REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Mathématiques

Par :

Mr BELDJILALI Gherici

Sur le thème

Produit de deux variétés munies de quelques structures

Soutenue publiquement le 8 Juillet 2017 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr Miloud Messirdi	MCA	Université de Tlemcen	Président
Mr Mohamed Belkhelfa	Professeur	Université de Mascara	Directeur de thèse
Mr Mohamed Benalili	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur
Mr Mustapha Djaa	Professeur	Centre universitaire de Relizane	Examinateur
Mr Michel Nguiffo Boyom	Professeur	Université de Montpellier II France	Examinateur
M^{me} Aissa Wade	Professeur	Université de Pennsylvanie USA	Examinatrice

Table des matières

Remerciements

Nous remercions tout d'abord et avant tout le tout puissant ALLAH qui nous a réussi a achever ce travail.

Et puis, je tiens à remercier mon directeur de thèse Prof. Belkhelfa mohamed pour m'avoir fait confiance malgré les connaissances plutôt légères que j'avais en octobre 2012 sur la géométrie des structures et les variétés Riemannienne produits. L'enthousiasme, l'intuition scientifique et la ténacité dont il a fait preuve ainsi que la liberté qu'il m'a accordée au cours de ce travail ont grandement contribué à la richesse de cette thèse.
Il m'a montré qu'honnêteté et sincérité devaient coexister avec efficacité et motivation. De plus, ces conseils tout au long de ces quatre années ont toujours été clairs et m'ont permis d'aboutir à la production de cette thèse.

Je présente mes vifs remerciements à Monsieur Miloud Messirdi MCA à l'université de Tlemcen qui m'a fait l'honneur de présider le jury et pour la lecture attentive de la thèse .

Je remercie également Monsieur Mohammed Benallili professeur à l'université de Tlemcen qui a accepté de rapporter cette thèse, je le remercie du temps qu'il a consacré.

Je voudrais aussi témoigner ma profonde gratitude à Monsieur Mustapha Djaa professeur au centre universitaire de Relizane pour s'être intéressé à mon travail en acceptant de faire partie du jury. Je le remercie vivement.

Je remercie très chaleureusement Monsieur Michel Nguiffo Boyom professeur à l'université de Montpellier II France qui m'a honoré en acceptant d'être un membre dans ce jury.

Je tiens aussi à remercier cordialement Madame Aissa Wade professeur à l'université de pensylvanie USA, pour leur accueil et disponibilité durant ma visite scientifique à State College, PA (USA), Je ne pourrai jamais oublier les discussions et suggestions au collège des science Eberly. Je la remercie vivement pour sa participation au jury.

Je tiens à remercier également tous mes amis les mathématiciens auxquels j'ai posé des questions. Je mesure la chance que j'ai eu d'avoir pu profiter de leurs connaissances et leurs conseils.

Enfin je ne saurais terminer cette liste sans adresser un remerciement particulier a ma petite famille qui m'a soutenu dans l'ombre sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. Je leur dédie ce travail en témoignage de ma profonde affection pour toute la patience et les sacrifices qu'ils ont convertis pour moi et dont je ne serais à jamais redevable, et d'avoir porté ce travail à terme représente pour moi aujourd'hui la plus belle des récompenses.

Je dédie cette thèse

à l'esprit de mes parent « Rahimahoma Allah »,

à ma femme,

mes filles Loubna, Marwa et mes fils Mohamed et Mouad

ainsi que mes sœurs et mes frères.

J'espère la réussite que je vais accueillir

soit une petite récompense

et un remerciement infini

pour eux tous.

A tous ceux qui ont participé

de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail

et à tous ceux qui me sont chers :

Un grand merci.

Introduction

0.1 Eléments de synthèse sur les travaux antérieurs

Le produit des variétés Riemanniennes est un moyen d'exhiber de nouvelles variétés Riemanniennes. Pour étudier les variétés à courbure négative et en utilisant la déformation homothétique d'une variété produit, Bishop et O'Neill ont introduit la notion du produit tordu en 1969 [7]. La définition de cette notion est actuellement donnée par : Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et $f : M_1 \to \mathbb{R}^*$ une fonction différentiable positive sur M_1, le produit tordu de (M_1, g_1) et (M_2, g_2) est la variété produit $M_1 \times_f M_2$ munie de la métrique Riemannienne $\tilde{g} := \pi^* g_1 + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_2$, où π et σ sont les projections canoniques de $M_1 \times_f M_2$ sur M_1 et M_2 respectivement. La variété M_1 est dite la base de $M_1 \times_f M_2$ tandis que M_2 est dite la fibre. La fonction f est appelée la fonction de distortion.
La variété Riemannienne produit tordu est une généralisation naturelle de la variété Riemannienne produit. Par exemple, la surface de révolution M obtenue par rotation d'une courbe (C) plane autour d'une droite L dans son plan est une variété produit tordu. Explicitement, si M est obtenu en faisant tourner une courbe plane (C) autour d'un axe L dans $\mathbb{R}^3$ et $f : (C) \to \mathbb{R}^+$ donne la distance à l'axe, alors $M = (C) \times_f S^1$.
Aujourd'hui, il est bien connu que la notion du produit tordu joue un rôle important dans le domaine de la géométrie différentielle et celui de la physique, par exemple, le meilleur modèle relativiste de l'espace temps de Schawarchild, décrivant l'espace de sortie autour d'une étoile massive ou d'un trou noire, est donné comme produit tordu de variétés adaptées [20].

En 1960 et 1970, lorsque les variétés presque de contact ont été étudiées comme une contrepartie des variétés presque complexes de dimensions impaires. Le produit tordu a joué un rôle intéressant dans la clarification de la relation entre les variétés presque de contact et les variétés presque hermitienne [15], [53].

Au moyen d'un changement naturel de la métrique produit, on peut largement construire des structures presque hemitiennes sur les variétés produits de deux variétés métrique presque de contact. Puisque beaucoup de structures métrique presque de contact sont maintenant bien définies (par exemple, voir [10], [32], [37], [44], [54]), cette méthode nous permet de fournir des différents types de structures presque hermitiennes.

Dans [24], A. Gray et L.M. Hervella ont défini 16 classes de structures presque hermitiennes. En utilisant seulement $\tilde{M} = M^{2n+1} \times \mathbb{R}$, le produit d'une variété métrique presque de contact par la droite réelle, J. A. Oubiña [44], [45] a montré que $\tilde{M}$ peut être munie de deux structures presque hermitiennes conformément difféomorphes. En faisant parcourir ces structures dans la classification de Gray et Hervella, Oubiña a pu définir quelques classes remarquables de structures métriques presque de contact en géométrie cosymplectique et en géométrie Sasakienne [45]. Nous notons ici qu'il a établi pour la première fois, la correspondance bijective (one-to-one) entre les structures de Sasaki et les structures kählériennes [44]. Par une technique similaire, Bär [1] puis Tshikuna-Matamba [55] ont montré qu'il existe une correspondance bijective entre les 3-structures de Sasaki sur une variété et les structures hyperkählériennes.

Par ailleurs, la notion du produit tordu $\tilde{M} = \mathbb{R} \times_f M^{2n}$ de la droite réelle par une variété kähléerienne a permis à K. Kenmotsu [32] de définir une classe de variétés métriques presque de contact qui ne sont ni cosymplectiques ni Sasakiennes.
En reprenant la métrique de Kenmotsu lorsque la variété M décrit l'ensemble des classes de Gray et Hervella, T. Tshikuna-Matamba a pu dégager, dans [54], quelques classes remarquables de structures métriques presque de contact semblables à celle de Kenmotsu.

En étudiant le produit de deux variétés métrique presque de contact, M. Capursi [17] a établi que ce produit est une variété presque hermitienne, il a montré que ce produit est une variété hermitienne, Kählérienne, presque Kählérienne ou approximativement Kählérienne (nearly Kählerian), si et seulement si, les deux facteurs sont normaux, cosymplectiques, presque cosymplectiques ou approximativement cosymplectiques respectivement. Blair-Oubiña [12] ont posé la question ouverte suivante : Quel type de changement de métrique produit faut il faire pour que le produit de deux variétés Sasakiennes soit une variété Kählérienne ?. D'autre part, T. Tshikuna-Matamba s'est demandé : Quelles classes remarquables de structures peuvent être induites sur le produit de deux variétés Riemanniennes ?. Dans [56], il a pu complété l'étude de Capursi concernant le produit de deux variétés métriques presque de contact, et celui de Oubiña [44] et [45] sur le produit d'une variété presque hermitienne par une variété métrique presque de contact. Ensuite, il a traité avec le produit d'une variété presque quaternion qui a été découvert en 1951 dans les papiers de P. Libermann [39], avec une variété presque hermitienne métrique presque de contact [35], [11]. Ce produit a été utilisé pour construire d'autres classes de variétés métriques à 3-structure presque de contact [55].

Récemment, en se basant sur les travaux de Tanno [52] (la déformation homothétique des variétés métrique de contact), Blair [13] a pu introduire la notion de la métrique tordu $\mathcal{D}$-homothétique sur le produit d'une variété Riemannienne par une variété métrique presque de contact et il a montré comme l'a fait Oubiña en 1985 dans [44] mais en montrant par une autre méthode la correspondance (one-to-one) entre la variété Sasakienne et la variété Kählérienne. Ensuite, il a donné la définition de la métrique tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée sur le produit de deux variétés métrique presque de contact, considéré comme domaine de recherche dans l'avenir.

0.2 Objectif et plan de travail

L'objectif de ce travail est de construire quelques structures presque hermitiennes ou structures métrique presque de contact sur une variété Riemannienne produit en munissant les deux facteurs avec quelques structures essentielles. Notre recherche durant les quatre années, nous a permet d'introduire la notion de la **métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique** sur le produit d'une variété Riemannienne avec une variété métrique presque de contact comme généralisation de la métrique tordu de Bishop-O'Neill [7] et la métrique tordu $\mathcal{D}$-homothétique de Blair [13]. En utilisant cette métrique nous avons montré :

— Qu'à partir d'une seule structure Sasakienne nous pouvons construire une famille de structures Kählérinnes à 1-paramètre.
— Qu'à partir d'une seule structure cosymplectique ou de Kenmotsu nous pouvons construire une famille de structures conformément Kählérinnes à 1-paramètre.
— Qu'à partir d'une seule structure Sasakienne nous pouvons construire une famille de structures de Kenmotsu à 1-paramètre.
— Qu'à partir d'une structure 3-Sasakienne nous pouvons construire une structure Kählérienne quaternionique.
— Qu'à partir d'une variété β-Kenmotsu classique nous pouvons construire une variété Kählérienne généralisée.

De plus, nous avons donné la notion de la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée sur le produit de deux variétés métrique presque de contact. Malheureusement, cette dernière ne donne pas une réponse positive pour le problème de Blair-Oubiña mais elle généralise le résultat de Capursi [17].
D'autre part, nous avons étudié le produit de deux variété métrique presque de contact presque hermitienne. Après avoir construire une structure 3-cosymplectique puis une structure métrique quaternionique à partir d'une structure métrique presque de contact presque hermitienne, nous donnons une construction d'une structure métrique quaternionique sur le produit de deux variété métrique presque de contact presque hermitienne. Cela donne une nouvelle réponse positive à un problème ouvert posée par Tshikuna-MATAMBA [56].

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres :

Le présent chapitre d'introduction présente des travaux antérieurs concernant le sujet, et contient aussi un résumé des résultats que nous avons obtenus.

Le chapitre suivant (chapitre 1), contient des généralités sur les notions de la géométrie Riemannienne nécessaires pour le reste de ce mémoire. En particulier, nous rappelons les tenseurs et les formes différentielles sur une variété Riemannienne.

Quant au chapitre 2, il est consacré à la notion de la variété Riemannienne produit. Nous rappelons les définitions et les propriétés en donnant quelques types de métriques Riemanniennes qu'on peut définir sur une variété produit, nous donnons aussi leurs connexions.

Les structures presque hermitiennes et les structures presque de contact sur une variété Riemannienne font l'objet du chapitre 3. Nous donnons les définitions des structures qui interviendront dans ce travail, notamment les structures Trans-Sasakienne, Sasakianne, Cosymplectique, Kenmotsu et Kählérienne avec des exemples et nous citons quelque passages reliants ces structures.

Finalement, dans le dernier chapitre nous présentons avec les détails nos résultats obtenues.

0.3 Introduction en arabe

مقدّمة

قبل كل شيء ...

يعتبر جُداء المنوّعات الريمانية إحدى الأدوات الهامّة في إنشاء منوّعات ريمانية جديدة. في دراسة لمنوّعات ذات التقوّس السالب ، تمكن كلا من بيشوب و أونايل [3] من إدراج مفهوم الجُداء الإلتفافي سنة 1969 كتعميم طبيعي لجُداء المنوّعات الريمانية و الذي أصبح في ما بعد يلعب دورا مهمّا في عديد المجالات منها الهندسة التفاضلية و مجال الفيزياء.

في 1960 و 1970، عندما أدرجت المنوّعات التلامسية تقريبا كصنف مقابل للمنوّعات المركّبة تقريبا ، لعب الجُداء الإلتفافي دورا بارزا في توضيح العلاقة بين الصنفين كما أنشئت جسور الانتقال بينهما. باستعمال تغيير طبيعي لمترك الجُداء، نستطيع إنشاء بنى مركّبة تقريبا على جُداء منوّعات مزودة ببنى تلامسية تقريبا و العكس أيضا باعتبار أن البنى التلامسية تقريبا بعدها فردي و بعد البنى المركّبة تقريبا زوجي.

في المرجع [20]، أ. كراي و ل. م. هيرفلا قدما تعريفا لستة عشر (16) صنفا من البنى المركبة تقريبا. و باستعمال $\widetilde{M} = M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ جُداء منوّعة مترية تلامسية تقريبا مع المستقيم الحقيقي، برهن ج. أ. أوبينا [40]، [41] أنه يمكن تزويد $\widetilde{M}$ ببنيتين هارميسيتين تقريبا متشاكلتين تفاضليا. و بعرض هاتين البنيتين على تصنيف أ. كراي و ل. م. هيرفلا، تمكن أوبينا من تعريف بعض البنى الهامة خاصة في هندسة سازاكي [41]. نشير هنا أنه تمكن و لأول مرّة من تحديد الاصطفاف التقابلي بين بنى ساساكي و بنى كالير [40] . و بتقنية مماثلة استطاع كلا من بار و تشيكينا-ماتامبا [51] من تأكيد هذا التقابل بين البنى ثلاثية الساساكي و بنى كالير الزائدية.

من جهة أخرى، و باستعمال $\widetilde{M} = M^{2n} \times_f \mathbb{R}$ الجُداء الالتفافي لمنوّعة كالير بالمستقيم الحقيقي استطاع ك. كانموتسو [28] ادراج صنف جديد من البنى التلامسية تقريبا، و بتمرير المنوّعة M^{2n} على تصنيف أ. كراي و ل. م. هيرفلا، تمكن ت. تشيكينا-ماطامبا [50] من استخراج بعض البنى التلامسية تقريبا المماثلة لبنية كانموتسو.

مقدّمة

ـ تابع 1 ـ

في البحث [13]، برهن كابيرسي أن جُداء منوّعتين تلامسيتين تقريبا هو منوّعة كالير إذا و فقط إذا كانت المنوّعتين من نمط كوسمبلاكتيك (*cosymplectique*). و من ثمّ طرح العالمان بلير-أوبينا [8] المسألة المفتوحة التالية:" ما نوع التغيير الذي ندخله على مترك الجُداء حتى يكون جُداء منوّعتين ساسكيتين هو منوّعة كالير؟".

مؤخرا و اعتمادا على أعمال طانو [48] (التحويل المحاكي للمنوّعات التلامسية)، استطاع بلير [9] إدراج مفهوم الجُداء الإلتفافي ت-تحاكي على جُداء منوّعة ريمانية بأخرى مترية تلامسية تقريبا و قد تمكن من توظيفه في إثبات التقابل بين بنى ساساكي و بنى كالير كما فعل أوبينا [40] سنة 1985. كما أدرج مفهوم الجُداء الإلتفافي ت-تحاكي المزدوج بين منوّعتين مزودتين ببنيتين تلامسيتين تقريبا باعتباره مجالا رحبا للبحث في ميدان البنى مستقبلا.

الهدف و مخطط العمل:

هدف هذه المذكرة يتلخص في دراسة و مناقشة جُداء المنوّعات المزوّدة ببعض البنى الأساسية . من أجل ذلك، تمكنّا من إدراج مفهوم **الجُداء ثنائي الإلتفاف (*2n*)-تحاكي** على جداء منوعتين إحداهما على الأقل مزودة ببنية مترية تلامسية تقريبا و قمنا بتوظيفه في إثبات النتائج التالية:

- انطلاقا من بنية ساساكي واحدة يمكن انشاء عائلة من بنى كالير و عمّمنا بذلك فكرة التقابل ساساكي- كالار.
- انطلاقا من بنية كوسمبلكتيكية أو بنية كانموتسو يمكن انشاء عائلة من بنى كالير المطابقة محليا.
- انطلاقا من بنية ساساكي واحدة يمكن انشاء عائلة من بنى كانموتسو.
- انطلاقا من بنية ثلاثية الساساكي يمكن انشاء بنية كالير كاترنيو.
- انطلاقا من منوّعة β-كانموتسو اعتيادية يمكن انشاء منوّعة كالير المعمّمة.

مقدّمة

ـ تابع 2 ـ

بعد ذلك نقدّم مفهوم **الجُداء ثنائي الإلتفاف ($2n$)-تحاكي المزدوج** و نبرهن أن هذا المترك – للأسف- لا يعطي إجابة موجبة لمسألة بلير-أوبينا و إنما يساند وجهة نظر كلابي-إكمان التي مفادها أن جُداء منوّعتي ساساكي لا يعطي منوّعة كالير أبدا.

في نهاية هذه المذكرة، قمنا بدراسة البني المترية التلامسية تقريبا المركّبة تقريبا، فبعد أن قمنا بإنشاء بنية ثلاثية تلامسية تقريبا ثم بنية ثلاثية مركّبة تقريبا انطلاقا من بنية مترية تلامسية تقريبا مركبة تقريبا قدمنا إنشاء لمنوّعة ذات بنية ثلاثية مركّبة تقريبا اعتمادا على جداء منوعتين متريتين تلامسيتين تقريبا مركبتين تقريبا مقدمين بذلك إجابة عن إحدى المسائل المفتوحة التي طرحها تشكينا-ماطامبا [55].

هذه المذكّرة مقسمة إلى خمسة فصول :

فصل المقدّمة الحالي، نقدم فيه خلاصة عن الدراسات التي أجريت في هذا الاتجاه و مخطط العمل المعتمد في هذه المذكرة كما يضم أيضا ملخصا عن أهم النتائج التي حصلنا عليها.

الفصل الثاني، مخصّص لجُداء المنوّعات الريمانية. نذكّر فيه ببعض التعاريف الأساسية و الخواص الهامّة كما نعطي فيه الأنماط المعروفة للمترك الريماني الذي يمكن تعريفه على جُداء منوّعتين ريمانيتين مع اعطاء مركّبات وصلة لوفي-سيفيطا لكل نمط.

البنى التلامسية تقريبا و البنى الهارميسية تقريبا هي محتوى الفصل الثالث و الرابع على التوالي. نعطي تعاريف و خواص البنى المعتمدة في هذا العمل و نخص بالذكر بنية ساساكي، بنية كانموتسو و بنية كالير مع أمثلة مناسبة و نحدد الجسور التي توضح العلاقات بينها.

الفصل الأخير هو الفصل المخصّص لتفصيل النتائج الأصلية المتحصّل عليها و التي ترتكز على المترك الجديد المدرج و نقصد الجُداء الالتفافي ت-تحاكي المعمّم و الجُداء الالتفافي ت-تحاكي المزدوج المعمّم و بعض تطبيقاتهما في إنشاء بنى على جُداء منوّعتين مزودتين ببنى مختلفة.

0.4 Principaux résultats

Définition 0.4.1. *(page. 63)*
Soient (M'^m, g') une variété Riemannienne, $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact. La métrique ***bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique*** *sur $\tilde{M} = M' \times M$ est définie par*

$$\tilde{g} = g' + f^2 g + f^2(h^2 - 1)\eta \otimes \eta.$$

où f et h sont deux fonctions différentiables sur M' vérifiant $fh \neq 0$ partout.
De plus, le couple $(\tilde{M}, \tilde{g})$ s'appelle variété Riemannienne produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique.

Proposition 0.4.1. *(page. 64)*
Soient ∇', ∇ and $\tilde{\nabla}$ les connexions Riemannienne associées à $g', g,$ et $\tilde{g}$ respectivement. Pour tous X', Y', Z' champs de vecteurs sur M' indépendants de M et de même pour X, Y, Z champs de vecteurs sur M, en particulier $[X', Y']$ est tangent à M', $[X, Y]$ est tangent à M et $[X', Y] = 0$. On a

$$\tilde{\nabla}_{X'} Y' = \nabla'_{X'} Y',$$

$$\tilde{\nabla}_{X'} Y = \tilde{\nabla}_Y X' = \tfrac{X'(f)}{f} g(Y, Z) + \tfrac{X'(h)}{h} \eta(Y)\eta(Z),$$

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y Z, X') = -fX'(f)g(Y, Z) - f\Big((h^2 - 1)X'(f) + fhX'(h)\Big)\eta(Y)\eta(Z), \quad .$$

$$\begin{aligned}2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = 2\tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + f^2(h^2 - 1)\Big(&\big(g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X)\big)\eta(Z) \\ &+2d\eta(X, Z)\eta(Y) + 2d\eta(Y, Z)\eta(X)\Big)\end{aligned}$$

Théorème 0.4.1. *(page. 66)*
Pour une variété Riemannienne (M', g'), une variété métrique presque de contact $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ et une métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique sur $\tilde{M} = M' \times M$ on a

1. *Pour tout $y_0 \in M$, $M' \times \{y_0\}$ est une sous variété totalement géodésique.*

2. *Si grad$'(h - f) = 0$ alors pour tout $x'_0 \in M$, $\{x'_0\} \times M$ est une sous variété quasi-ombilicale et sa 2-forme fondamentale est*

$$\sigma(X, Y) = -f\big(g(X, Y) + (h^2 + fh - 1)\eta(X)\eta(Y)\big) grad' f.$$

3. *La courbure moyenne de M dans $M' \times M$ est donnée par*

$$\mathcal{H} = -grad'\Big(\frac{(2n + h^2)f^2}{2(2n + 1)}\Big).$$

4. *Pour tout $x'_0 \in M'$, la sous variété $\{x'_0\} \times M$ est minimale si et seulement si*

$$h^2 = \frac{2c(2n + 1)}{f^2} - 2n$$

où $c > 0$ et dans ce cas $\{x_0'\} \times M$ est quasi-ombilicale et sa 2-forme fondamentale est

$$\sigma(X,Y) = \frac{1}{2}\Big(g(X,Y) - \frac{2n+1}{f^2}\eta(X)\eta(Y)\Big) grad' f^2.$$

5. Si $d\eta(\xi, X) = 0$ pour tout champ de vecteurs X sur M (c.à.d. les courbes intégrales de ξ sont des géodésiques). Alors, le champ de vecteurs de Reeb ξ est $\tilde{g}$-Killing si et seulement si il est g-Killing.

Théorème 0.4.2. *(page. 70)*
Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact. On définit sur la variété $\overline{M} = \mathbb{R} \times M$ une structure presque complexe $(\tilde{g}, \tilde{J})$ par

$$\tilde{g} = dt^2 + f^2 g + f^2(f'^2 - 1)\eta \otimes \eta,$$

$$\tilde{J}(a\frac{\partial}{\partial t}, X) = \Big(ff'\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \varphi X - \frac{a}{ff'}\xi\Big),$$

où $fh \neq 0$ partout et X un champ de vecteurs sur M. Alors on a

1. *La structure métrique presque de contact sur M est une structure métrique de contact si et seulement si la structure presque hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J})$ est presque Kälérienne pour toute fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $ff' \neq 0$. De plus, la structure sur M est Sasakienne si et seulement si la structure $(\tilde{g}, \tilde{J})$ sur $\tilde{M}$ est Kählérienne.*

2. *La structure métrique presque de contact sur M est presque cosymplectique si et seulement si la structure presque hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J})$ satisfait $d\tilde{\Omega} = 2ff'(dt \wedge \Phi)$ dans ce cas la structure est conformément presque Kählérienne. De plus, la structure sur M est cosymplectique si et seulement si la structure $(\tilde{g}, \tilde{J})$ on $\tilde{M}$ est conformément Kählérienne.*

3. *La structure métrique presque de contact sur M est presque Kenmotsu si et seulement si la structure presque hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J})$ satisfait $d\tilde{\Omega} = 2f(f'dt + f\eta) \wedge \Phi$ dans ce cas la structure est conformément presque Kählérienne si et seulement si η est exacte. De plus, si la structure sur M est de Kenmotsu alors la structure $(\tilde{g}, \tilde{J})$ sur $\tilde{M}$ est conformément Kählérienne si et seulement si η est exacte. et aussi, si $\eta = -d\beta$ pour quelque $\beta \in C^\infty(\tilde{M})$ alors $e^{2(\beta - \ln|f|)}\tilde{g}$ sera une métrique Kählérienne sur $\tilde{M}$.*

Théorème 0.4.3. *(page. 74)*
Soit $M(c)$ un espace de forme Sasakienne. Donc on a

— *Cas 1. $\mathbb{R}^* \times M$ est une variété Kählerienne plat pour $f(t) = \pm\frac{t}{2}\sqrt{c+3}$ où $c > -3$.*
— *Cas 2. $\mathbb{I} \times M$ est un espace de forme complexe avec courbure sectionnelle holomorphique $C > 0$ pour $f(t) = \sqrt{\frac{c+3}{C}}\sin(\frac{t}{2}\sqrt{C})$ où $c > -3$ et $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \{\frac{m\pi}{\sqrt{C}}/m \in \mathbb{Z}\}$.*
— *Cas 3. $\mathbb{R} \times M$ est un espace de forme complexe avec courbure sectionnelle holomorphique $C < 0$ for $f(t) = \frac{-1}{2\sqrt{-C}}\Big(c + 3 - e^{\pm\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{-C}}\Big)$.*

Théorème 0.4.4. *(page. 76)*
Soient $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété η-Einstein. Alors, on a

(1) Si $f(t) = t\sqrt{1-p}$ *avec* $p < 1$*, alors le produit* $\mathbb{R}^* \times M$ *avec la métrique (4.6) est Ricci plat.*

(2) Si $f(t) = \sqrt{\frac{1-p}{-q}}\sin(-t\sqrt{-q})$ *avec* $p < 1$*, alors le produit* $\mathbb{I}_1 \times M$ *avec la métrique (4.6) est une variété Kähler-Einstein pour* $\lambda = -2k(n+2)$*, où* k *est une constante négative et* $\mathbb{I}_1 = \mathbb{R} - \{-\frac{m\pi}{2\sqrt{-q}}/m \in \mathbb{Z}\}$*.*

(3) S $f(t) = \frac{1}{\sqrt{q}}\sinh(t\sqrt{q}) + \frac{p}{2\sqrt{q}}e^{-t\sqrt{q}}$*, then the product* $\mathbb{I}_2 \times M$ *avec la métrique (4.6) est une variété Kähler-Einstein pour* $\lambda = -2k(n+2)$*, où* k *est une constante positive et* $\mathbb{I}_2 = \mathbb{R} - \{\frac{1}{4\sqrt{q}}\ln\big(1-p)^2\big)/p \neq 1\}$.

Théorème 0.4.5. *(page. 80)*
Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété Sasakienne. On définit sur la variété* $\overline{M} = \mathbb{I} \times \mathbb{R} \times M$ *où* $\mathbb{I}$ *et un intervalle ouvert dans* $\mathbb{R}$*, une structure métrique presque de contact* $(\overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ *par*

$$\overline{\varphi}\Big(a\frac{\partial}{\partial r}, b\frac{\partial}{\partial t}, X,\Big) = \Big(0, ff'\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}, \varphi X - \frac{b}{ff'}\xi\Big),$$

$$\overline{\xi} = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \overline{\eta} = dt,$$

$$\overline{g} = dr^2 + k^2\Big(dt^2 + f^2 g + f^2(f'^2 - 1)\eta \otimes \eta\Big).$$

où $k = k(r)$ *et* $f = f(t)$ *deux fonctions sur* $\mathbb{R}^2$ *telle que* $ff' \neq 0$ *partout et* X *un champ de vecteurs sur* M*. Alors on a*

1. $(\overline{M}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ *est une variété cosymplectique ssi* $k = constant$*.*
2. $(\overline{M}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ *est une variété de Kenmotsu ssi* $k = ce^r$ *avec* $c \in \mathbb{R}$*.*

Théorème 0.4.6. *(page. 85)*
Soit $\big(M^{4n+3}, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^3, g\big)$ *une variété 3-Sasakienne. Une structure presque hermitienne quaternionique* $\big((\tilde{J}_\alpha)_{\alpha=1}^3, \tilde{g}\big)$ *définie sur* $\mathbb{R} \times M^{4n+3}$ *par*

$$\tilde{J}_\alpha(a\frac{\partial}{\partial t}, X) = \Big(fh\ \eta_\alpha(X)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \varphi_\alpha X - \frac{a}{fh}\xi_\alpha\Big),$$

où X *un champ de vecteurs sur* M *et*

$$\tilde{g} = dt^2 + f^2 g + f^2(h^2-1)\sum_{i=1}^{i=3}\eta_i \otimes \eta_i,$$

où f, h *deux fonctions sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $fh \neq 0$ *partout est une structure :*

(1). HyperKählérienne si $f(t) = t$*.*

(2). Kählérienne quaternionique si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{c}}\sin(\sqrt{c}t)$ *où* c *est une constante positive.*

(3). Kählérienne quaternionique si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{-c}}\sinh(\sqrt{-c}t)$ *où* c *est une constante négative.*

Théorème 0.4.7. *(page. 86)*
Toute variété $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *connexe et* β*-Kenmotsu où* β *est une constante, engendre une famille de structures Kählérienne généralisées à trois paramètres* $(\tilde{g}, \tilde{b}, \tilde{J}_\pm)$ *sur* $M \times \mathbb{R}$*.*

Théorème 0.4.8. *(page. 88)*
Toute variété Kählérienne $(M'^{2n}, J', g', \omega')$, engendre deux familles de structures Kählériennes généralisées à 1-paramètre

$$\Big(\tilde{g}, \frac{1}{2}\sqrt{c-h^4}(ae^{-2r}+be^{2r})\omega', \tilde{J}_{\pm}\Big),$$

et

$$\Big(\tilde{g}, h^2\big(a\cos(2r)-b\sin(2r)\big)\omega', \tilde{J}_{\pm}\Big).$$

Définition 0.4.2. *(page. 89)*
*Soient $(M'\varphi', \xi', \eta', , g')$ et $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ deux variétés métrique presque de contact. La métrique **bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée** sur $\tilde{M} = M' \times M$ est définie par*

$$\tilde{g} = F^2 g' + F^2(H^2-1)\eta' \otimes \eta' + f^2 g + f^2(h^2-1)\eta \otimes \eta.$$

où f, h sont deux fonctions sur M' et F, H sont deux fonctions sur M telle que $fh \neq 0$ et $FH \neq 0$ partout.

Proposition 0.4.2. *(page. 89)*
Soit $\tilde{\nabla}, \nabla'$ et ∇ les connexions de $\tilde{g}, g'$, and g respectivement. Pour tous X', Y' champs de vecteurs tangent a M' et indépendant de M et de même pour X, Y, nous avons

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'}Y', Z') &= \tilde{g}(\nabla'_{X'}Y', Z')\\
&\quad + F^2(H^2-1)\Big(\frac{1}{2}\big(g'(\nabla'_{X'}\xi', Y') + g'(\nabla'_{Y'}\xi', X')\big)\eta'(Z')\\
&\qquad + d\eta'(X', Z')\eta'(Y') + d\eta'(Y', Z')\eta'(X')\Big),\\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X}Y', Z') &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y'}X, Z') = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Z'}Y', X)\\
&= FX(F)g'(Y', Z') + F\big((H^2-1)X(F) + FHX(H)\big)\eta'(Y')\eta'(Z'),\\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'}Y, Z) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y}X', Z) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Z}Y, X')\\
&= fX'(f)g(Y, Z) + f\big((h^2-1)X'(f) + fhX'(h)\big)\eta(Y)\eta(Z),\\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X}Y, Z) &= \tilde{g}(\nabla_{X}Y, Z)\\
&\quad + f^2(h^2-1)\Big(\frac{1}{2}\big(g(\nabla_X\xi, Y) + g(\nabla_Y\xi, X)\big)\eta(Z)\\
&\qquad + d\eta(X, Z)\eta(Y) + d\eta(Y, Z)\eta(X)\Big).
\end{aligned}$$

Théorème 0.4.9. *(page. 90)*
Soient $(M'\varphi', \xi', \eta', , g')$ et $(M, , \varphi, \xi, \eta, g)$ deux variétés métrique presque de contact et $\tilde{g}$ la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée sur $\tilde{M} = M' \times M$ définie ci-dessus (4.3.1) alors, on a les assertions suivantes :

1. Pour tout $x'_0 \in M'$, la sous variété $\{x'_0\} \times M$ est quasi ombilicale si $grad'h = grad'f$ et dans ce cas la 2-forme fondamentale σ est donnée par

$$\sigma(X, Y) = -\frac{1}{2F^2}\Big(g(X, Y) + (h^2 + fh - 1)\eta(X)\eta(Y)\Big)\Big(grad' f^2 + \frac{1-H^2}{H^2}\xi'(f^2)\xi'\Big).$$

2. Pour tout $x'_0 \in M'$, la sous variété $\{x'_0\} \times M$ est minimale si et seulement si $h^2 = \frac{c}{f^2} - 2n$ où c est une constante positive et dans ce cas la 2-forme fondamentale σ est donnée par

$$\sigma(X,Y) = -\frac{1}{2F^2}\Big(g(X,Y) - (2n+1)\eta(X)\eta(Y)\Big)\Big(grad' f^2 + \frac{1-H^2}{H^2}\xi'(f^2)\xi'\Big).$$

3. Si $\nabla_\xi \xi = 0$ alors,

$$\tilde{\nabla}_\xi \xi = -\frac{1}{2F^2}\Big(grad'(f^2h^2) + \frac{1-H^2}{H^2}\xi'(f^2h^2)\xi\Big).$$

Les mêmes résultats par symétrie, nous pouvons les conclure dans la second direction (c.à.d. pour la sous variété $M' \times \{x_0\}$ où $x \in M$).

Définition 0.4.3. *(page. 89)*
*Soient $(M'\varphi', \xi', \eta',, g')$ et $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ deux variétés métrique presque de contact. La métrique **bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée** sur $\tilde{M} = M' \times M$ est définie par*

$$\tilde{g} = F^2 g' + F^2(H^2-1)\eta' \otimes \eta' + f^2 g + f^2(h^2-1)\eta \otimes \eta.$$

où f, h sont deux fonctions sur M' et F, H sont deux fonctions sur $M' \times M$ telle que $fh \neq 0$ et $FH \neq 0$ partout.

Proposition 0.4.3. *(page. 94)*
Soient $(M'\varphi', \xi', \eta',, g')$ et $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ deux variétés métrique presque de contact.Soient $\tilde{\nabla}, \nabla'$ et ∇ les connexions de $\tilde{g}, g'$, and g respectivement où

$$\tilde{g} = F^2 g' + F^2(H^2-1)\eta' \otimes \eta' + f^2 g + f^2(h^2-1)\eta \otimes \eta.$$

et F, f deux fonctions sur $\tilde{M} = M' \times M$. Pour tous X', Y' champs de vecteurs tangent a M' et indépendant de M et de même pour X, Y, nous donnons la connexion tilde nabla explicitement par

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X'}Y' =& \nabla'_{X'}Y' - \frac{1}{2}\Big(Y'(\ln F^2)\varphi'^2 X' + X'(\ln F^2)\varphi'^2 Y'\Big)\\
&- \frac{\alpha'}{F^2}(1-F^2)\big(\eta'(Y')\varphi' X' + \eta'(X')\varphi' Y'\big)\\
&+ \Big(\beta'(1-F^2) - \frac{1}{2}\big(grad'(\ln F^2) + (F^2-1)\eta'\big(grad'(\ln F^2)\big)\Big)g'(\varphi' X', \varphi' Y')\xi'\\
&- \frac{1}{2f^2}\Big(\big(grad(F^2) + (f^2-1)\eta\big(grad(F^2)\big)\Big)g'(\varphi' X', \varphi' Y')\xi,\\
\tilde{\nabla}_{X'}Y =& \tilde{\nabla}_Y X' = -\frac{1}{2}\Big(Y(\ln F^2)\varphi'^2 X' + X'(\ln f^2)\varphi^2 Y\Big),\\
\tilde{\nabla}_X Y =& \nabla_X Y - \frac{1}{2}\Big(Y(\ln f^2)\varphi^2 X + X(\ln f^2)\varphi^2 Y\Big)\\
&- \frac{\alpha}{f^2}(1-f^2)\big(\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y\big)\\
&+ \Big(\beta(1-f^2) - \frac{1}{2}\big(grad(\ln f^2) + (f^2-1)\eta\big(grad(\ln f^2)\big)\Big)g(\varphi X, \varphi Y)\xi\\
&- \frac{1}{2F^2}\Big(\big(grad'(f^2) + (F^2-1)\eta'\big(grad'(f^2)\big)\Big)g(\varphi X, \varphi Y)\xi'.
\end{aligned}$$

Proposition 0.4.4. *(page. 96)*
Soient $(M', \varphi', \xi', \eta', g')$ et $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ deux variétés trans-Sasakienne de type (α', β') et (α, β) respectivement. Alors, la variété $(\tilde{M} = M' \times M, \tilde{J}, \tilde{g})$ avec

$$\tilde{g} = F^2 g' + (1 - F^2)\eta' \otimes \eta' + f^2 g + (1 - f^2)\eta \otimes \eta,$$

où F, f sont des fonctions sur $\tilde{M}$ et

$$\tilde{J}(X', X) = \Big(\varphi' X' - \eta(X)\xi' \ , \ \varphi X + \eta'(X')\xi\Big),$$

est Kählerian si et seulement si

$$grad' f^2 = -2\alpha\xi', \qquad grad \ln f^2 = -2\beta\xi,$$

$$grad F^2 = 2\alpha'\xi, \qquad grad' \ln F^2 = -2\beta'\xi'.$$

Théorème 0.4.10. *(page. 96)*
Soient M' et M deux variétés métrique presque de contact. Considérons la structure presque hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J})$ sur $M' \times M$ donnée par

$$\tilde{g} = F^2 g' + (1 - F^2)\eta' \otimes \eta' + f^2 g + (1 - f^2)\eta \otimes \eta,$$

où F, f sont des fonctions sur $\tilde{M}$ et

$$\tilde{J}(X', X) = \Big(\varphi' X' - \eta(X)\xi' \ , \ \varphi X + \eta'(X')\xi\Big).$$

Alors, la variété$(M' \times M, \tilde{g}, \tilde{J})$ est Kählerian si et seulement si
(1) : M' est une variété connexe β'-Kenmotsu et M est une variété connexe β-Kenmotsu avec $F^2 = e^{-2\beta'\rho'}$ et $f^2 = e^{-2\beta\rho}$.
(2) : M' est une variété connexe β'-Kenmotsu et M est une variété α-Sasakienne avec $F^2 = e^{-2\beta'\rho'}$ et $f^2 = -2\alpha\rho'$.
(3) : M' est une variété connexe cosymplectique et M isest une variété α-Sasakian avec $F = constant$ et $f^2 = -2\alpha\rho'$.
(4) : M' et M sont deux variétés connexes cosymplectique avec F et f sont constantes.

Théorème 0.4.11. *(page. 101)*
La variété $\big(\tilde{M}, \tilde{g}, (\tilde{J}_i)_{i=1}^3\big)$ est hyperkählérienne si et seulement si $\big(M^{4m+2}, g, J, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^2\big)$ et $\big(M'^{4m'+2}, g, J', (\varphi'_i, \xi'_i, \eta'_i)_{i=1}^2\big)$ sont deux variétés cosymplectique-Kählérienne.

chapter 1

Variétés Riemanniennes

Ce chapitre est élémentaire, au sens où la plus part des concepts étudiés sont des outils nécessaires pour le reste de ce mémoire.

On va rappeler quelques définitions fondamentales sur la théorie des variétés Riemanniennes on appuyant sur les tenseurs, les formes et les courbures.

Pour les détails voir ([21], [33],[34]).

1.1 Les tenseurs

1.1.1 Champ de vecteurs

On désigne par T_pM l'espace tangent à une variété M en un point p. Les espaces tangents T_pM où p parcourt la variété M forment une variété différentiable de dimension $2n$ (ou $n = dimM$), noté TM qui se projette canoniquement sur M. La projection

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

associe à tout vecteur X son point d'application, c'est-à-dire un point $p \in M$ tel que $X \in T_pM$, de sorte que $T_pM = \pi^{-1}(p)$. Les sections de cette projection, c'est-à-dire les applications différentiables

$$X : M \longrightarrow TM$$
$$p \longmapsto X_p$$

telles que $\pi \circ X = id$ c.à.d. $X_p \in T_pM$, s'appellent champs de vecteurs sur M. Ces champs de vecteurs engendrent canoniquement un espace vectoriel (de dimension infinie) qui sera désigné par $\mathfrak{X}(M)$.

Définition 1.1.1. *Soit M une variété différentiable.*
Le crochet de Lie noté $[,]$ est définie par $[X,Y] = XY - YX$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vérifiant les propriété suivantes :

1. *$[,]$ est bilinéaire et antisymétrique.*
2. *$\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0$ pour $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*
3. *$[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ pour $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $f, g \in C^\infty$.*
4. *$[X,Y] = (X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j}$ où $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$.*

1.1.2 Tenseur sur une variété

Définition 1.1.2. • *Pour tout $p \in M$ nous définissons l'espace vectoriel*

$$T_p^{(r,s)}M = \underbrace{T_pM \otimes T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_{sfois} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes T_p^*M \otimes \cdots \otimes T_p^*M}_{rfois}$$

- *Un élément $T \in T_p^{(r,s)}M$ est un tenseur de type (r,s) au-dessus de p. Dans une base associe à des coordonnées (x^i au voisinage de p), il s'écrit*

$$T|_p = T^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p) \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}(p) \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}(p) \otimes dx^{j_1}|_p \otimes dx^{j_2}|_p \otimes \cdots dx^{j_s}|_p$$

  où, $T^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}(p)$ sont des fonctions différentiables de classe C^∞.
- *On note $T^{(r,s)}M = \bigcup\limits_{p \in M} T_p^{(r,s)}M$ l'espace vectoriel des tenseur de type (r,s).*

Définition 1.1.3. *Un champ de tenseur de type (r,s) est une section de classe C^∞ de $T^{(r,s)}M$. L'ensemble des champs de tenseur de type (r,s) est noté par $\mathfrak{T}^{(r,s)}M$.*

1.1.3 Métriques Riemanniennes

Définition 1.1.4. *Soit M une variété différentiable. Une métrique Riemannienne g sur M est un tenseur de type $(0,2)$ tel que pour tout $p \in M$ l'application $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire , symétrique , définie positive et non dégénéré.*

M munie d'une métrique Riemannienne g est appelée variété Riemannienne ,noté $(M;g)$.

Remarque 1.1.1. *Dans un système de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$. Les composantes de g sont $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$, où $(g_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est la matrice symétrique inversible associé à g .*

1.1.4 Tenseur sur une variété Riemannienne

Définition 1.1.5. *Un tenseur de type $(0,r)$ ou (d'ordre r)sur une variété Riemannienne M est une application multilinéaire*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{rfois} \to C^\infty$$

pour $Y_1, \cdots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, $T(Y_1, \cdots, Y_r)$ est une fonction différentiable sur M linéaire pour chaque argument c'est à dire,

$$T(Y_1, \cdots, fX + gY, \cdots, Y_r) = fT(Y_1, \cdots, X, \cdots, Y_r) + gT(Y_1, \cdots, Y, \cdots, Y_r)$$

avec $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $f, g \in C^\infty$.

1.1.5 Connexion Riemannienne

Connexion linéaire

Définition 1.1.6. *Une connexion linéaire sur une variété différentiable M est une application*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

telle que pour tous $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{X}(M)$ et $f, g \in C^\infty(M)$

1) $\nabla_{fX+gX'}(Y) = f\nabla_X(Y) + g\nabla_{X'}(Y)$,
2) $\nabla_X(Y+Y') = \nabla_X(Y) + \nabla_X(Y')$,
3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)Y$.

Définition 1.1.7. *Soit (U, φ) une carte sur une variété différentiable M de dimension n et $\{x^i\}$ les coordonnées assocoées pour les quelles on note $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.*
Les symboles de Christoffel d'une connexion ∇ relativement aux coordonnées $\{x^i\}$ sont les n^3 fonctions $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(M)$ définies par

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Lemme 1.1.1. *Localement, les symboles de Christoffel déterminent entièrement la connexion ∇. Plus précisement, pour $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j\partial_j$, alors*

$$\nabla_X Y = \big(XY^k + X^iY^j\Gamma_{ij}^k\big)\partial_k$$

Torsion d'une connexion

Définition 1.1.8.

La torsion d'une connexion est un tenseur de type $(1;2)$ défini par l'expression

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

$T(X,Y)$ est donc un champ de vecteurs. Par définition, nous remarquons que

$$T(X,Y) = -T(Y,X).$$

La nullité du tenseur de torsion est équivalente à la relation $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tous i, j, k. En effet, il est facile de constater que ce tenseur est la partie antisymétrique des symboles de Christoffel : $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ pour tous i, j, k.

Localement, pour $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(M)$ on a

$$T(X,Y) = X^iY^j(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Connexion Riemannienne

Définition 1.1.9. *On dit qu'une connexion linéaire sur une variété Riemannienne* $(M; g)$ *est métrique ou Riemannienne si* g *est parallèle c.à.d.* $\nabla g = 0$.

Définition 1.1.10. *Soit* M *une variété Riemannienne. Il existe une unique connexion* ∇ *sur le fibré tangent* TM *telle que :*

- **(•)** *la torsion de* ∇ *est nulle ;*
- **(•)** *la métrique Riemannienne est parallèle.*

On l'appelle la connexion de Levi-Civita de M.

Proposition 1.1.1. *Soit* ∇ *une connexion Riemannienne sur* $(M; g)$ *alors,*

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \qquad Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \tag{1.1}$$

On peut dire aussi que la connexion est compatible avec la métrique g.

Pour la preuve voir ([21], p.54)

Proposition 1.1.2. ***Connexion d'une métrique conforme***

Soit (M, g) *une variété Riemannienne de dimension* n *et* ρ *une fonction* C^∞ *sur* M. *Pour tout changement conforme de métrique c'est-à-dire,* $\tilde{g} = e^{2\rho} g$, *la connexion* $\tilde{\nabla}$ *associé à* $\tilde{g}$ *est donnée par*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\rho)Y + Y(\rho)X - g(X, Y) grad\rho.$$

où ∇ *est la connexion Riemannienne associé à* g.

Preuve . La preuve decoule directement on utilisant la formule de Koszul

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = X\tilde{g}(Y, Z) + Y\tilde{g}(Z, X) - Z\tilde{g}(X, Y) + \tilde{g}\big(Z, [X, Y]\big) + \tilde{g}\big(Y, [Z, X]\big) - \tilde{g}\big(X, [Y, Z]\big),$$

pour tous $X, Y, Z, \in \mathfrak{X}(M)$. ∎

1.2 Les formes différentielles

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1. *Une* r*-forme différentielle (ou plus brièvement* r*-forme) sur* M *est un champ tensoriel de type*$(r, 0)$ *complètement antisymétrique. Nous noterons* $\Omega^r(M)$ *l'espace vectoriel de ces* r*-formes. Pour* $r = 0$, *nous avons* $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$. *Pour* $r = 1$, *nous retrouvons les* 1*-formes différentielles. Pour* $r > n = dimM$, *nous avons* $\Omega^r(M) = \{0\}$. *Une* r*-forme différentielle est donc une application* $\mathcal{F}(M)$*-multilinéaire antisymétrique de* $\Gamma(M) \times \cdots \times \Gamma(M)$ *dans* $\mathcal{F}(M)$

Expressions locales

Si $\{dx^i\}$ est une base locale des 1-formes différentielles, au dessus de l'ouvert U d'une carte locale de M, de coordonnées (x^i), nous posons

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} = \sum_{\sigma \in \mathbb{C}_r} (-1)^{sign(\sigma)} dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes dx^{i_{\sigma(r)}}$$

pour $i_1 < \cdots < i_r$. Alors les $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$ engendrent localement $\Omega^r(M)$ sur les fonctions. C'est à dire que toute r-forme ω s'écrit, au dessus de U,

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_r} \\ &= \omega_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \end{aligned}$$

où la seconde sommation porte sur $i_1 < \cdots < i_r$ et où les $\omega_{i_1 \cdots i_r}$ sont des fonctions $U \longrightarrow \mathbb{R}$. Parfois, cette seconde sommation portera sur tous les indices $i_1 \cdots i_r$, ce qui suppose que l'on étende la définition des $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$ à tous les $(i_1 \cdots i_r)$ et que les $\omega_{i_1 \cdots i_r} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deviennent des fonctions complètement antisymétriques sur leurs indices ; il faudra alors aussi placer un facteur $\frac{1}{r!}$ devant la somme. Nous l'indiquerons quand ce sera le cas.

Produit extérieur

Pour $\omega \in \Omega^r(M)$ et $\eta \in \Omega^s(M)$, nous pouvons définir le produit extérieur $\omega \wedge \eta \in \Omega^{r+s}(M)$ par la formule :

$$(\omega \wedge \eta)(X_1, \ldots, X_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathbb{C}_{r+s}} (-1)^{sign(\sigma)} \omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}) \cdot \eta(X_{\sigma(r+1)}, \ldots, X_{\sigma(r+s)})$$

Ce produit donne à l'espace vectoriel $\Omega^*(M) = \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^n(M)$ une structure d'algèbre. Il y a la propriété de commutativité

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega.$$

Pull-back des formes différentielles

Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable, et $\omega \in \Omega^r(N)$. Alors $(F^*\omega)$ est une r-forme différentielle sur M, appelée le pull-back de ω par F. On remarquera que cette définition ne suppose pas que F soit inversible, puisque dans le cas des formes, la formule donnée comme définition sur les tenseurs généraux se réduit à

$$(F^*\omega)(X_1, \ldots, X_r) = \omega(F_*X_1, \ldots, F_*X_r)$$

Pour $r = 1$, on retrouve la définition du pull-back suivante

Définition 1.2.2.

Soit $F : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme et T un champ tensoriel sur N. On définir l'application pull-back sur les champs de tenseurs par :

$$(F^*T)(\alpha^1, \ldots, \alpha^s, X_1, \ldots, X_r) = T\big((F^{-1})^*\alpha^1, \ldots, (F^{-1})^*\alpha^s, F_*X_1, \ldots, F_*X_r\big).$$

1.2.2 Différentielle

Définition 1.2.3. *Nous définissons la différentielle d sur $\Omega^r(M)$ par l'ensemble des applications linéaires*

$$d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$$

et pour tout $\omega \in \Omega^r(M)$ on a

$$\begin{array}{rcl} d : \Omega^0(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M) \\ \omega(X_0, \ldots, X_r) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i \cdot \omega(X_0, \ldots, \underset{\cdot}{x}^i, \ldots, X_r) \\ & & \displaystyle + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \ldots, \underset{\cdot}{x}^i, \ldots, \underset{\cdot}{x}^j, \ldots, X_r). \end{array}$$

Dans le premier terme du second membre, X_i agit comme dérivation sur la fonction $\omega(X_0, \ldots, \underset{\cdot}{x}^i, \ldots, X_r)$ ($\underset{\cdot}{x}^i$ signifie que l'on omet X_i dans les arguments de ω).

Propriétés 1.2.1. *On utilisant l'identité de Jacobi, on obtient*

$$d^2 = 0.$$

Nous avons aussi l'importante relation (qui fait de d une antidérivation de l'algèbre $\Omega^*(M)$),

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$$

où $\omega \in \Omega^r(M)$.
Au dessus d'un ouvert U d'une carte locale de M, si $\omega = \omega_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$, alors

$$d\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \omega_{i_1 \ldots i_r} \right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}.$$

Cette sommation porte sur toutes les valeurs de i et sur $i_1 < \cdots < i_r$.
Si M et N sont deux variétés différentiables, et si $F : M \longrightarrow N$ est une application différentiable, alors, pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega^*(N)$, nous avons

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega),$$

c'est à dire que F^* et d commutent. Attention, d'un côté, il s'agit de la différentielle sur M, et de l'autre de la différentielle sur N.

Deux cas remarquables *: pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*
$*$ Si ω est une 1-forme,

$$2(d\omega)(X, Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega\big([X, Y]\big)$$

$*$ Si ω est une 2-forme,

$$\begin{array}{rcl} 3(d\omega)(X, Y, Z) & = & X\big(\omega(Y, Z)\big) + Y\big(\omega(Z, X)\big) + Z\big(\omega(X, Y)\big) \\ & - & \omega\big([X, Y], Z\big) - \omega\big([Y, Z], X\big) - \omega\big([Z, X], Y\big). \end{array}$$

1.3 Les courbures sur une variété Riemannienne

1.3.1 Courbure Riemannienne

Définition 1.3.1. *La courbure d'une variété Riemannienne* $(M;g)$ *est un tenseur de type* $(1,3)$ *, noté* $\mathcal{R}$ *tel que*

$$\begin{aligned} \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M), \qquad \mathcal{R}(X,Y)Z &:= [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z \end{aligned}$$

Propriétés 1.3.1.
- $\mathcal{R}(X,Y)Z = -\mathcal{R}(Y,X)Z$.
- $\mathcal{R}(fX,gY)hZ = fgh\mathcal{R}(X,Y)Z$ *pour tous* $X,Y,Z, \in \mathfrak{X}(M), et f,g,h \in C^\infty$.

1.3.2 La courbure en coordonnées

Soit $p \in M$ et $x^1,...,x^n$ des coordonnées autour de p . Le tenseur de courbure s'écrit localement,

$$R = R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l$$

où les coefficients R^l_{ijk} sont définis par,

$$R^l_{ijk}\partial_l = R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$$

explicitement on a

$$R^l_{ijk} = \partial_i(\Gamma^l_{jk}) - \partial_j(\Gamma^l_{ik}) + \sum_{m=1}^{n} \left(\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\right),$$

où, $(\partial_i)_{i=1..n}$ est une base locale des champs de vecteurs sur M. On remarque que le tenseur de courbure ne dépend que des coefficients de la métrique g et de leurs dérivées, les symboles de Christoffel ne dépendant eux-mêmes que de g.

Proposition 1.3.1. *Soit* (M,g) *une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne* R *a les propriétés suivantes :*

1. R *est un champ de tenseurs de type* $(1,3)$.
2. $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$.
3. $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$.
4. R *vérifie l'identité de Bianchi algébrique*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

5. R *vérifie l'identité de Bianchi différentielle*

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0.$$

$\forall X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$
Pour la preuve voir ([21],p 90).

1.3.3 Courbure sectionnelle

Définition 1.3.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 2$ et P un 2-plan de T_xM de base $\{X, Y\}$. On appelle courbure sectionnelle en x de P le réel K_x défini par,*

$$K_x(P) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}.$$

Remarquons que dans la définition précédente, on peut remplacer X par λX pour $\lambda \neq 0$ et Y par $Y - g(X,Y)X$. On peut donc supposer que $\{X, Y\}$ est une base orthonormale. Dans ce cas

$$K_x(P) = g(R(X,Y)Y,X).$$

Définition 1.3.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, de dimension n. On dit que M est une variété à courbure constante s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in M$ et tout 2-plan P de T_xM, on a*

$$K_x(P) = c.$$

Proposition 1.3.2.

Une variété Riemannienne (M, g) est de courbure sectionnelle constante c si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation :

$$R(X,Y)Z = c(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y).$$

pour tout X, Y et $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

1.3.4 Courbure de Ricci

Définition 1.3.4. *La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M^n, g) est un tenseur de type $(0, 2)$ défini par*

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= trace(Z \longmapsto R(Z,X)Y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, où (e_i) une base orthonormée locale sur M.

Définition 1.3.5.

Une variété Riemannienne (M^n, g) est dite variété d'Einstein si,

$$S(X,Y) = \lambda g(X,Y),$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et λ une constante.

1.3.5 Courbure Scalaire

Définition 1.3.6. *On appelle courbure scalaire d'une variété Riemannienne* (M^n, g) *la fonction définie sur M par,*

$$\begin{aligned} r &= tr_g S \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} S(e_j, e_j). \end{aligned}$$

où $(e_i)_{i=1..n}$ *une base orthonormée locale sur* M.

Proposition 1.3.3. *Toute variété Riemannienne* (M, g) *de courbure sectionnelle constante c est une variété Einstiennienne.*

Corollaire 1.3.1. *Si* (M^m, g) *est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante c, alors pour tout* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *on a*

1. $Ricci(X) = (m-1)cX$,
2. $S(X, Y) = (m-1)cg(X, Y)$,
3. $r = m(m-1)c$.

chapter 2

Variété Riemannienne produit

Dans ce chapitre, nous rappelons la notion d'une variété Riemannienne produit ainsi quelques types de métrique Riemannienne citons la métrique diagonale, la métrique produit tordu, la métrique produit tordu généralisée, la métrique produit doublé, la métrique produit tordu doublé et la métrique produit tordu doublé généralisée. En donnant pour chaque type la connexion de Levi-Cevita associée.

2.1 Variété Riemannienne produit

2.1.1 Variété Riemannienne produit

Définition 2.1.1.
Soient $(M_1, \mathcal{A}_1)$, $(M_2, \mathcal{A}_2)$ deux variétés de classe C^∞, munies de deux atlas $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ de dimensions n_1, n_2 respectivement. Alors le produit $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ donné par

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) \,|\, (U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1, (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}_2\}$$

où,

$$\begin{aligned} \varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 &\longrightarrow \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2) \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) \end{aligned}$$

est un atlas sur $M_1 \times M_2$ de dimension $n_1 + n_2$ et de classe C^∞.

*La variété $(M_1 \times M_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ est dite **variété produit** de M_1 et M_2.*

Proposition 2.1.1.

i) *Si M_1 et M_2 sont deux variétés de classe C^∞, alors les projections canoniques $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$ et $\pi_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$ sont de classe C^∞.*

ii) *Si M_1, M_2 et M_3 sont trois variétés,alors l'application $f : M_3 \longrightarrow M_1 \times M_2$ est de classe C^∞ si et seulement si $\pi_1 \circ f$ et $\pi_2 \circ f$ sont de classe C^∞.*

$f = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$.

Proposition 2.1.2. *Soient M_1 et M_2 deux variétés, alors pour tout $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ on a :*

$$T_{(x_1,x_2)} M_1 \times M_2 \cong T_{x_1} M_1 \times T_{x_2} M_2 \,.$$

Proposition 2.1.3. *Soient X et Y deux champs de vecteurs sur la variété produit $M_1 \times M_2$, pour tout $f_1 \in C^\infty(M_1)$ et pour tout $f_2 \in C^\infty(M_2)$ on a*

$$\begin{cases} X(f_1 \circ \pi_1) = Y(f_1 \circ \pi_1) \\ X(f_2 \circ \pi_2) = Y(f_2 \circ \pi_2) \end{cases} \Rightarrow X = Y$$

Proposition 2.1.4. *Soient M_1 et M_2 deux variété différentiables, on a les propriétés suivantes :*

1. $(X_1, 0)(f_1 \circ \pi) = X_1(f_1) \circ \pi_1$ *et* $(X_1, 0)(f_2 \circ \pi_2) = 0$
2. $(0, X_2)(f_2 \circ \pi_2) = X_2(f_2) \circ \pi_2$ *et* $(0, X_2)(f_1 \circ \pi_1) = 0$
3. $[(X_1, 0), (Y_1, 0)] = ([X_1, Y_1], 0)$, $[(0, X_2), (0, Y_2)] = (0, [X_1, Y_2])$ *et* $[(X_1, 0), (0, X_2)] = 0$
4. $(f_1 X_1, 0) = (f_1 \circ \pi_1)(X_1, 0)$ *et* $(0, f_2 X_2) = (f_2 \circ \pi_2)(0, X_2)$.

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}_1(M_1)$, $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, $f_1 \in C^\infty(M_1)$ et $f_2 \in C^\infty(M_2)$.

Proposition 2.1.5. *Soient ω, η deux formes différentielle sur la variété produit $M_1 \times M_2$. Pour tout $X_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$,*

$$\begin{cases} \omega(X_1, 0) = \eta(X_1, 0) \\ \omega(0, X_2) = \eta(0, X_2) \end{cases} \Rightarrow \omega = \eta$$

Proposition 2.1.6. *Soient $\nabla, \widetilde{\nabla}$ deux connexions linéaires sur $M \times N$.*

$$\text{pour tout } X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1) \text{ et } X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2), \begin{cases} \nabla_{(X_1,0)}(Y_1, 0) = \widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1, 0) \\ \nabla_{(X_1,0)}(0, X_2) = \widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0, X_2) \\ \nabla_{(0,X_2)}(X_1, 0) = \widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(X_1, 0) \\ \nabla_{(0,X_2)}(0, Y_2) = \widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0, Y_2) \end{cases} \Rightarrow \nabla = \widetilde{\nabla}$$

Proposition 2.1.7. *Si ∇^1 et ∇^2 deux connexions linéaires sur M_1 et M_2 respectivement alors, suivant la proposition précédente il existe une unique connexion ∇ sur la variété produit $M_1 \times M_2$ telle que*

$$\begin{cases} \nabla_{(X_1,0)}(Y_1, 0) = (\nabla^1_{X_1} Y_1, 0) \\ \nabla_{(0,X_2)}(0, Y_2) = (0, \nabla^2_{X_2} Y_2) \\ \nabla_{(X_1,0)}(0, X_2) = \nabla_{(0,X_2)}(X_1, 0) = 0 \end{cases}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$.

Proposition 2.1.8. *Sous les mêmes hypothèses de la proposition précédente on a :*

$$\begin{cases} T\big((X_1, 0), (Y_1, 0)\big) = \big(T^1(X_1, Y_1), 0\big) \\ T\big((0, X_2), (0, Y_2)\big) = \big(0, T^2(X_2, Y_2)\big) \\ T\big((X_1, 0), (0, X_2)\big) = 0 \end{cases}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, où T, T^1 et T^2 désignent les tenseurs de torsion sur $M_1 \times M_2$, M_1 et M_2 respectivement.

2. Métrique diagonale sur la variété produit

Proposition 2.1.9. *Si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont deux variétés Riemanniennes de dimension n_1 et n_2 respectivement, alors le tenseur $g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2$ est une métrique Riemannienne sur $M_1 \times M_2$ telle que*

$$\begin{array}{rcl} g((X_1,0),(Y_1,0)) & = & g_1(X_1,Y_1)\circ\pi_1 \\ g((0,X_2),(0,Y_2)) & = & g_2(X_2,Y_2)\circ\pi_2 \\ g((X_1,0),(0,X_2)) & = & 0 \end{array}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$.

il suffit de voir la matrice associé à g,

$$\begin{pmatrix} (g_{1_{ij}}) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & (g_{2_{ab}}) \end{pmatrix}$$

Définition 2.1.2. *La variété Riemannienne $(M_1 \times M_2, g)$ est* ***dite variété Riemannienne produit****.*

Proposition 2.1.10. *La connexion de $M_1 \times M_2$ associé à $g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2$ est bien la connexion de la proposition (2.1.7).*

2.1.2 Tenseur de courbure Riemannienne et le tenseur de Ricci sur la variété produit

Proposition 2.1.11. *Soit $(M_1 \times M_2, g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2)$ une variété Riemannienne produit avec son tenseur de courbure R. Si $X_1, Y_1, Z_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$, et $X_2, Y_2, Z_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, alors*

$$\left\{ \begin{array}{l} R\big((X_1,0),(Y_1,0)\big)(Z_1,0) = \big(R^1(X_1,Y_1)Z_1, 0\big) \\ R\big((0,X_2),(0,Y_2)\big)(0,Z_2) = \big(0, R^2(X_2,Y_2)Z_2\big) \\ R\big((X_1,0),(0,Y_2)\big)(Z_1,0) = R\big((X_1,0),(Y_1,0)\big)(0,Z_2) = R\big((0,X_2),(0,Y_2)\big)(Z_1,0) = 0 \\ R\big((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\big)(Z_1,Z_2) = \big(R^1(X_1,Y_1)Z_1, R^2(X_2,Y_2)Z_2\big). \end{array} \right.$$

Proposition 2.1.12. *Soit $(M_1 \times M_2, g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2)$ une variété Riemannienne produit avec S son tenseur de Ricci. Si $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, alors*

$$\left\{ \begin{array}{l} S((X_1,0),(Y_1,0)) = S^1(X_1,Y_1)\circ\pi_1 \\ S((0,X_2),(0,Y_2)) = S^2(X_2,Y_2)\circ\pi_2 \\ S((X_1,0),(0,X_2)) = 0. \end{array} \right.$$

2.2 Métrique Riemannienne du produit tordu

2.2.1 Métrique Riemannienne du produit tordu

Proposition 2.2.1. *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes de dimensions n_1 et n_2 respectivement et f une fonction strictement positive sur M_1. On considère la variété produit $M_1 \times M_2$ avec ses projections canoniques π_1 et π_2, alors*

$$\tilde{g} = \pi_1^* g_1 + (f \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_2 \,,$$

est une métrique sur $M_1 \times M_2$.

Preuve . Comme π_1 et π_2 sont des applications de classe C^∞, et $\pi_1^* g_1, \pi_2^* g_2 \in \mathfrak{T}_2^0(M_1 \times M_2)$. Si $u, v \in T_{(x_1,x_2)} M_1 \times M_2$ alors

$$\tilde{g}(u, v) = g_1(d\pi_1(u), d\pi_1(v)) + f^2(x_1) g_2(d\pi_2(u), d\pi_2(v)),$$

donc $\tilde{g}$ est symétrique.
On montre que $\tilde{g}$ induit une forme bilinéaire non dégénérée sur $T_{(x_1,x_2)} M_1 \times M_2$. Supposons $\tilde{g}(u, v) = 0$ pour tout $v \in T_{(x_1,x_2)} M_1 \times M_2$, en particulier pour tout $v \in T_{(x_1,x_2)}\{x_1\} \times M_2$ nous avons $f^2(x) g_2(d\pi_2(u), d\pi_2(v)) = 0$ et comme f strictement positive on obtient $d\pi_2(u) = 0$. De même on obtient $d\pi_1(u) = 0$, d'où $u = 0$. ■

Remarque 2.2.1. *La matrice associé à $\tilde{g}$ est*

$$\begin{pmatrix} (g_{1_{ij}}) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & f^2(g_{2_{ab}}) \end{pmatrix} \qquad c..d. \qquad (\tilde{g})_{\alpha\beta} = \begin{cases} g_{1_{\alpha\beta}}, & si\ \alpha, \beta \in \{1, ..., m\}\,; \\ f^2 g_{2_{\alpha\beta}}, & si\ \alpha, \beta \in \{m+1, ..., m+n\}\,; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Définition 2.2.1. *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes de dimensions n_1 et n_2 respectivement, et f une fonction strictement positive sur M. Le produit tordu noté $M_1 \times_f M_2$ est définie comme étant la variété produit $M_1 \times M_2$ munie de la métrique $\tilde{g}$.*

Le couple $(M_1 \times_f M_2, \tilde{g})$ s'appelle ***variété Riemannienne produit tordu*** *et f s'appelle* ***la fonction de distorsion*** *du produit tordu .*

Exemple 2.2.1. *Surface de révolution*
Une surface de révolution M obtenue par rotation d'une courbe (C) plane autour d'une droite L dans son plan est une variété produit tordu.
Explicitement, si M est obtenu en faisant tourner une courbe plane (C) autour d'un axe L dans $\mathbb{R}^3$ et $f : (C) \to \mathbb{R}^+$ donne la distance à l'axe, alors $M = (C) \times_f S^1$.
Cas remarquables :

(1) : *Si (C) est le segment $[AB]$ avec $A(a, 0, 0)$ et $B(a, 0, b)$ on obtient une cylindre de révolution dont la paramétrisation est*

$$x\big(acos\theta, asin\theta, t\big), \qquad avec\ t \in [0, b]$$

et la métrique Riemannienne dans ce cas est

$$\tilde{g} = dt^2 + a^2 d\theta^2$$

c.à.d c'est une métrique Riemannienne tordu avec la fonction de distortion est constante.

***(2) :** Si (C) est le demi cercle de centre $x_0(a,0,0)$ et de rayon $a > r > 0$ on obtient une surface de révolution "demi-Tore" telle que la paramétrisation est*

$$x\big((a + rcos\phi)cos\theta, (a + rcos\phi)sin\theta, rsin\phi\big)$$

et la métrique Riemannienne dans ce cas est

$$\tilde{g} = d\phi^2 + (a + rcos\phi)^2 d\theta^2$$

c.à.d c'est une métrique Riemannienne tordu avec la fonction de distortion est $f = a + rcos\phi > 0$ avec $0 < \phi < \pi$ et $0 < \theta < 2\pi$.

Exemple 2.2.2. *Le tore*
$*$ Le tore T^2 est la variété produit $S^1 \times S^1$ avec $g_u = \frac{4}{(1+u^2)^2}du^2$ une métrique Riemannienne sur la sphère unité S^1 alors,

$$\tilde{g} = g_u + f^2 g_v \,,$$

est une métrique Riemannienne tordu sur le tore T^2, où f une fonction de classe C^∞ sur S^1, strictement positive.
$*$ Le tore T^3 est la variété produit $S^1 \times S^1 \times S^1$ alors, on peut définir deux métriques Riemannienne tordu,

$$\tilde{g_1} = g_u + f_1^2\big(g_v + g_w\big) \quad et \quad \tilde{g_2} = \big(g_u + g_v\big) + f_2^2 g_w,$$

où f_1 une fonction de classe C^∞ sur S^1 et f_2 une fonction de classe C^∞ sur $S^1 \times S^1$, strictement positives.

Proposition 2.2.2. *Soient (M_1, g_1), (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et $(M_1 \times_f M_2, \tilde{g})$ la variété produit tordu. Si $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, on a*

1. $\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1, 0) = (\nabla^1_{X_1} Y_1, 0)$
2. $\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0, X_2) = \tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(X_1, 0) = X_1(lnf)(0, X_2)$
3. $\tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0, Y_2) = (0, \nabla^2_{X_2} Y_2) - \frac{1}{2} g_2(X_2, Y_2)(gradf^2, 0)$

Preuve ..
1. En utilisant la formule de Koszul

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = X\tilde{g}(Y,Z) + Y\tilde{g}(Z,X) - Z\tilde{g}(X,Y) + \tilde{g}\big(Z,[X,Y]\big) + \tilde{g}\big(Y,[Z,X]\big) - \tilde{g}\big(X,[Y,Z]\big)$$

pour tous $X = (X_1, X_2),\ Y = (Y_1, Y_2),\ Z = (Z_1, Z_2) \in \mathfrak{X}(\tilde{M} = M_1 \times_f M_2)$

on a

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1,0),(Z_1,0)\big) &= (X_1,0)\tilde{g}((Y_1,0),(Z_1,0)) + (Y_1,0)\tilde{g}((Z_1,0),(X_1,0)) \\
&\quad -(Z_1,0)\tilde{g}\Big(\big(X_1,0),(Y_1,0)\big) + \tilde{g}\Big(\big(Z_1,0),[(X_1,0),(Y_1,0)]\big) \\
&\quad +\tilde{g}\Big((Y_1,0),\big[(Z_1,0),(X_1,0)\big]\Big) - \tilde{g}\Big((X_1,0),\big[(Y_1,0),(Z_1,0)\big]\big) \\
&= X_1\big(g_1(Y_1,Z_1)\big) + Y_1\big(g_1(Z_1,X_1)\big) - Z_1\big(g_1(X_1,Y_1)\big) + g_1\big(Z_1,[X_1,Y_1]\big) \\
&\quad +g_1\big(Y_1,[Z_1,X_1]\big) - g_1\big(X_1,[Y_1,Z_1]\big) \\
&= 2g_1\big(\nabla^1_{X_1}Y_1,Z_1\big) \\
&= 2\tilde{g}\big((\nabla^1_{X_1}Y_1,0),(Z_1,0)\big)
\end{aligned}$$

pour tout $Z_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$.
de même on a

$$g\big(\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1,0),(0,Z_2)\big) = 0$$

pour tout $Z_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, d'où

$$\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y,0) = \big(\nabla^1_{X_1}Y_1,0\big).$$

2.

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2),(0,Z_2)\big) &= (X_1,0)\tilde{g}\big((0,Y_2),(0,Z_2)\big) + (0,Y_2)\tilde{g}\big((0,Z_2),(X_1,0)\big) \\
&\quad -(0,Z_2)\tilde{g}\big((X_1,0),(0,Y_2)\big) + \tilde{g}\Big((0,Z_2),\big[(X_1,0),(0,Y_2)\big]\Big) \\
&\quad +\tilde{g}\Big((0,Y_2),\big[(0,Z_2),(X_1,0)\big]\Big) - \tilde{g}\Big((X_1,0),\big[(0,Y_2),(0,Z_2)\big]\Big) \\
&= 2fX_1(f)g_2(Y_2,Z_2) \\
&= 2f^2g_2(\frac{X_1(f)}{f}Y_2,Z_2) \\
&= 2f^2g_2(X_1(lnf)Y_2,Z_2) \\
&= 2\tilde{g}\big((0,X_1(lnf)Y_2),(0,Z_2)\big)
\end{aligned}$$

d'où,

$$\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2),(0,Z_2)\big) = X_1(lnf)\tilde{g}\big((0,Y_2),(0,Z_2)\big)$$

pour tout $Z_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$.
Si $Z_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2),(Z_1,0)\big) &= (X_1,0)\tilde{g}\big((0,Y_2),(Z_1,0)\big) - \tilde{g}\big((0,Y_2),\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Z_1,0)\big) \\
&= -\tilde{g}\big((0,Y_2),(\tilde{\nabla}_{X_1}Z_1,0)\big) = 0.
\end{aligned}$$

comme $[(X_1,0),(0,Y_2)] = 0$ on déduit

$$\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2) = \tilde{\nabla}_{(0,Y_2)}(X_1,0) = X_1(lnf)(0,Y_2).$$

3. En utilisant la formule de Koszul et remarquons que pour tout $Z_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, on a

$$(0,Z_2)(f) = 0$$

on obtient :

$$\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2),(0,Z_2)\big)=\tilde{g}\big((0,\nabla^2_{X_2}Y_2),(0,Z_2)\big)$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2),(Z_1,0)\big) &= (0,X_2)g\big((0,Y_2),(Z_1,0)) - g((0,Y_2),\nabla_{(0,X_2)}(Z_1,0)\big)\\ &= -Z_1(lnf)g\big((0,X_2),(0,Y_2)\big)\\ &= -f^2Z_1(lnf)g_2(X_2,Y_2)\\ &= -\frac{1}{2}g(gradf^2,Z_1)g_2(X_2,Y_2)\\ &= -\frac{1}{2}g_2(X_2,Y_2)\tilde{g}\big((gradf^2,0),(Z_1,0)\big)\end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2)=(0,\nabla^2_{X_2}Y_2)-\frac{1}{2}g_2(X_2,Y_2)(gradf^2,0).$$

■

2.2.2 Tenseur de courbure Riemannienne et de Ricci du produit tordu

Proposition 2.2.3. *Soit $\tilde{M}=M_1\times_f M_2$ une variété produit tordu et $\tilde{R}$ son tenseur de courbure. Si $X_1,Y_1,Z_1\in\mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2,Y_2,Z_2\in\mathfrak{X}(M_2)$, alors*

1. $\tilde{R}\big((X_1,0),(Y_1,0)\big)(Z_1,0)=\big(R^1(X_1,Y_1)Z_1,0\big)$
2. $\tilde{R}\big((0,X_2),(Y_1,0)\big)(Z_1,0)=-\frac{1}{f}g_1\big(\nabla^1_{Y_1}gradf,Z_1\big)(0,X_2)$
3. $\tilde{R}\big((X_1,0),(Y_1,0)\big)(0,Z_2)=R\big((0,X_2),(0,Y_2)\big)(Z_1,0)=0$
4. $\tilde{R}\big((X_1,0),(0,Y_2)\big)(0,Z_2)=R\big((X_1,0),(0,Z_2)\big)(0,Y_2)=-fg_2(Y_2,Z_2)\big(\nabla^1_{X_1}gradf,0\big)$
5. $\tilde{R}\big((0,X_2),(0,Y_2)\big)(0,Z_2)=\big(0,R^2(X_2,Y_2)Z_2\big)-|gradf|^2\big((0,X_2\wedge_2 Y_2)Z_2\big)$

avec $(X\wedge Y)Z=g(Y,Z)X-g(X,Z)Y$.

Preuve . La preuve découle directement de la définition du tenseur de courbure et la proposition (2.2.2).
■

Proposition 2.2.4. *Soit $M_1\times_f M_2$ une variété produit tordu et $\tilde{S}$ sa courbure de Ricci. Pour tout $X_1,Y_1\in\mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2,Y_2\in\mathfrak{X}(M_2)$ on a*

1. $\tilde{S}\big((X_1,0),(Y_1,0)\big)=S^1(X_1,Y_1)-\frac{n_2}{f}\,g_1(\nabla^1_{X_1}grad\,f,Y_1)$
2. $\tilde{S}\big((X_1,0),(0,Y_2)\big)=0$
3. $\tilde{S}\big((0,X_2),(0,Y_2)\big)=S^1(X_2,Y_2)-g_2(X_2,Y_2)\big(f\triangle^1(f)+(n_2-1)|gradf|^2\big)$,

où $\triangle^1(f)$ est le Laplacien de la fonction f sur M_1.

Preuve . La preuve est simple on utilisant la proposition (2.2.3), et la définition de la courbure de Ricci avec la base orthonormée $\{E_i,\frac{1}{f}F_k\}$. ■

Exemple 2.2.3. *Le cône sur une variété.*
Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension n.
La variété Riemannienne produit tordu $\big(\tilde{M} = M \times_r R^+, \tilde{g} = r^2 g + dr^2\big)$ est dite cône sur une variété.
Alors, la dérivée covariante $\tilde{\nabla}$ de la connexion de Levi-Civita de $\tilde{g}$ satisfait les formules suivantes ([48], p206)

$$\tilde{\nabla}_{\partial r}\partial r = 0, \quad \tilde{\nabla}_{\partial r}X = \tilde{\nabla}_X \partial r = \frac{1}{r}X, \quad \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - rg(X,Y)\partial_r, \qquad (notation\ \partial_r = \frac{\partial}{\partial r}),$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. *Les composantes non nulles du tenseur de courbure $\tilde{R}$ et le tenseur de Ricci $\tilde{S}$ sont*
* $\tilde{R}(\partial r, X)\partial r = \tilde{R}(\partial r, X)Y = \tilde{R}(X,Y)\partial r = 0,$
* $\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \big(X \wedge Y\big)Z,$
** $\tilde{S}(\partial r, \partial r) = 0,$
** $\tilde{S}(X,Y) = S(X,Y) - (n-2)g(X,Y).$

2.3 Autres métriques Riemannienne sur la variété produit

Dans cette section, nous donnons quelques types de métriques Riemannienne qu'on peut définir sur une variété produit et nous donnons aussi sans démonstration les connexions de Levi-Cevita associées à ces métriques.

2.3.1 Métrique tordu généralisée

Définition 2.3.1. *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et f une fonction strictement positive sur $M_1 \times M_2$. La métrique tordu généralisée $\tilde{g}$ sur $M_1 \times_f M_2$ est définie par*

$$\tilde{g} = \pi_1^* g_1 + (f \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_2$$

où $\pi_1 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_1 \longrightarrow x_1 \in M_1$ et $\pi_2 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_1 \longrightarrow x_2 \in M_2$ sont les projections canoniques.

Pour tous champs de vecteurs X, Y sur $M_1 \times M_2$, on a

$$\tilde{g}(X,Y) = g_1\big(d\pi_1(X), d\pi_1(Y)\big) + f^2 g_2\big(d\pi_2(X), d\pi_2(Y)\big).$$

Proposition 2.3.1. *[49] Soient (M_1, g_1), (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et $(M_1 \times_f M_2, \tilde{g})$ la variété produit tordu. Si $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, on a*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\ln f)(0, Y_2) + Y(\ln f)(0, X_2) - \frac{1}{2} g_2(X_2, Y_2)\big(grad_1 f^2, \frac{1}{f^2} grad_2 f^2\big)$$

où $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ et $\nabla_X Y = \big(\nabla^1_{X_1} Y_1, \nabla^2_{X_2} Y_2\big)$.

2.3.2 Métrique tordu doublée

Définition 2.3.2. *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et f_1, f_2 deux fonctions strictement positives sur M_1 et M_2 respectivement. La métrique tordu doublée $\tilde{g}$ sur $M_1\ {}_{f_1}\times_{f_2} M_2$ est définie par*

$$\tilde{g} = (f_2 \circ \pi_2)^2 \pi_1^* g_1 + (f_1 \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_2$$

où $\pi_1 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_1 \longrightarrow x_1 \in M_1$ et $\pi_2 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_1 \longrightarrow x_2 \in M_2$ sont les projections canoniques.

Pour tous champs de vecteurs X, Y sur $M_1 \times M_2$, on a

$$\tilde{g}(X, Y) = f_2^2 g_1\big(d\pi_1(X), d\pi_1(Y)\big) + f_1^2 g_2\big(d\pi_2(X), d\pi_2(Y)\big).$$

Proposition 2.3.2. *[57] Soient (M_1, g_1), (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et $(M_1\ {}_h\times_f M_2, \tilde{g})$ la variété produit tordu doublée. Si $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, on a*

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y &+ \frac{1}{2f_1^2} X_1(f_1^2)(0, Y_2) + \frac{1}{2f_1^2} Y_1(f_1^2)(0, X_2) \\
&+ \frac{1}{2f_2^2} X_2(f_2^2)(Y_1, 0) + \frac{1}{2f_2^2} Y_2(f_2^2)(X_1, 0) \\
&- \frac{1}{2} g_1(X_1, Y_1)\big(grad_1 f^2, 0\big) - \frac{1}{2} g_2(X_2, Y_2)\big(0, grad_2 f^2\big).
\end{aligned}$$

où $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ et $\nabla_X Y = \big(\nabla^1_{X_1} Y_1, \nabla^2_{X_2} Y_2\big)$.

2.3.3 Métrique tordu doublée généralisée

Définition 2.3.3. *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et f_1, f_2 deux fonctions positives sur $M_1 \times M_2$ respectivement. La métrique tordu doublée généralisée $\tilde{g}$ sur $M_1\ {}_{f_1}\times_{f_2} M_2$ est définie par*

$$\tilde{g} = (f_2 \circ \pi_2)^2 \pi_1^* g_1 + (f_1 \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_2$$

où $\pi_1 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_1 \longrightarrow x_1 \in M_1$ et $\pi_2 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_1 \longrightarrow x_2 \in M_2$ sont les projections canoniques.

Pour tous champs de vecteurs X, Y sur $M_1 \times M_2$, on a

$$\tilde{g}(X, Y) = f_2^2 g_1\big(d\pi_1(X), d\pi_1(Y)\big) + f_1^2 g_2\big(d\pi_2(X), d\pi_2(Y)\big).$$

Proposition 2.3.3. *[12] Soient (M_1, g_1), (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et $(M_1\ {}_h\times_f M_2, \tilde{g})$ la variété produit tordu doublée généralisée. Si $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, on a*

$\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1, 0) =$
$\Big(\nabla^1_{X_1} Y_1 + X_1(\ln f_2) Y_1 + Y_1(\ln f_2) X_1 - g_1(X_1, Y_1) grad_1(\ln f_2)\ ,\ -\frac{f_2^2}{f_1^2} g_1(X_1, Y_1) grad_2(\ln f_2)\Big),$

$$\tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2) = \Big(-\frac{f_1^2}{f_2^2} g_2(X_2,Y_2) grad_1(\ln f_1) \ , \ \nabla^2_{X_2} Y_2 + X_2(\ln f_1) Y_2 + Y_2(\ln f_1) X_2 - g_2(X_2,Y_2) grad_2(\ln f_1) \Big),$$

$$\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2) = \big(Y_2(f_2) X_1 \ , \ X_1(f_1) Y_2 \big)$$

$$\tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(Y_1,0) = \big(X_2(f_2) Y_1 \ , \ Y_1(f_1) X_2 \big)$$

où $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ *et* $\nabla_X Y = \big(\nabla^1_{X_1} Y_1, \nabla^2_{X_2} Y_2 \big)$.

chapter 3

Structures sur une variété Riemannienne

Munir un espace d'une structure conduit à produire un nouvel objet mathématique et, par conséquent, contribuer au développement de la science.
Considérons une variété différentiable M, munie d'une structure Riemannienne g, souvent appelée métrique Riemannienne. Lorsqu'on définit une nouvelle structure géométrique compatible avec cette métrique, on arrive à une nouvelle variété Riemannienne. Cette nouvelle variété conduit ainsi à une autre branche de la géométrie riemannienne.
On présente la construction des différentes structures en géométrie riemannienne. Ceci montre comment naissent et se développent certaines branches de la géométrie différentielle.

Cette paragraphe comprend cinq sections essentielles à savoir :
Structures presque hermitiennes, structure presque hypercomplexe, structure presque complexe généralisée, structure presque de contact et structure 3-presque de contact.

3.1 Structures presque hermitiennes

La théorie des variétés presque hermitiennes est l'un des importants branches de la géométrie différentielle. Il a commencé comme une zone distincte de l'étude dans le $19^{ème}$ siècle avec l'enquête des variétés projectives dans un espace complexe projectif . En 1930 J.A Schouten et D.van Dantzig ont essayé de transférer les résultats de la géométrie différentielle des variété Riemanniennes aux variétés complexes, leurs papiers parut un espace hermitienne avec la connexion dite unitaire symétrique. L'espace avec la même connexion a également été constaté de façon indépendante par E. Kähler, maintenant cet espace est appelé " variété Kählérienne". Depuis lors, les variétés Kählériennes ont été largement étudiés et des nombreux résultats importants ont été obtenus.
Dans ce chapitre, on va introduire quelques notions nécessaires (variétés complexes , variétés hermitiennes et variétés presque Kählériennes) qui nous permettra de définir les variétés Kählériennes on donnant quelques exemples et contre exemples et enfin nous donnons les définitions de la variété hypercomplexe et la variété Kählérienne généralisée.

Afin d'élargir et de façon plus détaillée sur le sujet s'il vous plaît se référer aux références suivantes [34], [51] et[58]...

3.1.1 Structure presque complexe sur une variété

Définition 3.1.1. *Soit M une variété différentiable de dimension $2n$. Une structure presque complexe J sur M est un endomorphisme sur T_pM, $\forall p \in M$ tel que $J^2 = -I$, où I dénote la transformation identité. Si une telle structure J existe sur M, alors (M, J) est dite une* ***variété presque complexe****.*

Remarque 3.1.1.
1. *Une variété complexe c'est une variété différentiable telles que les applications de changements de cartes soient des fonctions holomorphes d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ dans un autre.*
2. *Toute vatiété complexe M est une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J.*
3. *$\forall p \in M$, si $(z^1, ..., z^n)$ est un système de coordonneés complexe local en p alors,* $J(\frac{\partial}{\partial x^k}) = \frac{\partial}{\partial y^k}$, $J(\frac{\partial}{\partial y^k}) = -\frac{\partial}{\partial x^k}$, $\forall k = \overline{1, n}$ *avec* $z^k = x^k + iy^k$ *et* $J : T_pM \to T_pM$

Tenseur de Nijenhuis

Définition 3.1.2. *Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J. Le tenseur de torsion complexe N est un tenseur de type $(1, 2)$ défini par :*

$$N(X, Y) = 2\{[JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y]\}, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Théorème 3.1.1. *Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J. M est dite variété complexe si et seulement si $N \equiv 0$*

Pour la preuve voir ([51],p124)

Remarque 3.1.2. *Pour toute structure presque complexe J définie sur une variété de dimension 2 on a, $N(X, Y) = N(X, JX) = 0$.*

Théorème 3.1.2. *[51] Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J. M est dite variété complexe si et seulement si M admet une connexion linéaire ∇ de torsion T telle que $\nabla J = 0$ et $T = 0$*

Théorème 3.1.3. *[51] Une structure presque-complexe J est intégrable si et seulement si $N = 0$. (Théorème de Newlander-Nirenberg)*

3.1.2 Structures hermitienne

Définition 3.1.3. *Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J. On appelle métrique hermitienne toute métrique Riemannienne g qui vérifie :*

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

et nous disons que J et g sont compatibles.

Proposition 3.1.1. *Toute variété Riemannienne (M, g) admet une métrique hermitienne*

Preuve . Soit (M, g) une variété Riemannienne, on pose

$$h(X,Y) = g(JX, JY) + g(X,Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

alors,

$$h(JX, JY) = g(X,Y) + g(JX, JY) = h(X,Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

donc h est une métrique hermitienne. ∎

Définition 3.1.4. *Toute variété M presque complexe munie d'une métrique hermitienne est une variété presque hermitienne .*
De plus, si M est une variété complexe alors, elle est hermitienne.

Définition 3.1.5. *Soit M une variété presque hermitienne munie d'une structure presque complexe J et une métrique hermitienne g . On appelle 2-forme fondamentale l'application Ω définie sur M par :*

$$\Omega(X,Y) = g(X, JY) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Propriétés 3.1.1.

1. *La 2-forme fondamentale Ω est antisymétrique c.à.d $\Omega(X,Y) = -\Omega(Y,X)$.*
2. *$\Omega(JX, JY) = \Omega(X,Y)$.*

Remarque 3.1.3. *Cette 2-forme non-dégénérée Ω et la structure presque complexe J sont dites compatibles si,*

$$\Omega(X, JX) > 0, \qquad \forall X \neq 0 \in \mathfrak{X}(M)$$

Ω induit alors une métrique Riemannienne g définie par $g(.,.) = \Omega(., J.)$, La structure (J, Ω, g) est dite une structure presque hermitienne.

Lemme 3.1.1. *Soit M une variété presque hermitienne munie d'une structure presque complexe J et une métrique hermitienne g alors, la connexion Riemannienne ∇ , la deuxième forme fondamentale Ω et la Torsion T satisfont la relation suivante :*

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) - g(JX, N(Y,Z))) = 3d\Omega(X, JY, JZ) - 3d\Omega(X,Y,Z)$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Pour la preuve voir ([34], p148).

Théorème 3.1.4.
Soit (M, g, J) une variété hermitienne et ∇ la connexion de Levi-Cevita associé à g . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\nabla J = 0$

(b) $\nabla \Omega = 0$

(c) $N \equiv 0 \quad et \quad d\Omega = 0$

Preuve . Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a

i) $(a) \Longleftrightarrow (b)$

$$\begin{aligned}(\nabla_X\Omega)(Y,Z) &= X\Omega(Y,Z) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z)\\ &= Xg(Y,JZ) - g(\nabla_X Y, JZ) - g(Y, J(\nabla_X Z))\\ &= g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X(JZ)) - g(\nabla_X Y, JZ) - g(Y, J(\nabla_X Z))\\ &= g(Y, (\nabla_X J)Z).\end{aligned}$$

ii) $(b) \Longleftrightarrow (c)$
Supposons $\nabla\Omega = 0$ d'aprés le lemme (3.1.1) on a $d\Omega = 0$ et $N \equiv 0$
Inversement, si $d\Omega = 0$ et $N \equiv 0$ d'aprés le lemme (3.1.1), $\nabla J = 0$ donc $\nabla\Omega = 0$

■

3.1.3 Structures Kählériennes

On souhaite donner ici quelques définitions générales et quelques résultats simples ou classiques sur les variétés presque Kählériennes.

Structures Presque Kählériennes

Définition 3.1.6. *Une variété presque hermitienne (M, g, J) est dite presque Kählérienne si la 2-forme fondamentale Ω est fermée c.à.d. $d\Omega = 0$.*

Proposition 3.1.2. *Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a*

$$d\Omega = 0 \iff g\big((\nabla_X J)Y, Z\big) + g\big((\nabla_Y J)Z, X\big) + g\big((\nabla_Z J)X, Y\big) = 0.$$

pour la preuve utilisons la relation suivante

$$3d\Omega(X,Y,Z) = X(\Omega(Y,Z)) + Y(\Omega(Z,X)) + Z(\Omega(x,Y)) - \Omega([X,Y],Z) - \Omega([Y,Z],X) - \Omega([Z,X],Y)$$

Proposition 3.1.3. *Une variété strictement presque Kählérienne est une variété presque Kählérienne dont la structure presque complexe n'est pas intégrable (c.à.d. $N \neq 0$).*

Structures Kählériennes

Définition 3.1.7. *Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J .*
La métrique hermitienne g est dite métrique Kählérienne si la 2-forme fondamentale Ω est fermée c.à.d. $d\Omega = 0$.

Définition 3.1.8. *Toute variété presque complexe M munie d'une métrique Kählérienne est dite variété presque Kählérienne.*
De plus, Toute variété complexe M munie d'une métrique Kählérienne est dite variété Kählérienne .

Théorème 3.1.5. *Toute variété presque hermitienne est une variété Kählérienne si et seulement si $\nabla J = 0$.*

Preuve . D'aprés théorème (3.1.4) la preuve est directe. ■

Définition 3.1.9. *[22] une variété hermitienne M munie d'une forme de Kähler Ω qui satisfait $d\Omega = \theta \wedge \Omega$ où θ est une 1-forme sur M est dite variété localement conformément kählerienne (LCK) si θ est fermée (exacte).*

Remarque 3.1.4. *Certains auteurs incluent les variétés Kählériennes comme un cas particulier des variétés LCK. Bien que ce soit un choix légitime, et donc nous supposons toujours que les variétés LCK sont de type non-Kähler.*

Proposition 3.1.4. *Le tenseur de courbure R et le tenseur de Ricci S d'une variété Kählérienne M satisfaient les propriétés suivantes :*
Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}M$

(a) $R(X,Y)J = JR(X,Y)$, $R(JX,JY) = R(X,Y)$, $R(JX,Y) + R(X,JY) = 0$.

(b) $S(JX,JY) = S(X,Y)$, $S(JX,Y) + S(X,JY) = 0$.

(c) $S(X,Y) = \frac{1}{2}tr_g\{J \circ R(X,JY)\}$, $S(JX,Y) = \frac{1}{2}tr_g\{(X,Y) \to R(JX,Y,Z,W)\}$

Preuve . Pour la preuve voir ([51], p 130). ■

Proposition 3.1.5. *Soit M une variété Kählérienne de dimension réelle $2n$ $(n > 1)$. Si M à une courbure constante alors, M est plate.*

Preuve .
Soit M une variété Kählérienne à courbure constante c. donc,

$$R(X,Y)Z = c\big(g(Z,Y)X - g(X,Z)Y\big) = c(X \wedge Y)Z, \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Sachons que $R(JX,JY) = R(X,Y)$ et $X = X^i e_i$ avec e_i une base orthonormée, alors,

$$\begin{aligned} R(X,e_i)e_i &= c\big(g(e_i,e_i)X - g(X,e_i)e_iY\big) \\ &= c(2n-1)X...(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(JX,Je_i)e_i &= c\big(g(e_i,Je_i)JX - g(JX,e_i)Je_i\big) \\ &= -c\big(0 - (JX)^i Je_i\big) \\ &= -cJ(JX)^i e_i \\ &= -cJJX \\ &= cX...(2) \end{aligned}$$

de (1) et (2) on a $c(2n-1)X = cX, \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$ et donc,
pour $n > 1$ on obtient $c = 0$ ■

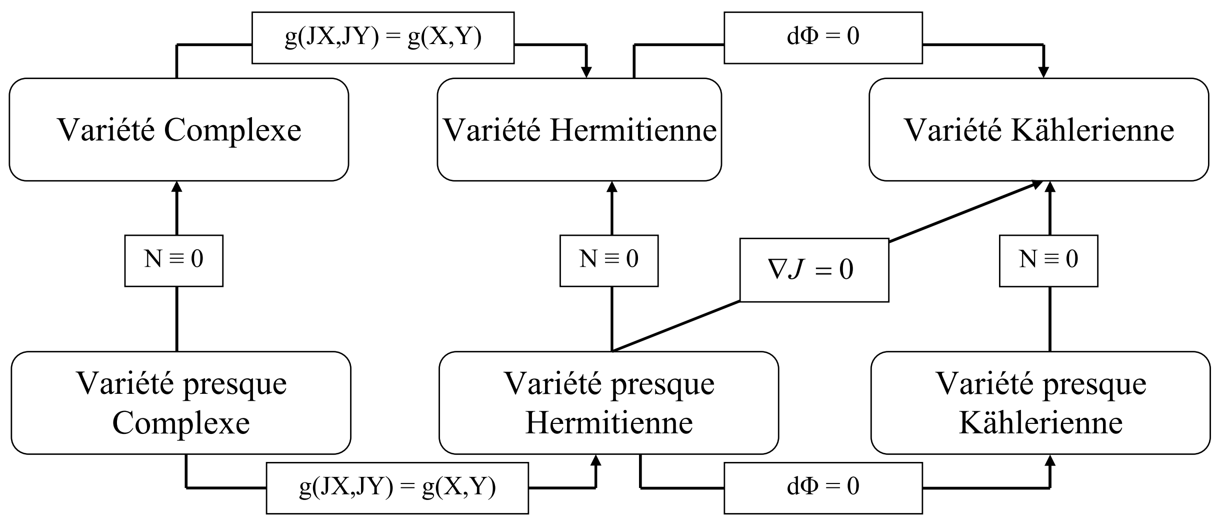


Diagramme qui résume les différents conditions de passage entre les variétés
(complexes , Hermitiennes et Kähleriennes)

Notation : **Φ** la deuxième forme fondamentale , **N** le tenseur de Nijenhuis ,**J** la structure presque complexe
,

Courbure sectionnelle holomorphique

Définition 3.1.10. *Soit (M, J, g) une variété Kählérienne et R le tenseur de courbure Riemannienne*

- **(*)** *Pour tout plan P de l'espace tangent T_xM , $x \in M$ on a définit la courbure sectionnelle $K(P)$ par :*

$$K(P) = R(X, Y, X, Y) = g(R(X, Y)Y, X), \qquad \forall X, Y \in T_xM$$

avec $\{X, Y\}$ une base orthonormée de P dans T_xM.

- **(**)** *Si P est invarient par J $(JP = P)$, la courbure sectionnelle $K(P)$ est dite holomorphique définie par :*

$$K(P) = R(X, JX, X, JX) = g(R(X, JX)JX, X), \qquad \forall X, Y \in T_xM$$

pour tout vecteur unitaire $X \in P$ avec $\{X, JX\}$ est une base orthonormée de P dans T_xM.

Remarque 3.1.5. **(i)** *La courbure sectionnelle holomorphique ne dépend pas du choix de la base.*

(ii) *Si $K(P)$ est constante pour tout plan P invarient par J dans T_xM pour tous $x \in M$, on dit que la variété Kählérienne à courbure sectionnelle holomorphique constante .*

Théorème 3.1.6. *[51]*
Soit (M, J, g) une variété Kählérienne de dimension $2n$. Si $n > 1$ et $K(P) = c(x)$ pour tout plan P dans T_xM alors, M à courbure sectionnelle holomorphique constante.

Théorème 3.1.7. *[51]*
Si une variété Kählérienne M à courbure sectionnelle holomorphique constante c alors, M est dite espace de forme complexe (Kählerian space forms). Le tenseur de courbure Riemannienne dans ce cas est donné par

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= -\frac{c}{4}\big[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY + 2g(X,JY)JZ\big] \\ &= -\frac{c}{4}\big[(X \wedge Y)Z + (JX \wedge JY)Z + 2g(X,JY)JZ\big] \end{aligned}$$

avec $\qquad X \wedge Y = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y.$

Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, posons

$$\begin{aligned} R^{\mathcal{H}}(X,Y)Z &= g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY + 2g(X,JY)JZ \\ &= (X \wedge Y)Z + (JX \wedge JY)Z + 2g(X,JY)JZ, \end{aligned}$$

c'est à dire,

$$R^{\mathcal{H}}(X,Y) = X \wedge Y + JX \wedge JY + 2g(X,JY)J,$$

Définition 3.1.11. *[29] L' opérateur de courbure $R^{\mathcal{H}}(U,V)$ ou le tenseur de Kählér standard est un opérateur de courbure défini pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$ par,*

$$\begin{aligned} R^{\mathcal{H}}(U,V)X &= g(V,X)U - g(U,X)V + g(JV,X)JU - g(JU,X)JV - 2g(JU,V)JX \\ &= (U \wedge V)X + (JU \wedge JV)X + 2g(U,JV)JX. \end{aligned}$$

Remarque 3.1.6. ([51], p144) *Pour toute variété Kählérienne à courbure sectionnelle holomorphique constante c on a*

$$R(X,Y)Z = -\frac{c}{4}R^{\mathcal{H}}(X,Y)Z.$$

Si cette variété est complexe et simplement connexe, elle est bien connue qu'elle est isométrique à
(*) un espace projectif complexe de $\mathbb{C}\mathbf{P}^n(c)$, si $c > 0$,
(**) un espace euclidien complexe $\mathbb{C}^n$, si $c = 0$,
(***) un espace hyperbolique complexe $\mathbb{C}\mathbf{H}^n(c)$, si $c < 0$.

Proposition 3.1.6. *([51] page 135)*
Toute variété Kählérienne à courbure sectionnelle holomorphique constante c est une variété d'Einstien.

3.2 Structure presque hypercomplexe

Définition 3.2.1. *[27], [51] On appelle structure presque hypercomplexe (ou presque quaternion) la donnée d'un triplet (J_1, J_2, J_3) des structures presque complexes qui se comportent comme des quaternions en vérifiant les conditions suivantes*

$$\begin{cases} J_i^2 = -Id \qquad \text{pour } i = 1,2,3; \\ \\ J_1J_2 = J_3, \; J_2J_3 = J_1, \; J_3J_1 = J_2. \end{cases} \tag{3.1}$$

et la triplet $(M^{4n}, g, (J_i)_{i=1}^3)$ s'appelle variété presque quaternionique. De plus,

- *lorsqu'il existe un tenseur métrique g tel que , pour tout J_i, (g, J_i) est kählérienne, on dit que $(g,(J_i)_{i=1}^3)$ est une structure hyperkählérienne et le couple $(M^{4n}, g, (J_i)_{i=1}^3)$ s'appelle variété hyperkählérienne.*
- *lorsqu'il existe un tenseur métrique g tel que , pour tout J_i, (g, J_i) est presque hermitienne, on dit que $(g,(J_i)_{i=1}^3)$ est une structure métrique presque quaternionique et le couple $(M^{4n}, g, (J_i)_{i=1}^3)$ s'appelle variété métrique presque quaternionique.*

On définit une 4-forme différentielle

$$\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{3} \Omega_i \wedge \Omega_i.$$

telle que pour tous champs de vecteurs X, Y sur M

$$\Omega_i(X,Y) = g(X, J_iY),$$

et un champ de vecteur global de type $(2,2)$ sur M

$$\Lambda = J_1 \otimes J_1 + J_2 \otimes J_2 + J_3 \otimes J_3,$$

Théorème 3.2.1. *([51], p 161) Une variété métrique presque quaternion est dite variété Kählérienne quaternionique si et seulement si* $\nabla\tilde{\Omega} = 0$ *ou* $\nabla\Lambda = 0$ *.*

Proposition 3.2.1. *([51], p 161) Une variété métrique presque quaternionique est dite variété Kählérienne quaternionique si pour toutes coordonnées locales d'un ouvert* U *on a*

$$\begin{cases} \nabla_X J_1 = \qquad\qquad \omega_3(X)J_2 - \omega_2(X)J_3 \\ \nabla_X J_2 = -\omega_3(X)J_1 \qquad\qquad + \omega_1(X)J_3 \\ \nabla_X J_3 = \omega_2(X)J_1 - \omega_1(X)J_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

pour tout champ de vecteurs X *sur* U*, où* ∇ *est la connexion de Levi-Civita et* ω_i *sont certaines* 1*-formes locales définies dans* U*.*

En particulier, si $\omega_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, 3$, alors la structure est appelée hyperKählérienne.

Remarque 3.2.1. *si* $n > 1$*, une variété Kählérienne quaternionique est une variété d' Einstein.*

3.3 Structures presques complexes généralisée

Soit M une variété de dimension $2n$. En géométrie généralisée on étudie non pas le fibré tangent de M noté TM mais plutôt la somme du fibré tangent et du fibré cotangent que nous noterons $\mathbb{T}M = TM \oplus T^*M$. On défini sur l'espace des sections $TM \oplus T^*M \longrightarrow M$ deux opérations $\mathbb{R}$-bilinéaires.

- Une forme $< -, - >$ symmétrique, non-dégénérée et bilinéaire définie par

$$< X + \alpha, Y + \beta > := \frac{1}{2}(\iota_X\beta + \iota_Y\alpha)$$

- Le crochet de Courant $[-, -]_c$ est un crochet anti-symétrique,

$$[X + \alpha, Y + \beta]_c := [X, Y] + \mathcal{L}_X\beta - \mathcal{L}_Y\alpha - \frac{1}{2}d(\iota_X\beta - \iota_Y\alpha)$$

où $X, Y \in TM$ et $\alpha, \beta \in T^*M$.

Définition 3.3.1. *[26] Une structure presque complexe généralisée sur* M *est une endomorphisme* $\mathcal{J}$ *de la somme directe* $TM \oplus T^*M$ *qui satisfait les deux conditions,*

$$\mathcal{J} + \mathcal{J}^* = 0, \qquad \mathcal{J}^2 = -id,$$

où $\mathcal{J}^*$ *est défini par* $< \mathcal{J}A, B >=< A, \mathcal{J}^*B >$ *pour tous* $A, B \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$*.*

Définition 3.3.2. *[26] Une structure (presque) Kählérienne généralisée sur* $\mathbb{T}M$ *est une paire* $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ *de structures (presque) complexes généralisées qui commutent et* $G = -\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$ *donne une métrique définie positive sur* $TM \oplus T^*M$*.*

Exemple 3.3.1. *Soit (M, J, ω, g) une structure kählérienne classique, c'est-à-dire une structure complexe J, une structure symplectique ω et une métrique riemannienne g telles qu'on ait le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[rr, "J"] \arrow[dr, "g"'] & & TM \arrow[dl, "\omega"] \\ & T^*M & \end{tikzcd}$$

La métrique Riemannienne g sur TM s'étend en une métrique sur $\mathbb{T}M$. En identifiant $\mathbb{T}M$ et $\mathbb{T}^*M$ grâce à la pseudo-métrique $< .,. >$, la métrique g peut-être vue comme un endomorphisme $G = \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{T}M$. Comme $\mathcal{J}_J\mathcal{J}_\omega = \mathcal{J}_\omega\mathcal{J}_J = -G$, la paire $(\mathcal{J}_J, \mathcal{J}_\omega)$ est une structure Kählérienne généralisée sur $\mathbb{T}M$.

Théorème 3.3.1. *[26] La structure Kählérienne généralisée $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ est équivalente à la structure bi-hermitienne $(g, b, J_\pm)$ qui satisfait la condition suivante.*
• *pour tous champs de vecteurs X, Y, Z,*

$$d\omega_\pm\big(J_\pm X, J_\pm Y, J_\pm Z\big) = \pm db(X, Y, Z),$$

where $\omega_\pm = g(X, J_\pm Y)$.

3.4 Structure métrique presque de contact

La géométrie de contact est la partie de la géométrie différentielle qui étudie les formes et les structures de contact. Elle entretient d'étroits liens avec la géométrie symplectique, la géométrie complexe, la théorie des feuilletages de codimension un et les systèmes dynamiques. La géométrie de contact classique est née de l'étude de la thermodynamique et de l'optique géométrique. Une structure de contact sur une variété (géométrie) est un champ d'hyperplan, c'est-à-dire la donnée en tout point d'un hyperplan dans l'espace tangent. L'illustration montre un exemple de structure de contact sur S^3 qui est le modèle local de toutes les structures de contact en dimension trois. ...

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques structures qui interviendront dans cette étude en donnant des exemples pour comprendre les notions et pour manipuler les différents calculs.

Pour plus de détail, voir [8], [10], [11],[51]...

3.4.1 Structures de Contact

Définition 3.4.1. *Une variété différentiable M de dimension impair $(2n+1)$ est dite variété de contact si elle existe une 1-forme η globale sur M telle que*

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0.$$

En particulier, $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ est un élément de volume de M, de sorte qu'une variété de contact est orientable. Aussi le rang de $d\eta$ est $2n$ sur l'algèbre de Grassmann T_p^*M à chaque point $p \in M$, et donc nous avons un sous-espace de dimension 1, $\{X \in T_pM/d\eta(X, T_pM) = 0\}$, dont $\eta \neq 0$ et qui est complémentaire au sous-espace défini par $\eta = 0$. Par conséquent le choix de ξ_p dans ce sous-espace normalisée par $\eta(\xi_p) = 1$, nous avons un champ de vecteurs globale ξ satisfaisant

$$d\eta(\xi, X) = 0, \qquad \eta(\xi) = 1.$$

ξ est appelé le champ de vecteur caractéristique ou le champ de Reeb de la structure de contact η. Utilisant la dérivée de Lie on obtient immédiatement,

$$\mathcal{L}_\xi \eta = 0, \qquad \mathcal{L}_\xi d\eta = 0.$$

On note $\mathcal{D}$ la distribution de contact ou sous-fibré défini par le sous-espace $\mathcal{D}_p = \{X \in T_pM : \eta(X) = 0\}$. Grosso modo, le sens de la condition $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$, est que le sous-fibré de contact est aussi loin d'être intégrable que possible, en particulier, $\mathcal{D}$ tourne comme un seul mouvement sur la variété. Pour un sous-fibré défini par une 1-forme η d'être intégrable, il faut et il suffit que $\eta \wedge (d\eta)^n \equiv 0$.

Théorème 3.4.1. *[10]*

Soit w une 1-forme sur une variété différentiable M^n et supposons que $w \wedge (dw)^p \neq 0$ et $(dw)^{p+1} \equiv 0$ sur M^n. Ensuite, sur chaque point, il existe un systéme de coordonnées

$(x^1,\dots,x^p,y^1,y^{n-p})$ *de telle sorte que* $w = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i$. *Ainsi, sur chaque point d'une variété de contact* M^{2n+1} *il existe des coordonnées* $(x^i, y^i, z),\ i = 1,\dots,n$ *telle que*

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i. \tag{3.3}$$

3.4.2 Structures métrique presque de contact

Structures presque de contact

Définition 3.4.2. *[10]*
Soit M *une variété différentiable de dimension impaire* $(2n+1)$. *On appelle structure presque de contact sur* M *la donnée d'un triplet* (η,ξ,φ) *tel que*
— φ *un champ de tenseur de type* $(1,1)$
— ξ *un champ de vecteurs*
— η *une 1-forme sur* M
vérifiant les conditions suivantes

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi.$$

Définition 3.4.3. *Une variété de dimension* $(2n+1)$ *munie d'une structure presque de contact* (φ,ξ,η) *est une variéte presque de contact.*

Théorème 3.4.2. *Soit* (φ,ξ,η) *une structure presque de contact ,alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{aligned} \varphi\xi &= 0 \\ \eta\circ\varphi &= 0 \\ rang\varphi &= 2n \end{aligned}$$

Pour la preuve voir [10].

Définition 3.4.4. ***Rang d'une structure***
Soit (φ,η,ξ) *une structure presque de contact. On dit que*
— *la forme* η *est de rang* $r = 2n$ *si* $(d\eta)^n \neq 0$ *et* $\eta\wedge(d\eta)^n = 0$,
— *la forme* η *est de rang* $r = 2n+1$ *si* $(d\eta)^{n+1} = 0$ *et* $\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$,
et on dit aussi que r *est le rang de la structure* (φ,η,ξ).

Métrique Riemannienne associée

Théorème 3.4.3. *[11]*
Toute variété presque de contact (M,φ,ξ,η) *admet une métrique Riemannienne* g *telle que,*

$$g(X,\xi) = \eta(X).$$

Proposition 3.4.1. *[11] Toute variété presque de contact* (M, φ, ξ, η) *admet une métrique Riemannienne* g *telle que,*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \tag{3.4}$$

et g *dans ce cas dite compatible avec la structure.*

Définition 3.4.5. *On appelle une variété métrique presque de contact et on la note* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$*, toute variété presque de contact* (M, φ, ξ, η) *munie d'une métrique Riemannienne* g *compatible avec la structure presque de contact sur* M*.*

Définition 3.4.6. *Pour chaque structure métrique presque de contact* (φ, ξ, η, g) *sur* M *on définit la 2-forme fondamental* Φ *par,*

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y).$$

Définition 3.4.7. *On dit que* M^{2n+1} *admet une structure presque de contact si il existe une 1-forme différentielle globale* η *et une 2-forme différentielle globale* Φ *sur* M *tel que*

$$\eta \wedge \Phi^n \neq 0$$

Proposition 3.4.2. *[11]*
Si M^{2n+1} *est une variété de contact avec la forme de contact* η*, alors il existe une structure métrique presque de contact* (φ, ξ, η, g) *tel que la 2-forme fondamental* Φ *est définie par,*

$$\Phi = d\eta.$$

Preuve . Pour la preuve voir([11], page 26) ■

Structure presque de contact normale

Définition 3.4.8. *Soient* (M, φ, ξ, η) *une variété presque de contact et* $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ *la variété produit où* $(X, f\frac{d}{dt})$ *un champ de vecteurs sur* $M \times \mathbb{R}$ *tel que* X *un champ de vecteurs sur* M*,* f *une fonction sur* $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ *et* t *système de coordonnée sur* $\mathbb{R}$*. On définit sur* $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ *une structure presque complexe* J *par,*

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$$

on peut facilement vérifier que $J^2 = -I$ *c.à.d. la variété* $(M^{2n+1} \times \mathbb{R}, J)$ *est presque complexe.*

Définition 3.4.9. *Soit* J *une structure presque complexe sur* $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$*,* J *est intégrable si et seulement si le tenseur de Nijenhuis* $N_J(X, Y) = 0$*. (voir théorème 3.1.1)*

Définition 3.4.10. *([11], page 80) Soit* (φ, ξ, η, g) *une structure métrique presque de contact sur* M*. On dit que* M *est normale si la structure presque complexe* J *est intégrable.*

Utilisant (3.1.2) on peut facilement vérifier que

$$N_J\left((X,0),(Y,0)\right)=\left(N^1(X,Y),N^2(X,Y)\right).$$

et

$$N_J\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right)=\left(N^{(3)}(X),N^{(4)}(X)\right)$$

où

$$N^{(1)}(X,Y)=N_\varphi(X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi,\qquad N^{(2)}(X,Y)\left(\mathfrak{L}_{\varphi X}\eta\right)Y-\left(\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta\right)X$$

$$N^{(3)}(X)=\left(\mathfrak{L}_\xi\varphi\right)X,\qquad N^{(4)}(X)=\left(\mathfrak{L}_\xi\eta\right)X.$$

Remarque 3.4.1. *La structure presque de contact est normale si*

$$N^{(1)}=N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0.$$

Théorème 3.4.4. *[51]*
Soit (M,φ,ξ,η) une variété presque de contact si $N^1=0$ alors,

$$N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0$$

Exemple 3.4.1. *Soit $S^3\subset\mathbb{R}^4$ et $X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.*
Prenons la paramétrisation suivante :

$$X=\begin{cases}x&=&cos\alpha\ \ cos\beta\ \ cos\gamma\\ y&=&cos\alpha\ \ cos\beta\ \ sin\gamma\\ z&=&cos\alpha\ \ sin\beta\\ t&=&sin\alpha\end{cases}$$

et utilisons le produit scalaire

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial X}{\partial x_i},\frac{\partial X}{\partial x_j}\right\rangle,$$

nous trouvons la matrice associée à la métrique Riemannienne g

$$(g_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos^2\alpha&0\\0&0&\cos^2\alpha\cos^2\beta\end{pmatrix}.$$

Utilisons l'équation (3.3), nous pouvons définir la 1-forme η comme suit :

$$\eta=\sum_{i=1}^{n}x^idy^i-y^idx^i\Leftrightarrow\eta=xdy-ydx+zdt-tdz.$$

Avec la paramétrisation ci-dessus on a

$$\eta=\left(\sin\beta,-\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta,\cos^2\alpha\cos^2\beta\right).$$

Remarquer que

$$\eta \wedge d\eta = -2\cos^2\alpha \cos\beta d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma \neq 0$$

c.à.d. la variété est de contact.
Calculons le champ de vecteur ξ, Posons

$$\xi = \xi_1\partial_\alpha + \xi_2\partial_\beta + \xi_3\partial_\gamma$$

et sachons que $g(X,\xi) = \eta(X)$ on peut avoir

$$\xi = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ -\tan\alpha\cos\beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

et nous pouvons facilement voir que $\eta(\xi) = 1$

Calculons maintenant l'endomorphisme φ, nous avons

$$\begin{cases} g(X,\varphi Y) & = & d\eta(X,Y) \\ 2d\eta(X,Y) & = & X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) \end{cases}$$

c.à.d.

$$g(X,\varphi Y) = \frac{1}{2}\big(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\big)$$

localement l'équation précédente donne,

$$\varphi_j^k = \frac{1}{2}g^{ki}\Big(\partial_i\big(\eta(\partial_j)\big) - \partial_i\big(\eta(\partial_j)\big)\Big)$$

d'où la matrice associé à φ est donnée par

$$(\varphi_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos^2\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta \\ \cos\beta & 0 & -\cos\beta\sin\beta \\ \tan\alpha & \tan\beta & 0 \end{pmatrix},$$

et on peut vérifier que

$$\varphi^2 = -I + \eta\otimes\xi.$$

Donc, (S^3,φ,ξ,η,g) est une variété métrique de contact et nous pouvons vérifier que

$$\eta\circ\varphi = 0, \qquad \varphi\xi = 0, \qquad g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

Vérifions maintenant que la structure (φ,ξ,η) est normale. on a

$$N(X,Y) = N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi,$$

l'expression locale du $N(X,Y)$ peut s'écrire sous la forme,

$$N_{kj}^i = \varphi_k^h(\partial_h\varphi_j^i - \partial_j\varphi_h^i) - \varphi_j^h(\partial_h\varphi_k^i - \partial_k\varphi_h^i) + \eta_k(\partial_j\xi^i) - \eta_j(\partial_k\xi^i)$$

et avec des calculs simples on peut vérifier que $N_{kj}^i = 0$ pour tous $i,j,k \in \{1,2,3\}$.

Lemme 3.4.1. *([12], p 82) Pour une structure métrique presque de contact (φ, ξ, η, g), la dérivée covariante de φ est donnée par,*

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X\varphi)Y, Z\big) &= 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g\big(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X\big) \\ &+ N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y). \end{aligned}$$

3.4.3 Quelques Structures métrique presque de contact normales

De D. Chinea et C. Gonzalez (voir [56]), on sait qu'il ya 4.096 classes de structures métrique presque de contact. Ces structures sont regroupées en tros familles : Sasakiennes, cosymplectic et Kenmotsu. En 1985, Oubiña [44] introduit une nouvelle classe des variétés presque de contact , à savoir, la variété trans-Sasakienne du type (α, β), qui peut être considérée comme une généralisation des variétés Sasakienne, Kenmotsu et cosymplectique où α et β sont des fonctions différentiables sur la variété.
Les structures trans-Sasakiennes de type $(0, 0)$, $(0, \beta)$, et $(\alpha, 0)$ sont cosymplectique [11], β-Kenmotsu [28], et α-Sasakienne [28], respectivement.

Dans cette paragraphe, nous allons rappelé quelques structures métrique presque de contact qui interviendront dans cette étude ainsi des exemples pour clarifier les notions.

Structure Sasakienne

Définition 3.4.11. *Soient (M, φ, ξ, η) une variété presque de contact et Φ la 2-forme fondamentale. On dit que M est une variété Sasakienne si $\Phi = d\eta$ et la triplet (φ, ξ, η) est normale.*

Définition 3.4.12. *Une variété Riemannienne (M, g) est dite Sasakienne si et seulement si la métrique du cône $(C(S) = \mathbb{R}^+ \times S, g = dr^2 + r^2 g)$ est kählérienne.*

Théorème 3.4.5. *([11], p 86) Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variéré métrique presque de contact, M est une variété de Sasaki si et seulement si*

$$(\nabla_X\varphi)\, Y = g\,(X, Y)\,\xi - \eta\,(Y)\,X$$

pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposition 3.4.3. *Le tenseur de courbure Riemannienne R et le tenseur de Ricci S d'une variété Sasakienne M satisfaient les propriétés suivantes :*
Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}M$

(a) $R(\xi, X)\xi = -X$
(b) $R(X, \xi)X = -\xi$
(c) $R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y$
(d) $g\big(R(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z, \varphi W\big) = g\big(R(X, Y)Z, W\big)$
(e) $S(\varphi X, \varphi Y) = S(X, Y)$

Pour la preuve voir ([10], p 93).

Définition 3.4.13. *[10] Soit M^{2n+1} une variété Sasakienne, pour tout plant P de l'espace tangent T_pM de base orthonormée $\{X, \varphi X\}$ où X est un champ de vecteurs orthogonal à ξ. On défini la courbure φ-sectionnelle de P par*

$$K(P) = g\big(R(X, \varphi X)\varphi X, X\big).$$

Théorème 3.4.6. *([10], p 97). Si une variété Sasakienne M à une courbure φ-sectionnelle constante c alors, M est appellée espace de forme Sasakienne (Sasakian space forms) noté par $M^{2n+1}(c)$.*
Le tenseur de courbure Riemannienne dans ce cas est donné par

$$R(X,Y) = X \wedge Y + \frac{c-1}{4}\big(\varphi^2 X \wedge \varphi^2 Y + \varphi X \wedge \varphi Y + 2g(X, \varphi Y)\varphi\big), \tag{3.5}$$

où $(X \wedge Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$ pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ et la courbure de Ricci S est donnée par

$$2S(X,Y) = \big(n(c+3) + c - 1\big)g(X,Y) - (n+1)(c-1)\eta(X)\eta(Y). \tag{3.6}$$

Remarque 3.4.2. *Une variété Sasakienne $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est dite variété Sasaki-Einstein si g est une métrique d'Einstein, c.à.d.,*

$$S = \lambda g,$$

pour une constante λ. Sachons que $R(X,\xi)Y = g(X,\xi)Y - g(X,Y)\xi$. On peut voir facilement que $\lambda = 2n$.

Remarque 3.4.3. *Une variété Sasakienne $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est dite variété η-Einstein si g satisfait*

$$S = ag + b\eta \otimes \eta,$$

où initialement a et b sont des fonctions, mais si la dimension est ≥ 5, a et b doivent être des constantes ([11], p 131). On peut voir facilement que $a + b = 2n$.

Pour une étude récente sur les variétés η-Einstein, voir [8].

Exemples 3.4.1.

(1) La sphère d'unité S^{2n+1} munie de la structure canonique (φ, ξ, η, g) est une variété Sasakienne à courbure sectionnelle égale 1.(voir l'exemple 3.4.1). Ensuite, tenu compte de la déformation $\mathcal{D}$-homothétique de structure

$$\eta' = a\eta, \qquad \xi' = \frac{1}{a}\xi, \qquad \phi' = \phi, \qquad g' = ag + a(a-1)\eta \otimes \eta, \qquad a \in \mathbb{R}^+.$$

Nous pouvons obtenir une variété Sasakienne $(S_a^{2n+1}, \phi', \xi', \eta', g')$ de courbure sectionnelle constante $c' = \frac{4}{a} - 3$ ([11], p 99).

(2) *E.Blair a donné un exemple important d'une variété Sasakienne à courbure φ-sectionnelle constante $c = -3$.*

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \delta_{ij} + y^i y^j & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y^j & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^j & 0 \end{pmatrix}, \\ \xi &= 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \eta = \frac{1}{2}(dz - y^i dx). \end{aligned}$$

Structure de Kenmotsu

Définition 3.4.14. *Soient (M, φ, ξ, η) une variété presque de contact et Φ la 2-forme fondamentale. On dit que M est de Kenmotsu si η est fermée (c.à.d. $d\eta = 0$), $d\Phi = 2\Phi \wedge \eta$ et la triplet (φ, ξ, η) est normale.*

Théorème 3.4.7. *[32] Soient $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété presque de contact de dimension $(2n+1)$ et ∇ la connexion de Levi-Cevita sur M. On dit que M est de Kenmotsu si et seulement si pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X.$$

Théorème 3.4.8. *[32] Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu. Alors pour tout point $p \in M$, il existe un ouvert U de p qui est un produit tordu $(-\varepsilon, \varepsilon) \times_f V$ où $f(t) = Ce^t$sur l'intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon)$ et V est une variété Kählerienne.*

De plus, on a la notion la plus générale d'une structure β-Kenmotsu [28], qui peut être définie par

$$(\nabla_X \varphi)Y = \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big),$$

où β est une constante non nulle. De cette condition, on peut facilement déduire que

$$\nabla_X \xi = \beta\big(X - \eta(X)\xi\big).$$

Exemple 3.4.2. *[13] Soit (x, y, z) les coordonnées cartésiennes sur $\mathbb{R}^3$ on pose*

$$\eta = dz, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Phi = -2e^{2z} dx \wedge dy, \quad g = 2e^{2z}(dx^2 + dy^2).$$

Alors, la variété $(\mathbb{R}^3, \varphi, \eta, \xi, g)$ est une variété de Kenmotsu à courbure sectionnelle $c = -1$ elle s'appelle (l'espace hyperbolique).

Structure cosymplectique

Définition 3.4.15. *Soient (M, φ, ξ, η) une variété presque de contact et Φ la 2-forme fondamentale. On dit que M est cosymplectique si Φ et η sont fermées (c.à.d. $d\Phi = 0$, $d\eta = 0$) et la triplet (φ, ξ, η) est normale.*

Théorème 3.4.9. *[47]*
Soient $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété presque de contact de dimension $(2n+1)$ et ∇ la connexion de Levi-Cevita sur M. On dit que M est cosymplectique si et seulement si pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\nabla_X \varphi)Y = 0$$

Proposition 3.4.4. *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété cosymplectique. Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = 0.$$

Preuve . On a

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \Phi)(Y, Z) &= X\Phi(Y, Z) - \Phi(\nabla_X Y, Z) - \Phi(Y, \nabla_X Z) \\
&= Xg(Y, \varphi Z) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(Y, \varphi \nabla_X Z) \\
&= g(\nabla_X Y, \varphi Z) + g(Y, \nabla_X \varphi Z) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(Y, \varphi \nabla_X Z) \\
&= g\big(Y, (\nabla_X \varphi) Z\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

d'où

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = 0.$$

■

Exemple 3.4.3.
Voici une structure cosymplectique très simple sur $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$,

$$\eta = dz, \qquad \xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Phi = dx \wedge dy.$$

Structure Trans-Sasakienne

Définition 3.4.16. *[44], [40] Soient $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact et Φ la 2-forme fondamentale. On dit que M est trans-Sasakienne si et seulement si elle est normale et*

$$d\eta = \alpha \Phi, \quad d\Phi = 2\beta(\Phi \wedge \eta),$$

où $\alpha = \frac{1}{2n}\delta\Phi(\xi) = 0$ et $\beta = \frac{1}{2n} div\xi$ sont des fonctions différentiables sur M et $\delta\Phi$ est la codifférentielle de Φ (la divergence) définie par

$$\delta\Phi(X) = -\sum_{i=1}^{2n} \Big((\nabla_{e_i} \Phi)(e_i, X) + (\nabla_{\varphi e_i} \Phi)(\varphi e_i, X) \Big) - (\nabla_\xi \varphi)(\xi, X),$$

avec $\{e_1, ..., e_n, \varphi e_1, ..., \varphi e_n, \xi\}$ une φ-base locale d'un ouvert quelconque de M,(voir [25], page 209).

Théorème 3.4.10. *[12]*
Soient (M,φ,ξ,η,g) une variété presque de contact de dimension $(2n+1)$ et ∇ la connexion de Levi-Cevita sur M. On dit que M est trans-Sasakienne si et seulement si pour tous $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$,

$$(\nabla_X\varphi)Y=\alpha\big(g(X,Y)\xi-\eta(Y)X\big)+\beta\big(g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X\big)$$

où α et β sont des fonctions différentiables sur M, et on dit aussi que la structure trans-Sasakienne est de type (α,β).

En particulier, la structure est normale en plus,
— si $\alpha=1$ et $\beta=0$, la structure est dite Sasakienne,
— si $\alpha\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ et $\beta=0$, la structure est dite α-Sasakienne,
— si $\alpha=0$ et $\beta=1$, la structure est dite de Kenmotsu,
— si $\alpha=0$, et $\beta\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ la structure est dite β-Kenmotsu,
— si $\alpha=\beta=0$, la structure est dite cosymplectique.

Proposition 3.4.5. *[12] Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété trans-Sasakienne. Pour tous $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$,*

$$\nabla_X\xi=-\alpha\varphi X+\beta(X-\eta(X)\xi),$$
$$(\nabla_X\eta)Y=-\alpha g(\varphi X,Y)+\beta\big(g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)\big),$$
$$(\nabla_X\Phi)(Y,Z)=\alpha\big(g(X,Z)\eta(Y)-g(X,Y)\eta(Z)\big)-\beta\big(g(X,\varphi Z)\eta(Y)-g(X,\varphi Y)\eta(Z)\big).$$

Remarque 3.4.4. *Du proposition 3.4.5 on tire*

$$(\nabla_X\Phi)(Y,\xi)=-\alpha,\qquad(\nabla_X\eta)X=-\beta.$$

Pour X orthogonal à ξ et $g(X,X)=1$, on a

$$\delta\Phi(\xi)=2n\alpha,\qquad\delta\eta=-2n\beta.$$

Exemple 3.4.4. *[12] Soit (x,y,z) les coordonnées cartésiennes sur $\mathbb{R}^3$ on pose*

$$\xi=\frac{\partial}{\partial_z},\qquad\eta=dz-ydx$$

$$\varphi=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&-y&0\end{pmatrix},\qquad g=\begin{pmatrix}e^z+y^2&0&-y\\0&e^z&0\\-y&0&1\end{pmatrix}.$$

Utilisant

$$\delta\Phi(X)=-\sum_{i=1}^{2n}\Big((\nabla_{e_i}\Phi)(e_i,X)+(\nabla_{\varphi e_i}\Phi)(\varphi e_i,X)\Big)-(\nabla_\xi\varphi)(\xi,X),$$

et

$$\delta\eta=-\sum_{i=1}^{2n}\Big((\nabla_{e_i}\eta)e_i+(\nabla_{\varphi e_i}\eta)\varphi e_i\Big),$$

on trouve

$\delta\Phi(\xi) = -e^{-z}$, $\delta\eta = -1$ et $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété trans-Sasakienne de type $(-\frac{1}{2}e^{-z}, \frac{1}{2})$. Et remarquer bien que

$$\xi(\alpha) = \frac{\partial}{\partial_z}(-\frac{1}{2}e^{-z}) = \frac{1}{2}e^{-z} = -2(-\frac{1}{2}e^{-z})(\frac{1}{2}) = -2\alpha\beta.$$

La relation entre les structure trans-Sasakienne, α-Sasakienne et β-Kenmotsu, récemment ont été discuté par Marrero [40].

Proposition 3.4.6. *(Marrero [40]) Toute variété trans-Sasakienne de dimension ≥ 5 est α-Sasakienne, β-Kenmotsu ou cosymplectique.*

Proposition 3.4.7. *(Marrero [40]) Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété Sasakienne 3-dimensionnelle, $f > 0$ une fonction non-constante sur M et $\overline{g} = fg + (1-f)\eta \otimes \eta$. Alors $(\varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ est une structure trans-Sasakienne de type $\left(\frac{1}{f}, \frac{1}{2}\xi(\ln f).\right)$*

Nous pouvons donner une généralisation pour cette Proposition. Considérant $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact de dimension 3 et f, h deux fonctions sur M telle que $fh \neq 0$ partout. La déformation

$$\tilde{\eta} = fh\eta, \quad \tilde{\xi} = \frac{1}{fh}\xi, \quad \tilde{\varphi} = \varphi, \quad \tilde{g} = f^2 g + f^2(h^2 - 1)\eta \otimes \eta,$$

est aussi une structure métrique presque de contact. Supposons $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété trans-Sasakienne de type (α, β) et Φ sa 2-forme fondamentale alors, on a

$$d\eta = \alpha\Phi, \qquad d\Phi = 2\beta\eta \wedge \Phi,$$

et comme $\tilde{\Phi} = f^2\Phi$ donc

$$\begin{aligned} d\tilde{\eta} &= d(fh\eta) \\ &= d(fh) \wedge \eta + \frac{\alpha h}{f}\tilde{\Phi}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\tilde{\Phi} &= d(f^2\Phi) \\ &= 2\Big(d(\frac{1}{2}\ln(f^2)) + \beta\eta\Big) \wedge \tilde{\Phi}. \end{aligned}$$

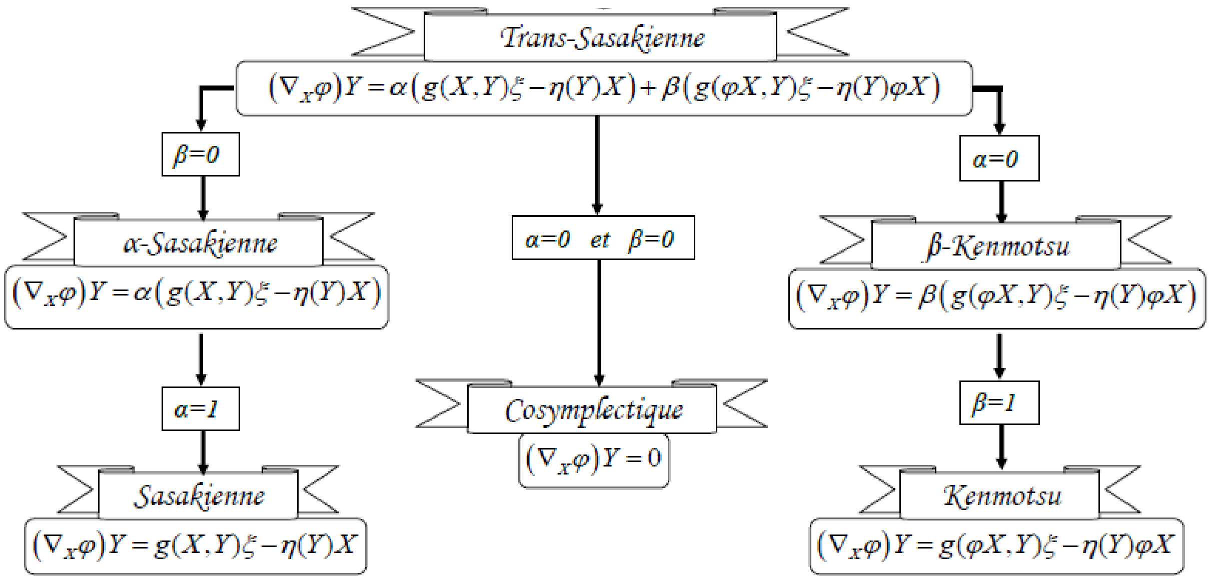
Si $fh = 1$ alors $\tilde{\eta} = \eta$ et on obtient

$$d\tilde{\eta} = \frac{\alpha}{f^2}\tilde{\Phi}, \qquad d\tilde{\Phi} = 2\Big(\frac{1}{2}d(\big(\ln(f^2)\big) + \beta\eta\Big) \wedge \tilde{\Phi},$$

posons $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{f^2}$ et $\tilde{\beta}\tilde{\eta} = \frac{1}{2}d(\big(\ln(f^2)\big) + \beta\eta$, donc on peut déclarer la proposition suivante :

Proposition 3.4.8. *Soit $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété trans-Sasakienne de type (α, β), f une fonction non-constante sur M et $\tilde{g} = f^2 g + (1-f^2)\eta \otimes \eta$. Alors $(\varphi, \xi, \eta, \tilde{g})$ est une structure trans-Sasakienne de type $\big(\frac{\alpha}{f^2}, \beta + \frac{1}{2}\xi(\ln f^2)\big)$.*

Corollaire 3.4.1. *Si $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu avec η exacte (c.à.d. $\eta = d\rho$ où $\rho \in C^\infty(M)$) et $\tilde{g} = e^{-2\rho}g + (1 - e^{-2\rho})\eta \otimes \eta$. Alors $(\varphi, \xi, \eta, \tilde{g})$ est une structure cosymplectique.*



Relations entre les structures metrique presque de contact

Construction d'un exemple à 2-paramètres

Exemple 3.4.5. *Construction d'un exemple de dimension 3*
Soit $\{x, y, z\}$ les coordonnés cartésiennes sur $\mathbb{R}^3$ posons

$$g = \begin{pmatrix} \rho^2 + \tau^2 & 0 & -\tau \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ -\tau & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

telle que ρ et τ des fonction sur $\mathbb{R}^3$.
On définie une structure presque de contact (φ, ξ, η) sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = (-\tau, 0, 1)$$

$(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété métrique presque de contact.
La 1-forme η et la 2-forme fondamentale Φ sont donnée par,

$$\eta = dz - \tau dx \qquad \text{and} \qquad \Phi = -2\rho^2 dx \wedge dy,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} d\eta &= \tau_2 dx \wedge dy + \tau_3 dx \wedge dz \\ d\Phi &= -4\rho_3 \rho dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

tel que $\rho_i = \frac{\partial\rho}{\partial x_i}$ *and* $\tau_i = \frac{\partial\tau}{\partial x_i}$.
Les composantes du tenseur N *peut s'écrire sous la forme,*

$$\begin{aligned} N^i_{kj} &= \varphi^h_k(\partial_h\varphi^i_j - \partial_j\varphi^i_h) - \varphi^h_j(\partial_h\varphi^i_k - \partial_k\varphi^i_h) + \eta_k(\partial_j\xi^i) - \eta_j(\partial_k\xi^i) \\ &= 0 \qquad \forall i, j, k \end{aligned}$$

c.à.d. la structure métrique presque de contact $\varphi, \xi, \eta, g)$ *est normale pour toutes* f *et* h *des fonctions sur* $\mathbb{R}^3$.
Donc, $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une variété*
(1) Trans-Sasakienne si $\rho_1 = \rho_2 = \tau_3 = 0,\ \rho_3 = \frac{\alpha}{2}\rho$ *et* $\tau_2 = -2\beta\rho^2$
(2) Sasakienne si $\rho_3 = 0,\ \tau_2 = -2\rho^2$ *et* $\tau_3 = 0,$
(3) Cosymplectique si $\rho_3 = 0,\ \tau_2 = 0,$ *et* $\tau_3 = 0$ *,*
(4) Kenmotsu si $\rho_3 = \rho,\ \tau_2 = 0$ *et* $\tau_3 = 0.$
De plus, on peut donner des structures non-triviales sur M *par exemple :*
$(1)'$ $\rho = e^z,\ \tau = x^2 - 2y,\ \alpha = 2$ *et* $\beta = e^{-2z},$
$(2)'$ $\rho = e^{-y},\ \tau = e^{-2y},$
$(3)'$ $\rho = 2xy,\ \tau = x^3,$
$(4)'$ $\rho = e^z$ *et* $\tau = x.$

3.5 Structures 3-presque de contact

Définition 3.5.1. *Soient* $(\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^3$ *trois structures presque de contact . On dit que* $(\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^3$ *est une* 3*-structures presque de contact [37], si pour toute permutation cyclique* (i, j, k) *de* $(1, 2, 3)$*, les conditions suivantes sont remplies :*

$$\begin{cases} (1) : \eta_i(\xi_j) = \eta_j(\xi_i) = 0; \\ (2) : \varphi_i\xi_j = -\varphi_j\xi_i = \xi_k; \\ (3) : \varphi_i \circ \varphi_j - \eta_j \otimes \xi_i = -\varphi_j \circ \varphi_i + \eta_i \otimes \xi_j = \varphi_k; \\ (4) : \eta_i \circ \varphi_j = -\eta_j \circ \varphi_i = \eta_k. \end{cases} \tag{3.7}$$

Il est bien connu (voir [37]) que la dimension d'une variété munie de 3-structures presque de contact est $4n + 3$ pour un entier naturel n. Une métrique Riemannienne g est dite associé à la 3-structures si elle satisfait

$$g(\varphi_i X, \varphi_i Y) = g(X, Y) - \eta_i(X)\eta_i(Y), \qquad \textit{avec} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.8}$$

pour tous champs de vecteurs X, Y sur M.
Dans une telle variété M avec 3-structures presque de contact il existe toujours une métrique Riemannienne g satisfaisant (**??**), et $(\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^3$ est appelée une 3-structures métrique presque de contact. Dans ce cas $\left(M, g, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^3\right)$ est dite variété métrique à 3-structures presque de contact.

Définition 3.5.2. *Une variété métrique à* 3*-structures presque de contact* $\left(M, g, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^3\right)$ *est dite variété* 3*-structures Sasakienne (ou variété* 3*-Sasakiennes) si chacune de trois structures* $(\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^3$ *soit Sasakienne.*

Théorème 3.5.1. *([11], p 294)*
Si $\left(M, g, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^3\right)$ *est une variété* 3*-structures Sasakienne alors,* ξ_1, ξ_2, ξ_3 *sont des champs de vecteurs orthonormés, satisfaisant*

$$[\xi_i, \xi_j] = 2\xi_k$$

pour toute permutation cyclique (i, j, k) *de* $(1, 2, 3)$*.*

Remarque 3.5.1. *([11], p 294)*
Toute variété 3*- Sasakiennes est Einsteinienne avec courbure scalaire positive.*

3.6 Structure métrique presque de contact presque hermitienne

Définition 3.6.1. *Soient* $\left(M^{4m+2}, g, J, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^2\right)$ *une variété presque hermitienne munie de deux structures presque de contact. On dit qu'elle est une variété métrique presque de contact presque hermitienne si on a :*

$$\begin{cases} (1) : g(\varphi_i X, Y) = -g(X, \varphi_i Y); \\ (2) : J\xi_1 = -\xi_2, \ J\xi_2 = \xi_1; \\ (3) : \varphi_i^2 X = -X + \eta_1(X)\xi_1 + \eta_2(X)\xi_2; \\ (4) : \varphi_1(JX) = -J\varphi_1 X = \varphi_2 X; \\ (5) : \varphi_2(JX) = -J\varphi_2 X = -\varphi_1 X; \\ (6) : \varphi_2(\varphi_1 X) = -\varphi_1(\varphi_2 X) = JX + \eta_1(X)\xi_2 - \eta_2(X)\xi_1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Comme dans le cas des variétés métriques presque de contact et des variétés presque hermitiennes, localement, les formes fondamentales sont définies par les formules suivantes

$$\phi_i(X, Y) = g(X, \varphi_i Y), \qquad pour \quad i = 1, 2$$

et

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY).$$

pour tous champs de vecteurs X, Y sur M.
La dimension de ce type de variété est $4m + 2$. Pour la nomenclature, nous indiquons le nom de la structure métrique presque de contact suivi du nom de la structure presque hermitienne. Par exemple, une variété Sasakienne-kählérienne c'est une variété kählérienne équipé de deux structures Sasakienne.
Il est bien connu que l'espace complexe projectif $P_{2m+1}(\mathfrak{C})$ est un exemple d'une variété métrique presque de contact presque hermitienne. il possède une structure kählérienne et deux structures Sasakienne. Pour cette raison, il est appelé une variété Sasaki-kähler.

chapter 4

Résultats

Pour étudier les variétés à courbure négative, Bishop et O'Neill ont introduit la notion de produit tordu comme étant une généralisation du produit de variétés Riemanniennes [7] . En 1985, en utilisant le produit tordu, Oubi$\tilde{n}a$ a montré qu'il y a une correspondance (one-to-one) entre les structures Sasakiennes et les structures Kählériennes[44].
Récemment, en se basant sur les travaux de Tanno [52] (la déformation homothétique sur les variété métrique de contact). Blair [13] a introduit la notion du produit tordu $\mathcal{D}$-homothétique. Il l'a utilisé pour montrer par une autre technique qu'il existe une correspondance entre la structures Sasakienne et la structures Kählérienne.

Dans ce chapitre qui est la partie originale de ce travail, nous avons traité notre objectis selon deux direction, dans la première nous généralisons le produit tordu $\mathcal{D}$-homothétique et nous montrons que le produit tordu et le produit tordu $\mathcal{D}$-homothétique sont des cas particuliers.

Après avoir défini notre métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique et déterminé ses propriétés géométrique ainsi que la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée, nous prouvons l'importance de cette dernière en traitant les points suivants :

(1) Étude sur les sous variétés de la variété produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique.
(2) Construction d'une famille de structures Kählérienne à 1-paramètre à partir d'une seule structure Sasakienne, ce qui élimine la correspondance d'Oubi$\tilde{n}a$ et de Blair.
(3) Construction d'une famille de structures conformément Kählérienne à 1-paramètre, à partir d'une seule structure cosymplectique ou de Kenmotsu.
(4) Étude géométrique de la famille Kählérienne engendrée par une seule structure Sasakienne.
(5) Construction d'une famille de structures de Kenmotsu à 1-paramètre à partir d'une seule structure Sasakienne.
(6) Construction d'une structure Kählérienne qauternionique à partir d'une 3-structures Sasakiennes.
(7) Construction d'une structure Kählérienne généralisée à partir d'une structure bi-hermitienne.
(8) Étude sur les sous variétés de la variété produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée.
(9) Le Produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublé et le problème de Blair-Oubi$\tilde{n}a$.

Dans la deuxième direction nous donnons une réponse positive pour une question ouverte de Tshikuna-MATAMBA [56] concernant le produit de deux variété métrique presque de contact presque hermitienne.

4.1 Produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique

Dans cette partie, nous donnons la définition de la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique sur la variété produit $\tilde{M} = M' \times M$ avec la connexion de Levi-Civita associée. Ensuite nous traitons quelques propriétés géométriques.

4.1.1 Définitions et Propriétés

La notion de la déformation $\mathcal{D}$-homothétique ou déformation $2n$-homothétique sur une variété métrique de contact $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ a été introduite par Tanno [52] où $\mathcal{D}$ est la distribution définie par $\eta = 0$. Pour une structure métrique de contact (φ, ξ, η, g) et une constante positive a la structure

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = a\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \qquad \overline{g} = ag + a(a-1)\eta \otimes \eta,$$

est aussi une structure métrique de contact.

L'idée fonctionne aussi bien pour les structures métrique presque de contact. Pour une structure métrique presque de contact, la déformation

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = \lambda\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{\lambda}\xi, \qquad \overline{g} = \alpha^2 g + \beta^2 \eta \otimes \eta,$$

est aussi une structure métrique presque de contact si $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (condition de compatibilité) où α, β et λ sont des constantes non nulles.
Posons $\alpha^2 = a^2$ et $\beta^2 = a^2(b^2 - 1)$ où $\lambda = ab$, nous obtenons la déformation

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = ab\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{ab}\xi, \qquad \overline{g} = a^2 g + a^2(b^2 - 1)\eta \otimes \eta.$$

ce qui nous permet de poser la définition suivante :

Définition 4.1.1. *Soient (M'^m, g') une variété Riemannienne et $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact. La métrique* ***bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique*** *sur $\tilde{M} = M' \times M$ est définie par*

$$\tilde{g} = g' + f^2 g + f^2(h^2 - 1)\eta \otimes \eta.$$

où f et h sont deux fonctions différentiables sur M' vérifiant $fh \neq 0$ partout.
De plus, le couple $(\tilde{M}, \tilde{g})$ s'appelle variété Riemannienne produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique.

En particulier, si $h = \pm 1$ alors on a une métrique produit tordu et si $h = \pm f$ nous obtenons une métrique produit tordu $\mathcal{D}$-homothétique [13] .

Remarque 4.1.1.
(*) : La matrice associée à $\tilde{g}$ est

$$\begin{pmatrix} (g'_{ij}) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & f^2(g_{ab}) + f^2(h^2-1)\eta_a\eta_b \end{pmatrix}$$

c.à.d.

$$(\tilde{g})_{\alpha\beta} = \begin{cases} g'_{\alpha\beta}, & si\ \alpha,\beta \in \{1,...,m\}\ ; \\ f^2 g_{\alpha\beta} + f^2(h^2-1)\eta_\alpha\eta_\beta, & si\ \alpha,\beta \in \{m+1,...,m+2n+1\}\ ; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

(*) : La métrique inverse est donnée par

$$(\tilde{g}^{-1})_{\alpha\beta} = \begin{cases} g'^{-1}_{\alpha\beta}, & si\ \alpha,\beta \in \{1,...,m\}\ ; \\ \frac{1}{f^2} g^{-1}_{\alpha\beta} + \frac{1}{f^2(h^2-1)}\xi \otimes \xi, & si\ \alpha,\beta \in \{m+1,...,m+2n+1\}\ ;\ et\ h^2 \neq 1 \\ \frac{1}{f^2} g^{-1}_{\alpha\beta}, & si\ \alpha,\beta \in \{m+1,...,m+2n+1\}\ ;\ et\ h^2 = 1 \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Utilisant la formule de Koszul pour la connexion de Levi-Civita de la métrique Riemannienne, nous pouvons obtenir la proposition suivante :

Proposition 4.1.1. *Soient ∇', ∇ et $\tilde{\nabla}$ les connexions Riemannienne associées à $g', g,$ et $\tilde{g}$ respectivement. Pour tous X', Y', Z' champs de vecteurs sur M' indépendants de M et de même pour X, Y, Z champs de vecteurs sur M, en particulier $[X', Y']$ est tangent à M', $[X, Y]$ est tangent à M et $[X', Y] = 0$. On a*

$$\tilde{\nabla}_{X'}Y' = \nabla'_{X'}Y',$$

$$\tilde{\nabla}_{X'}Y = \tilde{\nabla}_Y X' = X'(\ln f)Y + X'(\ln h)\eta(Y)\xi,,$$

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z') = -fZ'(f)g(X,Y) - f\Big((h^2-1)Z'(f) + fhZ'(h)\Big)\eta(X)\eta(Y),$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = 2\tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + f^2(h^2-1)\Big(&\big(g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X)\big)\eta(Z) \\ &+2d\eta(X,Z)\eta(Y) + 2d\eta(Y,Z)\eta(X)\Big). \end{aligned}$$

Preuve . En utilisant la formule de Koszul,

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \tilde{X}\tilde{g}(\tilde{Y},\tilde{Z}) + \tilde{Y}\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Z}) - \tilde{Z}\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y}) \\ &+ \tilde{g}([\tilde{X},\tilde{Y}],\tilde{Z}) + \tilde{g}([\tilde{Z},\tilde{X}],\tilde{Y}) - \tilde{g}([\tilde{Y},\tilde{Z}],\tilde{X}), \end{aligned}$$

1. Pour tous $X', Y', Z' \in \mathfrak{X}(M')$on a

$$
\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'}Y', Z') &= X'\tilde{g}(Y', Z') + Y'\tilde{g}(Z', X') - Z'\tilde{g}(X', Y') \\
&\quad + \tilde{g}\big(Z', [X', Y']\big) + \tilde{g}\big(Y', [Z', X']\big) - \tilde{g}\big(X', [Y', Z']\big) \\
&= X'g'(Y', Z') + Y'g'(Z', X') - Z'g'(X', Y') \\
&\quad + g'\big(Z', [X', Y']\big) + g'\big(Y', [Z', X']\big) - g'\big(X', [Y', Z']\big) \\
&= 2g'(\nabla'_{X'}Y', Z'),
\end{aligned}
$$

pour tout $Z' \in \mathfrak{X}(M')$.
de même on a

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'}Y', Z) = 0$$

pour tout $Z \in \mathfrak{X}(M)$, d'où

$$\tilde{\nabla}_{X'}Y' = \nabla'_{X'}Y'.$$

2.

$$
\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'}Y, Z) &= 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y}X', Z) \\
&= X'\tilde{g}(Y, Z) \\
&= X'\big(f^2 g(Y, Z) + f^2(h^2 - 1)\eta(Y)\eta(Z)\big) \\
&= 2fX'(f)\big(g(Y, Z) + (h^2 - 1)\eta(Y)\eta(Z)\big) + 2hf^2X'(h)\eta(Y)\eta(Z) \\
&= 2\frac{X'(f)}{f}\tilde{g}(Y, Z) + 2hf^2X'(h)\eta(Y)\eta(Z) \\
&= 2\frac{X'(f)}{f}\tilde{g}(Y, Z) + 2\frac{X'(h)}{h}\eta(Y)\tilde{g}(\xi, Z) \\
&= 2\tilde{g}\Big(\frac{X'(f)}{f}Y + \frac{X'(h)}{h}\eta(Y)\xi +, Z\Big)
\end{aligned}
$$

et puisque $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'}Y, Z') = 0$, alors

$$\tilde{\nabla}_{X'}Y = \tilde{\nabla}_{Y}X' = \frac{X'(f)}{f}Y + \frac{X'(h)}{h}\eta(Y)\xi.$$

3. On sait que

$$Y\tilde{g}(X', Z) = 0 \Leftrightarrow \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y}X', Z) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y}Z, X')$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y}Z, X') &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'}Y, Z) \\
&= -fX'(f)g(Y, Z) + f\Big((h^2 - 1)X'(f) - fhX'(h)\Big)\eta(Y)\eta(Z).
\end{aligned}
$$

4.

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= X\tilde{g}(Y,Z) + Y\tilde{g}(Z,X) - Z\tilde{g}(X,Y) \\
&\quad + \tilde{g}\big(Z,[X,Y]\big) + \tilde{g}\big(Y,[Z,X]\big) - \tilde{g}\big(X,[Y,Z]\big) \\
&= f^2\big(Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\
&\quad + g\big(Z,[X,Y]\big) + g\big(Y,[Z,X]\big) - g\big(X,[Y,Z]\big) \\
&\quad + f^2(h^2-1)\Big(X\big(\eta(Y)\eta(Z)\big) + Y\big(\eta(Z)\eta(X)\big) - Z\big(\eta(X)\eta(Y)\big) \\
&\quad + \eta(Z)\eta([X,Y]) + \eta(Y)\eta([Z,X]) - \eta(X)\eta([Y,Z])\Big),
\end{aligned}$$

sachons que

$$d\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) \quad et \quad g(\nabla_X\xi, Y) = X\eta(Y) - \eta(\nabla_X Y)$$

alors,

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = 2\tilde{g}(\nabla_X Y, Z) \quad &+ \quad f^2(h^2-1)\Big(\big(g(\nabla_X\xi, Y) + g(\nabla_Y\xi, X)\big)\eta(Z) \\
&+ 2d\eta(X,Z)\eta(Y) + 2d\eta(Y,Z)\eta(X)\Big),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ∎

Maintenant, on va étudier quelques propriétés géométriques concernant cette métrique.

Soient σ et $\tilde{\sigma}$ les 2-formes fondamentales de $\{x'_0\} \times M$ et $M' \times M$ repectivement avec $x'_0 \in M'$. Nous avons alors le Théorème suivant :

Théorème 4.1.1. *Pour une variété métrique presque de contact $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ et une métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique sur $\tilde{M} = M' \times M$ on a*

1. Pour tout $x_0 \in M$, $M' \times \{x_0\}$ est une sous variété totalement géodésique.

2. Si $grad'(h - f) = 0$ alors pour tout $x'_0 \in M'$, $\{x'_0\} \times M$ est une sous variété quasi-ombilicale et sa 2-forme fondamentale est

$$\sigma(X,Y) = -\frac{1}{2}\Big(g(X,Y) + (h^2 + fh - 1)\eta(X)\eta(Y)\Big)grad' f^2.$$

3. La courbure moyenne de M dans $M' \times M$ est donnée par

$$\mathcal{H} = -grad'\Big(\frac{(2n+h^2)f^2}{2(2n+1)}\Big).$$

4. Pour tout $x'_0 \in M'$, la sous variété connexe $\{x'_0\} \times M$ est minimale si et seulement si

$$h^2 = \frac{c}{f^2} - 2n$$

où $c > 0$ et dans ce cas $\{x'_0\} \times M$ est quasi-ombilicale et sa 2-forme fondamentale est

$$\sigma(X,Y) = \frac{1}{2}\Big(g(X,Y) - (2n+1)\eta(X)\eta(Y)\Big)grad' f^2.$$

5. Si $d\eta(\xi, X) = 0$ pour tout champ de vecteurs X sur M (c.à.d. les courbes intégrales de ξ sont des géodésiques). Alors, le champ de vecteurs de Reeb ξ est $\tilde{g}$-Killing si et seulement si il est g-Killing.

Preuve . Rappelons que toute sous-variété N de $\tilde{M}$ est une sous variété quasi-ombilicale si la 2-forme fondamentale ω de N a la forme suivante

$$\omega(X,Y) = \alpha g(X,Y)\rho' + \beta\eta(X)\eta(Y)\rho'$$

où α, β sont deux scalaires, X, Y deux champs de vecteurs sur N et ρ' un champ de vecteurs normal à N.

— Si $\alpha = 0$ on dit que N est cylindrique.
— Si $\beta = 0$ on dit que N est ombilicale.
— Si $\alpha = \beta = 0$ on dit que N est géodésique.

1. soit σ' la 2-forme fondamentale de M'. Puisque nous avons $\tilde{\nabla}_{X'}Y' = \nabla'_{X'}Y'$ alors,

$$\sigma' = \tilde{\nabla}_{X'}Y' - \nabla'_{X'}Y' = 0.$$

2. Soit σ la 2-forme fondamentale de M, nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_X Y, Z'\big) &= -fZ'(f)g(X,Y) - f\Big((h^2-1)Z'(f) + fhZ'(h)\Big)\eta(X)\eta(Y)\\ &= -fg'\Big(g(X,Y)grad' f + f\big((h^2-1)grad' f + fh\ grad' h\big)\eta(X)\eta(Y), Z'\Big),\end{aligned}$$

puisque $\tilde{g}\big(\nabla_X Y, Z'\big) = 0$ et sachons que $\sigma = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ donc

$$\sigma(X,Y) = \frac{1}{2}g(X,Y)grad' f^2 + \frac{1}{2}\big((h^2-1)grad' f^2 + f^2\ grad' h^2\big)\eta(X)\eta(Y)...(*)$$

Si $grad' h = grad' f$ alors, on obtient

$$\sigma(X,Y) = -f\big(g(X,Y) + (h^2 + fh - 1)\eta(X)\eta(Y)\big)grad' f.$$

3. Sachant que la courbure moyenne de M est donnée par

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2n+1}tr_g\ \sigma = \frac{1}{2n+1}\sum_{i=1}^{2n+1}\sigma(e_i, e_i)$$

où $\{e_i\}_{i=1,2n+1}$ est une base orthonormée sur M alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2n+1}\sum_{i=1}^{i=2n+1}\sigma(e_i,e_i)\\ &= -\frac{f}{2n+1}\sum_{i=1}^{i=2n+1}\Big((2n+1)grad' f + \big((h^2-1)grad' f + fh\ grad' h\big)\Big)\\ &= -grad'\Big(\frac{(2n+h^2)f^2}{2(2n+1)}\Big).\end{aligned}$$

4. La sous variété $\{x'_0\} \times M$ est minimale veut dire que la courbure moyenne $\mathcal{H}$ est nulle, ce qui donne en utilisant le résultat (3),

$$h^2 = \frac{c}{f^2} - 2n.$$

Remplaçons maintenant $grad'h^2 = -\frac{c}{f^4} grad' f^2$ dans $(*)$ nous trouvons

$$\sigma(X,Y) = \frac{1}{2}\Big(g(X,Y) - (2n+1)\eta(X)\eta(Y)\Big) grad' f^2.$$

5. Pour tous $\tilde{X} = X' + X$ et $\tilde{Y} = Y' + Y$ deux champs de vecteurs sur $\tilde{M}$ on a

$$\xi \ est \ \tilde{g} - Killing \Leftrightarrow \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\xi, \tilde{Y}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\xi, \tilde{X}) = 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\xi, \tilde{Y}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\xi, \tilde{X}) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'+X}\xi, Y'+Y) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y'+Y}\xi, X'+X) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'}\xi, Y) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X}\xi, Y') + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X}\xi, Y) \\
&\quad + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y'}\xi, X) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y}\xi, X') + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y}\xi, X) ...(**)
\end{aligned}$$

supposons $d\eta(\xi, X) = 0$, c.à.d. $\xi\eta(X) = \eta\big(\nabla_\xi X\big)$ alors, on peut facilement vérifier les assertions suivantes :

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'}\xi, Y) = \frac{1}{2} X'(f^2h^2)\eta(Y),$$

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X}\xi, Y') = -\frac{1}{2} Y'(f^2h^2)\eta(X),$$

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X}\xi, Y) = \tilde{g}(\nabla_X\xi, Y) + f^2(h^2-1)d\eta(X,Y).$$

Nous remplaçons cette equation dans $(**)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\xi, \tilde{Y}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\xi, \tilde{X}) &= \tilde{g}(\nabla_X\xi, Y) + \tilde{g}(\nabla_Y\xi, X) \\
&= f^2\big(g(\nabla_X\xi, Y) + g(\nabla_Y\xi, X)\big),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

4.2 Applications sur le produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique

4.2.1 Géométrie des structures

Pour notre première application de la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique nous considérons le cas où $M' = \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact. On défini sur le produit $\tilde{M} = \mathbb{I} \times M$ la métrique $\tilde{g}$ par,

$$\tilde{g} = dt^2 + f^2 g + f^2(h^2-1)\eta \otimes \eta. \tag{4.1}$$

Les champs de vecteurs sur $\mathbb{I} \times M^{2n+1}$ sont donnés par $(a\partial_t, X)$ oú X est un champs de vecteurs sur M^{2n+1}, t la coordonnée de $\mathbb{I}$ (avec $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$) et f, h deux fonctions sur $\mathbb{I}$ telle que $fh \neq 0$ partout.
Sous ces conditions, en utilisant la proposition (4.1.1) on peut obtenir la proposition suivante :

Proposition 4.2.1. *Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact. Soit ∇ et $\tilde{\nabla}$ les connexions Riemanniennes de g et $\tilde{g}$ respectivement. Pour tous X, Y, Z champs de vecteurs sur M indépendants de $\mathbb{I}$, on a*

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{\partial_t} X = \tilde{\nabla}_X \partial_t = \frac{f'}{f} X + \frac{h'}{h}\eta(X)\xi,\\
&\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \partial_t) = -ff'g(\varphi X, \varphi Y) - fh(fh)'\eta(X)\eta(Y),\\
&\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + f^2(h^2-1)\Big(\frac{1}{2}\big(g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X)\big)\eta(Z)\\
&\qquad\qquad\qquad + d\eta(X, Z)\eta(Y) + d\eta(Y, Z)\eta(X)\Big).
\end{aligned}$$

Structure presque complexe sur $\mathbb{I} \times M^{2n+1}$

Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact. On définit sur l'espace tangent de $\mathbb{I} \times M^{2n+1}$ l'application $\tilde{J}$ par :

$$\tilde{J}(a\frac{\partial}{\partial t}, X) = \Big(fh\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \varphi X - \frac{a}{fh}\xi\Big), \tag{4.2}$$

où $fh \neq 0$ partout et X un champ de vecteurs sur M.

Proposition 4.2.2. *La structure $(\tilde{g}, \tilde{J})$ définie par (4.1) et (4.2) est une structure presque hermitienne.*

Preuve . Pour que la structure $(\tilde{g}, \tilde{J})$ soit presque hermitienne il faut et il suffit que

$$\tilde{J}^2\tilde{X} = -\tilde{X} \qquad et \qquad \tilde{g}(\tilde{J}\tilde{X}, \tilde{J}\tilde{Y}) = \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

avec $\tilde{X} = (a\partial t, X)$ et $\tilde{Y} = (a\partial t, Y)$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{I} \times M$ ce qui est simple a vérifier. ∎

D'autre part, la 2-forme fondamentale $\tilde{\Omega}$ de $(\tilde{J}, \tilde{g})$ est

$$\tilde{\Omega}\Big(\big(a\frac{\partial}{\partial t}, X\big), \big(b\frac{\partial}{\partial t}, Y\big)\Big) = \tilde{g}\Big(\big(a\frac{\partial}{\partial t}, X\big), \tilde{J}\big(b\frac{\partial}{\partial t}, Y\big)\Big),$$

nous pouvons vérifier facilement que

$$\tilde{\Omega} = f(2h\ dt \wedge \eta + f\Phi), \tag{4.3}$$

où Φ est la 2-forme fondamentale de M. Nous avons immédiatement,

$$d\tilde{\Omega} = f(-2h\ dt \wedge d\eta + 2f'dt \wedge \Phi + fd\Phi). \tag{4.4}$$

Pour les cas particuliers, nous avons le suivant :

$$\begin{cases} (1) : \textit{métrique de contact} \ : \ d\tilde{\Omega} = -2f(h - f')dt \wedge \Phi, \\ (2) : \textit{presque cosymplectique} \ : \ d\tilde{\Omega} = 2ff'dt \wedge \Phi, \\ (3) : \textit{presque de Kenmotsu} \ : \ d\tilde{\Omega} = 2f(f'dt + f\eta) \wedge \Phi. \end{cases} \tag{4.5}$$

Nous remarquons que $\tilde{\Omega}$ est fermée dans le cas d'une métrique de contact si et seulement si $h = f'$ et dans le cas presque cosymplectique si et seulement si f est constante. Dans le cas de Kenmotsu la 2 forme $\tilde{\Omega}$ ne peut pas être fermée, elle oblige f d'être nulle.

Maintenant, posons $h = f'$, la structure $(\tilde{g}, \tilde{J})$ (voir (4.1), (4.2)) devient :

$$\tilde{g} = dr^2 + f^2 g + f^2(f'^2 - 1)\eta \otimes \eta, \tag{4.6}$$

$$\tilde{J}(a\frac{\partial}{\partial t}, X) = \Big(ff'\eta(X)\frac{\partial}{\partial t} \ , \ \varphi X - \frac{a}{ff'}\xi\Big), \tag{4.7}$$

où $ff' \neq 0$ sur M partout, et X un champ de vecteurs de M.

On note $N_{\tilde{J}}$ le tenseur de Nijenhuis de la structure presque complexe $\tilde{J}$. Alors, de (4.7) on a

$$N_{\tilde{J}}\big((0,X),(0,Y)\big) = \Big(ff'N_{\varphi}^{(2)}(X,Y)\frac{\partial}{\partial t} \ , \ N_{\varphi}^{(1)}(X,Y)\Big),$$

$$N_{\tilde{J}}\Big((\frac{\partial}{\partial t},0),(0,X)\Big) = \Big(N_{\varphi}^{(4)}(X)\frac{\partial}{\partial t} \ , \frac{1}{ff'}N_{\varphi}^{(3)}(X)\Big).$$

pour tous champs de vecteurs X, Y de M. Désignons par $N_{\varphi}^{(1)}, N_{\varphi}^{(2)}, N_{\varphi}^{(3)}$ et $N_{\varphi}^{(4)}$ les champs de tenseur sur M donnés respectivement par

$$N_{\varphi}^{(1)}(X,Y) = [\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi,$$

$$N_{\varphi}^{(2)}(X) = \big(L_{\varphi X}\big)(Y) - \big(L_{\varphi_Y}\big)(X),$$

$$N_{\varphi}^{(3)}(X) = -\big(L_{\xi}\varphi\big)(X),$$

$$N_{\varphi}^{(4)}(X) = \big(L_{\xi}\eta\big)(X).$$

Proposition 4.2.3. *[11] Pour une variété presque de contact $M = (M, \varphi, \xi, \eta)$ la disparition du champ de tenseur $N_{\varphi}^{(1)}$ implique la disparition des champs de tenseurs $N_{\varphi}^{(2)}, N_{\varphi}^{(3)}$ est $N_{\varphi}^{(4)}$.*

A partir de la proposition ci-dessus, on voit qu'une variété métrique presque de contact $M = (M, \varphi, \xi, \eta)$ est normale si et seulement si $N_{\varphi}^{(1)}$ s'annule partout sur M ([11], p.81).

Par conséquent, résumant les arguments ci-dessus, nous obtenons le théorème principal suivant :

Théorème 4.2.1.

1. *La structure métrique presque de contact sur M est une structure métrique de contact si et seulement si la structure presque hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J})$ est presque Kälérienne pour toute fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $ff' \neq 0$. De plus, la structure sur M est Sasakienne si et seulement si la structure $(\tilde{g}, \tilde{J})$ sur $\tilde{M}$ est Kählérienne.*

2. *La structure métrique presque de contact sur M est presque cosymplectique si et seulement si la structure presque hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J})$ satisfait $d\tilde{\Omega} = 2ff'(dt \wedge \Phi)$ dans ce cas la structure est conformément presque Kählérienne. De plus, la structure sur M est cosymplectique si et seulement si la structure $(\tilde{g}, \tilde{J})$ sur $\tilde{M}$ est conformément Kählérienne.*

3. *La structure métrique presque de contact sur M est presque Kenmotsu si et seulement si la structure presque hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J})$ satisfait $d\tilde{\Omega} = 2f(f'dt + f\eta) \wedge \Phi$ dans ce cas la structure est conformément presque Kählérienne si et seulement si η est exacte. De plus, si la structure sur M est de Kenmotsu alors la structure $(\tilde{g}, \tilde{J})$ sur $\tilde{M}$ est conformément Kählérienne si et seulement si η est exacte et aussi, si $\eta = -d\beta$ pour certain $\beta \in C^\infty(\tilde{M})$ alors $e^{2(\beta - \ln|f|)}\tilde{g}$ sera une métrique Kählérienne sur $\tilde{M}$.*

Preuve . Pour la nécessité, elle est directe en utilisant (4.5) et appliquant les définitions de ces structures (3.4.14).
Pour la suffisance, nous observons d'abord que l'équation (4.4) quand $h = f'$ donne

(1) :

$$d\tilde{\Omega}\Big(\big(\frac{\partial}{\partial t}, 0\big), \big(0, X\big), \big(0, Y\big)\Big) = 2ff'\big(\Phi - d\eta\big)(X, Y). \tag{4.8}$$

Si $d\tilde{\Omega} = 0$, alors de l'équation (4.8) on tire $\Phi = d\eta$ et on obtient une structure métrique de contact.

Donc, si M est Sasakienne alors la structure (g, J) est Kählérienne.

(2) : Si $d\tilde{\Omega} = 2ff'(dt \wedge \Phi)$ alors, l'équation (4.8) donne $d\eta = 0$ et appliquons d sur $d\tilde{\Omega} = 2ff'(dt \wedge \Phi)$ nous obtenons $d\Phi = 0$ et donc nous avons une structure presque cosymplectique sur M.
Maintenant, considérons la métrique $\overline{g} = \frac{1}{f^2}\tilde{g}$, elle est presque hermitienne par rapport à $\tilde{J}$ et sa 2-forme fondamentale $\overline{\Omega} = \frac{1}{f^2}\tilde{\Omega}$. Alors

$$\begin{aligned} d\overline{\Omega} &= \frac{-2f'}{f^3} dt \wedge \tilde{\Omega} + \frac{1}{f^2} d\tilde{\Omega} \\ &= \frac{-2f'}{f^3} dt \wedge f(2f'dt \wedge \eta + f\Phi) + \frac{1}{f}(-2f'dt \wedge d\eta + 2f'dt \wedge \Phi + fd\Phi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne une structure presque confomément Kählérienne.

(3) : Si $d\tilde{\Omega} = 2f(f'dt + f\eta) \wedge \Phi$ alors, l'équation (4.8) donne $d\eta = 0$ et appliquons d sur $d\tilde{\Omega} = 2f(f'dt + f\eta) \wedge \Phi$ nous obtenons

$$(f'dt + f\eta) \wedge d\Phi = 2f'dt \wedge \eta \wedge \Phi,$$

ce qui donne $d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$, et donc une structure presque de Kenmotsu sur M.

Utilisons (4.3) et la définition d'une structure de Kenmotsu (Voir chapitre 4) avec $h = f'$ nous recevons

$$d\tilde{\Omega} = 2\big(d(\ln|f|) + \eta\big) \wedge \tilde{\Omega}. \tag{4.9}$$

A partir de la définition (3.1.9), il est évident que $\tilde{M}$ est conformément Kählérienne si et seulement si η est exacte.
Maintenant, considérons la métrique $\widehat{g} = e^{2(\beta - \ln|f|)}\tilde{g}$ avec $\beta \in C^\infty(\tilde{M})$. cette métrique est hermitienne est la 2-forme fondamentale $\widehat{\Omega} = e^{2(\beta-\ln|f|)}\tilde{\Omega}$. Alors, par un simple calcul et en utilisant l'équation (4.9) et $\eta = -d\beta$ nous obtenons $d\widehat{\Omega} = 0$ et cela achève la démonstration.
■

Cas particuliers :

— Pour $f = t$, où $t > 0$ on obtient le cône de Kähler c.à.d

$$\tilde{g} = dt^2 + t^2 g \quad et \quad \tilde{J}(a\frac{\partial}{\partial t}, X) = \Big(t\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \varphi X - \frac{a}{t}\xi\Big).$$

— Pour $f = e^t$, on obtient le produit tordu $\mathcal{D}$-homothetique [13] c.à.d

$$\tilde{g} = dt^2 + e^{2t}g + e^{2t}(e^{2t} - 1)\eta\otimes\eta \quad et \quad \tilde{J}(a\frac{\partial}{\partial t}, X) = \Big(e^{2t}\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \varphi X - ae^{-2t}\xi\Big).$$

— Pour $f = \sqrt{2t}$ où $t > 0$ on obtient la structure

$$\tilde{g} = dt^2 + 2tg + (1-2t)\eta\otimes\eta \quad et \quad \tilde{J}(a\frac{\partial}{\partial t}, X) = \Big(-2\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \varphi X - \frac{a}{2}\xi\Big).$$

Exemple 4.2.1. *Pour cet exemple, nous nous appuyons sur l'exemple de Blair ([10], p 81). Nous savons que $\mathbb{R}^{2n+1}$ avec les coordonnées (x^i, y^i, z), $i = 1..n$, admet une structure Sasakienne*

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \delta_{ij} + y^i y^j & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y^j & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^j & 0 \end{pmatrix}, \\ \xi &= 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \eta = \frac{1}{2}(dz - y^i dx^i). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant cette structure, nous pouvons définir une famille des structures Kählerienne $(\tilde{J}, \tilde{g})$ sur $\mathbb{R}^{2n+2}$ comme suit :

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}f^2(\delta_{ij} + f'^2 y^i y^j) & 0 & -\frac{1}{4}f^2 f'^2 y^j \\ 0 & 0 & \frac{\delta_{ij}}{4}f^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}f^2 f'^2 y^j & 0 & \frac{1}{4}f^2 f'^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}y^j f f' & 0 & \frac{\delta_{ij}}{2}ff' \\ 0 & 0 & \delta_{ij} & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ -\frac{2\delta_{ij}}{ff'} & 0 & y^j & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.2.2. *Reprenons l'exemple (3.4.3), on a* $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété métrique presque de contact définie par*

$$g = \begin{pmatrix} \rho^2+\tau^2 & 0 & -\tau \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ -\tau & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \eta = (-\tau, 0, 1).$$

où ρ *et* τ *sont des fonctions sur* E^3.

Nous avons les cas suivant :
(1) Sasaki si $\rho_3 = 0$, $\tau_2 = -2\rho^2$ *et* $\tau_3 = 0$,
(2) Cosymplectique si $\rho_3 = 0$, $\tau_2 = 0$, *est* $\tau_3 = 0$,
(3) Kenmotsu si $\rho_3 = \rho$, $\tau_2 = 0$ *est* $\tau_3 = 0$,
avec $\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ *and* $\tau_i = \frac{\partial \tau}{\partial x_i}$. *Utilisons (4.6) et (4.7) nous obtenons*

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^2(\rho^2 + f'^2\tau^2) & 0 & -\tau f^2 f'^2 \\ 0 & 0 & f^2\rho^2 & 0 \\ 0 & -\tau f^2 f'^2 & 0 & f^2 f'^2 \end{pmatrix}, \ \tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau f f' & 0 & f f' \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{ff'} & 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}.,$$

Alors, $(\tilde{J}, \tilde{g})$ *est une :*
(1) Structure Kählerienne si $\rho_3 = 0$, $\tau_2 = -2\rho^2$ *et* $\tau_3 = 0$,
(2) Structure conformément Kählérienne si , $\rho_3 = 0$, $\tau_2 = 0$ *et* $\tau_3 = 0$.
(3) Structure conformément Kählérienne si $\rho_3 = \rho$, $\tau_2 = 0$ *et* $\tau_3 = 0$.

4.2.2 Étude géométrique d'une nouvelle famille Kählérienne

Rappelons que nous avons pu construire dans la sections précédente, une famille Kählérienne a 1-paramètre $(\tilde{M}^{2n+2}, \tilde{g}, \tilde{J})$ à partir d'une seule variété Sasakienne $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ en utilisant la structure suivante :

$$\tilde{g} = dr^2 + f^2 g + f^2(f'^2 - 1)\eta \otimes \eta,$$

$$\tilde{J}(a\frac{\partial}{\partial t}, X) = \Big(ff'\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \varphi X - \frac{a}{ff'}\xi\Big),$$

(voir théorème 4.2.1).

En utilisant la propostion (4.2.1) avec $h = f'$, on peut obtenir le suivant :

Proposition 4.2.4. *Soit* $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété Sasakienne. Soit* ∇ *et* $\tilde{\nabla}$ *les connexions Riemanniennes de* g *et* $\tilde{g}$ *respectivement. Pour tous* X, Y, Z *champs de vecteurs sur* M *indépendants de* $\mathbb{I}$, *on a*

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\partial_t} X &= \tilde{\nabla}_X \partial_t = \frac{f'}{f} X + \frac{f''}{f'}\eta(X)\xi, \\ \tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + (1 - f'^2)\big(\eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X\big) \\ &- ff'\Big(g(\varphi X, \varphi Y) + (ff')'\eta(X)\eta(Y)\Big)\partial_t. \end{aligned}$$

Puis un calcul direct en utilisant la formule (1.3.1) donne le suivant.

Proposition 4.2.5.

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(\partial t, X)\partial t &= \frac{f''}{f}X + \Big(2\frac{f''}{f} + \frac{f'''}{f'}\Big)\eta(X)\xi,\\
\tilde{R}(\partial t, X)Y &= -\frac{f''}{f'}g(X,\varphi Y)\xi - f'f''\big(2\eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X\big)\\
&- ff''g(\varphi X,\varphi Y)\partial t - ff'(3f'f'' + ff''')\eta(X)\eta(Y)\partial t,\\
\tilde{R}(X,Y)\partial t &= \frac{2f''}{f'}g(X,\varphi Y)\xi + f'f''\big(\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X\big),\\
\tilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - (X\wedge Y)Z\\
&+ (1-f'^2)\Big(\varphi^2 X\wedge\varphi^2 Y + \varphi X\wedge\varphi Y + 2g(X,\varphi Y)\varphi\Big)Z\\
&- ff'^2f''\eta(Z)(X\wedge Y)\xi - ff''\eta\big((X\wedge Y)Z\big)\xi\\
&+ f^2f'f''\eta\big((X\wedge Y)\varphi Z - 2g(X,\varphi Y)Z\big)\partial t,
\end{aligned}$$

où $\tilde{R}$ (resp. R) est le tenseur de courbure de $\tilde{g}$ (resp. g) et $X\wedge Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$.

Supposons que $M(c)$ est un espace de forme Sasakienne (Sasakian space form) et $\tilde{M}(C)$ est un espace de forme complexe (Kählerian space forms). Utilisons (3.5),(3.1.7) et la proposition (4.2.5), nous obtenons :

$$\begin{cases} f'' = -\frac{C}{4}f \\ f'^2 - \frac{C}{4}f^2 = \frac{c+3}{4}. \end{cases} \tag{4.10}$$

La solution $f(t)$ du system ODE (4.10) est de la forme :

— Cas 1. $C = 0$, $\quad f(t) = \pm\frac{t}{2}\sqrt{c+3}$, $\quad c > -3$

— Cas 2. $C < 0$, $\quad f(t) = \sqrt{\frac{c+3}{-C}}\sin(\frac{t}{2}\sqrt{-C})$, $\quad c > -3$

— Cas 3. $C > 0$, $\quad f(t) = \frac{-1}{2\sqrt{C}}\Big((c+3)e^{\mp\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{C}} - e^{\pm\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{C}}\Big)$.

Nous pouvons maintenant déclarer le théorème suivant :

Théorème 4.2.2. *Soit $M(c)$ un espace de forme Sasakienne et f une fonction sur $\mathbb{R}$ qui satsfait le système ODE (4.10), donc on a :*

— *Cas 1. $\mathbb{R}^*\times M$ est une variété Kählerienne plat pour $f(t) = \pm\frac{t}{2}\sqrt{c+3}$ où $c > -3$.*

— *Cas 2. $\mathbb{I}\times M$ est un espace de forme complexe avec courbure sectionnelle holomorphique $C < 0$ pour $f(t) = \sqrt{\frac{c+3}{C}}\sin(\frac{t}{2}\sqrt{-C})$ où $c > -3$ et $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \{\frac{m\pi}{\sqrt{-C}}/m\in\mathbb{Z}\}$.*

— *Cas 3. $\mathbb{R}\times M$ est un espace de forme complexe avec courbure sectionnelle holomorphique $C > 0$ pour $f(t) = \frac{-1}{2\sqrt{C}}\Big((c+3)e^{\mp\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{C}} - e^{\pm\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{C}}\Big)$.*

Preuve . En utilisant les formules (3.5), (3.1.7) et la proposition (4.2.5) la preuve est directe. ∎

Exemple 4.2.3. *Soit $(S^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une $(2n+1)$-dimensionnelle sphère d'unité munie de la structure Sasakienne canonique (φ,ξ,η,g) à courbure sectionnelle constante $c = 1$ (voir exemple 3.4.1). On peut facilement vérifier que :*

- *Cas 1.* $\mathbb{R}^* \times S^{2n+1}$ *est une variété Kählerienne plat pour* $f(t) = \pm t$,
- *Cas 2.* $\mathbb{I} \times S^{2n+1}$ *est un espace de forme complexe avec courbure sectionnelle holomorphique* $C < 0$ *pour* $f(t) = \frac{2}{\sqrt{-C}} \sin(\frac{t}{2}\sqrt{-C})$ *et* $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \{\frac{m\pi}{\sqrt{-C}}/m \in \mathbb{Z}\}$,
- *Cas 3.* $\mathbb{R}\times S^{2n+1}$ *un espace de forme complexe avec courbure sectionnelle holomorphique* $C > 0$ *pour* $f(t) = \frac{-1}{2\sqrt{C}}\Big(4e^{\mp\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{C}} - e^{\pm\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{C}}\Big)$.

Ensuite, compte tenu de la déformation $\mathcal{D}$-homothétique de la structure

$$\eta' = \alpha\eta, \qquad \xi' = \frac{1}{\alpha}\xi, \qquad \phi' = \phi, \qquad g' = \alpha g + \alpha(\alpha-1)\eta\otimes\eta, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Nous pouvons obtenir un espace de forme Sasakienne $(S^{2n+1}_\alpha, \phi', \xi', \eta', g')$ *de courbure sectionnelle constante* $c' = \frac{4}{\alpha} - 3$ *([11], p 99).*
Dans ce cas, nous avons

- *Cas 1.* $\mathbb{R}^* \times S^{2n+1}_\alpha$ *est une variété Kählerienne plate pour* $f(t) = \pm\frac{t}{\sqrt{\alpha}}$,
- *Cas 2.* $\mathbb{I} \times S^{2n+1}_\alpha$ *est un espace de forme complexe avec courbure sectionnelle holomorphique* $C < 0$ *pour* $f(t) = \frac{2}{\sqrt{-\alpha C}} \sin(\frac{t}{2}\sqrt{-C})$ *et* $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \{\frac{m\pi}{\sqrt{-C}}/m \in \mathbb{Z}\}$,
- *Cas 3.* $\mathbb{R} \times S^{2n+1}_\alpha$ *est un espace de forme complexe avec courbure sectionnelle holomorphique* $C > 0$ *pour* $f(t) = \frac{-1}{2\sqrt{C}}\Big(\frac{4}{\alpha}e^{\mp\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{C}} - e^{\pm\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{C}}\Big)$.

Maintenant, nous procédons aux considérations suivantes. Soit e_i, $i = 1..n$ un champ de vecteur d'unité local dans le sous-fibré sur M. Alors, nous avons la base orthonormée locale $\{e_i, \varphi e_i, \xi\}$ sur M. Donnons une base orthonormée pour la métrique (4.6) par

$$E_0 = \partial_t, \qquad E_i = \frac{1}{f}e_i, \qquad \tilde{J}E_i = \frac{1}{f}\varphi e_i, \qquad \tilde{J}E_0 = -\frac{1}{ff'}\xi.$$

Utilisons la formule (1.3.4) et la proposition (4.2.5) on peut avoir

Proposition 4.2.6. *Les composantes non-nulles du tenseur de Ricci sont*

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(\partial t, \partial t) &= -\frac{1}{ff'}\Big((2n+3)f'f'' + ff'''\Big),\\
\tilde{S}(X,Y) &= S(X,Y) - 2ng(X,Y) + \Big((3n+1)(1-f'^2) - 2ff''\Big)g(\varphi X, \varphi Y)\\
&- ff'\Big((2n+3)f'f'' + ff'''\Big)\eta(X)\eta(Y),
\end{aligned}$$

où $\tilde{S}$ et S sont les tenseurs de Ricci de $(\tilde{M}, \tilde{g})$ et (M, g) respectivement.

Ainsi, à partir de (4.6) et la proposition (4.2.6), on voit que $(\tilde{M}, \tilde{g})$ est Einsteinnienne si et seulement si il existe une constante λ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda\tilde{g}(\partial_t, \partial_t) &= -\frac{1}{ff'}\Big((2n+3)f'f'' + ff'''\Big),\\
\lambda\tilde{g}(X,Y) &= S(X,Y) - 2ng(X,Y)\\
&+ \Big((3n+1)(1-f'^2) - 2ff''\Big)g(\varphi X, \varphi Y)\\
&- ff'\Big((2n+3)f'f'' + ff'''\Big)\eta(X)\eta(Y).
\end{aligned}$$

Nous voyons que les conditions ci-dessus peuvent être réécrites comme suit,

$$\begin{aligned} -\lambda f f' &= \Big((2n+3)f'f'' + ff'''\Big), && (4.11)\\ S(X,Y) &= \Big(\lambda f^2 + 2n - \big((3n+1)(1-f'^2) - 2ff''\big)\Big)g(X,Y) && (4.12)\\ &+ \Big(-\lambda f^2 + \big((3n+1)(1-f'^2) - 2ff''\big)\Big)\eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

À première vue, nous remarquons que toute fonction f qui satisfait

$$f'' = kf, \qquad k \in \mathbb{R}, \tag{4.13}$$

est une solution de l'équation différentielle (4.11), dans ce cas l'équation (4.11) donne

$$\lambda = -2k(n+2).$$

Remplaçons λ dans (4.12) nous obtenons

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \Big(2n - 2k(n+1)f^2 - (3n+1)(1-f'^2)\Big)g(X,Y)\\ &+ \Big(2k(n+1)f^2 + (3n+1)(1-f'^2)\Big)\eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

notons que $S(X,\xi) = 2n\eta(X)$. Supposons maintenant que M est une variété η-Einstein c.à.d. g satisfait $S = ag + b\eta\otimes\eta$ alors,

$$\begin{aligned} &\Big(a - 2n + 2k(n+1)f^2 + (3n+1)(1-f'^2)\Big)g(X,Y)\\ +\ &\Big(b - 2k(n+1)f^2 - (3n+1)(1-f'^2)\Big)\eta(X)\eta(Y) = 0. \end{aligned}$$

Pour $X = Y = \xi$ on peut voir que $a + b = 2n$ et pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ nous obtenons l'équation différentielle ordinaire suivante

$$b - 2k(n+1)f^2 - (3n+1)(1-f'^2) = 0, \tag{4.14}$$

avec la condition $ff' \neq 0$ sur M partout.

Posons $p = 1 - \frac{b}{3n+1}$ et $q = \frac{2k(n+1)}{3n+1}$, à partir duquel (4.14) se réduire à :

$$f'^2 = p + qf^2.$$

Nous pouvons, à une motion de paramètre t, avoir une solution $f(t)$ du OED (4.14) de la forme :

- Cas 1. $q = 0$, $\quad f(t) = \pm t\sqrt{p}, \qquad p > 0$
- Cas 2. $q < 0$, $\quad f(t) = \pm\sqrt{\frac{p}{-q}}\sin(t\sqrt{-q}), \qquad p > 0$
- Cas 3. $q > 0$, $\quad f(t) = \frac{1}{2\sqrt{q}}\Big(e^{\pm t\sqrt{q}} - p\, e^{\mp t\sqrt{q}}\Big).$

Théorème 4.2.3. *Soient $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété η-Einstein et f une function sur $\mathbb{R}$, satisfait l'ODE (4.14). Alors, on a*

(1) Si $f(t) = \pm t\sqrt{p}$ avec $p > 0$, alors le produit $\mathbb{R}^* \times M$ avec la métrique (4.6) est Ricci plat.

(2) Si $f(t) = \pm\sqrt{\frac{p}{-q}}\sin(-t\sqrt{-q})$ avec $p > 0$, alors le produit $\mathbb{I}_1 \times M$ avec la métrique (4.6) est une variété Kähler-Einstein pour $\lambda = -2k(n+2)$, où k est une constante négative et $\mathbb{I}_1 = \mathbb{R} - \{-\frac{m\pi}{2\sqrt{-q}}/m \in \mathbb{Z}\}$.

(3) Si $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{q}}\Big(e^{\pm t\sqrt{q}} - p\ e^{\mp t\sqrt{q}}\Big)$, alors le produit $\mathbb{I}_2 \times M$ avec la métrique (4.6) est une variété Kähler-Einstein pour $\lambda = -2k(n+2)$, où k est une constante positive et $\mathbb{I}_2 = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2\sqrt{q}}\ln \mid p \mid\}$.

Maintenant, nous supposons que M est un espace de forme Sasakienne et utilisons la formule (3.6) c.à.d. remplaçons $b = -\frac{1}{2}(n+1)(c-1)$ dans le théorème (4.2.3) nous obtenons,

Proposition 4.2.7. *Soit $(M^{2n+1}(c), \varphi, \xi, \eta, g)$ un espace de forme Sasakienne.*

(1') Si $f(t) = t\sqrt{\frac{(c+5)n+c+1}{2(3n+1)}}$, alors le produit $\mathbb{R}^* \times M$ avec la métrique (4.6) est Ricci plat.

(2') Si $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{-k}}\sqrt{\frac{(c+5)n+c+1)}{n+1}}\sin\Big(-t\sqrt{-\frac{2k(n+1)}{3n+1}}\Big)$, alors le produit $\mathbb{I}_1 \times M$ avec la métrique (4.6) est une variété Kähler-Einstein pour $\lambda = -2k(n+2)$, où k est une constante negative.

(3') $f(t) = \sqrt{\frac{3n+1}{2k(n+1)}}\sinh\Big(t\sqrt{\frac{2k(n+1)}{3n+1}}\Big) - \frac{c-1}{4\sqrt{2k}}\sqrt{\frac{n+1}{3n+1}}e^{-t\sqrt{\frac{2k(n+1)}{3n+1}}}$, alors le produit $\mathbb{I}_2 \times M$ avec la métrique (4.6) est une variété Kähler-Einstein pour $\lambda = -2k(n+2)$, où k est une constante positive.

Exemple 4.2.4. (1) *: La variété Sasakienne $(\mathbb{R}^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ définie dans l'exemple (4.2.1) est un espace de forme Sasakienne avec $c = -3$. Donc, nous pouvons affirmer que*

— *$(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{2n+1}, \tilde{J}, \tilde{g})$ est une variété Ricci plate avec*

$$f(t) = 2t\sqrt{\frac{n-1}{3n+1}}, \quad \textit{and} \quad n > 1.$$

— *$\Big(\mathbb{I}_1 \times \mathbb{R}^{2n+1}, \tilde{J}, \tilde{g}\Big)$ est une variété Kähler-Einstein avec*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{-2k}}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\sin\Big(-t\sqrt{-\frac{2k(n+1)}{3n+1}}\Big), \quad n > 1 \quad \textit{and} \quad k < 0.$$

— *$\Big(\mathbb{I}_2 \times \mathbb{R}^{2n+1}, \tilde{J}, \tilde{g}\Big)$ est une variété Kähler-Einstein avec*

$$f(t) = \sqrt{\frac{3n+1}{2k(n+1)}}\sinh\Big(t\sqrt{\frac{2k(n+1)}{3n+1}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{2k}}\sqrt{\frac{n+1}{3n+1}}e^{-t\sqrt{\frac{2k(n+1)}{3n+1}}}, \quad \textit{and} \quad k > 0.$$

(2) *: Dans l'exemple (4.2.3) nous avons vu que $(S_\alpha^{2n+1}, \phi', \xi', \eta', g')$ est un espace de forme Sasakienne avec $c' = \frac{4}{\alpha} - 3$ et $\alpha > 0$. Nous pouvons donc affirmer que*

— *$(\mathbb{R}^* \times S_\alpha^{2n+1}, \tilde{J}, \tilde{g})$ est une variété Ricci plate avec*

$$f(t) = t\sqrt{1 - \frac{2(n+1)(\alpha-1)}{\alpha(3n+1)}} \quad \alpha < -\frac{2(n+1)}{n-1}\ \textit{and}\ n > 1.$$

— $\Big(\mathbb{I}_1 \times S_\alpha^{2n+1}, \tilde{J}, \tilde{g}\Big)$ *est une variété Kähler-Einstein avec*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{-\alpha k}}\sqrt{\frac{(2+\alpha)n+2-\alpha}{2(n+1)}}\sin\Big(-t\sqrt{-\frac{2k(n+1)}{3n+1}}\Big) \quad \textit{and} \quad k<0.$$

— $\Big(\mathbb{I}_2 \times S_\alpha^{2n+1}, \tilde{J}, \tilde{g}\Big)$ *est une variété Kähler-Einstein avec*

$$f(t) = \sqrt{\frac{3n+1}{2k(n+1)}}\sinh\Big(t\sqrt{\frac{2k(n+1)}{3n+1}}\Big) + \frac{\alpha-1}{\alpha\sqrt{2k}}\sqrt{\frac{n+1}{3n+1}}e^{-t\sqrt{\frac{2k(n+1)}{3n+1}}} \quad \textit{and} \quad k>0.$$

4.2.3 Du Sasaki au Kenmotsu

Dans [32], Kenmotsu a montré qu'une variété M^{2n+1} est localement un produit tordu $\mathbb{I}\times_h M^{2n}$ d'une variété Kählérienne et un intervalle ouvert $\mathbb{I}$ avec coordonnée t, et $h=ce^t$ pour quelque constante positive c. En utilisant le même raisonnement et le théorème principal (4.2.1), nous pouvons construire une famille de structures de Kenmotsu à 1-paramètre et une famille de structures cosymplectique à 1-paramètre à partir d'une seule structure Sasakienne.

Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété Sasakienne. Il est connu que le produit $\overline{M}=\mathbb{I}\times\mathbb{R}\times M$ est une variété différentiable de dimension $2n+3$.
Sur $\overline{M}$, on définit une structure métrique presque de contact $(\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g})$ par

$$\overline{\varphi}\Big(a\frac{\partial}{\partial r}, b\frac{\partial}{\partial t}, X,\Big) = \Big(0, ff'\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}, \varphi X - \frac{b}{ff'}\xi\Big),$$

$$\overline{\xi} = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \overline{\eta} = dt,$$

$$\overline{g} = dr^2 + k^2\Big(dt^2 + f^2 g + f^2(f'^2-1)\eta\otimes\eta\Big).$$

où $k=k(r)$ et $f=f(t)$ deux fonctions sur $\mathbb{R}^2$ telle que $ff'\neq 0$ partout et X un champ de vecteurs sur M.

Proposition 4.2.8. *La structure* $\big(\overline{g},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta}\big)$ *construite ci-dessus est une structure métrique presque de contact.*

Preuve . La preuve est directe en vérifiant les conditions
1. $\overline{\varphi}^2\overline{X} = -\overline{X} + \overline{\eta}(\overline{X})\overline{\xi}$
2. $\overline{\varphi}\overline{\xi} = 0$
3. $\overline{g}(\overline{\varphi}\overline{X},\overline{\varphi}\overline{Y}) = \overline{g}(\overline{X},\overline{Y}) - \overline{\eta}(\overline{X})\overline{\eta}(\overline{Y})$,

pour tous champs de vecteurs $\overline{X}=(a\partial_r, b\partial_t, X)$ et , $\overline{Y}=(c\partial_r, d\partial_t, Y)$ sur $\overline{M}$. ■

Remarqons que

$$\begin{aligned}\overline{g} &= dr^2 + k^2\tilde{g}\\ &= dr^2 + k^2\Big(dt^2 + f^2 g + f^2(f'^2-1)\eta\otimes\eta\Big).\end{aligned}$$

avec $k=k(r)$ et $f=f(t)$ deux fonctions sur $\mathbb{R}^2$. Donc, de la proposition (2.2.2) on a

— $\overline{\nabla}_{\partial_r}\partial_r = 0$
— $\overline{\nabla}_{\partial_r}\tilde{X} = \overline{\nabla}_{\tilde{X}}\partial_r = \frac{k'}{k}\tilde{X}$
— $\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - kk'\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y})\partial_r$,
où $\tilde{X} = (a\partial t, X)$ et $\tilde{Y} = (b\partial t, Y)$.

D'autre part, puisque (M,φ,ξ,η,g) une variété Sasakienne nous pouvons tirer de la proposition (4.2.1) le suivant
— $\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$
— $\tilde{\nabla}_{\partial_t}X = \tilde{\nabla}_X\partial_t = \frac{f'}{f}X + \frac{f''}{f'}\eta(X)\xi$
— $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (1-f'^2)\big(\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y\big) - ff'\big(g(\varphi X,\varphi Y) + (ff')'\eta(X)\eta(Y)\big)\partial_t$,
ce qui nous permet de conclure le suivant
— $\overline{\nabla}_{\partial_r}\partial_r = 0$
— $\overline{\nabla}_{\partial_r}\partial_t = \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_r = \frac{k'}{k}\tilde{\partial}_t$
— $\overline{\nabla}_{\partial_r}X = \overline{\nabla}_X\partial_r = \frac{k'}{k}X$
— $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = -kk'\partial_r$
— $\overline{\nabla}_{\partial_t}X = \overline{\nabla}_X\partial_t = \frac{f'}{f}X + \frac{f''}{f'}\eta(X)\xi$
— $\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \nabla_X Y + (1-f'^2)\big(\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y\big) - ff'\big(g(\varphi X,\varphi Y) + (ff')'\eta(X)\eta(Y)\big)\partial_t$
$\qquad - kk'f^2\big(g(X,Y) + (f'^2-1)\eta(X)\eta(Y)\big)\partial_r$.

Les composantes non nulles du $\overline{\nabla}\overline{\varphi}$ sont données par la proposition suivante :

Proposition 4.2.9. *Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété Sasakienne. On définit sur la variété produit $\overline{M} = \mathbb{R}^2 \times M$ la structure métrique presque de contact donnée ci-dessus. Alors, on a*

1. $\big(\overline{\nabla}_{\partial_t}\overline{\varphi}\big)\partial_r = \frac{k'}{kff'}\xi$
2. $\big(\overline{\nabla}_X\overline{\varphi}\big)\partial_r = -\frac{k'}{k}\big(\varphi X + ff'\eta(X)\partial_t\big)$
3. $\big(\overline{\nabla}_{\partial_t}\overline{\varphi}\big)Y - kk'ff'\eta(Y)\partial_r$
4. $\big(\overline{\nabla}_X\overline{\varphi}\big)\partial_t = kk'ff'\eta(X)\partial_r$
5. $\big(\overline{\nabla}_X\overline{\varphi}\big)Y = kk'f^2g(\varphi X,Y)\partial_r$,

Preuve . Sachons que

$$\big(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\varphi}\big)\overline{Y} = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\big(\overline{\varphi}\overline{Y}\big) - \overline{\varphi}\big(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\big),$$

où $\overline{X} = \Big(a\frac{\partial}{\partial r}, b\frac{\partial}{\partial t}, X\Big)$ et $\overline{Y} = \Big(c\frac{\partial}{\partial r}, d\frac{\partial}{\partial t}, Y\Big)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\big(\overline{\nabla}_{\partial_t}\overline{\varphi}\big)\partial_r &= \overline{\nabla}_{\partial_t}\big(\overline{\varphi}\partial_r\big) - \overline{\varphi}\big(\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_r\big)\\
&= -\overline{\varphi}\Big(\frac{k'}{k}\partial_t\Big)\\
&= -\frac{k'}{k}\overline{\varphi}\partial_t\\
&= -\frac{k'}{k}\Big(-\frac{1}{ff'}\xi\Big)\\
&= \frac{k'}{kff'}\xi,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\big(\overline{\nabla}_X\overline{\varphi}\big)Y &= \overline{\nabla}_X\big(\overline{\varphi}Y\big) - \overline{\varphi}\big(\overline{\nabla}_XY\big)\\
&= \overline{\nabla}_X\big(\varphi Y + ff'\eta(Y)\partial_t\big) - \overline{\varphi}\Big(\nabla_XY + (1-f'^2)\big(\eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X\big)\\
&\quad -ff'\big(g(\varphi X,\varphi Y) + (ff')'\eta(X)\eta(Y)\big)\partial_t - kk'f^2\big(g(X,Y) + (f'^2-1)\eta(X)\eta(Y)\big)\partial_r\Big)\\
&= \overline{\nabla}_X\varphi Y + ff'\big((\nabla_X\eta)(Y) + \eta(\nabla_XY)\big)\partial_t + ff'\eta(Y)\overline{\nabla}_X\partial_t - \overline{\varphi}\nabla_XY\\
&\quad +(f'^2-1)\big(\eta(X)\overline{\varphi}\varphi Y + \eta(Y)\overline{\varphi}\varphi X\big) - ff'\big(g(\varphi X,\varphi Y) + (ff')'\eta(X)\eta(Y)\big)\overline{\varphi}\partial_t\\
&= (\nabla_X\varphi)Y - g(X,Y)\xi + \eta(Y)X + ff'\big((\nabla_X\eta)(Y) + g(\varphi X,Y)\big)\partial_t + kk'f^2g(\varphi X,Y)\partial_r,
\end{aligned}
$$

Utilisons les formules d'une variété Sasakienne,

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, \qquad (\nabla_X)Y = -g(\varphi X,Y),$$

nous obtenons

$$\big(\overline{\nabla}_X\overline{\varphi}\big)Y = kk'f^2g(\varphi X,Y)\partial_r.$$

Avec le même raisonnement on peut vérifier les autres composantes. ■

Maintenant, on va calculer $\overline{g}(\overline{\varphi}\overline{X},\overline{Y})\overline{\xi} - \overline{\eta}(\overline{Y})\overline{\varphi}\overline{X}$, sachons que $\overline{\xi} = \partial_r$ et $\overline{\eta} = dr$ on trouve

1. $\overline{g}(\overline{\varphi}\partial_t,\partial_r)\overline{\xi} - \overline{\eta}(\partial_r)\overline{\varphi}\partial_t = \frac{1}{ff'}\xi$
2. $\overline{g}(\overline{\varphi}X,\partial_r)\overline{\xi} - \overline{\eta}(\partial_r)\overline{\varphi}X = -\big(\varphi X + ff'\eta(X)\partial_t\big)$
3. $\overline{g}(\overline{\varphi}\partial_t,Y)\overline{\xi} - \overline{\eta}(Y)\overline{\varphi}\partial_t = k^2ff'\eta(Y)\partial_r$
4. $\overline{g}(\overline{\varphi}X,\partial_t)\overline{\xi} - \overline{\eta}(\partial_t)\overline{\varphi}X = k^2ff'\eta(X)\partial_r$
5. $\overline{g}(\overline{\varphi}X,Y)\overline{\xi} - \overline{\eta}(Y)\overline{\varphi}X = k^2f^2g(\varphi X,Y)\partial_r,$

par comparaison, on peut facilement remarquer que :

— Si $k' = 0$ alors, $\overline{\nabla}\overline{\varphi} = 0$.

— Si $k' = k$ alors, $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\varphi})\overline{Y} = \overline{g}(\overline{\varphi}\overline{X},\overline{Y})\overline{\xi} - \overline{\eta}(\overline{Y})\overline{\varphi}\overline{X}$,

d'où le théorème suivant :

Théorème 4.2.4. *Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété Sasakienne. On définit sur la variété $\overline{M} = \mathbb{I}\times\mathbb{R}\times M$ où $\mathbb{I}$ et un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$, une structure métrique presque de contact $(\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g})$ par :*

$$\overline{\varphi}\Big(a\frac{\partial}{\partial r}, b\frac{\partial}{\partial t}, X,\Big) = \Big(0, ff'\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}, \varphi X - \frac{b}{ff'}\xi\Big),$$

$$\overline{\xi} = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \overline{\eta} = dt,$$

$$\overline{g} = dr^2 + k^2\Big(dt^2 + f^2g + f^2(f'^2-1)\eta\otimes\eta\Big).$$

où $k = k(r)$ et $f = f(t)$ deux fonctions sur $\mathbb{R}^2$ telle que $ff' \neq 0$ partout et X un champ de vecteurs sur M. Alors on a

1. *$(\overline{M},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g})$ est une variété cosymplectique ssi $k = constant$.*
2. *$(\overline{M},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g})$ est une variété de Kenmotsu ssi $k = ce^r$ avec $c \in \mathbb{R}$.*

Exemple 4.2.5. *En se basant sur l'exemple de Blair (voir exemple 4.2.1), on peut définir sur $\mathbb{R}^5$ avec coordonées (r,t,x,y,z) une structure métrique presque de contact par :*

$$\overline{g} = dr^2 + e^{2r}dt^2 + \frac{1}{4}e^{2r}f^2\Big((1+y^2f'^2)dx^2 + dy^2 + f'^2dz^2 - 2yf'^2dxdz\Big)$$

$$\overline{\varphi}\frac{\partial}{\partial r} = 0, \qquad \overline{\varphi}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{2}{ff'}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \overline{\varphi}\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}yff'\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\overline{\varphi}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \overline{\varphi}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}ff'\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\overline{\xi} = \frac{\partial}{\partial r}, \qquad \overline{\eta} = dr.$$

Remarquons que $d\overline{\eta} = 0$ et avec un calcul simple, nous pouvons trouver aussi $d\overline{\Phi} = 0$ et puisque $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ est Sasakienne alors, $(\mathbb{R}^5, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ est Kenmotsu pour toute fonction $f = f(t)$ telle que $ff' \neq 0$.

4.2.4 Structure Kählérienne quaternionique

Dans [59], Watanabe a pu construire une structure Kählérienne quaternionique à partire d'une 3-structure Sasakienne. Ici, en utilisant la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique nous confirmons ces résultats.

Soient $(\varphi_i, \xi_i, \eta_i, g)$, $i = 1,2,3$ une 3-structure métrique presque de contact sur la variété M^{4n+3} et $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Nous définissons une structure presque hypercomplex $\tilde{J}_i$, $i = 1,2,3$ sur $\mathbb{I} \times M^{2n+1}$ par :

$$\tilde{J}_i(a\frac{\partial}{\partial t}, X) = \Big(fh\ \eta_i(X)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \varphi_i X - \frac{a}{fh}\xi_i\Big), \tag{4.15}$$

où $i = 1,2,3$, X un champ de vecteurs sur M, et f, h deux fonctions sur $\mathbb{R}$ telle que $fh \neq 0$ partout.

Nous donnons une métrique Riemannienne $\tilde{g}$ sur $\mathbb{I} \times M^{2n+1}$ par

$$\tilde{g} = dt^2 + f^2 g + f^2(h^2 - 1)\eta_i \otimes \eta_i, \tag{4.16}$$

où dt^2 est la métrique standart sur $\mathbb{I}$.

Attention : Dans tout ce qui suit, nous utiliserons la convention d'Einstein (l'indice répété est sommé) par exemple au lieu de $\sum_{i=1}^{3} \eta_i \otimes \eta_i$ on écrit simplement $\eta_i \otimes \eta_i$.

Proposition 4.2.10. *La structure $(\tilde{g}, \tilde{J}_i)$, $i = 1,2,3$ définie par (4.15) et (4.16) est une structure presque hermitienne quaternionique.*

Preuve . Utilisant la proposition (4.2.2), on peut conclure que chaque structure $(\tilde{g}, \tilde{J}_i)$, $i = 1,2,3$ est presque hermitienne. Il nous reste de montrer que

$$\tilde{J}_1\tilde{J}_2 = \tilde{J}_3,\ \ \tilde{J}_2\tilde{J}_3 = \tilde{J}_1,\ \ \tilde{J}_3\tilde{J}_1 = \tilde{J}_2.$$

Utilisons (4.15) et les formules (3.7) on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_1\big(\tilde{J}_2X\big) &= \tilde{J}_1\big(\varphi_2 X + fh\eta_2(X)\partial t\big)\\
&= \tilde{J}_1(\varphi_2 X) + fh\eta_2(X)\tilde{J}_1\partial t\\
&= \varphi_1(\varphi_2 X) + fh\eta_1(\varphi_2 X)\partial t + fh\eta_2(X)\Big(-\frac{1}{fh}\xi_1\Big)\\
&= \varphi_3 X + \eta_2(X)\xi_1 + fh\eta_3(X)\partial t + \eta_2(X)\xi_1\\
&= \varphi_3 X + fh\eta_3(X)\partial t\\
&= \tilde{J}_3 X,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_1\big(\tilde{J}_2\partial t\big) &= \tilde{J}_1\Big(-\frac{1}{fh}\xi_2\Big)\\
&= -\frac{1}{fh}\tilde{J}_1\xi_2\\
&= -\frac{1}{fh}\big(\varphi_1\xi_2 + fh\eta_1(\xi_2)\partial t\big)\\
&= -\frac{1}{fh}\xi_3\\
&= \tilde{J}_3\partial t,
\end{aligned}$$

alors,

$$\tilde{J}_1\tilde{J}_2 = \tilde{J}_3.$$

Même raisonnement pour les autres deux cas.

■

Maintenant, Supposons $(M^{4n+3}\varphi_i, \xi_i, \eta_i, g)$, $i = 1, 2, 3$ une variété 3-Sasakienne et utilisons la proposition (4.2.1). On peut conclure la proposition suivante :

Proposition 4.2.11. *Soient ∇ et $\tilde{\nabla}$, les connexions Riemanniennes de g et $\tilde{g}$ respectivement. Pour tous X, Y, Z champs de vecteurs sur M indépendants de $\mathbb{I}$, on a*

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{\partial t}X = \tilde{\nabla}_X\partial t = \frac{f'}{f}X + \frac{h'}{h}\eta_i(X)\xi_i,\\
&\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (1-h^2)\big(\eta_i(Y)\varphi_i X + \eta_i(X)\varphi_i Y\big)\\
&\qquad\qquad - \big(ff'g(\varphi_i X, \varphi_i Y) + fh(fh)'\eta_i(X)\eta_i(Y)\big)\partial t.
\end{aligned}$$

Attention : nous avons utilisé la convention d'Einstein (l'indice répété est sommé) par exemple au lieu de $\sum_{i=1}^{3}\eta_i(X)\xi_i$ on écrit $\eta_i(X)\xi_i$.

Preuve . A partir de la proposition (4.2.1) on a

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial t}X, Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\partial t, Z) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Z, \partial_t) = ff'g(\varphi_i X, \varphi_i Z) + fh(fh)'\eta_i(X)\eta_i(Z),$$

donc

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial t}X, Z) &= ff'g(\varphi_i X, \varphi_i Z) + fh(fh)'\eta_i(X)\eta_i(Z)\\
&= ff'g(X, Z) + \big(fh(fh)' - ff'\big)\eta_i(X)\eta_i(Z)\\
&= \frac{f'}{f}\tilde{g}(X, Z) + f^2hh'\eta_i(X)\Big(\frac{1}{f^2h^2}\tilde{g}(\xi_i, Z)\Big)\\
&= \tilde{g}\Big(\frac{f'}{f}X + \frac{h'}{h}\eta_i(X)\xi_i, Z\Big),
\end{aligned}$$

et puisque $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_t}X, \partial t) = 0$ alors,

$$\tilde{\nabla}_{\partial t}X = \tilde{\nabla}_X \partial t = \frac{f'}{f}X + \frac{h'}{h}\eta_i(X)\xi_i.$$

Pour l'autre cas, nous utilisons toujours la proposition (4.2.1) et les formules d'une structure Sasakienne

$$\nabla_X \xi = -\varphi X \quad et \quad d\eta(X, Y) = \phi(X, Y) = g(X, \varphi Y),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + f^2(h^2-1)\Big(\frac{1}{2}\big(g(\nabla_X\xi, Y) + g(\nabla_Y\xi, X)\big)\eta(Z)\\
&\quad + d\eta(X, Z)\eta(Y) + d\eta(Y, Z)\eta(X)\Big)\\
&= \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) - f^2(h^2-1)g\big(\eta_i(Y)\varphi_i X + \eta_i(X)\varphi_i Y, Z\big)\\
&= \tilde{g}\Big(\nabla_X Y + (1-h^2)\big(\eta_i(Y)\varphi_i X + \eta_i(X)\varphi_i Y\big), Z\Big),
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \partial t) &= -ff'g(\varphi_i X, \varphi_i Z) + fh(fh)'\eta_i(X)\eta_i(Z)\\
&= \tilde{g}\Big(\big(-ff'g(\varphi_i X, \varphi_i Y) + fh(fh)'\eta_i(X)\eta_i(Y)\big)\partial t, \partial t\Big),
\end{aligned}$$

finalement on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y &+ (1-h^2)\big(\eta_i(Y)\varphi_i X + \eta_i(X)\varphi_i Y\big)\\
&- \big(ff'g(\varphi_i X, \varphi_i Y) + fh(fh)'\eta_i(X)\eta_i(Y)\big)\partial t.
\end{aligned}$$

■

L'objectif de cette étape et de construire une variété Kählérienne quaternionique. Commençons par le calcul des composantes de $\tilde{\nabla}\tilde{J}_\alpha$, en utilisant la proposition précédente et la formule

$$\big(\tilde{\nabla}_X\tilde{J}\big)Y = \tilde{\nabla}_X(\tilde{J}Y) - \tilde{J}\tilde{\nabla}_X Y$$

on obtient directement la poroposition suivante :

Proposition 4.2.12. *Soient ∇ et $\tilde{\nabla}$, les connexions Riemanniennes de g et $\tilde{g}$ respectivement. Pour tous X, Y, Z champs de vecteurs sur M indépendants de $\mathbb{I}$, les composantes non nulles du $\tilde{\nabla}\tilde{J}_\alpha$ pour $\alpha = 1, 2, 3$ sont*

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \tilde{J}_\alpha)\partial t =& \frac{1}{f}(h - f')\varphi_\alpha X - \frac{h'}{h}\eta_i(X)\varphi_\alpha \xi_i,\\
(\tilde{\nabla}_X \tilde{J}_\alpha)Y =&(\nabla_X \varphi_\alpha Y + (1-h^2)\Big(\eta_i(\varphi_\alpha Y)\varphi_i X + \eta_i(X)\varphi_i\varphi_\alpha Y - \eta_i(Y)\varphi_\alpha\varphi_i X - \eta_i(X)\varphi_\alpha\varphi_i Y\Big)\\
&+ f'h\, \eta_\alpha(Y)X + fh'\eta_\alpha(Y)\eta_i(X)\xi_i - \frac{f'}{h}g(\varphi_i X, \varphi_i Y)\xi_\alpha - (fh')'\eta_i(X)\eta_i(Y)\xi_\alpha\\
&+ \Big(fh(\nabla_X\eta_1)(Y) - ff'g(\varphi_i X, \varphi_i\varphi_\alpha Y) - fh(fh)'\eta_i(X)\eta_i(\varphi_\alpha Y)\Big)\partial t
\end{aligned}$$

Maintenant, comparons les composantes du $\tilde{\nabla}\tilde{J}_\alpha$ dans la proposition (4.2.12) et la proposition (3.2.1) nous remarquons que si les fonctions f et h satisfont le système différentiell,

$$\begin{cases} h - f' = 0 \\ 1 - h^2 + fh' = 0, \\ 2h^2 - (fh)' + \frac{f'}{h} - 2 = 0 \\ h^2 - f'h + \frac{f'}{h} - 1 = 0 \end{cases}$$

nous dirons que $(M^{4n+4}\tilde{J}_i, \tilde{g})$, $i = 1, 2, 3$ est une variété Kählérienne quaternionique.

Donc on a la proposition suivante :

Proposition 4.2.13. *Soit $(M^{4n+3}\varphi_i, \xi_i, \eta_i, g)$, $i = 1, 2, 3$ une variété 3-Sasakienne. Une structure presque hermitienne quaternionique construit sur $\mathbb{I} \times M^{4n+3}$ comme dans la proposition (4.2.10) est une structure Kählérienne quaternionique si et seulement si la fonction f satisfait l'équation différentielle ordinaire :*

$$ff'' - (f')^2 + 1 = 0. \tag{4.17}$$

avec f une fonctions sur $\mathbb{I}$ non constante.

pour résoudre l'ODE (4.17), posons $p = f' = \frac{df}{dt}$ c.à.d.

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{dp}{dt} \\ &= \frac{df}{dt}\frac{dp}{df} \\ &= p\frac{dp}{df} \end{aligned}$$

à partir de laquelle l'équation (4.17) se réduit à

$$\frac{p}{p^2 - 1}dp = \frac{df}{f},$$

intégrons cette équation nous obtenons

$$p^2 - 1 = cf^2,$$

où c est une constante. Rappelons que $p = f'(t)$ et $f \neq constante$.

La solution $f(t)$ du l'équation (4.17) est de la forme :
— Cas 1. $c = 0$, $f(t) = t$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$
— Cas 2. $c > 0$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{c}}\sin(\sqrt{c}t)$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$
— Cas 3. $c < 0$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{-c}}\sinh(\sqrt{-c}t)$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$.
L'existence des solutions nous oblige de déclarer le théorème suivant :

Théorème 4.2.5. *Soit* $(M^{4n+3}\varphi_i, \xi_i, \eta_i, g)$, $i = 1, 2, 3$ *une variété* 3*-Sasakienne. Une structure presque hermitienne quaternionique construite sur* $\mathbb{R} \times M^{4n+3}$ *comme dans la proposition (4.2.10) est une structure Kählérienne quaternionique*
(1). Si $f(t) = t$*, alors le produit* $\mathbb{R} \times M^{4n+3}$ *avec la structure (4.15) et (4.16) est une variété hyperKählérienne.*
(2). Si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{c}}\sin(\sqrt{c}t)$*, alors le produit* $\mathbb{R} \times M^{4n+3}$ *avec la structure (4.15) et (4.16) est une Kählérienne quaternionique. où c est une constante positive.*
(3). Si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{-c}}\sinh(\sqrt{-c}t)$*, alors le produit* $\mathbb{R} \times M^{4n+3}$ *avec la structure (4.15) et (4.16) est une Kählérienne quaternionique, où c est une constante negative.*

Remarque 4.2.1. *Ce résultat a été trouvé indépendamment dans [42].*

4.2.5 Structure Kählérienne généralisée

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus en collaboration avec prof Aissa Wade et mon collegue Bouzir Habib durant le stage scientifique qui a eétait en USA (Mai 2015). Nous utilisons la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique pour construire un pont de passage des structures classiques vers les structures Kählériennes généralisées. D'abord en se basant sur les structure trans-Sasakiennes, ensuite sur les structures presques Kählérienne où le travail de Kin'ichi [31] devient un cas particulier.

Du trans-Sasakian au Kählérienne généralisée

Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété trans-Saskienne de type (α, β) et $\mathbb{I}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On défini sur le produit $\tilde{M}^{2n+2} = M \times \mathbb{I}$ la métrique (4.1) c.à.d.

$$\tilde{g} = f^2 g + f^2(h^2 - 1)\eta \otimes \eta + dt^2, \tag{4.18}$$

et les deux structures presque complexes (à partir de la structure presque complexe (4.2)) par

$$\tilde{J}_{\pm} = \pm\varphi + fh\eta \otimes \partial t - \frac{1}{fh}dt \otimes \xi, \tag{4.19}$$

où f et h sont deux fonctions sur $\mathbb{R}$ et $fh \neq 0$ partout.

Proposition 4.2.14. *La structure* $(\tilde{g}, \tilde{J}_{\pm})$ *construite ci-dessus est bi-Hermitienne.*

Preuve . Utilisons la proposition (4.2.2) on peut voir que les deux structures $(\tilde{g}, \tilde{J}_+)$ et $(\tilde{g}, \tilde{J}_-)$ sont hermitiennes. ∎

A partir de (4.3) on peut conclure la 2-forme fondamentale $\tilde{\omega}$ de $(\tilde{J}_{\pm}, \tilde{g})$ en fonction de la 2-forme fondamentale ω de (φ, ξ, η, g)

$$\tilde{\omega} = 2fh\ dt \wedge \eta \pm f^2\omega,$$

d'où,

$$d\tilde{\omega} = -2fh\ dt \wedge d\eta \pm 2ff'dt \wedge \omega \pm f^2 d\omega.$$

Utilisant la définition (3.4.16) on obtient

$$d\tilde{\omega} = -2\beta fh\ dt \wedge \omega \pm 2ff'dt \wedge \omega \pm 2\alpha f^2\omega \wedge \eta.$$

donc,

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}_{\pm}(\tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}.) &= -2\beta fh\big(fh\eta\big) \wedge \omega \pm 2ff'\big(fh\eta\big) \wedge \omega \pm 2\alpha f^2\omega \wedge \big(-\frac{1}{fh}dt\big) \\ &= \pm 2f\Big(ff'h\eta - \frac{\alpha}{h}\ dt\Big) \wedge \omega - 2\beta f^2h^2\eta \wedge \omega. \end{aligned}$$

Nous remarquons que pour $\beta = 0$ nous avons

$$d\tilde{\omega}_{\pm}(\tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}.) = \pm 2f\Big(ff'h\eta - \frac{\alpha}{h}\ dt\Big) \wedge \omega,$$

posons $d\tilde{\omega}_{\pm}(\tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}.) = \pm d\tilde{b}(.,.,.)$ c.à.d.

$$d\tilde{b} = 2f\Big(ff'h\eta - \frac{\alpha}{h}\ dt\Big) \wedge \omega,$$

nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} \tilde{b} = \frac{1}{\alpha}f^2f'h\ \omega \\ \Big(f^2f'h\Big)' = -2\alpha^2\frac{f}{h} \\ d\beta = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

En résolvant le système (4.20) nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 4.2.15. *Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété connexe α-Kenmotsu où α est constante. Pour toute structure bi-hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J}_{\pm})$ donnée dans (4.18) et (4.19) il existe une famille de 2-forme $\tilde{b}$ à trois paramètres définie par*

$$\begin{cases} \tilde{b} = \pm 2\sqrt{c - \alpha^2 f^4}\omega \\ h(t) = \pm\frac{\sqrt{c-\alpha^2f^4}}{f^2f'} \end{cases}$$

où c est une constante arbitraire.

Maintenant, Utilisant le théorème (3.3.1) nous pouvons déclarer le théorème suivant :

Théorème 4.2.6. *Toute variété $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ connexe et α-Kenmotsu où α est une constante, engendre une famille de structures Kählérienne généralisées à trois paramètres $(\tilde{g}, \tilde{b}, \tilde{J}_{\pm})$ sur $M \times \mathbb{R}$.*

Proposition 4.2.16. *[40]*

Toute variété trans-Sasakienne de dimension ≥ 5 *est une variété* α*-Sasakienne,* β*-Kenmotsu ou cosymplectique .*

Sachant qu'à partir des propositions (1) et (2) dans [46] pour toute variété métrique presque de contact normal 3-dimensionnelle $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ on a :

$$(\nabla_X \varphi)Y = \frac{1}{2} tr_g(\varphi \nabla \xi)\Big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\Big) + \frac{1}{2} div\xi \Big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\Big),$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita sur M,c.à.d. $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété trans-Saskian de type $\big(\frac{1}{2}tr_g(\varphi\nabla\xi), \frac{1}{2}div\xi\big)$ (voir [12]). En utilisant le théorème (4.2.6) nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 4.2.17. *Toute variété métrique presque de contact normal* $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *telle que* $tr_g(\varphi\nabla\xi) = 0$ *et* $div\xi$ *est une constante, donne une famille de structures Kählérienne généralisées multi-paramètres sur* $M \times \mathbb{R}$*.*

Du presque Kählérienne au Kählérienne généralisée

Soit $(M'^{2n}, J', g', \omega')$ une variété Kählérienne. On défini une structure métrique presque de contact $(\overline{\varphi}, \overline{\eta}, \overline{\xi}, \overline{g})$ on $\overline{M} = M' \times \mathbb{R}$ par

$$\overline{\varphi} = J', \quad \overline{\eta} = dr, \quad \overline{\xi} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \overline{g} = f^2 g' + dr^2,$$

où $f = f(r)$ est une fonction sur $\mathbb{R}$.
Sur $\tilde{M}^{2n+2} = \overline{M} \times \mathbb{R} = M' \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on défini une structure presque complexe et une métrique Riemannienne comme suit :

$$\tilde{J}_{\pm} = \pm\varphi \pm hkdr \otimes \frac{\partial}{\partial t} \mp \frac{1}{hk} dt \otimes \frac{\partial}{\partial r},$$
$$\tilde{g} = f^2 h^2 g' + h^2 k^2 dr^2 + dt^2,$$

où $h = h(t)$ et $k = k(t)$ sont deux fonctions sur $\mathbb{R}$. Donc, $(\tilde{g}, J_{\pm})$ est une structure bi-hermitienne et la 2-forme fondamentale $\omega_{\pm}$ est

$$\omega_{\pm}\Big((X, a\frac{\partial}{\partial r}, b\frac{\partial}{\partial t}), (Y, a'\frac{\partial}{\partial r}, b'\frac{\partial}{\partial t})\Big) = \tilde{g}\Big((X, a\frac{\partial}{\partial r}, b\frac{\partial}{\partial t}), J_{\pm}(Y, a'\frac{\partial}{\partial r}, b'\frac{\partial}{\partial t})\Big),$$

on peut facilement vérifier que :

$$\omega_{\pm} = \pm f^2 h^2 \omega' - 2hkdr \wedge dt,$$

et immédiatement, nous obtenons

$$d\omega_{\pm} = \pm 2f^2 hh' dt \wedge \omega' \pm 2ff'h^2 dr \wedge \omega'.$$

donc

$$\begin{aligned} d\omega_{\pm}(\tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}.) &= \pm 2f^2 hh'(\pm hkdr) \wedge \omega' \pm 2ff'h^2(\mp\frac{1}{hk}dt) \wedge \omega' \\ &= \big(2f^2h^2h'kdr - 2ff'\frac{h}{k}dt\big) \wedge \omega'. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Directement, on peut voir que $d\omega_{\pm}$ est exacte si et seulement si

$$(*) : \begin{cases} d(ff') = 2f^2, \\ d(h^2h'k) = -2\frac{h}{k}, \end{cases} \qquad or \qquad (**) : \begin{cases} d(-ff') = 2f^2, \\ d(h^2h'k) = 2\frac{h}{k}. \end{cases}$$

Premièrement, à partir de $(*)$ nous obtenons les deux équations différentielle ordinaires suivantes :

$$f'^2 + ff'' - 2f^2 = 0, \tag{4.22}$$

$$2k^2h'^2 + hh''k^2 + k'kh'h + 2 = 0. \tag{4.23}$$

La solution $f(r)$ de la première ODE (4.22) est :

$$f(r) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ae^{-2r} - be^{2r}},$$

où a et b sont deux constantes.

Pour la deuxième ODE, nous observons que toute fonction $k(t)$ qui satisfait

$$k(t) = \pm\frac{\sqrt{c - h(t)^4}}{h'(t)h(t)^2}.$$

où $c > 0$ est une solution de l'équation différentielle (4.23). Sous ces conditions, l'équation (4.21) donne

$$d\omega_{\pm}(\tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}.) = d\Big(\frac{1}{2}\sqrt{c - h^4}(ae^{-2r} + be^{2r})\omega'\Big).$$

Deuxièment, de $(**)$ nous obtenons les deux équations différentielles ordinaires suivantes :

$$f'^2 + ff'' + 2f^2 = 0, \tag{4.24}$$

$$2k^2h'^2 + hh''k^2 + k'kh'h - 2 = 0. \tag{4.25}$$

La solution $f(r)$ de la première ODE (4.24) est :

$$f(r) = \pm\sqrt{a\sin(2r) + b\cos(2r)},$$

où a et b sont deux constantes. Pour la deuxième ODE, nous remarquons que toute fonction $k(t)$ qui satisfait

$$k(t) = \pm\frac{1}{h'(t)},$$

est une solution de l'équation différentielle (4.25). Sous ces conditions, l'équation (4.21) donne

$$d\omega_{\pm}(\tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}.) = d\Big(h^2\big(a\cos(2r) - b\sin(2r)\big)\omega'\Big).$$

Finalement, on peut énoncer le théorème suivant

Théorème 4.2.7. *Toute variété Kählérienne $(M'^{2n}, J', g', \omega')$, engendre deux familles de structures Kählériennes généralisées à 1-paramètre* $\Big(\tilde{g}, \frac{1}{2}\sqrt{c - h^4}(ae^{-2r} + be^{2r})\omega', \tilde{J}_{\pm}\Big)$ *et* $\Big(\tilde{g}, (h^2\big(a\cos(2r) - b\sin(2r)\big)\omega', \tilde{J}_{\pm}\Big)$.

4.3 Produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublé

4.3.1 Définitions et propriétés

Dans cette section nous donnons la définition et quelques propriétés géométriques du produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothetic doublé.

Dans [13], Blair a introduit la notion d'une métrique tordue $\mathcal{D}$-homothetique doublée sur $\tilde{M} = M' \times M$ où M' et M sont deux variétés métrique presque de contact par

$$\tilde{g} = Fg' + F(F-1)\eta' \otimes \eta' + fg + f(f-1)\eta \otimes \eta,$$

où f est une fonction positive sur M' et F est une fonction positive sur M.

Définition 4.3.1. *Soient $(M', \varphi', \xi', \eta', , g')$ et $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ deux variétés métrique presque de contact. La métrique **bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée** sur $\tilde{M} = M' \times M$ est définie par*

$$\tilde{g} = F^2 g' + F^2(H^2-1)\eta' \otimes \eta' + f^2 g + f^2(h^2-1)\eta \otimes \eta.$$

où f, h sont deux fonctions sur M' et F, H sont deux fonctions sur M telle que $fh \neq 0$ et $FH \neq 0$ partout.

En particulier, si $H = h = \pm 1$ alors, on obtient une métrique produit tordue doublée et si $H = F$ et $h = f$ nous obtenons une métrique tordue $\mathcal{D}$-homothetique doublée de Blair.

Proposition 4.3.1. *Soient $\tilde{\nabla}, \nabla'$ et ∇ les connexions de $\tilde{g}, g'$, et g respectivement. Pour tous X', Y' champs de vecteurs tangents à M' et indépendants de M et de même pour X, Y, nous avons :*

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'}Y', Z') &= \tilde{g}(\nabla'_{X'}Y', Z') \\
&\quad + F^2(H^2-1)\Big(\frac{1}{2}\big(g'(\nabla'_{X'}\xi', Y') + g'(\nabla'_{Y'}\xi', X')\big)\eta'(Z') \\
&\qquad + d\eta'(X', Z')\eta'(Y') + d\eta'(Y', Z')\eta'(X')\Big), \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y', Z') &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y'}X, Z') = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Z'}Y', X) \\
&= FX(F)g'(Y', Z') + F\big((H^2-1)X(F) + FHX(H)\big)\eta'(Y')\eta'(Z'), \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X'}Y, Z) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X', Z) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z Y, X') \\
&= fX'(f)g(Y, Z) + f\big((h^2-1)X'(f) + fhX'(h)\big)\eta(Y)\eta(Z), \\
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) \\
&\quad + f^2(h^2-1)\Big(\frac{1}{2}\big(g(\nabla_X\xi, Y) + g(\nabla_Y\xi, X)\big)\eta(Z) \\
&\qquad + d\eta(X, Z)\eta(Y) + d\eta(Y, Z)\eta(X)\Big),
\end{aligned}$$

Preuve . Il suffit d'utiliser la formule de Koszul et adapter la proposition (4.1.1). ■

Théorème 4.3.1. *Soient $(M',\varphi',\xi',\eta',,g')$ et $(M,,\varphi,\xi,\eta,g)$ deux variétés métrique presque de contact et $\tilde{g}$ la métrique bi-tordue $\mathcal{D}$-homothétique doublée sur $\tilde{M}=M'\times M$ définie ci-dessus (4.3.1) alors, on a les assertions suivantes :*

1. Pour tout $x'_0\in M'$, la sous variété $\{x'_0\}\times M$ est quasi ombilicale si $grad'h=grad'f$ et dans ce cas la 2-forme fondamentale σ est donnée par :

$$\sigma(X,Y)=-\frac{1}{2F^2}\Big(g(X,Y)+(h^2+fh-1)\eta(X)\eta(Y)\Big)\Big(grad'f^2+\frac{1-H^2}{H^2}\xi'(f^2)\xi'\Big).$$

2. Pour tout $x'_0\in M'$, la sous variété $\{x'_0\}\times M$ est minimale si et seulement si $h^2=\frac{c}{f^2}-2n$ où c est une constante positive et dans ce cas la 2-forme fondamentale σ est donnée par :

$$\sigma(X,Y)=-\frac{1}{2F^2}\Big(g(X,Y)-(2n+1)\eta(X)\eta(Y)\Big)\Big(grad'f^2+\frac{1-H^2}{H^2}\xi'(f^2)\xi'\Big).$$

3. Si $\nabla_\xi\xi=0$ alors,

$$\tilde{\nabla}_\xi\xi=-\frac{1}{2F^2}\Big(grad'(f^2h^2)+\frac{1-H^2}{H^2}\xi'(f^2h^2)\xi'\Big).$$

Les mêmes résultats par symétrie, nous pouvons les conclure dans la seconde direction (c.à.d. pour la sous variété $M'\times\{x_0\}$ où $x_0\in M$).

Preuve .
1. Soit σ la 2-forme fondamentale de $\{x'_0\}\times M$, nous avons

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_XY,Z'\big) &= -fZ'(f)g(X,Y)-f\Big((h^2-1)Z'(f)+fhZ'(h)\Big)\eta(X)\eta(Y)\\
&= -\frac{1}{2}g'\Big(g(\varphi X,\varphi Y)grad'f^2+\eta(X)\eta(Y)grad'(f^2h^2),Z'\Big)\\
&= -\frac{1}{2F^2}\tilde{g}\Big(g(\varphi X,\varphi Y)grad'f^2+\eta(X)\eta(Y)grad'(f^2h^2),Z'\Big)\\
&\quad +\frac{1}{2}(H^2-1)\eta'\Big(g(\varphi X,\varphi Y)grad'f^2+\eta(X)\eta(Y)grad'(f^2h^2)\Big)\eta'(Z')\\
&= -\frac{1}{2F^2}\tilde{g}\Big(g(\varphi X,\varphi Y)grad'f^2+\eta(X)\eta(Y)grad'(f^2h^2)\\
&\qquad +\frac{1-H^2}{H^2}\big(g(\varphi X,\varphi Y)\xi'(f^2)+\eta(X)\eta(Y)\xi'(f^2h^2)\big)\xi',Z'\Big)
\end{aligned}$$

puisque $\tilde{g}\big(\nabla_XY,Z'\big)=0$ et sachant que $\sigma=\tilde{\nabla}_XY-\nabla_XY$ donc

$$\begin{aligned}
\sigma(X,Y) &= \frac{1}{2F^2}\Big(g(\varphi X,\varphi Y)grad'f^2+\eta(X)\eta(Y)grad'(f^2h^2)\\
&\qquad +\frac{1-H^2}{H^2}\big(g(\varphi X,\varphi Y)\xi'(f^2)+\eta(X)\eta(Y)\xi'(f^2h^2)\big)\xi'\Big)...(*)
\end{aligned}$$

Si $grad'h=grad'f$ alors, on obtient

$$\sigma(X,Y)=-\frac{1}{2F^2}\Big(g(X,Y)+(h^2+fh-1)\eta(X)\eta(Y)\Big)\Big(grad'f^2+\frac{1-H^2}{H^2}\xi'(f^2)\xi'\Big).$$

2. A partir de l'équation (*) ci-dessus, nous calculons la courbure moyenne $\mathcal{H}$ par

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2n+1} tr_g\, \sigma = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} \sigma(e_i, e_i)$$

où $\{e_i\}_{i=1,2n+1}$ est une base orthonormée sur M alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{-1}{2(2n+1)F^2}\Big(2ngrad' f^2 + grad'(f^2h^2) + \frac{1-H^2}{H^2}\big(2n\xi'(f^2) + \xi'(f^2h^2)\big)\xi'\Big) \\
&= \frac{-1}{2(2n+1)F^2}\Big(grad'\big((2n+h^2)f^2\big) + \frac{1-H^2}{H^2}\xi'\big((2n+h^2)f^2\big)\xi'\Big)
\end{aligned}$$

nous pouvons remarquer facilement que

$$\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow (2n+h^2)f^2 = c \Leftrightarrow h^2 = \frac{c}{f^2} - 2n,$$

avec c une constante positive. Dans ce cas, remplaçons $h^2 = \frac{c}{f^2} - 2n$ dans (*) nous obtenons

$$\sigma(X,Y) = -\frac{1}{2F^2}\Big(g(X,Y) - (2n+1)\eta(X)\eta(Y)\Big)\Big(grad' f^2 + \frac{1-H^2}{H^2}\xi'(f^2)\xi'\Big).$$

3. De la proposition précédente, nous avons

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z') = -fZ'(f)g(X,Y) - f\big((h^2-1)Z'(f) - fhZ'(h)\big)\eta(X)\eta(Y),$$

alors,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\xi \xi, Z') &= -fZ'(f) - f\big((h^2-1)Z'(f) - fhZ'(h)\big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(Z'(f^2) + (h^2-1)Z'(f^2) + f^2Z'(h^2)\Big) \\
&= -\frac{1}{2}Z'(f^2h^2) \\
&= -\frac{1}{2}g'\big(grad'(f^2h^2), Z'\big) \\
&= -\frac{1}{2F^2}\Big(\tilde{g}\big(grad'(f^2h^2), Z'\big) - F^2(H^2-1)\eta'\big(grad'(f^2h^2)\big)\eta'(Z')\Big) \\
&= -\frac{1}{2F^2}\tilde{g}\Big(grad'(f^2h^2) + \frac{1-H^2}{H^2}\xi'(f^2h^2)\xi', Z'\Big).
\end{aligned}$$

D'autre part, nous pouvons facilement prouver que si $\nabla_\xi \xi = 0$ alors $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\xi \xi, Z) = 0$ d'où

$$\tilde{\nabla}_\xi \xi = -\frac{1}{2F^2}\Big(grad'(f^2h^2) + \frac{1-H^2}{H^2}\xi'(f^2h^2)\xi'\Big),$$

ce qui achève la démonstration avec la remarque que si $fh = \textit{constante}$ alors, $\tilde{\nabla}_\xi \xi = 0$. ∎

4.3.2 Structures presque hermitienne sur le produit $M' \times M$

Soit la variété produit $\tilde{M} = M' \times M$ de deux variétés métrique presque de contact $(M', \varphi', \xi', \eta', g')$ et $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ et la métrique tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée

$$\tilde{g} = F^2 g' + F^2(H^2-1)\eta' \otimes \eta' + f^2 g + f^2(h^2-1)\eta \otimes \eta, \tag{4.26}$$

où f, h sont deux fonctions sur M' et F, H sont deux fonctions sur M.

Ensuite, nous introduisons une structure presque complexe $\tilde{J}$ sur $\tilde{M}$:

$$\tilde{J}(X', X) \;=\; \Big(\varphi' X' - \frac{fh}{FH}\eta(X)\xi' \;,\; \varphi X + \frac{FH}{fh}\eta'(X')\xi\Big), \tag{4.27}$$

pour tout champ de vecteurs X' de M' et tout champ de vecteurs X de M, où $fh \neq 0$ et $FH \neq 0$ partout.

Proposition 4.3.2. *La structure $(\tilde{g}, \tilde{J})$ définie par (4.26) et (4.27) est une structure presque hermitienne.*

Preuve . On peut voir facilement que $J^2 = -I$ pour tous $\tilde{X} = (X', X), \tilde{Y} = (Y', Y)$ sur $\tilde{M}$ et on peut vérifier que $(\tilde{g}, \tilde{J})$ est une structure presque hermitienne c.à.d.

$$\tilde{g}\big(\tilde{J}(X', X), \tilde{J}(Y', Y)\big) = \tilde{g}((X', X), (Y', Y)).$$

■

D'autre part, la 2-forme fondamentale $\tilde{\Omega}$ de $(\tilde{J}, \tilde{g})$ est

$$\tilde{\Omega} = F^2\phi' + f^2\phi + 2fhFH(\eta' \wedge \eta)$$

où nous notons par $\phi'(X', Y') = g'(X', \varphi' Y')$ et $\phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ pour tous champs de vecteurs X', Y' sur M' et tous champs de vecteurs X, Y de M.

Il est facile de remarquer que,

$$\begin{aligned} d\tilde{\Omega} \;&=\; 2FdF \wedge \phi' + F^2 d\phi' + 2fdf \wedge \phi + f^2 d\phi \\ &+\; 2d(fhFH)(\eta' \wedge \eta) + 2fhFH(d\eta' \wedge \eta - \eta' \wedge d\eta). \end{aligned}$$

Remarque 4.3.1. *Si ϕ' , ϕ, η' et η sont fermées avec f, h, F et H sont constantes alors, la 2-forme $\tilde{\Omega}$ est fermée et la structure $(\tilde{J}, \tilde{g})$ est presque Kählérienne.*

4.3.3 Problème ouvert de Blair-Oubiña

Il est naturel de rechercher certaines conditions afin qu'une structure presque hermitienne définie sur le produit de deux variétés Sasakienne soit Kählerienne. C'est la question ouverte de Blair et Oubiña [12]. Un tel cas, en général, est incorrecte comme on le voit à partir des variétés de Calabi-Eckmann , qui ne sont pas en mesure d'admettre aucune métrique Kählérienne (voir [18]).

Ici en utilisant la notion de la métrique bi-tordue $\mathcal{D}$-homothétique doublée généralisée (c.à.d. F, H, f et h sont des fonctions sur $\tilde{M}$), nous soutenons le point de vue de Calabi-Eckmann que les structures presque hermitiennes définies sur le produit de deux variétés Sasakienne ne sont jamais Kählerienne.
Supposons $(M', \varphi', \xi', \eta', g')$ et $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ deus variétés trans-Sasakienne de type (α', β') et (α, β) respectivement alors, on a

$$d\eta' = \alpha'\Phi', \qquad d\Phi' = 2\beta'\eta' \wedge \Phi', \qquad d\eta = \alpha\Phi, \qquad d\Phi = 2\beta\eta \wedge \Phi. \tag{4.28}$$

Basons sur la proposition (4.3.2) on a vu que la 2-forme fondamentale de la structure $(\tilde{J}, \tilde{g})$ définie par (4.27) et (4.26) est donnée par

$$\tilde{\Omega} = F^2\phi' + f^2\phi + 2fhFH(\eta' \wedge \eta),$$

avec f, h, F et H sont des fonctions sur $\tilde{M} = M' \times M$ ce qui donne

$$\begin{aligned} d\tilde{\Omega} &= dF^2 \wedge \phi' + F^2 d\phi' + df^2 \wedge \phi + f^2 d\phi \\ &+ 2d(fhFH)(\eta' \wedge \eta) + 2fhFH(d\eta' \wedge \eta - \eta' \wedge d\eta). \end{aligned}$$

Utilisons les formules (4.28) nous obtenons

$$\begin{aligned} d\tilde{\Omega} &= (dF^2 + 2\beta' F^2\eta' + 2\alpha' fhFH\eta) \wedge \phi' + (df^2 + 2\beta f^2\eta - 2\alpha fhFH\eta') \wedge \phi \\ &+ 2d(fhFH)(\eta' \wedge \eta), \end{aligned}$$

supposons $d\tilde{\Omega} = 0$ et $fhFH = 1$ alors, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} dF^2 + 2\beta' F^2\eta' + 2\alpha'\eta = 0 \\ df^2 + 2\beta f^2\eta - 2\alpha\eta' = 0. \end{cases} \tag{4.29}$$

Étudions le cas où M' soit une variété α'-Sasakienne c.à.d. $\alpha' = constante$ et $\beta' = 0$, la première équation dans le système (4.29) donne

$$dF^2 + 2\alpha'\eta = 0, \tag{4.30}$$

ce qui oblige η d'être exacte c.à.d $d\eta = 0$ d'où l'impossibilité d'avoir une structure α-Sasakienne sur M.

Corollaire 4.3.1. *soient $(M', \varphi', \xi', \eta', g')$ et $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ deux variétés Sasakienne. La variété $(M' \times M, \tilde{J}, \tilde{g})$ munie de la structure hermitienne $(\tilde{J}, \tilde{g})$ définie par*

$$\tilde{g} = F^2 g' + F^2(H^2 - 1)\eta' \otimes \eta' + f^2 g + f^2(h^2 - 1)\eta \otimes \eta,$$

et

$$\tilde{J}(X', X) = \Big(\varphi' X' - \frac{fh}{FH}\eta(X)\xi' \ , \ \varphi X + \frac{FH}{fh}\eta'(X')\xi\Big),$$

où F, H, f et h sont des fonctions sur $M' \times M$ et $fh \neq 0$ et $FH \neq 0$ partout, n'est jamais Kählérienne.

Mais dans ces conditions, il est naturel de se demander sur le type des deux facteurs pour que le produit soit Kählerien.

Pour notre motivation, nous considérons que M' et M sont deux variétés trans-Sasakienne de type (α', β') et (α, β) respectivement, et f, h, F et H sont des fonctions sur $\tilde{M} = M' \times M$ tel que $fh = FH = \pm 1$, à savoir que nous avons :

$$\tilde{g} = F^2 g' + (1 - F^2)\eta' \otimes \eta' + f^2 g + (1 - f^2)\eta \otimes \eta, \tag{4.31}$$

et

$$\tilde{J}(X', X) \ = \ \Big(\varphi' X' - \eta(X)\xi' \ , \ \varphi X + \eta'(X')\xi\Big). \tag{4.32}$$

Proposition 4.3.3. *Soient $\tilde{\nabla}, \nabla'$ et ∇ les connexions de $\tilde{g}, g'$, et g respectivement. Pour tous X', Y' champs de vecteurs tangent a M' et indépendant de M et de même pour X, Y, nous donnons la connexion $\tilde{\nabla}$ explicitement :*

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X'} Y' =& \nabla'_{X'} Y' - \frac{1}{2}\Big(Y'(\ln F^2)\varphi'^2 X' + X'(\ln F^2)\varphi'^2 Y'\Big) \\
& - \frac{\alpha'}{F^2}(1 - F^2)\big(\eta'(Y')\varphi' X' + \eta'(X')\varphi' Y'\big) \\
& + \Big(\beta'(1 - F^2) - \frac{1}{2}\big(grad'(\ln F^2) + (F^2 - 1)\eta'\big(grad'(\ln F^2)\big)\Big)g'(\varphi' X', \varphi' Y')\xi' \\
& - \frac{1}{2f^2}\Big(\big(grad(F^2) + (f^2 - 1)\eta\big(grad(F^2)\big)\Big)g'(\varphi' X', \varphi' Y')\xi, \\
\tilde{\nabla}_{X'} Y = \tilde{\nabla}_Y X' =& -\frac{1}{2}\Big(Y(\ln F^2)\varphi'^2 X' + X'(\ln f^2)\varphi^2 Y\Big), \\
\tilde{\nabla}_X Y =& \nabla_X Y - \frac{1}{2}\Big(Y(\ln f^2)\varphi^2 X + X(\ln f^2)\varphi^2 Y\Big) \\
& - \frac{\alpha}{f^2}(1 - f^2)\big(\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y\big) \\
& + \Big(\beta(1 - f^2) - \frac{1}{2}\big(grad(\ln f^2) + (f^2 - 1)\eta\big(grad(\ln f^2)\big)\Big)g(\varphi X, \varphi Y)\xi \\
& - \frac{1}{2F^2}\Big(\big(grad'(f^2) + (F^2 - 1)\eta'\big(grad'(f^2)\big)\Big)g(\varphi X, \varphi Y)\xi'.
\end{aligned}$$

Preuve . Il suffit d'utiliser la formule de Koszul, le théorème (3.4.10) et la proposition (3.4.5). ∎

Sachons que $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J\nabla_X Y$ et en utilisant la proposition (4.3.3) on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.3.4. *Pour tous X', Y' champs de vecteurs tangent à M' et indépendant de M et de même pour X, Y, nous avons*

$$
\begin{aligned}
2\big(\tilde{\nabla}_{X'}\tilde{J}\big)Y' = & - \Big((\varphi'Y')(\ln F^2) - \big(\frac{2\alpha'}{F^2} - \xi(\ln F^2)\big)\eta'(Y')\Big)\varphi'^2X' \\
& - \big(2\beta'\eta'(Y') + Y'(\ln F^2)\big)\varphi'X' \\
& + \Big(2\beta'F^2 + (F^2-1)\eta'(grad'\ln F^2)\Big)g'(\varphi'X',Y')\xi' \\
& + \big(2\alpha' - \eta(gradF^2)g'(\varphi'X',\varphi'Y')\xi' \\
& + g'(\varphi'X',Y')grad'\ln F^2 + g'(\varphi'X',\varphi'Y')\varphi'(grad'\ln F^2) \\
& - \Big(2\alpha' - (1-\frac{1}{f^2})\eta(gradF^2)\Big)g'(\varphi'X',Y')\xi \\
& + \big(2\beta'F^2 + F^2\eta'(grad'\ln F^2)\big)g'(\varphi'X',\varphi'Y')\xi \\
& + \frac{1}{f^2}g'(\varphi'X',Y')gradF^2 + \frac{1}{f^2}g'(\varphi'X',\varphi'Y')\varphi(gradF^2),
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

$$
\begin{aligned}
2\big(\tilde{\nabla}_{X}\tilde{J}\big)Y' = & - \Big((\varphi'Y')(\ln f^2) + \big(2\beta + \xi(\ln f^2)\big)\eta'(Y')\Big)\varphi^2X \\
& - \Big(\frac{2\alpha}{f^2}\eta'(Y') + Y'(\ln f^2)\Big)\varphi X,
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

$$
\begin{aligned}
2\big(\tilde{\nabla}_{X'}\tilde{J}\big) = & - \Big((\varphi Y)(\ln F^2) + \big(2\beta' + \xi'(\ln f^2)\big)\eta(Y)\Big)\varphi'^2X' \\
& + \Big(\frac{2\alpha'}{F^2}\eta(Y) - Y'(\ln F^2)\Big)\varphi'X',
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

$$
\begin{aligned}
2\big(\tilde{\nabla}_{X}\tilde{J}\big)Y = & - \Big((\varphi Y)(\ln f^2) - \big(\frac{2\alpha}{f^2} + \xi'(\ln f^2)\big)\eta(Y)\Big)\varphi^2X \\
& - \big(2\beta\eta(Y) + Y(\ln f^2)\big)\varphi X \\
& + \Big(2\beta f^2 + (f^2-1)\eta(grad\ln f^2)\Big)g(\varphi X,Y)\xi \\
& + \big(2\alpha + \eta'(grad'f^2)g(\varphi X,\varphi Y)\xi \\
& + g(\varphi X,Y)grad\ln f^2 + g(\varphi X,\varphi Y)\varphi(grad\ln f^2) \\
& + \Big(2\alpha + (1-\frac{1}{F^2})\eta'(grad'f^2)\Big)g(\varphi X,Y)\xi' \\
& - \big(2\beta f^2 - f^2\eta(grad\ln f^2)\big)g(\varphi X,\varphi Y)\xi' \\
& + \frac{1}{F^2}g(\varphi X,Y)grad'f^2 + \frac{1}{F^2}g(\varphi X,\varphi Y)\varphi'(grad'f^2).
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

Supposons maintenant que $(\tilde{M},\tilde{J},\tilde{g})$ est une variété Kählerienne c.à.d. $\tilde{\nabla}\tilde{J} = 0$, dans l'équation (4.36) posons $X = Y$ avec X orthogonale à ξ, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
(\varphi X)(\ln f^2)\varphi^2X - X(\ln f^2)\varphi X & + |X|^2\big(2\alpha + \eta'(grad'f^2)\big)\xi \\
& - f^2|X|^2\big(2\beta + \eta(grad\ln f^2)\big)\xi' \\
& + |X|^2\big(\varphi(grad\ln f^2) + \frac{1}{F^2}\eta'(grad'f^2)\big) = 0,
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

ce qui donne

$$grad' f^2 = -2\alpha\xi' \qquad et \qquad grad \ln f^2 = -2\beta\xi.$$

Posons $Y = \xi$ et en prenant X orthogonale à ξ, nous avons ensuite

$$\Big(\xi'(\ln f^2) + \frac{2\alpha}{f^2}\Big)X + \Big(2\beta + \xi(\ln f^2)\Big)\varphi X = 0$$

c.à.d.

$$\xi'(f^2) = -2\alpha \qquad et \qquad \xi(\ln f^2) = -2\beta.$$

Avec le même raisonnement, si nous utilisons l'équation (4.33) nous trouvons

$$gradF^2 = 2\alpha'\xi \qquad et \qquad grad' \ln F^2 = -2\beta'\xi'$$

Inversement, si $grad' f^2 = -2\alpha\xi'$, $grad \ln f^2 = -2\beta\xi$, $gradF^2 = 2\alpha'\xi$ et $grad' \ln F^2 = -2\beta'\xi'$ puis on voit directement que toutes les composantes de $\tilde{\nabla}\tilde{J}$ s'anullent, donnant le résultat suivant.

Proposition 4.3.5. *Soient $(M', \varphi', \xi', \eta', g')$ et $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ deux variétés trans-Sasakienne de type (α', β') et (α, β) respectivement. Alors, la variété $(\tilde{M} = M' \times M, \tilde{J}, \tilde{g})$ avec*

$$\tilde{g} = F^2 g' + (1 - F^2)\eta' \otimes \eta' + f^2 g + (1 - f^2)\eta \otimes \eta,$$

où F, f sont des fonctions sur $\tilde{M}$ et

$$\tilde{J}(X', X) = \Big(\varphi' X' - \eta(X)\xi' \ , \ \varphi X + \eta'(X')\xi\Big),$$

est Kählerian si et seulement si

$$grad' f^2 = -2\alpha\xi', \qquad grad \ln f^2 = -2\beta\xi,$$

$$gradF^2 = 2\alpha'\xi, \qquad grad' \ln F^2 = -2\beta'\xi'.$$

Maintenant, supposons que M' est β'-Kenmotsu, alors à partir de la proposition précédente nous obtenons $grad' \ln F^2 = -2\beta'\xi'$ et F est indépendante de M. Sachons que, si η' est exacte c.à.d. $\eta' = d\rho'$ où ρ' est une fonction sur M' alors $\xi = grad\rho$.
De plus, si M' est une variété connexe alors

$$F^2 = e^{-2\beta'\rho'}.$$

D'autre part, si M est α-Sasakienne alors de la proposition (4.3.5) nous obtenons $grad' f^2 = -2\alpha\xi'$ et f est indépendante de M. Ainsi nous obtenons

$$f^2 = -2\alpha\rho',$$

et nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.3.2. *[5] Soient M' et M deux variétés métrique presque de contact. Considérons la structure presque hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J})$ sur $M' \times M$ donnée par (4.31) est (4.32). Alors $(M' \times M, \tilde{g}, \tilde{J})$ est Kählerian si et seulement si :*

(1) : M' est une variété connexe β'-Kenmotsu et M est une variété connexe β-Kenmotsu avec $F^2 = e^{-2\beta'\rho'}$ et $f^2 = e^{-2\beta\rho}$.

(2) : M' est une variété connexe β'-Kenmotsu et M est une variété α-Sasakienne avec $F^2 = e^{-2\beta'\rho'}$ et $f^2 = -2\alpha\rho'$.

(3) : M' est une variété connexe cosymplectique et M est une variété α-Sasakian avec $F = constant$ et $f^2 = -2\alpha\rho'$.

(4) : M' et M sont deux variétés connexes cosymplectique avec F et f sont constantes.

Exemple 4.3.1. *Pour les deux facteurs nous utilisons l'exemple (3.4.3) c.à.d. nous supposons les deux variétés Trans-Sasakienne $(E'^3, \varphi', \xi', \eta', g')$ et $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ données par,*

$$g' = \begin{pmatrix} \rho'^2 + \tau'^2 & 0 & -\tau' \\ 0 & \rho'^2 & 0 \\ -\tau' & 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau' & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta' = (-\tau', 0, 1).$$

où ρ' et τ' sont des fonctions sur E'^3 telles que $\rho' \neq 0$ partout. Et

$$g = \begin{pmatrix} \rho^2 + \tau^2 & 0 & -\tau \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ -\tau & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = (-\tau, 0, 1).$$

où ρ et τ sont de fonctions E^3 telle que $\rho \neq 0$ partout.

Notons par (u, v, w) et (x, y, z) les cordonnées Cartésiennes dans E'^3 et E^3 repectivement et avec un calcul simple en utilisant (4.31) et (4.32) nous obtnons les matrices associées de $\tilde{g}$ et $\tilde{J}$ sur $E^6 = E'^3 \times E^3$

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} F^2\rho'^2 + \tau'^2 & 0 & -\tau' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F^2\rho'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau' & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f^2\rho^2 + \tau^2 & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f^2\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau' & 0 & \tau & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tau' & 0 & 1 & 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilisons les cas obtenus dans l'exemple (3.4.3, p. 59) nous déclarons les assesations suivantes :

(1) : $\rho'_3 = \rho'$, $\quad \tau'_2 = \tau'_3 = 0$, $\quad F^2 = e^{-2\beta'(z' - \int \tau' dx')}$,
$\rho_3 = \rho$, $\quad \tau_2 = \tau_3 = 0$, $\quad f^2 = e^{-2\beta(z - \int \tau dx)}$.

(2) : $\rho'_3 = \rho'$, $\quad \tau'_2 = \tau'_3 = 0$, $\quad F^2 = e^{-2\beta'(z' - \int \tau' dx')}$,
$\tau_2 = -2\rho^2$, $\quad \tau_3 = 0 \quad f^2 = -2\alpha(z' - \int \tau' dx')$.

(3) : $\rho'_3 = \tau'_2 = \tau'_3 = 0$, $\quad F = constante$,
$\tau_2 = -2\rho^2$, $\quad \tau_3 = 0 \quad f^2 = -2\alpha(z' - \int \tau' dx')$.

(4) : $\rho'_3 = \tau'_2 = \tau'_3 = \rho_3 = \tau_2 = \tau_3 = 0$, $\quad F$ et f sont constantes.

4.4 Produit des variétés métrique presque de contact presque hermitienne.

Dans [56], Tshikuna-MATAMBA a déterminé certaines classes remarquables des structures induites sur le produit de deux variétés riemanniennes. Il a étudié le produit d'une variété presque quaternion avec une variété métrique presque de contact presque hermitienne. Dans cette paragraphe, nous donnons une réponse positive pour une question ouverte de Tshikuna-MATAMBA concernant le produit de deux variété métrique presque de contact presque hermitienne.

4.4.1 Le produit $M^{4m+2} \times \mathbb{R}$

Soit $\big(M^{4m+2}, g, J, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^{2}\big)$ une variété métrique presque de contact presque hermitienne. Le produit $\overline{M} = M^{4m+2} \times \mathbb{R}$ est de dimension $4m+3$. On définit une structure 3-presque de contact $(\overline{\varphi}_i, \overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i)_{i=1}^{3}$ par ;

$$\overline{\varphi}_1\big(X, f\frac{\partial}{\partial r}\big) = \big(\varphi_1 X - f\xi_1, \eta_1(X)\frac{\partial}{\partial r}\big), \qquad \overline{\xi}_1 = \xi_2, \quad \overline{\eta}_1 = \eta_2,$$

$$\overline{\varphi}_2\big(X, f\frac{\partial}{\partial r}\big) = \big(-\varphi_2 X + f\xi_2, -\eta_2(X)\frac{\partial}{\partial r}\big), \quad \overline{\xi}_2 = \xi_1, \quad \overline{\eta}_2 = \eta_1,$$

$$\overline{\varphi}_3\big(X, f\frac{\partial}{\partial r}\big) = \big(JX, 0\big), \qquad \overline{\xi}_3 = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \overline{\eta}_3 = dr,$$

et on définit aussi une métrique Riemannienne $\overline{g}$ par

$$\overline{g}\Big(\big(X, f\frac{\partial}{\partial r}\big), \big(Y, h\frac{\partial}{\partial r}\big)\Big) = g(X,Y) + fh,$$

pour tous champs de vecteurs X, Y sur M et f, h deux fonctions sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.4.1. *La structure $\big(\overline{g}, (\overline{\varphi}_i, \overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i)_{i=1}^{3}\big)$ définie ci-dessus est une 3-structures métrique presque de contact.*

Preuve . Utilisons les définitions (3.7) et (3.9) la preuve est directe. ∎

La variété $\big(\overline{M}, \overline{g}, (\overline{\varphi}_i, \overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i)_{i=1}^{3}\big)$ à une 2-forme fondamentale $\overline{\phi}_i$ définie par :

$$\begin{cases} \overline{\phi}_1 = \phi_1 - \eta_1 \wedge dr, \\ \overline{\phi}_2 = -\phi_2 + \eta_2 \wedge dr, \\ \overline{\phi}_3 = \Omega. \end{cases} \tag{4.38}$$

Soient ∇ et $\overline{\nabla}$ les connexions Riemannienne de g et $\overline{g}$ respectivement. Maintenant prenons X et Y comme champs de vecteurs tangent à M et utilisons les propriétés algèbriques des structures métrique presque de contact presque hermitienne et 3-structures métrique presque de contact, nous obtenons

$$\begin{cases} \big(\overline{\nabla}_{\left(X, f\frac{\partial}{\partial r}\right)}\overline{\varphi}_1\big)\big(Y, h\frac{\partial}{\partial r}\big) = \Big((\nabla_X\varphi_1)Y - h\nabla_X\xi_1\,,\ (\nabla_X\eta_1)(Y)\frac{\partial}{\partial r}\Big), \\ \big(\overline{\nabla}_{\left(X, f\frac{\partial}{\partial r}\right)}\overline{\varphi}_2\big)\big(Y, h\frac{\partial}{\partial r}\big) = \Big(-(\nabla_X\varphi_2)Y + h\nabla_X\xi_2\,,\ -(\nabla_X\eta_2)(Y)\frac{\partial}{\partial r}\Big), \\ \big(\overline{\nabla}_{\left(X, f\frac{\partial}{\partial r}\right)}\overline{\varphi}_3\big)\big(Y, h\frac{\partial}{\partial r}\big) = \Big((\nabla_X J)Y\,,\ 0\Big), \end{cases} \tag{4.39}$$

et nous pouvons déclarons le suivant :

Proposition 4.4.2. *Soit* $\left(M^{4m+2}, g, J, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^2\right)$ *une variété métrique presque de contact presque hermitienne. Si* $\left(\overline{g}, (\overline{\varphi}_i, \overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i)_{i=1}^3\right)$ *est une 3-structures métrique presque de contact sur la variété produit* $\overline{M} = M \times \mathbb{R}$*, donnée ci-dessus, alors :*

(a) $\overline{M}$ *est presque 3-cosymplectique si et seulement si,* M *is presque cosymplectique-presque Kählérienne ;*

(b) $\overline{M}$ *est 3-cosymplectique si et seulement si,* M *est cosymplectique-Kählérienne.*

Preuve . Utilisons la définition d'une structure presque cosymplectique et les équation (4.38), la première assertion (a) est claire. Pour (b), supposons que $\left(M^{4m+2}, g, J, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^2\right)$ est cosymplectique-Kählerienne c.à.d pour $i = \overline{1,2}$ on a de (4.41)

$$\begin{cases} (\nabla_X \varphi_i)Y = 0 \\ (\nabla_X J)Y = 0 \end{cases}$$

Comme il est connu que, $\nabla\varphi_i = 0 \Leftrightarrow \nabla\eta_i = \nabla\phi_i = 0$ et utilisons la formule

$$(\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi)$$

alors, $\overline{\nabla}\overline{\varphi}_i = 0$.

Inversement, supposons que $\left(\overline{g}, (\overline{\varphi}_i, \overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i)_{i=1}^3\right)$ est 3-cosymplectique c.à.d pour $i = \overline{1,3}$

$$\left(\overline{\nabla}\overline{\varphi}_i\right)_{\left(X, f\frac{\partial}{\partial r}\right)}\left(Y, h\frac{\partial}{\partial r}\right) = (0,0),$$

alors, de (4.41) on obtient pour $i = \overline{1,2}$

$$\begin{cases} (\nabla_X \varphi_i)Y - h\nabla_X \xi_i = 0 \\ (\nabla_X \eta_i)(Y) = 0 \\ (\nabla_X J)Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\nabla_X \varphi_i)Y = 0 \\ (\nabla_X J)Y = 0 \end{cases}$$

c.à.d la structure $\left(g, J, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^2\right)$ est cosymplectique-Kählerienne.

■

4.4.2 Le produit $M^{4m+2} \times \mathbb{R}^2$

Soit $\left(M^{4m+2}, g, J, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^2\right)$ une variété métrique presque de contact presque hermitienne. La dimension du produit $\overline{M} = M^{4m+2} \times \mathbb{R}^2$ est $4n$ avec $n = m+1$. Nous définissons pour tous X, Y sur M et tous X', Y' sur $\mathbb{R}^2$ telle que $X' = f_1\frac{\partial}{\partial r_1} + f_2\frac{\partial}{\partial r_2}$ et $Y' = h_1\frac{\partial}{\partial r_1} + h_2\frac{\partial}{\partial r_2}$ une structure presque hypercomplexe $(\tilde{J}_i)_{i=1}^3$ par ;

$$\overline{J}_1(X, X') = \left(JX\ ,\ -f_2\frac{\partial}{\partial r_1} + f_1\frac{\partial}{\partial r_2}\right),$$

$$\overline{J}_2(X, X') = \left(\varphi_1 X - f_1\xi_1 - f_2\xi_2\ ,\ \eta_1(X)\frac{\partial}{\partial r_1} + \eta_2(X)\frac{\partial}{\partial r_2}\right),$$

$$\overline{J}_3(X, X') = \left(-\varphi_2 X - f_2\xi_1 + f_1\xi_2\ ,\ \eta_1(X)\frac{\partial}{\partial r_2} - \eta_2(X)\frac{\partial}{\partial r_1}\right),$$

et nous définissons aussi une métrique Riemannienne $\overline{g}$ par

$$\overline{g} = g + dr_1^2 + dr_2^2.$$

Proposition 4.4.3. *La structure* $\left(\overline{g},(\overline{J}_i)_{i=1}^3\right)$ *définie ci-dessus est une structure métrique presque quaternionique.*

Preuve . Utilisons la proposition (3.2.1) nous pouvons facilement vérifier cet résultat. ■

Par un calcul direct en utilisant les définitions des 2-forme fondamentale (voir chapitre 2), on peut affirmer que :

$$\begin{cases} \overline{\Omega}_1 = \Omega - 2(dr_1 \wedge dr_2), \\ \overline{\Omega}_2 = \phi_1 - 2(\eta_1 \wedge dr_1 + \eta_2 \wedge dr_2), \\ \overline{\Omega}_3 = -\phi_2 - 2(\eta_1 \wedge dr_2 - \eta_2 \wedge dr_1). \end{cases} \tag{4.40}$$

Soient ∇ et $\overline{\nabla}$ les connexions Riemannienne de g et $\overline{g}$ respectivement. Utilisons les propositions (3.2.1) et (3.9) nous obtenons,

$$\begin{cases} \left(\overline{\nabla}_{(X,X')}\overline{J}_1\right)(Y,Y') = \Big((\nabla_X J)Y \ , \ 0\Big), \\ \left(\overline{\nabla}_{(X,X')}\overline{J}_2\right)(Y,Y') = \Big((\nabla_X \varphi_1)Y - h_1\nabla_X\xi_1 - h_2\nabla_X\xi_2 \ , \\ \qquad\qquad (\nabla_X\eta_1)(Y)\frac{\partial}{\partial r_1} + (\nabla_X\eta_2)(Y)\frac{\partial}{\partial r_2}\Big), \\ \left(\overline{\nabla}_{(X,X')}\overline{J}_3\right)(Y,Y') = \Big(-(\nabla_X \varphi_2)Y - h_2\nabla_X\xi_1 + h_1\nabla_X\xi_2 \ , \\ \qquad\qquad -(\nabla_X\eta_2)(Y)\frac{\partial}{\partial r_1} + (\nabla_X\eta_1)(Y)\frac{\partial}{\partial r_2}\Big), \end{cases} \tag{4.41}$$

pour tous X, Y sur M et tous X', Y' sur $\mathbb{R}^2$ telle que $X' = f_1\frac{\partial}{\partial r_1} + f_2\frac{\partial}{\partial r_2}$ et $Y' = h_1\frac{\partial}{\partial r_1} + h_2\frac{\partial}{\partial r_2}$, et nous pouvons affirmer ce qui suit :

Proposition 4.4.4. *Soit* $\left(M^{4m+2}, g, J, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^2\right)$ *une variété métrique presque de contact presque hermitienne. Si* $\left(\overline{g},(\overline{J}_i)_{i=1}^3\right)$ *est une structure métrique presque quaternionique sur la variété* $\overline{M} = M \times \mathbb{R}^2$*, définie ci-dessus, alors :*

(a) $\overline{M}$ *est presque hyperkählérienne si et seulement si* M *est presque cosymplectique-presque kählérienne ;*

(b) $\overline{M}$ *est hyperkählérienne si et seulement si* M *est cosymplectique-Kählérienne.*

Preuve . Utilisons la définition de la structure presque hyperkählerienne et les équations (4.40), la première assertion (a) est claire. Pour (b), utilisons la définition des structures kählérienne et hyperkählerienne, on peut adapter la proposition (4.4.2). ■

4.4.3 Le produit $M^{4m+2} \times M'^{4m'+2}$

Soient $\left(M^{4m+2}, g, J, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^2\right)$ et $\left(M'^{4m'+2}, g, J', (\varphi'_i, \xi'_i, \eta'_i)_{i=1}^2\right)$ deux variétés métrique presque de contact presque hermitienne. La dimension du produit $\tilde{M} = M^{4m+2} \times M'^{4m'+2}$ est $4n$ avec $(n = m + m' + 1)$. Donc, on peut définir une structure presque hypercomplexe $(\tilde{J}_i)_{i=1}^3$ par ;

$$\tilde{J}_1 = (J \ , \ J'),$$

$$\tilde{J}_2 = \big(\varphi_2 + \eta_1' \otimes \xi_1 - \eta_2' \otimes \xi_2 \ , \ \varphi_2' - \eta_1 \otimes \xi_1' + \eta_2 \otimes \xi_2'\big),$$
$$\tilde{J}_3 = \big(\varphi_1 - \eta_1' \otimes \xi_2 - \eta_2' \otimes \xi_1 \ , \ \varphi_1' + \eta_1 \otimes \xi_2' + \eta_2 \otimes \xi_1'\big),$$

et une métrique Riemannienne $\tilde{g}$ par

$$\tilde{g} = g + g'.$$

Proposition 4.4.5. *La structure $\big(\tilde{g}, (\tilde{J}_i)_{i=1}^3\big)$ définie ci-dessus est une structure métrique presque quaternionique.*

Preuve . La preuve est directe on utilisons la définition (3.2.1). ∎

Soient ∇, ∇' and $\tilde{\nabla}$ les connexions Riemannienne de g, g' et $\tilde{g}$ respectivement. Maintenant, prenons X et Y comme champs de vecteurs tangent à M et indépendant de M' et de même pour X' et Y' nous donnons $\tilde{\nabla}\tilde{J}_i$ explicitement :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\big(\tilde{\nabla}_{(X,X')}\tilde{J}_1\big)(Y,Y') = \Big((\nabla_X J)Y \ , \ (\nabla'_{X'}J')Y'\Big), & (1)\\
\big(\tilde{\nabla}_{(X,X')}\tilde{J}_2\big)(Y,Y') = \Big((\nabla_X\varphi_2)Y + \eta_1'(Y')\nabla_X\xi_1 - \eta_2'(Y')\nabla_X\xi_2 & \\
\qquad +(\nabla'_{X'}\eta_1')(Y')\xi_1 - (\nabla'_{X'}\eta_2')(Y')\xi_2 \ , & \\
\qquad (\nabla'_{X'}\varphi_2')Y' - \eta_1(Y)\nabla'_{X'}\xi_1' + \eta_2(Y)\nabla'_{X'}\xi_2' & \\
\qquad -(\nabla_X\eta_1)(Y)\xi_1' + (\nabla_X\eta_2)(Y)\xi_2'\Big), & (2)\\
\big(\tilde{\nabla}_{(X,X')}\tilde{J}_3\big)(Y,Y') = \Big((\nabla_X\varphi_1)Y - \eta_2'(Y')\nabla_X\xi_1 - \eta_1'(Y')\nabla_X\xi_2 & \\
\qquad -(\nabla'_{X'}\eta_2')(Y')\xi_1 - (\nabla'_{X'}\eta_1')(Y')\xi_2 \ , & \\
\qquad (\nabla'_{X'}\varphi_1')Y' + \eta_2(Y)\nabla'_{X'}\xi_1' + \eta_1(Y)\nabla'_{X'}\xi_2' & \\
\qquad +(\nabla_X\eta_2)(Y)\xi_1' + (\nabla_X\eta_1)(Y)\xi_2'\Big). & (3)
\end{array}\right. \tag{4.42}$$

Supposons que $\tilde{\nabla}\tilde{J}_i = 0$, par (1) on a $\nabla J = 0$ et $\nabla' J' = 0$. Par (2) avec $X' = Y' = 0$ nous avons $\nabla\varphi_2 = 0$ et avec $X = Y = 0$ nous obtenons $\nabla'\varphi_2' = 0$, avec le même raisonnement, utilisons (3) nous trouvons $\nabla\varphi_1 = 0$ et $\nabla'\varphi_1' = 0$ c.à.d

$$\tilde{\nabla}\tilde{J}_i = 0 \ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \nabla J = \nabla\varphi_i = 0 \\ \nabla' J' = \nabla'\varphi_i' = 0 \end{array}\right.$$

Inversement, sachons que $\nabla\varphi_i = 0 \Rightarrow \nabla\eta_i = 0 \Rightarrow \nabla\xi_i = 0$ for $i = \overline{1,2}$ par conséquent, si

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla J = \nabla\varphi_i = 0 \\ \nabla' J' = \nabla'\varphi_i' = 0 \end{array}\right.$$

alors, on a $\tilde{\nabla}\tilde{J}_i = 0$ et nous pouvons affirmer ce qui suit :

Théorème 4.4.1. *La variété $\tilde{M}$ est hyperkählérienne si et seulement si M et M' sont deux variétés cosymplectique-Kählérienne.*

4.5 Conclusion et perspective

Après avoir introduit la notion de la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique d'une variété Riemannienne par une variété métrique presque de contact et montrer que le produit tordu [7] et le produit tordu $\mathcal{D}$-homothétique [13] sont des cas particuliers, nous avons élargi l'idée de la correspondance entre la structure Sasakienne et la structure Kählérienne, en considérant notre résultat (4.2.1) prouvant que chaque structure Sasakienne peut engendrer une famille de structure Kählérienne. La notion de la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique est récente, ce cette angle, en peut revoir l'ensemble des travaux faits sur la construction des structures presque hermitienne sur le produit de deux variétés Riemanniennes ou une seule au moins soit une variété métrique presque de contact.

L'étude approfondie de la famille des structures Kählériennes engendrée par une structure Sasakienne, nous a conduit à se demander quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour construire une structure Sasakienne à partir d'une structure Kählérienne. Nous avons déjà parcouru un long chemin dans cette direction.

Les travaux de M. Capursi [17], Blair-Oubi$\tilde{n}$a [12] et T. Tshikuna-Matamba [56] nous ont permet d'adopter une méthode de recherche à travers une série de questions nécessaires pour l'étude et la construction des structures selon trois axes :

1. En utilisant la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique, nous cherchons des classes remarquables de structures sur le produit d'une variété presque hermitienne par une variété métrique presque de contact ?. Cette direction va nous permet de généraliser les travaux d'Oubi$\tilde{n}$a [44], [45] et de T. Tshikuna-Matamba [56].
2. La métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée induite sur le produit de deux variétés métrique presque de contact, surtout avec des fonctions de distorsion définies sur la variété produit, nous conduit fort possible à une réponse positive du problème ouvert de Blair-Oubi$\tilde{n}$a ou, au moins nous permet de généraliser leurs travaux dans [12].
3. Vu les problèmes ouverts mentionnés par T. Tshikuna-Matamba [56] nous espérons trouver les conditions favorables pour continuer à travailler dans cette direction. Les premiers pas ont été entamés notamment avec l'introduction de la notion du métrique tordu $\mathcal{H}$-homothétique pour les structures complexes contact basant sur les travaux de B. Korkmaz [36] concernant la déformation $\mathcal{H}$-homothétique.

Bibliographie

[1] C. Bär, Real Killing spinors and holonomy, Comm. Math. Phys., 154(1993), 509-521.

[2] G. Beldjilali, M. Belkhelfa, Kählerian structures on $\mathcal{D}$-homothetic bi-warping, J. Geom. Symmetry Phys. 42 (2016) 1-13.

[3] G. Beldjilali, M. Belkhelfa, Structures on the product of two almost Hermitian almost contact manifolds, International Electronic Journal of Geometry V.9, N.2 (2016) 80-86.

[4] G. Beldjilali, M. Belkhelfa, Pseudosymmetric and Holomorphically Pseudosymmetric Manifolds, J. T. S. accepter (Publication 2017).

[5] G. Beldjilali, M. Belkhelfa, Kählerian structures on generalized doubly D-homothetic bi-warping, preprint.

[6] G. Beldjilali, M. Belkhelfa, A. Hasni, Remarks on 4-dimensional pseudosymmetric Kählerian manifolds., i-manager's Journal on Mathematics, Vol. 2 l No. 4 l October-December 2013 pp. 1-6

[7] R. L. Bishop et B. ONeill, Manifolds of negative curvature, Trans. A.M.S., 145(1969), 1-49.

[8] C. P. Boyer, K. Galicki, and P. Matzeu, On Eta-Einstein Sasakian Geometry, Comm.Math. Phys., 262 (2006), pp. 177-208.

[9] P. Buser, Géométrie Riemannienne EPFL,automne 2007.

[10] D. E. Blair, Contact Manifolds in Riemannian Geometry, 17-35 Lecture Nots in Mathematics 509, Springer, 1976.

[11] D. E. Blair, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematics Vol. 203, Birhauser, Boston, 2002.

[12] D. E. Blair, J. A. Oubiña, Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds, Publ. Mat. 34 (1), 199-207 (1990).

[13] D. E. Blair, $\mathcal{D}$-homothetic warping, Publications de l'institut mathématique, Nouvelle série, tome 94 (108) , 47-54 (2013).

[14] D. E. Blair, On the non-existence of flat contact metric structures, Tohoku Math. J. 28 (1976), 373-379.

[15] D. E. Blair and D. K. Showers, Almost Contact Manifolds With Killing Structures Tensors II, J. Differential Geometry, 9 (1974), 577-582.

[16] B. Y. Chen, Geometry of warped products as Riemanniann submanifolds and related problems, Soochow J.Math. 28 (2002), 125-156.

[17] M. Caprusi, Some remarks on the product of two almost contact manifolds, Al. I. Cuza, XXX(1984), 75-79.

[18] E. Calabi, et B. Eckmann, A class of compact complex manifolds which are not algebraic, Ann. of Math., 58(1953), 494 ?500.

[19] Y. Choquet-Bruhat General Relativity and the Einstein Equations Oxford University Press, Oxford, 2009.

[20] B.Y. Chen, Geometry of warped products as Riemanniann submanifolds and related problems, Soochow J.Math. 28 (2002), 125-156.

[21] M.P. do Carmo, Riemannian Geometry, Boston , (1993) : 88-100

[22] S. Dragomir et L. Ornea, Locally Conformal Kahler Geometry, Birkhauser, Boston, 1998.

[23] T. Frankel, Gravitational Curvature, W. H. Freeman, San Francisco, 1979.

[24] A. Gray, L.M. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, An. Mat. Pura Appl., 123, 35-58 (1980).

[25] S. Gallot, Hulin, D., et J. Lafontaine, Riemannian Geometry, third edition Mathematics Subject Classification, Springer (2004).

[26] M. Gualtieri, Generalized complex geometry, PhD thesis, Oxford University, 2003. arXiv :math.DG/0401221.

[27] N. Hitchin, Hyperkähler manifolds, Séminaire Bourbaki, 748(1992), pp. 137-166.

[28] D. Janssens, et L. Vanhecke, Almost contact structures and curvature tensors, Kódai Math. J. 4 (1981), 1-27.

[29] W. Jelonek, Compact holomorphically pseudosymmetric Kählerian manifolds, Colloq. Math. ; **117** (2009), 243–249.

[30] K. Jung-Hwan, et K. Byung Hak, A new class of almost contact Riemannian manifolds. Comm. Korea Math. Soc. 8 (1993), N. 2, pp. 455-465.

[31] S. KEN'ICHI , Generalized almost contact structures and generalized Sasakian structures, arXiv :1212.6064 [math.DG].

[32] K. Kenmotsu, A class of almost contact Riemannian manifolds, Tohoku Math. J., 24, 93-103 (1972).

[33] S. Kobayashi et K. Nomuzu, foundations of Differential Geometry, Vol. I, Interscience and Wiley, New York, 1963.

[34] S. Kobayashi et K. Nomuzu, foundations of Differential Geometry, Vol. II, Interscience and Wiley, New York, 1969.

[35] S. Kobayashi, Remarks on complex contact manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 164 167.

[36] B. Korkmaz, Normality of complex contact manifolds, Rocky mountain, Journal of Math Volume 30, Number 4, Winter 2000

[37] Y. Y. Kuo, On almost contact 3-structure, Tohoku Math.J., 22(1970), pp. 325-332.

[38] K. Land and J. Magueijo, Is the universe odd, Phys. Rev. D 72 (2005), 101-302.

[39] P. Libermann, Sur le Problème d'Equivalence de Certaines Structures Infinitesimales, Ann. di Mathematica 36 (1951), 247-261.

[40] J. C. Marrero, The local structure of trans-Sasakian manifolds, Annali di Matematica Pura ed Applicata 1992, Volume 162, Issue 1, pp 77-86.

[41] Z. Merali, Axis of evil a cause for cosmic concern, New Scientist, April 14-April 20 2007.

[42] Y. Nakashima, and Y. Watanabe, Some constructions of almost Hermitian and Quatrnion metric structures, Math. J. Toyama Univ., 13, 119-138 (1990).

[43] A. Oliveria-Costa, M. Tegmark, M. Zaldarriaga and A. Hamilton, Significance of the largest scale CMB fluctuations in WMAP, Phys. Rev D 69 (2004), 063-516.

[44] J.A. Oubiña, New classes of almost contact metric structures, Publicationes Mathematicae, ebrecen, 32, 187-193 (1985).

[45] J. A. Oubiña, A classification for almost contact structures, manuscript (1985)

[46] Z. Olszak, Normal almost contact metric manifolds of dimension three. Annales Plonici Mathematici XLVII (1986)

[47] Z. Olszak, Almost cosymplectic manifolds with Käehlerian leaves, Tensor N. S. 46(1987), 117-124.

[48] B. O'neill, Semi-Riemannian geometry, Acad. Press, New York, 1983.

[49] R. Ponge, et H. Reckziegel, Twisted products in pseudo-Riemannian geometry. Geom. Dedicata 48(1) (1993), 1525.

[50] Y. S. Poon and A. Wade. Generalized contact structures, J. Lond. Math. Soc. (2) 83 (2011), no.2, 333-352.

[51] K. Yano, et M. Kon, Structures on Manifolds, Series in Pure Math., Vol 3, World Sci.,1984.

[52] S. Tanno, The topology of contact Riemannian manifolds, Illinois J. Math. 12 (1968), 700-717.

[53] S. Tanno, The Automorphism Groups of Almost Contact Riemannian Manifolds, Tohoku Math. Journ., 21 (1969), 21-38.

[54] T. Tshikuna-Matamba, Nouvelles classes de variétés de Kenmotsu, An. Sti. Univ.Al.I.Cuza, Iasi, 38, 167-175 (1992).

[55] T. Tshikuna-Matamba, Quelques classes des variétés métriques à 3-structures presque de contact, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 31, 2004, Pages 94-101.

[56] T. Tshikuna-Matamba, Induced structures on the product of Remannian manifolds,International Electronic Journal of Geometry, Volume 4 No. 1 pp. 15-25 (2011) IEJG.

[57] B. Ünal, Doubly warped products, Dif. Geom. and its Applications, 15 (2001),253-263.

[58] I. Vaisman. From generalized Kähler to generalized Sasakian structure, J. Geom. Symmetry Phys. 18 (2010), 63-86.

[59] Y. Watanabe, Almost Hermitian and Kähler structures on product manifolds, Proc of the Thirteenth International Workshop on Diff. Geom. 13, 1-16 (2009).

ملخص. يعتبر جُداء المنوّعات الريمانية إحدى الأدوات الهامّة في إنشاء منوّعات ريمانية جديدة. في دراسة لمنوّعات ذات التقوّس السالب تمكن كلا من بيشوب و أونيل من إدراج مفهوم الجُداء الإلتفافي كتعميم طبيعي لجُداء المنوّعات الريمانية فباستعمال تغيير طبيعي لمترك الجُداء، نستطيع إنشاء بنى مختلفة اعتمادا على بنيتي منوّعتي الجُداء .
هدفنا هو إنشاء بعض البنى على جُداء منوّعتين مزودتين ببنى أساسية متنوعة.

المترك الذي أسميناه " **الجُداء ثنائي الإلتفاف ($2n$)-تحاكي** " و الذي عرّفناه على جُداء منوّعة ريمانية مع منوّعة مترية تلامسية تقريبا كتعميم لمفهومي الجُداء الإلتفافي لبيشوب-أونيل و الجُداء الإلتفافي ($2n$)-تحاكي الذي أدرجه بلير، وظّفناه في إنشاء:

- عائلة من بنى كالار انطلاقا من بنية ساساكي واحدة معمِّمِين بذلك فكرة التقابل ساساكي- كالار.
- عائلة ذات وسيط من بنى كالير المطابقة محليا اعتمادا على بنية كوسمبلكتيكية أو بنية كانموتسو.
- عائلة ذات وسيط من بنى كانموتسو انطلاقا من بنية ساساكي واحدة.
- بنية كالار كواترنيونية انطلاقا من بنية ثلاثية الساساكي.
- منوّعة كالار معمّمة جديدة باستعمال بنى اعتيادية مترية تلامسية تقريبا و أخرى مركّبة تقريبا .

من جهة أخرى، أنشئنا بنية ثلاثية مترية تلامسية تقريبا و بنية مترية كواترنيونية تقريبا انطلاقا من بنية مترية تلامسية تقريبا مركّبة تقريبا، بعد ذلك أنشئنا بنية مترية كواترنيونية تقريبا على جُداء منوّعتين متريتين تلامسيتين تقريبا مركّبتين تقريبا.

الكلمات المفتاحية: جُداء المنوّعات الريمانية، بنية مترية تلامسية تقريبا، بنية مركّبة تقريبا.

Abstract. *The product of Riemannian manifolds is one way to exhibit new Riemannian manifolds. To study manifolds with negative curvature, Bishop and O'Neill introduced the notion of warped product as a generalization of Riemannian product. By means of a natural change of the product metric, one can widely construct remarkable structures from the structures of the two factors.*
Our goal is to construct some structures on the product of two Riemannian manifolds by providing both factors with some essential structures.

The metric called D-homothetic bi-warping that we introduced on the product of a Riemannian manifold with an almost contact metric manifold as a generalization of warped product and D-homothetic warping allows us to construct:

- *A family of Kählerian structures starting from a Sasakian manifold.*
- *A 1-parameter family of conformal Kähler structures with a cosymplectic or Kenmotsu structure.*
- *A 1-parameter family of Kenmotsu structures from a single Sasakian manifold.*
- *A quaternionic structure using a Sasakian 3-structure.*
- *New generalized Kähler manifolds starting from both classical almost contact metric and almost Kählerian manifolds.*

On the other hand, we construct an almost contact metric 3-structure and an almost quaternionic metric structure starting from an almost contact manifold almost hermitian structure. Next, we construct an almost quaternionic metric structures on the product of two almost contact manifold almost hermitian structure.

Key words: *Riemannian product , almost contact metric structures, almost Hermitian structures.*