D'autre part, $\phi_n - \bar{x}$ est croissante, et donc l'intégral dans (2.34) ne peut être zéro que si $\|\phi_n - \bar{x}\| \rightarrow 0$; ce qui est une contradiction.

En conclusion, le point fixe \bar{x} est éjectif, et on peut alors appliquer le Théorème 1.3, et ainsi conclure que le modèle (2.25) admet des solutions périodiques quand l'équilibre est instable. \square

2.3.2 Paramètres dépendant du retard

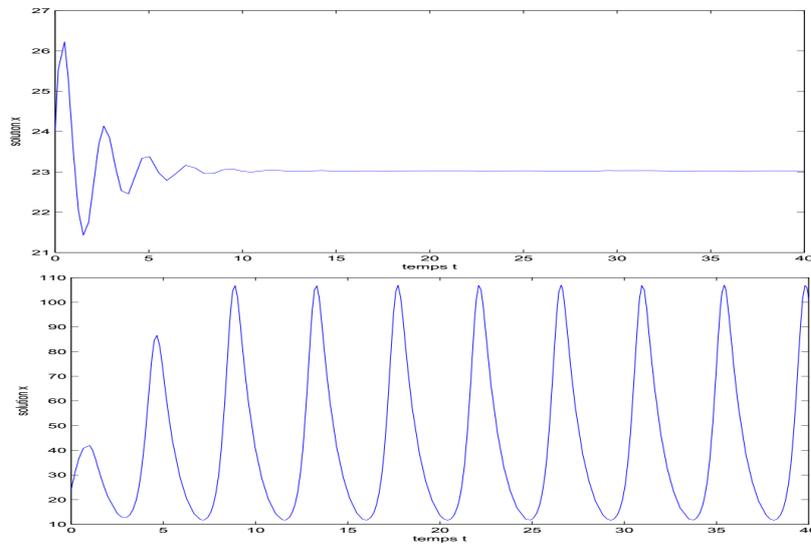


FIGURE 2.3 – Solutions de l'équation $x'(t) = (be^{-ax(t-\tau)} - d)x(t)$, avec $a = 0.1$, $b = 10$, $d = 1$, de condition initiale $\bar{x} + 10t$ dans $[-\tau, 0]$ avec $\tau_c = 0.6822$. Le graphe supérieur est pour $\tau = 0.5$, et celui, inférieur, pour $\tau = 1$.

Comme au Paragraphe 2.2.2, nous allons maintenant examiner les effets de l'introduction d'une dépendance du retard τ dans l'un des paramètres de l'équation (2.25). Ca sera le même type de dépendance que celui considéré dans le paragraphe cité plus haut, de sorte qu'on est intéressé par l'équation différentielle à retard du type

$$x'(t) = (e^{-\mu\tau}b(x(t-\tau)) - d)x(t). \quad (2.35)$$

Cette forme du modèle permet d'obtenir des résultats beaucoup plus explicites que dans le Paragraphe 2.2.2. L'équilibre non trivial est maintenant la valeur de \bar{x} pour laquelle

$$b(\bar{x}) = de^{\mu\tau},$$

et puisque b est décroissante, l'équilibre \bar{x} existe si $b(0) > de^{\mu\tau}$. Ainsi, en faisant croître le retard τ , on fait disparaître l'équilibre non trivial.

L'équation caractéristique associée à (2.35) est

$$\lambda = e^{-\mu\tau}b'(\bar{x})\bar{x}e^{-\lambda\tau},$$

qui a la même forme que l'équation caractéristique (2.27) pour le cas indépendant du retard. On peut procéder comme au paragraphe précédent pour prouver le résultat suivant.

Théorème 2.12 *Si*

$$\frac{\pi e^{\mu\tau}}{-2b'(\bar{x})\bar{x}} < \tau < \frac{1}{\mu} \ln \frac{b(0)}{d}, \quad (2.36)$$

alors l'équilibre non trivial de (2.35) existe et est instable. En outre, (2.35) admet des solutions périodiques.

Il faut rappeler que \bar{x} est une fonction décroissante de τ . La première inégalité en (2.36) est la condition de l'instabilité, obtenue du calcul du retard critique, τ_c , dans le cas indépendant du retard. La deuxième inégalité est la condition pour la positivité de l'équilibre non trivial.

Si on considère le cas où $b(x) = be^{-ax}$, alors on a : $b(0) = b$ et $\bar{x} = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{b}{de^{\mu\tau}} \right)$.

Dans ce cas la condition de l'instabilité de l'équilibre (2.36) devient

$$\tau > \frac{-\pi}{-2ad\bar{x}} = \frac{\pi}{2d \ln \left(\frac{b}{de^{-\mu\tau}} \right)} = \frac{\pi}{2d \ln \left(\frac{b}{d} \right) - \mu\tau}$$

qui s'écrit encore

$$\mu\tau^2 - \tau \ln \left(\frac{b}{d} \right) + \frac{\pi}{2d} < 0,$$

et qui est satisfaite si et seulement si

$$\frac{1}{2\mu} \left(\ln \frac{b}{d} - \sqrt{\left(\ln \frac{b}{d} \right)^2 - \frac{2\pi\mu}{d}} \right) < \tau < \frac{1}{2\mu} \left(\ln \frac{b}{d} + \sqrt{\left(\ln \frac{b}{d} \right)^2 - \frac{2\pi\mu}{d}} \right). \quad (2.37)$$

Si $\left(\ln \frac{b}{d} \right)^2 < \frac{2\pi\mu}{d}$, alors aucun changement de stabilité ne se produit.

En suite, on applique la deuxième inégalité de (2.36), qui garantit l'existence de l'équilibre positif dans (2.35). On a $\tau < \frac{1}{\mu} \ln \frac{b}{d}$. Notez que cette borne se situe dans les bornes prévues dans (2.37). En fait, c'est exactement le point médian des bornes gauche et droite. En rassemblant ces faits, on arrive au théorème suivant.

Théorème 2.13 *On considère l'équation différentielle à retard*

$$x'(t) = (be^{-\mu\tau}e^{-ax(t-\tau)} - d)x(t), \quad (2.38)$$

avec $b > d$. Si

$$\left(\ln \frac{b}{d} \right)^2 < \frac{2\pi\mu}{d}$$

alors l'équilibre non trivial est stable pour tout τ pour lesquels il existe. Autrement, pour

$$\frac{1}{2\mu} \left(\ln \frac{b}{d} - \sqrt{\left(\ln \frac{b}{d} \right)^2 - \frac{2\pi\mu}{d}} \right) < \tau < \frac{1}{\mu} \ln \frac{b}{d},$$

l'équilibre non trivial est instable, et il existe des solutions positives périodiques. Pour τ petit, l'équilibre non trivial est stable, et pour τ grand, l'équilibre n'est pas positif, et l'équilibre nul est globalement stable.

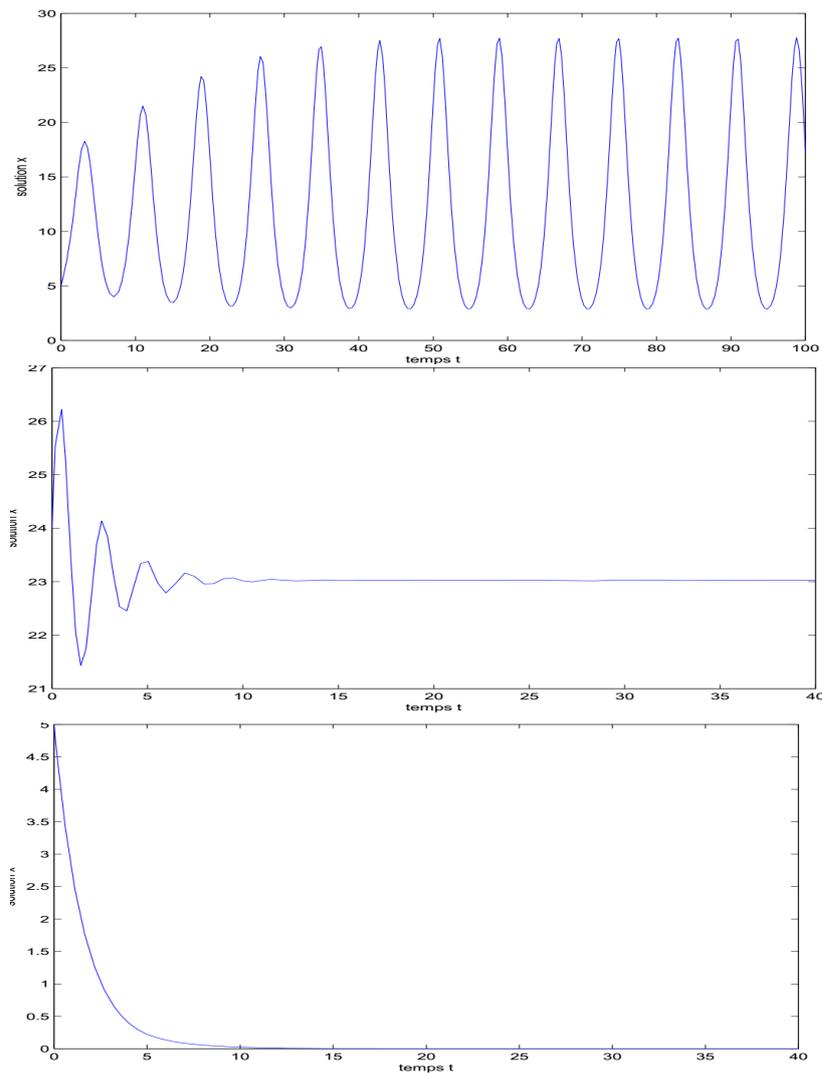


FIGURE 2.4 – Solutions de l'équation (2.35) avec $a = 0.1$, $b = 10$, $d = 1$, $\mu = 0.7$, de condition initiale constante, identiquement égale à 5, sur $[-\tau, 0]$. Les graphes sont pour $\tau = 2$, $\tau = 0.7$ et $\tau = 4$, respectivement

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Bellman and K. L. Cooke. *Differential-Difference Equations*. Academic Press, New York, 1963.
- [2] S. P. Blythe. Instability and complex dynamic behaviour in population models with long time delays. *Theor. Pop. Biol.*, 22, 1982, pp. 147-176.
- [3] S. -N. Chow and J. K. Hale. Periodic solutions of autonomous equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 66, 1978, pp. 495-506.
- [4] K. L. Cooke, P. van den Driessche, and X. Zou. Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models. *J. Math. Biol.*, 39, 1999, pp.332-352.
- [5] R. D. Driver. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [6] J. E. Forde. *Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology*. PHD thesis in Mathematics, University of Michigan, 2005.
- [7] W. S. C. Gurney, S. P. Blythe, and R. M. Nisbet. Nicholson's blowfly revisited. *Nature (London)*, 287, 1980, pp. 17-21.
- [8] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002 (third edition).
- [9] Y. Kuang. *Delay Differential Equations with Applications to Population Biology*. Academic Press, New York, 1993.
- [10] A. Lotka. *Elements of Physical Biology*. Williams and Wilkins, Baltimore, 1925.
- [11] R. M. May. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton University Press, Princeton, 1974.
- [12] A. J. Nicholson. An outline of the dynamics of animal populations. *Aust. J. Zool.*, 2, 1954, pp.9-65.
- [13] A. J. Nicholson. The self adjustment of populations of change. *Cold Spring Harb. Symp. quant. Biol.*, 22, 1957, pp. 153-173.
- [14] R. D. Nussbaum. Periodic solutions to some nonlinear autonomous functional differential equations. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 101, 1974, pp. 263-306.
- [15] M. M. Postnikov. *Stable polynomials*. Nauka, Moscou,1982.
- [16] C. E. Taylor and R. R. Sokal. Oscillation in housefly populations due to time lag. *Ecology*, 57, 1976, pp. 1060-1067.
- [17] P. J. Wangersky and W. J. Cunningham. On time lags in equations of growth. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 42, 1956, pp.699-702.

Résumé

Le principal objectif de ce mémoire est l'étude de l'existence de solutions périodiques dans diverses variantes d'un modèle mathématique, avec retard, de dynamiques de populations dans le cas d'une espèce. D'autres propriétés sont également étudiées comme la positivité des solutions et la stabilité des points d'équilibre.

Dans un premier chapitre sont rappelés certaines notions et propriétés des équations différentielles à retard et quelques autres outils qui seront utilisés dans le chapitre principal. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de quelques types d'équations différentielles à retard scalaires.

Mots clés : Equations différentielles scalaires à retard, périodicité, stabilité.

Abstract

The main purpose of this text is the study of the existence of periodic solutions for different retarded mathematical models in population dynamics in the case of one species. Other properties are also considered as the positivity of solutions and the stability of equilibrium points.

In chapter one we recall some definitions and properties of delay differential equations, together with some useful tools needed in the main chapter. The second chapter is devoted to the study of some types of scalar retarded differential equations.

Keywords : Scalar differential equations with delay, periodicity, stability.