République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bakr Belkaid- Tlemcen

Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

# Mémoire de Master

**En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques**

**Option** : Équations Différentielles Ordinaires

**Thème**

# Approche Variationnelle Pour les Solutions Presque-Périodiques des Équations Différentielles Fonctionnelles à Retard.

**Présenté par : LARBI Zakia**

**Mémoire soutenu devant le jury composé de :**

| | | |
|---|---|---|
| Mme. Naïma MERZAGUI | Pr. U.A.B.B. Tlemcen | Présidente |
| Mr.Mekki HOUBAD | Pr. U.A.B.B. Tlemcen | Examinateur |
| Mr.Mustapha YEBDRI | Pr. U.A.B.B. Tlemcen | Encadreur |

**Année universitaire 2016-2017**

***A mes chers parents, pour l'éducation qu'ils m'ont prodigué. Vous serez toujours le modèle.***

***A mes frères, mes sœurs,mes neveux ,mes nièces et toute ma famille.***

***A tous mes enseignants et mes collègues qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études.***

# Remerciements

*Je remercie Allah qui m'a donné la volonté, la patience, et surtout la santé durant toutes mes années d'étude.*

*Ma profonde reconnaissance va à mon encadreur ,Monsieur le Professeur M. YEBDRI . Je le remercie pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.*

*Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury qui me font le grand honneur d'accepter d'évaluer et examiner mon travail.*

*Je tiens également à remercier Madame le Professeur N.MERZAGUI pour avoir accepter de présider le jury de ce mémoire.*

*Je remercie vivement Monsieur le Professeur M.HOUBAD pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Je profite de cette occasion pour remercier Monsieur le chef de département B. MEBKHOUT et tous nos enseignants.*

*Je tiens à saluer tous les membres de ma promotion.*

# Table des matières

# Notations

$C(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ : espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.

$C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ : espace des fonctions $k$ fois continument dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.

$\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ : espace des formes linéaires continues de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$.

p.p. : presque périodique.

$AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ : espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.

$APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$ : espace des fonctions presque-périodiques uniformément,par rapport à un paramètre.

$B^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ : ensemble des fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.

$B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ : espace de Blot.

$L^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ : espace des fonctions p-intégrables sur $\mathbb{R}$.

$L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ : espace des fonctions localement p-intégrables.

$W^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ : espace de Sobolev, à dérivée d'ordre 1 dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

$M\{f\}$ : la moyenne temporelle.

$\overline{M}\{f\}$ : la moyenne sup.

$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ : l'opérateur de Nemytskii.

$D$ : la dérivée ordinaire.

$\nabla$ : la dérivée faible sur $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

# Introduction

Les équations différentielles à retard tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur. Elles sont apparues dans différentes disciplines scientifiques : biologie des populations, contrôle mécanique, trafic urbain..., où beaucoup de phénomènes ont trouvé dans la théorie des équations à retard, un bon moyen de modélisation. L'étude mathématique de telles équations présente donc un intérêt certain.

Une technique importante permettant de résoudre ces équations est la méthode variationnelle qui est très générales et possède une base mathématique rigoureuse.

La méthode variationnelle est un sujet traçant ses origines dans les premiers travaux d'Elsgolc et Sabbagh. Plus tard, des nouvelles améliorations ont été établis par Hughes et Sabbagh.( Pour plus de détails voir [16],[19],[24]).

De plus, un nouveau formalisme variationnel a été établi plus tard par J. Blot (Voir [7],[8],[9],[10]) afin d'étudier les solutions presque périodiques des systèmes lagrangiens forcés de la forme :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'}(x(t), x'(t)) = e(t),$$

Cette méthode consiste à construire une fonctionnelle _dite d'action moyenne_ sur un espace de Banach des fonctions presque-périodiques.

Les points critiques de cette fonctionnelle sont exactement les solutions p.p. de l'équation différentielle ci-dessus. L'étude des fonctionnelles constitue le Calcul des Variations en Moyenne Temporelle, ce qui nous permettra d'obtenir des résultats d'existence et de structure de l'ensemble des solutions.

Ce mémoire est consacré à l'étude des solutions presque-périodiques d'une classe d'équation différentielles fonctionnelles du second ordre à retard fini de la forme :

$$u''(t) = \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t). \qquad (1)$$

où $Dj, j = 1, 2$ , désigne la dérivée partielle par rapport à la j-ème composante, et e est une 'force extérieure' p.p..

En premier temps l'étude se fait sur l'espace $AP^1$ des fonctions p.p. à dérivées ordinaires p.p. au sens de Bohr . Or les propriétés topologiques de cet espace sont insuffisantes pour y développer des techniques inspirées des méthodes directes du calcul des variations. C'est pourquoi J.Blot [9] a proposé une nouvelle méthode variationnelle qui consiste à construire un espace hilbertien $B^{1,2}$ comme un espace de fonctions p.p. au sens de Besicovitch qui admettent une dérivée généralisée et une fonctionnelle sur cet espace, dont les points critiques de cette fonctionnelle se traduisent en termes de solutions p.p. faibles de l'équation (1).

Le contenu de ce mémoire étant en grande partie inspiré des travaux de M. Ayachi et J.Blot [4] et de J.Blot [9]. L'organisation de travail est la suivante :

**le chapitre 1 :** porte sur des préliminaires où on rappelle des définitions et des résultats nécessaires pour le développement de notre travail.

**Dans le chapitre 2 :** on présente quelques résultats sur les fonctions presque-périodiques au sens de Bohr ,puis on introduit les opérateurs de Nemytskii en abordant l'espace des fonctions p.p.uniformément par rapport à un paramètre.Enfin on parle des fonctions p.p. au sens de Besicovitch ce qui nous permettra de décrire l'espace de Blot.

**Dans le chapitre 3 :** on donne une approche variationnelle pour les solutions p.p. au sens de H.Bohr de l'équation (1) ,ainsi on annonce un résultat sur la structure de l'ensemble des solutions p.p. .

**Dans le chapitre 4 :** on étend le principe variationnel à l'espace de Blot, où nous établissons un résultat d'existence et de structure des solutions p.p. faibles .

# Chapitre 1

# Préliminaires

Dans ce paragraphe nous présentons les définitions et les résultats utiles pour la suite. Pour plus de détails le lecteur peut consulter [1],[12],[13] .

**Définition 1.1** *Soit $F$ une fonction différentiable définie de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$.*
*Un point $u \in \mathbb{E}$ est dit point critique pour $F$ si et seulement si $DF(u) = 0$ ;*
*où $DF$ est la différentielle de $F$ .*

**Définition 1.2** *Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach, soit $K \subset \mathbb{E}$ un sous-ensemble convexe, une fonctionnelle $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe sur $K$ si pour tous $u, v \in K$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a :*

$$F(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda.F(u) + (1 - \lambda).F(v).$$

**Définition 1.3** *Un ensemble $\mathbb{I}$ de $\mathbb{R}$ est dit relativement dense s'il existe un nombre réel $l > 0$ (dit longueur d'inclusion), tel que, tout intervalle $[a, a + l]$ de longueur $l$ de $\mathbb{R}$ contient un nombre de $\mathbb{I}$.*

**Définition 1.4** *Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$ et $\varepsilon > 0$ un nombre réel strictement positif.*
*Un nombre réel $\tau$ est une $\varepsilon$-presque-période de $f$ si on a :*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t + \tau) - f(t)\|_{\mathbb{E}} < \varepsilon.$$

**Définition 1.5** *(Fonction mesurable) Soient $\mathbb{R}^d$ , $\mathbb{R}^p$ deux espaces munis de tribus boréliennes. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite mesurable si*

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \ , f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

**Définition 1.6** *Soit $X$ un borélien de $\mathbb{R}^d$, et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On dit que $f$ est intégrable (au sens de Lebesgue) sur $X$ si $\int_X |f(x)dx| \leq \infty$.*

**Définition 1.7** *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ *une fonction mesurable , et* $p \in [1, \infty)$.
*On dit que* $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *si pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *la quantité* $\int_{-a}^{a} \|f(t)\|^p_{\mathbb{E}}\, dt$ *est finie.*

L'espace $L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est appelé alors l'espace des fonctions localement de puissance p Lebesgue-intégrables à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathbb{E}$.

**Définition 1.8** *L'espace de Sobolev* $W^{1,2}(\mathbb{R})$ *est défini par*

$$W^{1,2}(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \exists g \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})\}.$$

*Pour* $f \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ *on note* $f' = g$.

**Théorème 1.1 (Fubini)** *[1] Soit* $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction mesurable positive.Alors les fonctions* $x \in X \longmapsto \int_Y f(x,y)dy$ *et* $y \in Y \longmapsto \int_X f(x,y)dx$ *sont mesurables et :*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)(dx,dy) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)dy\right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)dx\right) dy.$$

**Théorème 1.2 (Convergence dominée)** *[1]*
*Soit* $\{f_n\}$ *une suite des fonctions intégrables telles que* $f_n \longrightarrow f$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$. *S'il existe* $g$ *une fonction intégrable telle que* $|f_n| \leq g$ *pour tout* $n$. *Alors* $f$ *est intégrable et*

$$\int f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n.$$

# Chapitre 2

# Rappel sur les fonctions presque périodiques

La notion de fonctions presque-périodiques est d'une grande importance dans l'étude des équations différentielles. La théorie des fonctions presque-périodiques se développe avec vigueur depuis une quatre vingtaine d'années environ .

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats sur les fonctions p.p. au sens de Bohr et de Besicovitch, que nous utiliserons dans la suite de ce travail. Pour plus de détails concernant les résultats cités dans ce chapitre, on peut consulter les références :[2],[5], [6], [11],[14],[18],[20],[21],[23].

$\mathbb{E}$ désigne un espace de Banach réel, et $\|.\|_{\mathbb{E}}$ sa norme.

## 2.1 Fonctions presque-périodiques au sens de Bohr

**Définition 2.1 (Bohr)** *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$. On dit que $f$ est presque-périodique au sens de Bohr si :*

*(i) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ .*

*(ii) $\forall \varepsilon > 0$, il existe un nombre $l(\varepsilon) > 0$, tel que tout intervalle $I$ de longueur $l(\varepsilon)$ contient un nombre $\tau = \tau_\varepsilon$ satisfaisant*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|_{\mathbb{E}} < \varepsilon.$$

*i.e $\forall \varepsilon > 0$, $f$ possède un ensemble de $\varepsilon$-presque-périodes relativement dense.*

On notera par $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ (ou aussi $AP^0(\mathbb{E})$) l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr à valeurs dans $\mathbb{E}$.

**Proposition 2.1** *[11] $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni de la norme de convergence uniforme :*

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(t)\|_{\mathbb{E}} \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$$

*est un espace de Banach.*

**Remarque 2.1** *Toute fonction périodique continue est presque-périodique au sens de Bohr. En effet,*
*si $f$ est une fonction $T$-périodique,alors tous les nombres de la forme $nT$ avec $n = (\pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$sont aussi des périodes de f, et donc sont des presque-périodes de f, pour tout $\varepsilon > 0$. Or l'ensemble $\{nT; n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ est relativement dense, ce qui implique que $f$ est presque-périodique au sens de Bohr.*

*Par contre la réciproque est fausse, on donne comme exemple la fonction numérique : $f(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, une somme finie de fonctions périodiques à périodes aléatoires dont les rapports sont des nombres irrationnels.*

*Du point de vue géométrique, on observe l'existence de presque périodes à partir de l'allure de sa courbe représentative donné par la figure (2.1).*

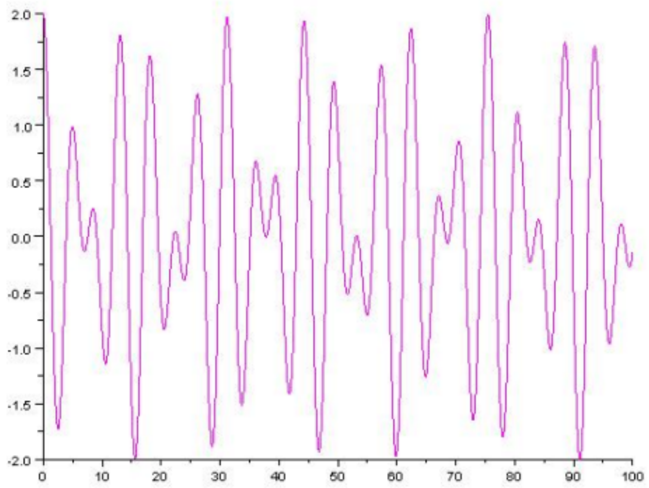


FIGURE 2.1 – Un exemple de fonction presque-périodique.

pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$,on note :

$$AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}) := \{f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \ ; \forall i \leq k, f^{(i)} \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})\}.$$

On munit l'espace $AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ de la norme définie par :

$$\|f\|_k := \sum_{i=0}^{k} \|f^{(i)}\|_\infty = \sum_{i=0}^{k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f^{(i)}(t)\|_{\mathbb{E}}.$$

On peut vérifier que l'espace $AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni de cette norme est un espace de Banach.

**Définition 2.2** *Pour $f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ :*

$$M\{f\} = M_t\{f(t)\} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt$$

*désigne la moyenne temporelle de $f$.*

**Proposition 2.2** *[2] Soit $f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$, alors $M\{f\}$ existe dans $\mathbb{E}$ et elle est invariante par translation ; i.e $M_t\{f(t+a)\} = M_t\{f(t)\}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.*

## 2.2 Opérateur de Nemytskii entre les espaces des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach, et l'application

$$\begin{aligned} F :&\mathbb{E}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{F} \\ &(x,t) \longmapsto F(x,t). \end{aligned}$$

**Définition 2.3** *On appelle opérateur de Nemytskii (ou aussi opérateur de superposition) construit sur $F$, l'opérateur $\mathcal{N}_F$ de la forme suivante :*

$$[t \longmapsto u(t)] \longmapsto \mathcal{N}_F(u) := [t \longmapsto F(u(t),t)].$$

*où $u$ est une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.*

La question qui se pose : "Sous quelles conditions sur F, peut on affirmer que les images de fonctions presque-périodiques par cet opérateur $\mathcal{N}_F$ sont aussi presque-périodiques ?".
Pour répondre à cette question, on introduit l'espace des fonctions presque-périodiques uniformément par rapport à un paramètre.
On rappelle la définition d'une fonction presque-périodique uniformément par rapport à un paramètre.

**Définition 2.4** *[25] Soit $F : \mathbb{E}\times\mathbb{R} \to \mathbb{F}$. On dit que $F$ est presque-périodique uniformément par rapport à un paramètre si $F$ est déjà continue et si elle satisfait la condition suivante :*
*Pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute partie compacte $K$ dans $\mathbb{E}$, on peut trouver $\ell = \ell(\varepsilon, K)$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $\tau \in [\alpha, \alpha+\ell]$ vérifiant :$\|F(x,t+\tau)-F(x,t)\|_{\mathbb{F}} \leq \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in K$.*

L'ensemble des fonctions presque-périodiques uniformément par rapport à un paramètre sera désigné par $APU(\mathbb{E}\times\mathbb{R},\mathbb{F})$.

**Proposition 2.3** *[10]*

1. *Si l'on se donne une fonction $F \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$, alors l'opérateur de Nemytskii construit sur F, envoie continûment l'espace $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ sur l'espace $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$, autrement dit, $\mathcal{N}_F \in C(AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}), AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F}))$.*
2. *On suppose que $F \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$ telle que la dérivée partielle par rapport à la variable vectorielle x, à savoir $D_xF(x,t)$ existe pour tout $(x,t) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R}$ et que $D_xF \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$.([1])*
   *Alors, l'opérateur de Nemytskii construit sur F, $\mathcal{N}_F : AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \to AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ est continûment différentiable sur $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.*
   *De plus, pour $t \in \mathbb{R}$ et toutes fonctions $u, h \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, sa différentielle est donnée par $(D\mathcal{N}_F(u).h)(t) = D_xF(u(t),t).h(t)$.*

## 2.3 Fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch

**Définition 2.5** *Pour p=1,2, on note $\mathfrak{B}^p(\mathbb{E})$ la fermeture de $AP^0(\mathbb{E})$ dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ ([2]) pour la semi-norme*

$$\overline{M}\{\|f\|^p\}^{\frac{1}{p}} := \left(\lim_{T \longrightarrow \infty} \sup \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

*et $B^p(\mathbb{E})$ l'espace quotient $\mathfrak{B}^p(\mathbb{E})/\sim_p$ , où pour $f, g \in \mathfrak{B}^p(\mathbb{E})$ : $f \sim_p g$ est la relation d'équivalence $\overline{M}\{\|f-g\|^p\}^{\frac{1}{p}} = 0$.*

Sur cet espace, la semi-norme (2.1) devient une norme ([3]) et d'où l'obtention d'une structure vectorielle normée $(B^p(\mathbb{E}), M\{\|.\|^p\}^{\frac{1}{2}})$.

où

$$M\{\|f\|^p\}^{\frac{1}{p}} := \left(\lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$B^p(\mathbb{E})$ s'appelle l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch.

**Proposition 2.4** *[23]*

1. *$B^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni de la norme $\|f\|_p := M\{\|f\|^p_{\mathbb{E}}\}^{\frac{1}{p}}$, est un espace de Banach.*
2. *Lorsque $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert, $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni du produit scalaire*

   $$< f, g >_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})} := M\{< f, g >_{\mathbb{E}}\}.$$

   *est un espace de Hilbert.*

---

1. $\mathcal{L}(E, \mathbb{F})$ désigne l'espace des applications linéaires continues de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.
2. $\overline{AP^0}(\mathbb{E})$ le plus petit fermé de $L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ contenant $AP^0(\mathbb{E})$ .
3. Une semi-norme $\mathcal{N} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme si et seulement si elle vérifie la propriété supplémentaire suivante : $\forall x \in \mathbb{E}\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_{\mathbb{E}}$.

**Proposition 2.5** *[23][Inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski].*
*On a l'inclusion suivante :* $B^2(\mathbb{E}) \subset B^1(\mathbb{E})$. *De même, l'inégalité* $\|f\|_{B^1} \leq \|f\|_{B^2}$ *est vérifiée pour toute fonction* $f \in B^2(\mathbb{E})$ .

**Théorème 2.1** *[6] Si* $f \in B^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *alors sa moyenne existe, est finie, et vérifie*

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)dt = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} f(t)dt = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} f(t)dt.$$

## 2.4 Espaces de Sobolev-Besicovitch

On définit l'espace $B^{1,2}$ , inspiré de l'espace classique de Sobolev $W^{1,2}$ comme un espace des fonctions presque-périodiques de Besicovitch qui admettent une dérivée généralisée( [4]) symbolisée par la lettre $\nabla$ . Cet espace a été construit par J. Blot dans [9].

**Définition 2.6** $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *est l'espace des* $f \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *tels que :*

$$\nabla f := \lim_{r \longrightarrow 0} (f(. + r) - f(.)).$$

*existe dans* $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

$B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est dit **l'espace de Blot**.On note :

$$B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E}) = \{f \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \nabla f \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})\}.$$

On définit le produit scalaire : $< f, g >_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})} := < f, g >_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})} + < \nabla f, \nabla g >_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})}$.

On munit $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ de ce produit scalaire, ce qui en fait un espace de Hilbert (voir [9]) sa norme euclidienne associée est notée $\|.\|_{1,2}$.

Ainsi on définit l'espace $B^{2,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ par :

$$B^{2,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E}) := \{f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \nabla^2 f := \nabla(\nabla f) \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})\}.$$

Si on munit $B^{2,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ du produit scalaire définit par :

$$< f, g >_{B^{2,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})} := < f, g >_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})} + < \nabla f, \nabla g >_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})} .$$

on obtient un espace de Hilbert et sa norme euclidienne associée est notée $\|.\|_{2,2}$.

**Proposition 2.6** *[9] Soit* $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. *Alors* $AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *est dense dans* $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

Ce résultat permet de considérer $\left(B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E}), < .,. >_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})}\right)$ comme le complété hilbertien de $AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

4. une dérivée généralisée : est une dérivée au sens de distribution.

**Proposition 2.7** *[9] Les propriétés suivantes sont vraies :*

1. *Si* $f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *alors* $M\{\nabla f\} = 0$.
2. *Si* $f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *et* $g \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. *Alors :* $< f, g >_{\mathbb{E}} \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Proposition 2.8** *[9] Soit* $f, g \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $g \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *et* $\nabla g \sim_2 f$.
2. $\forall h \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{E}), M\{< f, h >_{\mathbb{E}}\} = -M\{< g, h' >_{\mathbb{E}}\}$.

# Chapitre 3

# Approche variationnelle pour les solutions presque périodiques fortes

Dans ce chapitre, nous étudions les solutions presque-périodiques de l'équation différentielle fonctionnelle du second ordre à retard définie par :

$$u''(t) = \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t). \qquad (3.1)$$

où $f : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ , $\mathbb{E}$ est un espace de Banach et $r \in (0, \infty)$. $D_j, j = 1, 2$, désigne la dérivée partielle par rapport à la j-ème composante *et* $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ est une fonction presque-périodique .

Cette approche variationnelle caractérise les solutions presque-périodiques (fortes ou faibles) de (3.1) comme points critiques de la fonctionnelle :

$$u \longmapsto M_t\{\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta))d\theta + u(t).e(t)\}$$

sur un espace de Banach des fonctions presque-périodiques.

Le contenu des deux chapitres suivants étant inspiré des travaux de M. Ayachi et J.Blot dans :[3],[4] ,[5], [9].

**Définition 3.1** *Une solution p.p. forte de (3.1) est une fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ qui est deux fois dérivable (dans le sens ordinaire) avec u, u' et u" sont des fonctions p.p. au sens de Bohr, telle que l'équation (3.1) est satisfaite pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

**Lemme 3.1** *On définit l'application :* $F_0 \ : \ \mathbb{E}\times C([-r,0],\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *par :*

$$F_0(x,\phi) := \int_{-r}^{0} f(x,\phi(\theta))d\theta.$$

*Si* $f \in C^1(\mathbb{E}\times\mathbb{E},\mathbb{R})$ *alors :* $F_0$ *est de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{E}\times\ C([-r,0],\mathbb{E})$ *et* $DF_0(x,\phi)(y,\psi) = \int_{-r}^{0} D_1 f(x,\phi).y d\theta \ + \ \int_{-r}^{0} D_2 f(x,\phi).\psi(\theta)d\theta.$

**Démonstration**

On introduit l'opérateur linéaire : $I^0 : C([-r,0],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, défini par :

$$I^0(\omega) := \int_{-r}^{0} \omega(t)dt.$$

On a :

$$\begin{aligned} |I^0(\omega)| &= |\int_{-r}^{0} \omega(t)dt| \\ &\leq \int_{-r}^{0} |\omega(t)|dt \\ &\leq r.\sup_{t\in[-r,0]} |\omega(t)| = r.\|\omega\|_{C^0([-r,0],\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Ainsi $I_0$ est un opérateur linéaire continu , et pour tout $\omega, h \in C([-r,0],\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} |I^0(\omega+h) - I^0(\omega)| &= |\int_{-r}^{0} (\omega+h)(t)dt - \int_{-r}^{0} \omega(t)dt| \\ &= |\int_{-r}^{0} h(t)dt| \end{aligned}$$

$$|I^0(\omega+h) - I^0(\omega) - I^0(h)| = 0.$$

Donc :$DI^0(\omega).h = I^0(h)$ et $I^0$ est de classe $C^1$.
Puisque $f \in C^1(\mathbb{E}\times\mathbb{E},\mathbb{R})$ , les deux dérivées partielles de f sont continues, ainsi l'opérateur de Nemytskii suivant construit sur f :

$$\mathcal{N}_f^0 : C([-r,0],\mathbb{E}) \times C([-r,0],\mathbb{E}) \longrightarrow C([-r,0],\mathbb{E}) \ ,$$

donné par

$$\mathcal{N}_f^0(\phi,\psi) := [\theta \longrightarrow f(\phi(\theta),\psi(\theta))],$$

est de classe $C^1$et pour tout $\phi, \psi, h_1 \ et \ h_2$ dans $C([-r,0],\mathbb{E})$ on a :

$$D\mathcal{N}_f^0(\phi,\psi).(h_1,h_2) := D_1 f(\phi,\psi).h_1 + D_2 f(\phi,\psi).h_2.$$

L'opérateur linéaire continu

$$A^0 : \mathbb{E}\times C([-r,0],\mathbb{E}) \longrightarrow C([-r,0],\mathbb{E}) \times C([-r,0],\mathbb{E}) \ ,$$

défini par

$$A^0(x,\phi) = (x,\phi)\ ,$$

est de classe $C^1$, et pour tout $x, h_1 \in \mathbb{E}, \phi, h_2 \in C([-r,0],\mathbb{E})$,on a :

$$DA^0(x,\phi).(h_1,h_2) = A^0(h_1,h_2)\ .$$

Ainsi, $F_0 := I^0 \circ \mathcal{N}_f^0 \circ A^0$ est de classe $C^1$ comme composé de trois opérateurs de classe $C^1$, et en utilisant la formule de la dérivation en chaîne( [1]), on obtient :

$$DF_0(x,\phi).(y,\psi) = I^0\left(D\mathcal{N}_f^0(A^0(x,\phi)).A^0(y,\psi)\right)\ .$$

On sait que
$D\mathcal{N}_f^0(A^0(x,\phi)).A^0(y,\psi) = [\theta \longrightarrow D_1f(x,\phi(\theta)).y + D_2f(x,\phi(\theta)).\psi(\theta)]$,
ainsi on obtient la formule annoncée.

**Lemme 3.2** *L'opérateur $S^0 : AP^0(\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R})$, défini par :*
*$S^0(u) := [t \longrightarrow \int_{-r}^0 f(u(t),u(t+\theta))d\theta]$ est de classe $C^1$,et*

$$DS^0(u)h = [t \longrightarrow \int_{-r}^0 D_1f(u(t),u(t+\theta)).h(t)d\theta + \int_{-r}^0 D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta].$$

**Démonstration**
Sachant que $AP^0(\mathbb{E}\times C([-r,0],\mathbb{E})) \equiv AP^0(\mathbb{E}) \times AP^0(C([-r,0],\mathbb{E}))$ , et que l'application $F_0$ du Lemme 3.1 est de classe $C^1$,alors l'opérateur de Nemytskii construit sur $F_0$ ,

$$\mathcal{N}_{F_0}^0 : AP^0(\mathbb{E}) \times AP^0(C([-r,0],\mathbb{E})) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R})\ ,$$

défini par

$$\mathcal{N}_{F_0}^0(u,\phi) := [t \longrightarrow F_0(u(t),\phi(t)) = \int_{-r}^0 f(u(t),\phi(t)(\theta))d\theta],$$

est de classe $C^1$.
On introduit l'opérateur ;

$$T^0 : AP^0(\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(C([-r,0],\mathbb{E}))\ ,$$

défini par

$$T^0(u) := [t \longrightarrow u_t].\ ([2])$$

On a

$$\|T^0(u)\|_\infty = \|u\|_\infty,$$

1. La dérivation en chaîne est la dérivation des fonctions composées.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}, u_t \in C([-r,0],\mathbb{E})$ définie par $u_t(\theta) := u(t+\theta)$ pour tout $\theta \in [-r,0]$.

donc $T^0$ est un opérateur linéaire continu, et donc de classe $C^1$.
Sachant $S^0 = \mathcal{N}^0_{F_0} \circ (Id, T^0)$, $S^0$ est de classe $C^1$ comme composé d'opérateurs de classe $C^1$, et en utilisant la formule de la dérivation en chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned} DS^0(u).h &= D\mathcal{N}^0_{F_0}(Id, T^0)(u).D(Id, T^0)(h) \\ &= D\mathcal{N}^0_{F_0}(u, \tilde{u}).(h, \tilde{h}), \end{aligned}$$

( [3]) et en utilisant le Lemme 3.1 on obtient :

$$\begin{aligned} (DS^0(u).h)(t) &= \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), \tilde{u}(t)(\theta)).h(t)d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), \tilde{u}(t)(\theta)).\tilde{h}(t)(\theta)d\theta \\ &= \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta. \end{aligned}$$

**Proposition 3.1** *Si $f \in C^1(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$ , la fonctionnelle $J_0 : AP^1(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :*

$$J_0(u) := M_t\{\tfrac{1}{2}|u'(t)|^2 + \textstyle\int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta))d\theta + u(t).e(t)\}$$

*est de classe $C^1$, et pour tout $u, h \in AP^1(\mathbb{E})$ on a :*

$$\begin{aligned} DJ_0(u).h = M_t\{u'(t).h'(t) &+ \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta + e(t).h(t)\} \end{aligned}$$

**Démonstration**
Soit la fonctionnelle $\mathcal{Q}_0 : AP^1(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{Q}_0(u) := M_t \left\{ \frac{1}{2}|u'(t)|^2 \right\}.$$

L'application $q : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $q(x) := \frac{1}{2}|x|^2 = \frac{1}{2} < x.x >$ , est de classe $C^1$ comme composée d'une application linéaire continue et d'une forme bilinéaire continue.
Donc l'opérateur de Nemytskii :

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}^0_q : AP^0(\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R}), \\ &\mathcal{N}^0_q(\phi) := \left[ t \longrightarrow \frac{1}{2}|\phi(t)|^2 \right], \end{aligned}$$

est aussi de classe $C^1$ .
L'opérateur :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} : AP^1(\mathbb{E}) &\longrightarrow AP^0(\mathbb{E}), \\ u &\longmapsto \frac{d}{dt}(u) = u', \end{aligned}$$

est linéaire continu, donc il est de classe $C^1$.

3. $\tilde{u}$ :est la fonction définie par $\tilde{u}(t)(\theta) := u(t+\theta)$.

La fonctionnelle $M^0 : AP^0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $M^0(\phi) := M_t\{\phi(t)\}$ est linéaire.
On a :

$$|M_t\{\phi(t)\}| \leq M_t\{|\phi(t)|\} \leq \|\phi\|_\infty.$$

implique que la fonctionnelle $M^0$ est continue, donc elle est de classe $C^1$. Sachant que

$$\mathcal{Q}_0 = M^0 \ o\ \mathcal{N}_q^0 \ o\ \frac{d}{dt},$$

$\mathcal{Q}_0$ est de classe $C^1$ comme composée d'applications de classe $C^1$, et en utilisant la formule de la dérivation en chaîne on obtient pour tout $u, h \in AP^1(\mathbb{E})$ :

$$D\mathcal{Q}_0(u).h = M_t\{u'(t).h'(t)\}. \tag{3.2}$$

On considère la fonctionnelle $\Phi_0 : AP^1(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi_0(u) := M_t\left\{\int_{-r}^0 f(u(t), u(t+\theta))d\theta\right\}.$$

Soit l'opérateur linéaire continu :

$$\begin{aligned} A^0 : AP^1(\mathbb{E}) &\longrightarrow AP^0(\mathbb{E}) \\ u &\longmapsto A^0(u) = u, \end{aligned}$$

par conséquent $A^0$ est de classe $C^1$.
Et soit l'opérateur $S^0$ mentionné dans le lemme 3.2

$$\begin{aligned} S^0 : &AP^0(\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R}) \\ &u \longrightarrow \left[t \longrightarrow \int_{-r}^0 f(u(t), u(t+\theta))d\theta\right]. \end{aligned}$$

Sachant que : $\Phi_0 = M^0 \circ S^0 \circ A^0$, Donc $\Phi_0$ est de classe $C^1$, comme composée d'applications de classe $C^1$.
En utilisant la formule de la dérivation en chaîne et le Lemme 3.2, on obtient pour tout $u, h \in AP^1(\mathbb{E})$

$$\begin{aligned} D\Phi_0(u).h = M_t\{&\int_{-r}^0 D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &+ \int_{-r}^0 D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

On considère la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 : AP^0(\mathbb{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \mathcal{L}_0(u) = M_t\{u(t).e(t)\}, \end{aligned}$$

Notons que $\mathcal{L}_0$ est linéaire continue, et par conséquent elle est de classe $C^1$, et on a pour tout $u, h \in AP^0(\mathbb{E})$

$$D\mathcal{L}_0(u).h = M_t\{h(t).e(t)\}. \tag{3.4}$$

Sachant que $J_0 = \mathcal{Q}_0 + \Phi_0 + \mathcal{L}_0$, $J_0$ est de classe $C^1$ comme somme de trois fonctionnelles de classe $C^1$, et en utilisant (3.2),(3.3),(3.4) on obtient :

$$\begin{aligned} DJ_0(u).h = M_t \Big\{ & u'(t).h'(t) + \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t) d\theta \\ & + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta) d\theta + e(t).h(t) \Big\}. \end{aligned}$$

pour tout $u, h \in AP^1(\mathbb{E})$.

**Lemme 3.3** *Si $f \in C^1(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$ ,alors on a l'égalité suivante :*

$$M_t \left\{ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta) d\theta \right\} = M_t \left\{ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t) d\theta \right\}.$$

**Démonstration**

La démonstration est basée sur le théorème de Fubini et le théorème de Lebesgue.

Pour $f \in C^1(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$, la fonction

$$[(t, \theta) \longrightarrow D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)]$$

est continue sur $\mathbb{R} \times [-r, 0]$ , et par suite elle est intégrable au sens de Lebesgue et en utilisant le théorème de Fubini , on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left( \int_{-r}^{0} D\ _2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta) d\theta \right) dt \\ & \qquad = \int_{-r}^{0} \left( \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} D2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta) dt \right) d\theta. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Posons

$$g_T(\theta) := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta) d\theta.$$

Sachant que $[t \longrightarrow D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)]$ appartient à $AP^0(\mathbb{R})$, il en résulte pour tout $\theta \in [-r, 0]$ :

$$\lim_{T \to \infty} g_T(\theta) = M_t \{ D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta) \}.$$

Par ailleurs, sachant que $u, h \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, on a $\overline{u(\mathbb{R})}$ et $\overline{h(\mathbb{R})}$ sont des compacts [11] , et puisque l'application

$$[(x, y, z) \longrightarrow D_2 f(x, y).z]$$

est continue sur le compact $\overline{u(\mathbb{R})} \times \overline{u(\mathbb{R})} \times \overline{h(\mathbb{R})}$, donc elle est bornée, et par conséquent on a :

$$\sup_{\theta \in [-r, 0]} \sup_{t \in \mathbb{R}} |D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)| := \delta \leq \infty,$$

ce qui implique que $|g_T(\theta)| \leq \delta$ pour tout $T > 0, \theta \in [-r, 0]$. Ainsi toutes les hypothèses du théorème de la convergence dominée de Lebesgue sont satisfaites, donc on obtient :

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-r}^{0} g_T(\theta)d\theta = \int_{-r}^{0} \lim_{T\to\infty} g_T(\theta)d\theta. \tag{3.6}$$

En utilisant (3.5) et (3.6) , on obtient :

$$\begin{aligned}
M_t\{\int_{-r}^{0} & D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left( \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta \right) dt. \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_{-r}^{0} \left( \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} D2f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)dt \right) d\theta. \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_{-r}^{0} g_T(\theta)d\theta. \\
&= \int_{-r}^{0} \lim_{T\to\infty} g_T(\theta)d\theta. \\
&= \int_{-r}^{0} M_t\{D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)\}d\theta.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
M_t\{\int_{-r}^{0} & D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\} \\
&= \int_{-r}^{0} M_t\{D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)\}d\theta.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En utilisant un raisonnement similaire on obtient :

$$\begin{aligned}
M_t\{\int_{-r}^{0} & D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)d\theta\} \\
&= \int_{-r}^{0} M_t\{D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)\}d\theta.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Sachant que la moyenne temporelle est invariante par translation , on obtient, pour tout $\theta \in [-r, 0]$, l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
M_t\{D_2 f(u(t), & u(t+\theta)).h(t+\theta)\} \\
&= M_t\{D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)\}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

En utilisant (3.7), (3.8), et (3.9) on obtient :

$$\begin{aligned}
M_t\{\int_{-r}^{0} & D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\} \\
&= M_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)d\theta\}.
\end{aligned}$$

**Théorème 3.1 (Formulation variationnel)**
*Si* $f \in C^1(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$ *,alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i)* $DJ_0(u) = 0$ *; i.e. u est un point critique de* $J_0$ *dans* $AP^1(\mathbb{E})$.
*(ii) u est une solution presque-périodique forte de l'équation (3.1).*

Avant de démontrer le Théorème 3.1 , on rappelle sans démonstration la proposition suivante due à J. Blot ( [7]).

**Proposition 3.2** *Si* $l \in AP^1(\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{R}))$ *et* $y \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *,alors :*

$$M\{l.y'\} = -M\{l'.y\}.$$

**Démonstration du théorème**
Supposons (i) et montrons (ii).
D'après la Proposition 3.1, la fonctionnelle $J_0$ est de classe $C^1$ et

$$\begin{aligned} DJ_0(u).h = M_t\{u'(t).h'(t) &+ \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta + e(t).h(t)\} \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 3.3, on obtient :

$$\begin{aligned} DJ_0(u).h &= M_t\{u'(t).h'(t) + \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)d\theta + e(t).h(t)\}. \\ &= M_t\{u'(t).h'(t) + [\int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t)].h(t).\} \end{aligned}$$

ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} DJ_0(u).h = M_t \Big\{ u'(t).h'(t) + \Big[ \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta \\ + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t) \Big] .h(t). \Big\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Soit :

$$p(t) := \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t).$$

On a bien : $p \in AP^0(\mathbb{E})$ d'après le lemme 3.2, Lorsque $DJ_0(u) = 0$, en utilisant (3.10) on a :

$$M_t\{u'(t).h'(t)\} = -M_t\{p(t).h(t)\}$$

pour tout $h \in AP^1(\mathbb{E})$, en utilisant la proposition(4.1) on obtient :

$$M\{u'.h'\} = -M\{u''.h\}$$

Donc on aura :

$$M_t\{u''(t).h(t)\} = M_t\{p(t).h(t)\},$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} 0 &= M_t\{u''(t).h(t) - p(t).h(t)\} \\ &= M_t\{(u''(t) - p(t)).h(t)\}. \end{aligned}$$

Donc on obtient que $u \in AP^0(\mathbb{E})$, et $u''(t) = p(t)$.
Supposons (ii), montrons (i).
Si u est une solution p.p. forte de (3.1), alors on a $u'' = p$. Sachant que $M\{l.y'\} = -M\{l'.y\}$ pour tout $l \in AP^1(\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{R}))$ et $y \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, en utilisant (3.10) on obtient, pour tout $h \in AP^1(\mathbb{E})$

$$\begin{aligned} 0 &= M\{(u'' - p).h\} \\ &= M\{(u''h - p).h\} \\ &= M\{u'.h' + p.h\} \\ &= DJ_0(u).h. \end{aligned}$$

Ainsi $DJ_0(u) = 0$.

**Théorème 3.2** *Si $f \in C^1(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$ et si de plus on suppose que f est une fonction convexe, alors l'ensemble des solutions p.p. fortes de (3.1) est un sous ensemble convexe de $AP^2(\mathbb{E})$.*

**Démonstration**
La fonctionnelle $\mathcal{Q}_0$introduite dans la démonstration de la Proposition 3.1

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 :& AP^1(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & u \longmapsto M_t\left\{\frac{1}{2}|u'(t)|^2\right\}. \end{aligned}$$

est convexe.En effet ,on peut vérifier facilement que pour tout $u, v \in AP^1(\mathbb{E})$ *et* $\lambda \in ]0,1[$ *on a* :

$$\begin{aligned} M\left\{\frac{1}{2}|\lambda.u' + (1-\lambda)v'|^2\right\} &\leq \lambda^2 M\left\{\frac{1}{2}|u'|^2\right\} + (1-\lambda)^2 M\left\{\frac{1}{2}|v'|^2\right\} \\ &\leq \lambda M\left\{\frac{1}{2}|u'|^2\right\} + (1-\lambda) M\left\{\frac{1}{2}|v'|^2\right\}. \end{aligned}$$

Lorsque f est convexe, pour tout $X, Y \in \mathbb{E} \times \mathbb{E},$ *et* $\lambda \in ]0,1[,$ on a :

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$

ainsi pour tout $u, v \in AP^0(\mathbb{E})$ $et$ $\theta \in [-r, 0]$ on a :

$$
\begin{aligned}
&f(\lambda(u(t), u(t+\theta)) + (1-\lambda)(v(t), v(t+\theta))) \\
&\qquad = f(\lambda u(t) + (1-\lambda)v(t), \lambda u(t+\theta) + (1-\lambda)v(t+\theta)) \\
&\qquad \leq \lambda f(u(t), u(t+\theta)) + (1-\lambda) f(v(t), v(t+\theta)),
\end{aligned}
$$

en utilisant la monotonie et la linéarité de l'intégrale on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\int_{-r}^{0} f(\lambda u(t) + (1-\lambda)v(t), \lambda u(t+\theta) + (1-\lambda)v(t+\theta)) d\theta \\
&\qquad \leq \lambda \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta)) d\theta + (1-\lambda) \int_{-r}^{0} f(v(t), v(t+\theta)) d\theta,
\end{aligned}
$$

enfin en utilisant la monotonie et la linéarité de la moyenne on obtient :

$$
\begin{aligned}
&M_t\{\int_{-r}^{0} f(\lambda u(t)+(1-\lambda)v(t), \lambda u(t+\theta) + (1-\lambda)v(t+\theta)) d\theta\} \\
&\qquad \leq \lambda M_t \left\{ \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta)) d\theta \right\} + (1-\lambda) M_t \left\{ \int_{-r}^{0} f(v(t), v(t+\theta)) d\theta \right\},
\end{aligned}
$$

Ainsi on a démontré que pour tout $u, v \in AP^0(\mathbb{E})$ $et$ $\theta \in [-r, 0]$ , la fonctionnelle

$$
\begin{aligned}
\Phi_0 : AP^1(\mathbb{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
u &\longmapsto M_t \left\{ \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta)) d\theta \right\}.
\end{aligned}
$$

introduite dans la démonstration de la Proposition 3.1 vérifie :

$$\Phi_0(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda \Phi_0(u) + (1-\lambda)\Phi_0(v)$$

ce qui implique que la fonctionnelle $\Phi_0$ est convexe.
Il est clair que la fonctionnelle $\mathcal{L}_0$ introduite dans la démonstration de la Proposition 3.1

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 : AP^0(\mathbb{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
u &\longmapsto \mathcal{L}_0(u) = M_t\{u(t).e(t)\},
\end{aligned}
$$

est convexe.
Sachant que

$$J_0 = \mathcal{Q}_0 + \Phi_0 + \mathcal{L}_0,$$

$J_0$ est convexe comme somme de trois fonctionnelles convexes. Ainsi $DJ_0(u) = 0$ est équivalente à $J_0(u) = inf J_0(AP^1(\mathbb{E}))$ [15], et l'ensemble

$$\{u \in AP^1(\mathbb{E}) : J_0(u) = inf J_0(AP^1(\mathbb{E}))\}$$

est convexe.
Par conséquent

$$\{u \in AP^1(E) : DJ_0(u) = 0\}$$

est convexe, et on obtient la conclusion en utilisant le Théorème 3.1.

# Chapitre 4

# Approche variationnelle pour les solutions presque périodiques faibles

Dans cette section nous étudions les solutions p.p. faibles de (3.1).

**Définition 4.1** *Une solution p.p. faible de (3.1) est une fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ qui est p.p. au sens de Besicovitch $u \in B^{2,2}(\mathbb{E})$, et qui possède une dérivée généralisée du premier ordre et du second ordre, telle que l'équation :*

$$\nabla^2 u = \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + \ e(t),$$

*est satisfaite dans $B^2(\mathbb{E})$.*

Nous commençons par établir deux lemmes concernant les propriétés générales des fonctions p.p. au sens de Besicovitch.

**Lemme 4.1** *Soit $u \in B^2(\mathbb{E})$ Alors les deux égalités suivantes sont vérifiées*

$$\begin{aligned} M_t \left\{ \int_{-r}^{0} |u(t+\theta)|^2 d\theta \right\} &= \int_{-r}^{0} M_t \left\{ |u(t+\theta)|^2 \right\} d\theta \\ &= r.M_t \left\{ |u(t)|^2 \right\}. \end{aligned}$$

**Démonstration**

Sachant que $u \in B^2(\mathbb{E})$ , $M_t\{|u(t)|^2\} = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt$ existe dans $\mathbb{R}_+$,
ainsi on a :

$$\delta := \sup_{T \geq 1} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt < \infty$$

Pour tout $\theta \in [-r, 0]$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T+\theta}^{T+\theta}|u(s)|^2ds \\
&\leq \frac{1}{2T}\int_{-T-r}^{T+r}|u(t)|^2dt \\
&\leq \frac{1}{2T}\int_{-(T+r)}^{T+r}|u(t)|^2dt \\
&\leq \frac{2(T+r)}{2T}\frac{1}{2(T+r)}\int_{-(T+r)}^{T+r}|u(t)|^2dt \\
&\leq (1+\frac{r}{T}).\delta \leq (1+r).\delta := \delta_1.
\end{aligned}$$

donc on a démontré :

$$\begin{cases} \exists \delta_1 > 0, \forall \theta \in [-r, 0], \forall T \geq 1, \\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2dt \leq \delta_1 < \infty. \end{cases} \tag{4.1}$$

Pour tout $T \geq 1$ on définit $\Phi_T : [-r, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$, en notant

$$\Phi_T(\theta) := \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2dt$$

Sachant que $\Phi_T(\theta) = \frac{1}{2T}\int_{-T+\theta}^{T+\theta}|u(s)|^2ds$, on voit que $\Phi_T$ est absolument continue sur $[-r, 0]$ et par conséquent on obtient $\Phi_T \in L^1([-r, 0], \mathbb{R})$.

Si $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, pour tout $\theta \in [-r, 0]$, en utilisant le théorème de Fubini pour les fonctions positives mesurables , on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]\times[-r,0]}|u(t+\theta)|^2dtd\theta &= \int_{[-r,0]}\left(\int_{[a,b]}|u(t+\theta)|^2dt\right)d\theta \\
&= \int_{[-r,0]}\left(\int_{[a,b]+\theta}|u(s)|^2ds\right)d\theta \\
&\leq \int_{[-r,0]}\left(\int_{[a,b]+[-r,0]}|u(s)|^2ds\right)d\theta \\
&= r.\int_{[a,b]+[-r,0]}|u(s)|^2ds \\
&\leq \infty.
\end{aligned}$$

sachant que $|u|^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, et sachant que $[a, b] + [-r, 0]$ est compact. Ainsi on a démontré :

$$\left[(t, \theta) \longrightarrow |u(t+\theta)|^2\right] \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [-r, 0], \mathbb{R}_+). \tag{4.2}$$

Donc en utilisant le théorème de Fubini , pour tout $T > 0$ on obtient

$$\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)|^2d\theta\right)dt = \int_{-r}^{0}\left(\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2dt\right)d\theta. \tag{4.3}$$

Sachant que $u \in B^2(\mathbb{E})$, en utilisant l'invariance de la moyenne temporelle par translation, on obtient pour tout $\theta \in [-r, 0]$ :

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} \Phi_T(\theta) = M_t \left\{ |u(t+\theta)|^2 \right\} = M_t \left\{ |u(t)|^2 \right\}.$$

La constante $\delta_1$ est intégrable sur $[-r, 0]$ . Donc en utilisant (4.1), on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue , pour obtenir

$$\int_{-r}^{0} \lim_{T \longrightarrow \infty} \Phi_T(\theta) d\theta = \lim_{T \longrightarrow \infty} \int_{-r}^{0} \Phi_T(\theta) d\theta,$$

ce qui implique, en utilisant (4.3), que

$$\int_{-r}^{0} M_t \left\{ |u(t+\theta)|^2 \right\} d\theta = M_t \left\{ \int_{-r}^{0} |u(t+\theta)|^2 d\theta \right\}.$$

Ainsi on a démontré la première égalité.
Pour démontrer la deuxième égalité, il suffit d'utiliser l'invariance de la moyenne par translation. En effet on a

$$M_t \left\{ |u(t+\theta)|^2 \right\} = M_t \left\{ |u(t)|^2 \right\}$$

pour tout $\theta \in [-r, 0]$, ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{0} M_t \left\{ |u(t+\theta)|^2 \right\} d\theta &= \int_{-r}^{0} M_t \left\{ |u(t)|^2 \right\} d\theta \\ &= \int_{-r}^{0} d\theta . M_t \left\{ |u(t)|^2 \right\} \\ &= r . M_t \left\{ |u(t)|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Lorsque $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, on note par $\tilde{u} : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{loc}([-r, 0], \mathbb{E})$ la fonction définie par

$$\tilde{u}(t)(\theta) := u(t+\theta).$$

**Lemme 4.2** *Si $u \in B^2(\mathbb{E})$ alors $\tilde{u} \in B^2(L^2([-r, 0], \mathbb{E}))$, et on a :*

$$\|\tilde{u}\|_{B^2(L^2([-r,0],\mathbb{E}))} = \sqrt{r} . \|u\|_{B^2(\mathbb{E})}.$$

**Démonstration**

Fixons $u \in B^2(\mathbb{E})$ et $\varepsilon > 0$, on choisit $q_\varepsilon \in AP^0(\mathbb{E})$, telle que $\|u - q_\varepsilon\|_{B^2(\mathbb{E})} < \varepsilon$. Sachant que $L^2([-r, 0], \mathbb{E})$ est séparable [13] , il existe un sous-ensemble dénombrable $D$ dans $L^2([-r, 0], \mathbb{E})$ qui est dense, et par conséquent l'ensemble $\{B(\varphi, \rho) : \varphi \in D, \rho \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\}$ est un générateur de la tribu borélienne de $L^2([-r, 0], \mathbb{E})$ , où

$$B(\varphi, \rho) := \{\psi \in L^2([-r, 0], \mathbb{E}) : \|\psi - \varphi\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})} < \rho\}.$$

Fixons $\varphi \in D$ et$\rho \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$, et notons par $\alpha(t) := \int_{-r}^{0} |u(t+\theta) - \varphi(\theta)|^2 d\theta$.

En utilisant le même raisonnement que celui utilisé pour établir

$$\left[(t,\theta) \longrightarrow |u(t+\theta)|^2\right] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[-r,0],\mathbb{R}_+)$$

dans la démonstration du lemme 4.1 , on obtient

$$\left[(t,\theta) \longrightarrow |u(t+\theta)-\varphi(\theta)|^2\right] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[-r,0],\mathbb{R}),$$

et par conséquent en utilisant le théorème de Fubini , on sait que $\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc $\alpha$ est mesurable.

Notons que $t \in \tilde{u}^{-1}(B(\varphi,\rho))$ est équivalente à $t \in \alpha^{-1}([0,\rho^2[)$. Sachant que $\alpha$ est mesurable, on a $\alpha^{-1}([0,\rho^2[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$([1]) , et par conséquent $\tilde{u}^{-1}(B(\varphi,\rho)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ainsi on a démontré que

$$\begin{cases} \tilde{u} \textit{ est mesurable de } (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \textit{ dans} \\ (L^2([-r,0],\mathbb{E}),\mathcal{B}(L^2([-r,0],\mathbb{E}))) \end{cases} \tag{4.4}$$

En utilisant (4.2), on sait que

$$\left[(t,\theta) \longrightarrow |u(t+\theta)|^2\right] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[-r,0],\mathbb{R}),$$

par conséquent, en utilisant le théorème de Fubini , on obtient que

$$\left[t \longrightarrow \int_{-r}^{0}|u(t+\theta)|^2 d\theta = \|\tilde{u}(t)\|^2_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}\right] \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

Donc on a obtenu :

$$\tilde{u} \in L^2_{loc}\left(\mathbb{R}, L^2([-r,0],\mathbb{E})\right). \tag{4.5}$$

En utilisant le Lemme 4.1 avec $u - q_\varepsilon$ au lieu de $u$, on sait que $M_t\left\{\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)-q_\varepsilon(t+\theta)|^2 d\theta\right\}$ existe et qu' on a

$$\begin{aligned} M_t\left\{\|\tilde{u}(t)-\tilde{q}_\varepsilon(t)\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}\right\} &= M_t\left\{\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)-q_\varepsilon(t+\theta)|^2 d\theta\right\} \\ &= r.M_t\left\{|u(t)-q_\varepsilon(t)|^2\right\} \\ &< r.\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Sachant que $\tilde{q}_\varepsilon \in AP^0(C([-r,0],\mathbb{E})) \subset AP^0(L^2([-r,0],\mathbb{E}))$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ , on obtient que $\tilde{u} \in B^2(L^2([-r,0],\mathbb{E}))$.

La relation entre la norme de $u$ et $\tilde{u}$ est une conséquence du Lemme 4.1. En effet on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{B^2(L^2([-r,0],\mathbb{E}))} &= M_t\left\{\|\tilde{u}\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= M_t\left\{\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)|^2 d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{r}.M_t\left\{|u(t)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{r}.\|u\|_{B^2(\mathbb{E})}. \end{aligned}$$

1. $\mathcal{B}$ désigne la tribu borélienne .

Maintenant on introduit la condition suivante sur f :

$$\begin{cases} Il\ existe\ a \in (0,\infty)\ et\ b \in \mathbb{R}\ tels\ que \\ |Df(x,y)| \leq a(|x|+|y|) + b\ pour\ tout\ x,y \in \mathbb{E}. \end{cases} \tag{4.6}$$

**Lemme 4.3** *Si* $f \in C^1(\mathbb{E}\times\mathbb{E},\mathbb{R})$ *et sous la condition(4.6) l'opérateur* $S : B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow B^1(\mathbb{R})$ *défini par :*

$$S(u) := \left[t \longmapsto \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta))d\theta\right]$$

*est de classe* $C^1$*, et pour tout* $u, h \in B^2(\mathbb{E})$ *, on a*

$$DS(u).h = \left[t \longrightarrow \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\right].$$

**Démonstration** Pour $f \in C^1(\mathbb{E}\times\mathbb{E},\mathbb{R})$ et sous les conditions (4.6), l'opérateur de Nemytskii construit sur f,

$$\mathcal{N}_f : L^2([-r,0],\mathbb{E}) \times L^2([-r,0],\mathbb{E}) \longrightarrow L^1([-r,0],\mathbb{R}),$$

$$\mathcal{N}_f(\varphi,\psi) := [\theta \longrightarrow f(\varphi(\theta),\psi(\theta))],$$

est de classe $C^1$ [17], et sa différentielle est donnée par :

$$D\mathcal{N}_f(\varphi,\psi).(\xi,\zeta) = [\theta \longrightarrow Df(\varphi(\theta),\psi(\theta)).(\xi(\theta),\zeta(\theta))].$$

L'opérateur $A : \mathbb{E} \times L^2([-r,0],\mathbb{E}) \longrightarrow L^2([-r,0],\mathbb{E})^2$ défini par

$$A(x,\psi) := (x,\psi),$$

où x est considérée comme une fonction constante, est linéaire continu, donc A est de classe $C^1$ et $DA(x,\psi) = A$.
La fonctionnelle $I : L^1([-r,0],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$I(\omega) := \int_{-r}^{0} \omega(\theta)d\theta,$$

est linéaire, et l'inégalité

$$\begin{aligned}|I(\omega)| =& |\int_{-r}^{0}\omega(\theta)d\theta| \\ &\leq r.\int_{-r}^{0}|\omega(\theta)|d\theta \\ &:= r.\|\omega\|_{L^1([-r,0],\mathbb{R})},\end{aligned}$$

assure que $I$ est continue, ainsi $I$ est de classe $C^1$ et sa différentielle est donnée par

$$DI(\omega) = I.$$

On considère l'application $F : \mathbb{E} \times L^2([-r,0],\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$F(x,\psi) := \int_{-r}^{0} f(x,\psi(\theta))d\theta.$$

Notons que $F = I\circ\mathcal{N}_f\circ A$, et donc F est de classe $C^1$ comme composé d'applications de classe $C^1$, et en utilisant la formule de la dérivation en chaîne on obtient, pour tout $x, y \in E$, et pour tout $\psi, \xi \in L^2([-r,0],\mathbb{E})$, la formule suivante :

$$DF(x,\psi).(y,\xi) = \int_{-r}^{0}(D_1 f(x,\psi(\theta)).y + D_2 f(x,\psi(\theta)).\xi(\theta))d\theta.$$

Soit $(y,\xi) \in \mathbb{E} \times L^2([-r,0],\mathbb{E})$, tel que $\|(y,\xi)\| \leq 1$. Donc on a

$$\begin{aligned}|DF(x,\psi).(y,\xi)| &\leq \int_{-r}^{0}|Df(x,\psi(\theta))|.|(y,\xi(\theta))|d\theta \\ &\leq \left(\int_{-r}^{0}|Df(x,\psi(\theta))|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_{-r}^{0}|Df(y,\xi(\theta))|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski .
Notons que

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{0}|(y,\xi(\theta))|^2 d\theta &= \int_{-r}^{0}\left(|y|^2 + |\xi(\theta)|^2\right)d\theta \\ &= r.|y|^2 + \int_{-}^{0}|\xi(\theta)|^2 d\theta \\ &\leq r_1.\|(y,\xi)\|^2 \\ &\leq r_1,\end{aligned}$$

où $r_1 := max\{r,1\}$, et donc on a :

$$\begin{aligned}|DF(x,\psi).(y,\xi)| &\leq \sqrt{r_1}.\left(\int_{-r}^{0}|Df(x,\psi(\theta))|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{r_1}.\left(\int_{-r}^{0}(a.|x| + a.|\psi(\theta)| + b)^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{r_1}.\|a.|x| + a.|\psi| + |b|\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}. \\ &\leq \sqrt{r_1}.\left(a\||x|\|_{L^2([-r,0],\mathbb{R})} + a\||\psi|\|_{L^2([-r,0],\mathbb{R})} + \||b|\|_{L^2([-r,0],\mathbb{R})}\right).\end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{cases} |||x|||_{L^2([-r,0],\mathbb{R})} = \sqrt{r}.|x|, \\ |||b|||_{L^2([-r,0],\mathbb{R})} = \sqrt{r}.|b|, \\ |||\psi|||_{L^2([-r,0],\mathbb{R})} = \|\psi\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}, \end{cases}$$

on a

$$|DF(x,\psi).(y,\xi)| \leq a.\sqrt{r_1}.\sqrt{r}\left(|x| + \|\psi\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}\right) + \sqrt{r_1}.\sqrt{r}.|b|.$$

Soit $a_1 := a.\sqrt{r_1}.\sqrt{r}$ et $b_1 := \sqrt{r_1}.\sqrt{r}|b|$, et donc on obtient :

$$|DF(x,\psi)| \leq a_1.\left(|x| + \|\psi\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}\right) + b_1.$$

Ainsi on peut dire que

$$\mathcal{N}_F : B^2(\mathbb{E}) \times B^2\left(L^2([-r,0],\mathbb{E})\right) \longrightarrow B^1(\mathbb{R})$$

est de classe $C^1$ , et qu'on a pour tout $u,h \in B^2(\mathbb{E})$ et pour tout $V,K \in B^2\left(L^2([-r,0],\mathbb{E})\right)$, la formule suivante :

$$\begin{aligned} D\mathcal{N}_F(u,V).(h,K) &= [t \longrightarrow DF(u(t),V(t)).(h(t),K(t)) \\ &= \int_{-r}^{0} (D_1 f(u(t),V(t)(\theta)).h(t) \\ &+ D_2 f(u(t),V(t)(\theta)).K(t)(\theta))d\theta]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Considérons l'opérateur linéaire

$$T : B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow B^2\left(L^2([-r,0],\mathbb{E})\right),$$

défini par

$$T(u) := \tilde{u}.$$

En utilisant le Lemme (4.2), on sait que $T$ est continu, et donc $T$ est de classe $C^1$ avec $DT(u) = T$.
Notons qu'on a $S = \mathcal{N}_F \circ (Id,T)$, ainsi $S$ est de classe $C^1$ comme composé d'opérateurs de classe $C^1$, et via la formule de la dérivation en chaîne et (4.7), on obtient

$$DS(u).h = \left[t \longrightarrow \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t),u(t+\theta)).h(t) + D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\right].$$

**Lemme 4.4** *Si* $f \in C^1(\mathbb{E}\times\mathbb{E},\mathbb{R})$ *et sous la condition(4.6), si* $u,h \in B^2(\mathbb{E})$*, alors on a l'égalité suivante :*

$$M_t\left\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\right\} = M_t\left\{\left(\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta),u(t))d\theta\right).h(t)\right\}.$$

**Démonstration**

En utilisant un raisonnement similaire à celui utilisé pour établir (4.2),on obtient que

$$[(t,\theta) \longrightarrow D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[-r,0],\mathbb{R}).$$

Ainsi on peut utiliser le théorème de Fubini , pour obtenir

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-r}^{0} D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\right)dt \\ &\qquad = \int_{-r}^{0}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)dt\right)d\theta. \end{aligned} \tag{4.8}$$

pour tout $T \in (0,\infty)$.
Pour tout $T \in (1,\infty)$, on introduit la fonction $g_T : [-r,0] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g_T(\theta) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)dt.$$

En utilisant le théorème de Fubini , on sait que $g_T$ est borélienne . D'autre part, sachant que

$$[t \longrightarrow D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)] \in B^1(\mathbb{R}),$$

donc sa moyenne temporelle existe dans $\mathbb{R}$, et par conséquent on a :

$$\lim_{T\longrightarrow\infty} g_T(\theta) = M_t\{D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)\}. \tag{4.9}$$

pour tout $\theta \in [-r,0]$.
Sachant que $M_t\{|u(t)|^2\}$ existe dans $\mathbb{R}$, on a

$$\sup_{T\geq 1}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t)|^2dt\right) =: M < \infty.$$

Pour tout $\theta \in [-r,0]$, et pour tout $T \geq 1+r$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T+\theta}^{T+\theta}|u(s)|^2ds \\ &\leq \frac{1}{2T}\int_{-T+\theta}^{T-\theta}|u(s)|^2ds \\ &= \frac{2(T-\theta)}{2T}\frac{1}{2(T-\theta)}\int_{-(T-\theta)}^{T-\theta}|u(s)|^2ds \\ &\leq (1+r).M := M_0. \end{aligned}$$

Ainsi on a démontré l'assertion suivante :

$$\begin{cases} \textit{Il existe } M_0 \in (0,\infty) \textit{ tel que , pour tout} \\ \theta \in [-r,0], sup_{T\geq 1+r}\dfrac{1}{2T}\ \int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2dt \leq M_0. \end{cases} \tag{4.10}$$

En remplacant $u$ par $h$ , on obtient similairement l'assertion suivante.

$$\begin{cases} Il\ existe\ M_1 \in (0,\infty)\ tel\ que\ , pour\ tout \\ \theta \in [-r,0], sup_{T\geq 1+r} \dfrac{1}{2T}\ \int_{-T}^{T} |h(t+\theta)|^2 dt \leq M_1. \end{cases} \tag{4.11}$$

En utilisant l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^2$ et l'inégalité usuelle $(A+B)^2 \leq 2(A^2+B^2)$, on obtient l'existence de $a_2 \in (0,\infty)$ tel que

$$\begin{aligned} |D_2 f(u(t), u(t+\theta))|^2 &\leq \left( a_2 \left[ |u(t)|^2 + |u(t+\theta)|^2 \right]^{\dfrac{1}{2}} + b \right)^2 \\ &\leq 2. \left( a_2 |u(t)|^2 + a_2 |u(t+\theta)|^2 + b_2 \right). \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |D_2 f(u(t), u(t+\theta))|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{2} \left( a_2 \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt \right. \\ &\left. + a_2 \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t+\theta)|^2 + b^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \left( a_2 M_0 + a_2 M_0 + b^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc en notant par $\gamma := \sqrt{2}(2a_2 M_0 + b^2)^{\frac{1}{2}}.M_1^{\frac{1}{2}}$, on a démontré l'assertion suivante :

$$\left( \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |D_2 f(u(t), u(t+\theta))|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} . \left( \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |h(t+\theta)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma. \tag{4.12}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski , et(4.12) on obtient, pour tout $T \geq 1+r$, et pour $\theta \in [-r,0]$,

$$|g_T(\theta)| \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |D_2 f(u(t), u(t+\theta))|.|h(t+\theta)| dt \leq \gamma.$$

Sachant que la mesure de Lebesgue de $[-r,0]$ est finie, la constante $\gamma$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[-r,0]$ , et par conséquent les hypothèses du théorème de la convergence dominée de Lebesgue sont satisfaites, on peut alors dire que :

$$\int_{-r}^{0} \lim_{T\longrightarrow\infty} g_T(\theta) d\theta = \lim_{T\longrightarrow\infty} \int_{-r}^{0} g_T(\theta) d\theta \tag{4.13}$$

Ainsi en utilisant (4.8), (4.9), et (4.13), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{-r}^{0} M_t\{D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)\}d\theta \\
&\qquad = \int_{-r}^{0} \lim_{T\longrightarrow\infty} g_T(\theta)d\theta \\
&\qquad = \lim_{T\longrightarrow\infty} \int_{-r}^{0} g_T(\theta)d\theta \\
&\qquad = \lim_{T\longrightarrow\infty} \int_{-r}^{0} \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)dt\right) d\theta \\
&\qquad = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left(\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\right) dt \\
&\qquad = M_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\}.
\end{aligned}$$

D'où on a démontré l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
&M_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\} \\
&\qquad = \int_{-r}^{0} M_t\{D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)\}d\theta.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

En utilisant un raisonnement similaire on obtient :

$$\begin{aligned}
&M_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta),u(t)).h(t)d\theta\} \\
&\qquad = \int_{-r}^{0} M_t\{D_2 f(u(t-\theta),u(t)).h(t)\}d\theta.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Sachant que la moyenne temporelle est invariante par la translation, on obtient, pour tout $\theta \in [-r,0]$, l'égalité suivante :

$$M_t\{D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)\} = M_t\{D_2 f(u(t-\theta),u(t)).h(t)\}. \tag{4.16}$$

Enfin en utilisant (4.14), (4.15), et (4.15) on obtient :

$$M_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\} = M_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta),u(t)).h(t)d\theta\}.$$

**Proposition 4.1** *Si $f \in C^1(\mathbb{E}\times\mathbb{E},\mathbb{R})$ et sous la condition(4.6), la fonctionnelle $J : B^{1,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par*

$$J(u) := M_t\left\{\frac{1}{2}|\nabla u(t)|^2 + \int_{-r}^{0} f(u(t),u(t+\theta))d\theta + \ u(t).e(t)\right\},$$

*est de classe $C^1$, et pour $u, h \in B^{1,2}(\mathbb{E})$ :*

$$\begin{aligned}
DJ(u).h =& M_t\Bigg\{\nabla u(t).\nabla h(t) + \Bigg(\int_{-r}^{0} D_1 f(u(t),u(t+\theta))d\theta \\
&+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta),u(t))d\theta + \ e(t)\Bigg).h(t)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

**Démonstration**

Soit la fonctionnelle $\mathcal{Q} : B^{1,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{Q}(u) := M_t \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u(t)|^2 \right\}.$$

Soit $q : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$q(x) := \frac{1}{2}|x(t)|^2 = \frac{1}{2}x.x.$$

Sachant que $\mathbb{E}$ est un espace euclidien, q est une fonction de classe $C^1$, et Dq(x) = x, donc ,d'aprés ([17],Théorème 2.6) ,l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_q : B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow B^1(\mathbb{R})$ est de classe $C^1$ et $D\mathcal{N}_q(v).h = [t \longrightarrow v(t).h(t)]$ pour tout $v, h \in B^2(\mathbb{E})$.

L'opérateur de la dérivation $\nabla : B^{1,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow B^2(\mathbb{E})$, est linéaire, et puisque pour tout $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$ on a

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 = \|u\|_{1,2}^2,$$

on obtient la continuté de $\nabla$, ainsi il est de classe $C^1$. Sachant que la fonctionnelle $M : B^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$,définit par

$$M(v) := M_t\{v(t)\}$$

est aussi linéaire continue, donc elle est de classe $C^1$ .

Ainsi $\mathcal{Q} := M \circ \mathcal{N}_q \circ \nabla$ est de classe $C^1$, comme composée d'applications de classe $C^1$, et en utilisant la formule de la dérivation en chaîne on obtient

$$D\mathcal{Q}(u).h = M_t \nabla u(t).\nabla h(t). \tag{4.17}$$

pour tout $u, h \in B^{1,2}(\mathbb{E})$.

Considérons la fonctionnelle $\Phi : B^{1,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(u) := M_t \left\{ \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta))d\theta \right\}$$

L'opérateur linéaire continu défini par

$$\begin{aligned} A : B^{1,2}(\mathbb{E}) &\longrightarrow B^2(\mathbb{E}), \\ u &\longrightarrow A(u) = u. \end{aligned}$$

est de classe $C^1$.

Notons que $\Phi = M \circ S \circ A$ , en utilisant le Lemme (4.3) on sait que S est de classe $C^1$. Donc $\Phi$ est de classe $C^1$ comme composé d'applications de classe $C^1$. En utilisant encore le Lemme (4.3) et la formule de la dérivation en chaîne on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned} D\Phi(u).h = M_t \Bigg\{ &\int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta \Bigg\} \end{aligned}$$

et en utilisant le Lemme (4.4) on obtient

$$\begin{aligned} D\Phi(u).h = M_t \Bigg\{ \Bigg( \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta) d\theta \\ + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t+)) d\theta \Bigg) .h(t) \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Considérons la fonctionnelle linéaire $\mathcal{L} : B^{1,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{L}(u) := M_t\{u(t).e(t)\},$$

et la fonctionnelle linéaire $T : B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$T(u) := M_t\{u(t).e(t)\} =< u, e >_{B^2(\mathbb{E})} .$$

Via l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski , on obtient

$$\begin{aligned} |T(u)| &= M_t|\{u(t).e(t)\}| \\ &\leq M_t\{|u(t).e(t)|\} \\ &\leq M_t\{|u(t)|^2\}^{\frac{1}{2}}.M_t\{|e(t)|^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_{B^2(\mathbb{E})}.\|e\|_{B^2(\mathbb{E})}, \end{aligned}$$

ce qui implique que $T$ est continue, d'où $\mathcal{L} := T \circ A$ est aussi continue comme composée d'applications continues, et par conséquent $\mathcal{L}$ est de classe $C^1$. Sachant que $D\mathcal{L}(u) = T$ on obtient la formule suivante :

$$D\mathcal{L}(u).h = M_t\{h(t).e(t)\} \text{ , } \textit{pour tout } u, h \in B^{1,2}(\mathbb{E}). \tag{4.19}$$

Notons que $J = \mathcal{Q} + \Phi + \mathcal{L}$, et donc $J$ est de classe $C^1$ comme somme des fonctionnelles de classe $C^1$.
Par ailleurs, en utilisant (4.17), (4.18), (4.19), on obtient

$$\begin{aligned} DJ(u).h =& M_t \Bigg\{ \nabla u(t).\nabla h(t) + \Bigg( \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)) d\theta \\ & + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t)) d\theta + \ e(t) \Bigg) .h(t) \Bigg\} . \end{aligned}$$

pour tout $u, h \in B^{1,2}(\mathbb{E})$.

**Théorème 4.1** *Si* $f \in C^1(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$ *et sous la condition(4.6), les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
*(i)* $DJ(u) = 0$, *i.e.* $u$ *est un point critique de* $J$ *dans* $B^{1,2}(\mathbb{E})$ .
*(ii)* $u$ *est une solution presque-périodique faible de l'équation (3.1).*

**Démonstration**

Démontrons que (i) implique (ii).
D'après la Proposition (4.1), on sait que pour $f \in C^1(\mathbb{E}\times\mathbb{E},\mathbb{R})$ et sous la condition (4.6), la fonctionnelle J est de classe $C^1$.
Posons

$$p(t) := \int_{-r}^{0} [D_1 f(u(t), u(t+\theta)) + D_2 f(u(t-\theta), u(t))]d\theta + e(t).$$

Il est clair que $p \in B^2(\mathbb{E})$.
On suppose que $DJ(u) = 0$, donc pour tout $v \in B^{1,2}(\mathbb{E})$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= DJ(u)v \\ &= M_t\{\nabla u(t).\nabla v(t) + p(t).v(t)\}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

soit

$$M_t\{\nabla u(t).\nabla v(t)\} = -M_t\{p(t).v(t)\}\ \forall v \in B^{1,2}(\mathbb{E}).$$

Ainsi, pour tout $h \in AP^1(\mathbb{E}) \subset B^{1,2}(\mathbb{E})$, on a

$$M_t\{\nabla u(t).h'(t)\} = -M_t\{p(t).h(t)\}\ ,$$

ce qui implique, en vertu de la Proposition (2.8), que $\nabla u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$, soit $u \in B^{2,2}(\mathbb{E})$, et

$$\nabla^2 u = p,$$

ce qui est exactement (ii).

Maintenant on montre que (ii) implique (i). On suppose que

$$\nabla^2 u = p,$$

ce qui sous-entend que $\nabla u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$ , donc d'après La Proposition (2.7), pour tout $h \in AP^1(\mathbb{E})$ , on a $\nabla u.h \in B^{1,2}(\mathbb{R})$, ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= M\{\nabla(\nabla u.h)\} \\ &= M\{\nabla^2 u.h\} + M\{\nabla u \nabla h\}, \\ &= M\{p.h\} + M\{\nabla u \nabla h\}, \\ &= DJ(u)h, \end{aligned}$$

et puisque $AP^1(\mathbb{E})$ est dense dans $B^{1,2}(\mathbb{R})$, proposition(2.6) , on obtient $DJ(u) = 0$.

Maintenant on introduit une hypothèse de convexité :

$$f \ est \ une \ fonction \ convexe \ sur \ \mathbb{E} \times \mathbb{E}. \tag{4.21}$$

et une hypothèse de coercivité :

$$\begin{cases} Il \ existe \ c \in (0, \infty) \ et \ d \in \mathbb{R} \ tels \ que \\ f(x,y) \geq c|x|^2 + d \ pour \ tout \ x, y \in \mathbb{E}. \end{cases} \tag{4.22}$$

**Théorème 4.2** *Si $f \in C^1(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$ et sous les hypothèses (4.6), (4.21), et (4.22), pour tout $e \in B^2(\mathbb{E})$,, il existe $u \in B^{2,2}(\mathbb{E})$qui est une solution p.p. faible de (3.1).*
*Par ailleurs l'ensemble des solutions p.p. faibles de (3.1) est un ensemble convexe.*

**Démonstration**
D'après la Proposition (4.1), on sait que la fonctionnelle J est de classe $C^1$ sur $B^{1,2}(\mathbb{E})$. En utilisant (4.21) on déduit que J est une fonctionnelle convexe. Donc J est faiblement semi-continue inférieurement sur l'espace de Hilbert $B^{1,2}(\mathbb{E})$ ([22]). À partir de (4.22), on déduit que, pour tout $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$ on a

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{B^2(\mathbb{E})} + c.\|u\|^2_{B^2(\mathbb{E})} - \|u\|_{B^2(\mathbb{E})}.\|e\|_{B^2(\mathbb{E})} \\ &\geq c_1.\|u\|^2_{B^{1,2}(\mathbb{E})} - \|e\|_{B^2(\mathbb{E})}.\|u\|_{B^{1,2}(\mathbb{E})}, \end{aligned}$$

où $c_1 := min\{\frac{1}{2}, c\} \in (0, \infty)$. Par conséquent J est coercive, i.e.

$$J(u) \longrightarrow \infty \ quand \ \|u\|^2_{B^{1,2}(\mathbb{E})} \longrightarrow \infty.$$

Donc il existe $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$ telle que

$$J(u) = inf J\left(B^{1,2}(\mathbb{E})\right),$$

et sachant que J est de classe $C^1$ on a $DJ(u) = 0$, et donc, en utilisant le Théorème (4.1), on obtient que u est une solution p.p. faible de (3.1). En utilisant encore le Théorème (4.1), on sait que l'ensemble des solutions p.p. faibles de (3.1) est égale à l'ensemble suivant :

$$\left\{u \in B^{1,2}(\mathbb{E}) : DJ(u) = 0\right\},$$

et sachant que J est convexe, ce dernier est égale à l'ensemble

$$\left\{u \in B^{1,2}(\mathbb{E}) : J(u) = inf J\left(B^{1,2}(\mathbb{E})\right)\right\}.$$

Sachant que J est convexe, ce dernier ensemble est un ensemble convexe. D'où l'ensemble des solutions p.p. faibles de (3.1) est convexe.

# Bibliographie


[1] C. D. Aliprantis and K. C. Border . *Infinite Dimensional Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] L. Amerio and G. Prouse . *Almost Periodic Functions and Functional Equations*, van Nostrand Reinhold Company, 1971.

[3] M. Ayachi. *Méthodes fonctionnelles et variationnelles pour l'existence des solutions presque-périodiques des équations différentielles ordinaires à retard*, PhD thesis, Université Panthéon-Sorbonne-Paris I, 2009.

[4] M. Ayachi and J. Blot . *A Variational Approach for Almost Periodic Solutions in Retarded Functional Differential Equations*, Differential Equations and Applications (D.E.A.), Vol. 1. Number 1 ( 2009), 67- 84.

[5] M. Ayachi and D. Lassoued. *on the existence of almost periodic solutions for a class of neutral delay differential equations*, Facta Universitatis series Mathematics and Informatics, Vol. 29. Number 2(2014) ,1-14.

[6] A. S. Besicovitch . *Almost periodic functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1932.

[7] J. Blot . *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 134, no 2, 1988, 312- 321.

[8] J. Blot . Une approche variationnelle des orbites quasipériodiques des systèmes hamiltoniens, Annales des Sciences Mathématiques du Québec, vol. 13, no 2, 1989, 7- 32.

[9] J. Blot . *Oscillations presque-périodiques forcées d'équations d'Euler-Lagrange*, Bulletin de la Société Mathématique de France, vol. 122, 1994, 285- 304.

[10] J. Blot, P. Cieutat,G. M. N'Guérakata and D. Pennequin . *Superposition Operators Between Various Almost Periodic Function Spaces and Applications*, Communications in Mathematical Analysis, vol.6( 1), 2009, 42- 70.

[11] H. Bohr . *Almost Periodic Functions*, Chelsea, New York, 1956.

[12] J.C.Breton . *Intégrale de Lebesgue*, Notes de cours de L3 Mathématiques, Université de Rennes 1 (2014).

[13] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris (1983).

[14] C. Corduneanu . *Almost Periodic Functions*, Chelsea, 1989.

[15] B. Dacoragna . *Direct Methods in the Calculs of Variations*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[16] L. E. Elsgolc . *Qualitative Methods in Mathematical Analysis*, Translation of Mathematical Monograph, Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1964.

[17] D-G Figueiredo. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*. Published for the Tata Institute of Fundamental Re, by Springer-Verlag, 1989.

[18] A. M.Fink and T. Kusano. *Almost Periodic Differential Equations*,"Lecture Notes in Mathematics" , Springer, 1974.

[19] D. K. Hughes . *Variational and Optimal Control Problems with Delayed Argument*,Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 2( 1968), no 1, 1- 14.

[20] D.Lassoued. *Fonctions presque-périodiques et Équations Différentielles*. Diss. Université Paris I Panthéon-Sorbonne, 2014.

[21] B. M. Levitan and V. V. Zhikov . *Almost Periodic Functions and Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.

[22] J. Mawhin and M. Willem. *Critical point theory and Hamiltonian systems*, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[23] A. A. Pankov . *Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations*, Kuwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.

[24] L. D. Sabbagh . *Variational Problems with Lags*,Journal of Optimization Theory and Applications, vol.3( 1969), no 1, 34- 51.

[25] T. Yoshizawa . *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1975.

## Résumé :

Nous étudions l'existence des solutions presque périodiques pour une classe d'équation différentielles fonctionnelles du second ordre à retard fini dans un espace de Banach. L'approche que nous utilisons est basé sur une méthode variationnelle appliquée dans un premier temps sur un espace des fonctions p.p. au sens de Bohr ,et en deuxième temps sur un espace de Hilbert des fonctions p.p. au sens de Besicovitch. Nous obtenons des résultats d'existence et de structure de l'ensemble des solutions p.p. .



**Mots clés :**solutions presque périodiques,équation différentielles fonctionnelles à retard, méthode variationnelle, fonctions p.p. au sens de Bohr,fonctions p.p. au sens de Besicovitch.


---


## Abstract :

We study the existence of almost periodic solutions for a class of second order functional differential equations with Finite delay in a Banach space. The approach we use is based on a variational method applied in first time on a space of Bohr-a.p. functions , and in second time on a Hilbert space of Besicovitch-a.p. functions. We obtain results of existence and structure of the set of a.p. solutions.



**Keywords :** almost periodic solutions,retarded functional differential equations,variatonal method,Bohr-a.p. functions,Besicovitch-a.p.functions.


---