République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid- Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : **Equations Différentielles**

Thème

Sur la représentation explicite des solutions pour les systèmes d'équations différentielles fractionnaires linéaires avec retard

Présenté par : **CHABANE Oussama**

Mémoire soutenu devant le jury composé de :

Mr. Yebdri Mustapha	**Président**
Mr. Mebkhout Benmiloud	**Examinateur**
Mr. Benchaib Abdelatif	**Examinateur**
Mr. Derhab Mohammed	**Encadreur**

Année Universitaire: 2016-2017

Dédicaces

Ce modeste travail est dédié à :

- Mes très chers parents qui m'ont encouragé et motivé tout au long de mes études et qui ont toujours été présents à mes cotés durant mes moments difficiles.
- Mon cher frère Mohammed, mes chers sœurs.
- Ma nièce Imane, mes neveux Islam, Yasser, Houcem et petit Waniss.
- Tout mes ami(e)s.
- Tous ceux qui m'aiment.

CHABANE Oussama.

Remerciements

Au terme de mon travail de mémoire, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance en premier mon Dieu ALLAH qui m'a donné la santé et le courage pour accomplir ce travail.

Je remercie sincèrement mon encadreur. Monsieur DERHAB Mohammed pour ses aides et sa disponibilité. il m'a offert son temps et sa patience. Ses conseils, remarques et critiques ont toujours été une aide précieuse pour moi.

j'adresse mes très sincères remerciements à Monsieur YEBDRI Mustapha, professeur à l'université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen et le responsable de la spécialité *Équations Différentielles*, pour l'intérêt qu'il a accordé à ce travail en acceptant de le jurer et présider le jury.

Je tiens à remercie les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de participer à l'examen de ce travail. Monsieur MEBKHOUT Benmiloud chef de département de mathématiques à l'université de Tlemcen, et monsieur BENCHAIB Abdelatif professeur à l'université de Tlemcen.

Enfin, je remercie aussi mes très chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin. Ma mère qui m'a donné l'espoir d'exceller dans mes études, et mon père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je suis.

Merci mes parents.

Table des matières

Introduction

L'objet de ce mémoire est la résolution explicite de quelques problèmes de Cauchy fractionnaires linéaires avec retard en utilisant la transformée de Laplace. Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, on donne quelques définitions et résultats concernant les fonctions spéciales, la transformée de Laplace, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [2], [8], [10] et [11].

Dans le deuxième chapitre, on donne la représentation explicite des solutions pour les systèmes d'équations différentielles fractionnaires linéaires avec retard d'ordre α du type

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^{\alpha}x(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} B_i x(t-\tau_i) + f(t), & \text{si}\, t > 0, \\ x(t) = \varphi(t), & \text{si} - \tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

où ${}^c\mathbf{D}_0^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$, B_i est une matrice carré d'ordre n avec $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et $B_i B_j = B_j B_i$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ une fonction d'ordre exponentiel, $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, $\tau =: max\,\{\tau_i\}$ et $\tau_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$.
On note pour $\alpha = 1$, la représentation explicite des solutions a été donnée par [7], [10] et [12] et par conséquent les résultats obtenus dans ce chapitre sont des généralisations de ceux obtenus dans les références précédentes.

Dans le troisième chapitre on donne la représentation explicite des solutions pour les systèmes d'équations différentielles fractionnaires linéaires avec retard d'ordre 2α du type

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^{2\alpha}x(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} B_i x(t-\tau_i) + f(t), & \text{si}\, t > 0, \\ x(t) = \varphi(t), & \text{si} - \tau \leq t \leq 0, \\ x'(t) = \varphi'(t), & \text{si} - \tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{2}$$

où $\dfrac{1}{2} < \alpha \leq 1$, B_i est une matrice carré d'ordre n avec $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et $B_i B_j = B_j B_i$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ une fonction d'ordre exponentiel, $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1, $\tau =: max\,\{\tau_i\}$ et $\tau_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$. On note par $\alpha = 1$, la représentation explicite des solution a été donnée par [3], [6] et [10] et par conséquent les résultats obtenus dans ce chapitre sont des généralisations de ceux obtenus dans les références précédentes.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de donner quelques définitions et résultats concernant les fonctions spéciales, la transformée de Laplace, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [2], [8], [10] et [11].

1.2 Fonctions Spéciales

1.2.1 La fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1 *La fonction Gamma d'Euler notée* Γ *est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{1.1}$$

où $t^{z-1} = e^{(z-1)log(t)}$.
Cette intégrale est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ *avec* $\Re(z) > 0$.

1.2.2 La fonction Béta d'Euler

Définition 1.2 *La fonction Béta d'Euler notée* $\boldsymbol{B}$ *est définie par*

$$\boldsymbol{B}(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad \Re(z) > 0, \Re(w) > 0. \tag{1.2}$$

La fonction Béta d'Euler est reliée avec la fonction Gamma d'Euler par la relation suivante

$$\boldsymbol{B}(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \qquad z, w \notin \mathbb{Z}^-. \tag{1.3}$$

1.3 Transformation de Laplace

Définition 1.3 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *une fonction.* f *est dite d'ordre exponentiel s'il existe* $M > 0$ *et* $r > 0$ *telle que, pour tout* $t \geq 0$*, on a*

$$|f(t)| \leq M e^{rt}. \tag{1.4}$$

Définition 1.4 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et d'ordre exponentiel. On appelle transformée de Laplace F de la fonction f, la fonction*

$$F(p) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{1.5}$$

1.3.1 Propriétés

a. Linéarité : Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace F et G et soient α et β deux réels, alors

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(p) = \alpha \mathcal{L}(f)(p) + \beta \mathcal{L}(g)(p).$$

b. Translation : Soit $f : [a, +\infty] \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace F. On note par f_α la fonction définie par

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} f(t-\alpha), & \text{si}\, t \geq 0, \\ 0, & \text{si}\, t \leq 0. \end{cases}$$

Alors, on a

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-\alpha)dt = e^{-\alpha p} F(p).$$

c. Homothétie : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace F et soit $k > 0$, alors on a

$$\mathcal{L}(f(kt))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(kt)dt = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f(t))\left(\frac{p}{k}\right) = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right).$$

d. Transformée d'une dérivée : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continument dérivable et admettant une transformée de Laplace F, alors on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t))(p) &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - \lim_{t\to 0^+} f(t) \\ &= pF(p) - f(0^+). \end{aligned}$$

e. Produit de convolution : Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettant deux transformées de Laplace F et G, le produit de convolution de f et g est définie par

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{(f * g)(t)\right\}(p) &= \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(p).\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(p) \\ &= F(p).G(p). \end{aligned}$$

1.3.2 Transformée inverse

Définition 1.5 *La transformée inverse de Laplace de la fonction F est la fonction f est donnée par*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \qquad \text{avec}\, c = Re(p). \tag{1.6}$$

Définition 1.6 *La fonction de Heaviside notée σ est définie par*

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{si}\, t > 0, \\ 0, & \text{si}\, t < 0. \end{cases}$$

Exemple : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau > 0$ et $0 < \alpha < 1$. Alors, on a

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{e^{-p\tau}}{p^\alpha}\right)^n\right\} = \frac{(t-n\tau)^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)}\sigma(t-n\tau). \tag{1.7}$$

Lemme 1.1 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \tau_1 < \tau_2, ..., \tau_n \in \mathbb{R}$, $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$. Alors*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\prod_{m=1}^{n}\left(\frac{e^{-p\tau_m}}{p^\alpha}\right)^{k_m}\right\} = \begin{cases} \delta(t), & si\, k_i = 0, \\ \dfrac{(t-\sum\limits_{m=1}^{n} k_m\tau_m)^{\alpha\sum\limits_{m=1}^{n} k_m - 1}}{\Gamma(\alpha\sum\limits_{m=1}^{n} k_m)}\sigma\left(t-\sum\limits_{m=1}^{n} k_m\tau_m\right), & si\, \sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k \in \mathbb{N}^*, \end{cases} \tag{1.8}$$

où δ est la distribution de Dirac avec $\mathcal{L}^{-1}(1) = \delta(t)$.

Preuve :

La preuve se fait par récurrence.
Pour $n = 1$, on a

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{e^{-p\tau}}{p^\alpha}\right)^{k_1}\right\} = \frac{(t-k_1\tau)^{\alpha k_1-1}}{\Gamma(\alpha k_1)}\sigma(t-k_1\tau).$$

On suppose pour n fixé, on a

$$L_n = \mathcal{L}^{-1}\left\{\prod_{m=1}^{n}\left(\frac{e^{-p\tau_m}}{p^\alpha}\right)^{k_m}\right\},$$

avec

$$L_n = \begin{cases} \delta(t), & \text{si}\, k_1 = k_2 = ... = k_n = 0, \\ \dfrac{(t-\sum\limits_{m=1}^{n} k_m\tau_m)^{\alpha\sum\limits_{m=1}^{n} k_m - 1}}{\Gamma(\alpha\sum\limits_{m=1}^{n} k_m)}\sigma\left(t-\sum\limits_{m=1}^{n} k_m\tau_m\right), & \text{si}\, k_1 + k_2 + ... + k_n = k \in \mathbb{N}^*, \end{cases} \tag{1.9}$$

et montrons que

$$L_{n+1} = \left(L_n * \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{e^{-p\tau}}{p^\alpha}\right)^{k_{n+1}}\right\}\right)(t). \tag{1.10}$$

On distingue 4 cas :

Cas 1 : Si $k_1 = k_2 = ... = k_{n+1} = 0$, on a

$$L_{n+1} = (\delta * \delta)(t) = \delta(t).$$

Cas 2 : Si $k_1 = k_2 = ... = k_l = 0$ et $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, on a

$$L_{n+1} = \frac{(t - k_{n+1}\tau_{n+1})^{\alpha(k_{n+1})-1}}{\Gamma(\alpha(k_{n+1}))}.\sigma(t - k_{n+1}\tau_{n+1}).$$

Cas 3 : Si $k_1 + k_2 + ... + k_n \in \mathbb{N}$ et $k_{n+1} = 0$, on a

$$L_{n+1} = L_n.$$

Cas 4 :Si $k_1 + k_2 + ... + k_n \in \mathbb{N}$ et $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
L_{n+1} &= \left(L_n * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{e^{-p\tau}}{p^\alpha} \right)^{k_{n+1}} \right\} \right)(t) \\
&= \int_0^t \frac{(s - \sum_{m=1}^n k_m\tau_m)^{\alpha \sum_{m=1}^n k_m - 1}}{\Gamma(\alpha \sum_{m=1}^n k_m)} \sigma(s - \sum_{m=1}^n k_m\tau_m). \frac{(t - k_{n+1}\tau_{n+1})^{\alpha k_{n+1}-1}}{\Gamma(\alpha k_{n+1})}.\sigma(t - k_{n+1}\tau_{n+1}) ds \\
&= \int_{\sum_{m=1}^n k_m\tau_m}^{t - k_{n+1}\tau_{n+1}} \frac{(s - \sum_{m=1}^n k_m\tau_m)^{\alpha \sum_{m=1}^n k_m - 1}}{\Gamma(\alpha \sum_{m=1}^n k_m)}. \frac{(t - k_{n+1}\tau_{n+1})^{\alpha(k_{n+1})-1}}{\Gamma(\alpha k_{n+1})} ds.\sigma(t - \sum_{m=1}^{n+1} k_m\tau_m).
\end{aligned}$$

Si on pose $s = \sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m + (t - \sum_{m=1}^{n+1} k_m\tau_m)\xi$, on obtient

$$L_{n+1} = \frac{(t - \sum_{m=1}^n k_m\tau_m)^{\alpha \sum_{m=1}^{n+1} k_m - 1}}{\Gamma(\alpha \sum_{m=1}^n k_m)\Gamma(\alpha k_{n+1})} \sigma(t - \textstyle\sum_{m=1}^{n+1} k_m\tau_m).\mathbf{B}\left(\sum_{m=1}^{n+1} k_m, k_n\right)$$

$$= \frac{(t - \sum_{m=1}^{n+1} k_m\tau_m)^{\alpha \sum_{m=1}^{n+1} k_m - 1}}{\Gamma(\alpha \sum_{m=1}^{n+1} k_m)} \sigma(t - \textstyle\sum_{m=1}^{n+1} k_m\tau_m).$$

La preuve du Lemme est terminée.

Le Lemme précédent admet comme généralisation le Lemme suivant

Lemme 1.2 *Soient $B_1, B_2, ..., B_n$, n matrices carrés, $0 < \tau_1 < \tau_2, ..., \tau_n \in \mathbb{R}$, ω est un vecteur dans $\mathbb{R}^n$ et $0 < \alpha < 1$.*

Alors on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\prod_{m=1}^n \left(\frac{B_m e^{-p\tau_m}}{p^\alpha} \right)^{k_m} \right) \omega \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \prod_{m=1}^n \left(\frac{e^{-p\tau_m}}{p^\alpha} \right)^{k_m} \left(\prod_{m=1}^n B_m^{k_m} \right) \omega \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \prod_{m=1}^n \left(\frac{e^{-p\tau_m}}{p^\alpha} \right)^{k_m} \right\} \left(\prod_{m=1}^n B_m^{k_m} \right) \omega
\end{aligned}$$

$$
=\begin{cases} \delta(t), & \text{si } k_1 = k_2 = ... = k_n = 0, \\ \dfrac{(t - \sum_{m=1}^{n} k_m \tau_m)^{\alpha \sum_{m=1}^{n} k_m - 1}}{\Gamma(\alpha \sum_{m=1}^{n} k_m)} \left(\prod_{m=1}^{n} B_m^{k_m} \right) \omega.\, \sigma\left(t - \sum_{m=1}^{n} k_m \tau_m \right), & \text{si } k_1 + k_2 + ... + k_n \in \mathbb{N}. \end{cases}
$$

1.4 L'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.7 *Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, avec $\Omega =]a, b], (-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et α un nombre complexe avec $\Re(\alpha) > 0$.*
L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f notée $\boldsymbol{I}_a^\alpha f$ est définie par

$$
(\boldsymbol{I}_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} f(t) dt. \tag{1.11}
$$

Exemple : Soient f la fonction définie par $f(x) = (x - a)^\beta$, $\Re(\beta) > -1$. Calculons $\mathbf{I}_a^\alpha f$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$, on a

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} (t - a)^\beta dt.
\end{aligned}
$$

Si on pose $t = a + (x - a)\tau$, on obtient

$$
(\mathbf{I}_a^\alpha f)(x) = \frac{(x - a)^{\alpha + \beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha - 1} \tau^\beta d\tau.
$$

Par suite,

$$
(\mathbf{I}_a^\alpha (x - a)^\beta) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (x - a)^{\alpha + \beta}.
$$

Définition 1.8 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, avec $\Omega =]a, b], (-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f notée $\boldsymbol{D}_a^\alpha f$ est définie par*

$$
(\boldsymbol{D}_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (\boldsymbol{I}_a^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f(t) dt, \tag{1.12}
$$

où $n = [\Re(\alpha)] + 1$ et $[.]$ désigne la partie entière.

Exemple : Soient $f(x) = (x - a)^{\alpha - 1}, 0 < \alpha < 1$. Calculons $\mathbf{D}_a^\alpha f$

On a

$$
(\mathbf{D}_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (\mathbf{I}_a^{n-\alpha} f)(x).
$$

Pour $0 < \alpha < 1$, on obtient $n = 1$. Alors

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}(t-a)^{\alpha-a}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\mathbf{B}(1-\alpha,\alpha).\end{aligned}$$

Par suite,

$$(\mathbf{D}_a^\alpha (x-a)^{\alpha-1}) = 0.$$

1.5 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.9 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ avec $\Omega =]a,b], (-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo de f notée ${}^c\boldsymbol{D}_a^\alpha f$ est définie par*

$$({}^c\boldsymbol{D}_a^\alpha f)(x) = \left(\boldsymbol{D}_a^\alpha\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]\right)(x), \tag{1.13}$$

où $n = [\Re(\alpha] + 1$.

En particulier si $0 < \Re(\alpha) < 1$, on a

$$({}^c\mathbf{D}_a^\alpha f)(x) = (\mathbf{D}_a^\alpha [f(t) - f(a)])(x). \tag{1.14}$$

On a le résultat suivant

Théorème 1.1 *(Voir [8, Théorème 2.1, page 92]).*
Soit $\Re(\alpha) \geq 0$ f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ avec $n \in N$, alors la dérivée fractionnaire au sens de Caputo existe sur tout $[a,b]$ et elle est représentée par

$$\begin{aligned}({}^c\boldsymbol{D}_a^\alpha f)(x) &= (\boldsymbol{I}_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)})(x) \qquad (1.15)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt.\end{aligned}$$

En particulier si $0 < \alpha < 1$, on a

$$\begin{aligned}({}^c\mathbf{D}_a^\alpha f)(x) &= (\mathbf{I}_{a+}^{1-\alpha} f')(x) \qquad (1.16)\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f'(t)dt.\end{aligned}$$

Exemple : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\alpha) \geq 0$ et $\Re(\beta) \geq 0$. Calculons ${}^c\mathbf{D}_a^\alpha$ de la fonction $(x-a)^\beta$.
On distingue deux cas :

Cas 1 : Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on obtient $\alpha = n$.
C'est-à-dire,

$$
\begin{aligned}
{}^c\mathbf{D}_a^\alpha(x-a)^\beta &= {}^c\,\mathbf{D}_a^n(x-a)^\beta \\
&= \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^\beta \\
&= \beta(\beta-1)...(\beta-n+1)(x-a)^{\beta-n}.
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$
{}^c\mathbf{D}_a^\alpha(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n}.
$$

Cas 2 : Si $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [\Re(\alpha] + 1$, on obtient

$$
\begin{aligned}
{}^c\mathbf{D}_a^\alpha(x-a)^\beta &= \mathbf{I}_a^{n-\alpha}\left(\frac{d^n}{dx^n}\right)(x-a)^\beta \\
&= \mathbf{I}_a^{n-\alpha}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n}.
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$
{}^c\mathbf{D}_a^\alpha(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
$$

Lemme 1.3 *Soient $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction continue, la transformée de Laplace de f et $f^{(k)}$ existe et $\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., n-1$, alors on a*

$$
\mathcal{L}({}^c\boldsymbol{D}_0^\alpha f)(p) = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \tag{1.17}
$$

En particulier si $0 < \alpha < 1$, on a

$$
\mathcal{L}({}^c\mathbf{D}_0^\alpha f)(p) = p^\alpha F(p) - p^{\alpha-1} f(0). \tag{1.18}
$$

1.6 La fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.10 *La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre notée $\boldsymbol{E}_\alpha$ est définie par*

$$
\boldsymbol{E}_\alpha(z) = \sum_{k=o}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \qquad z \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0. \tag{1.19}
$$

Exemple :
Pour $\alpha = 1$, on a

$$
\mathbf{E}_1(z) = e^z.
$$

Pour $\alpha = 2$, on a

$$
\mathbf{E}_2(z) = cosh(\sqrt{z}).
$$

Lemme 1.4 *Soient $\Re(p) > 0$, $\Re(\alpha) > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre est donnée par*

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{E}_\alpha(at^\alpha))(p) = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - a}, \tag{1.20}$$

à condition que $\Re(p) > |a|^{\frac{1}{\alpha}}$.

Preuve :
On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{E}_\alpha(at^\alpha))(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\alpha k} dt.\end{aligned}$$

Si on pose $\tau = pt$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau}}{p} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{\alpha k} d\tau &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{p^\alpha}\right)^k \\ &= \frac{1}{p} . \frac{1}{1 - \frac{a}{p^\alpha}}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathcal{L}(\mathbf{E}_\alpha(at^\alpha))(p) = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - a}.$$

La preuve est terminée.

Définition 1.11 *La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres notée $\boldsymbol{E}_{\alpha,\beta}$ est définie par*

$$\boldsymbol{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=o}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad z, \beta \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0. \tag{1.21}$$

Exemples :
Pour $\beta = 1$, on a

$$\mathbf{E}_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z).$$

Pour $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, on a

$$\mathbf{E}_{2,1}(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Remarque : On peut montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathbf{E}^{(n)}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!.\Gamma(\alpha k + \alpha n + \beta)} z^k. \tag{1.22}$$

On a le résultat suivant

Lemme 1.5 *Soient α et β deux nombres complexes avec $\Re(\alpha) > 0$ et a un nombre réel. Alors on a*

$$\mathcal{L}\left(t^{\alpha n+\beta-1}\boldsymbol{E}_{\alpha,\beta}^{(n)}(at^{\alpha})\right)(p) = \frac{n!p^{\alpha-\beta}}{(p^{\alpha}-a)^{n+1}}. \tag{1.23}$$

Preuve :
On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(t^{\alpha n+\beta-1}\mathbf{E}_{\alpha,\beta}^{(n)}(at^{\alpha})\right)(p) &= \mathcal{L}\left(t^{\alpha n+\beta-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+n)!(at^{\alpha})^k}{k!\Gamma(\alpha k+\alpha n+\beta)}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+n)!a^k}{k!\Gamma(\alpha k+\alpha n+\beta)}\mathcal{L}\left(t^{\alpha n+\beta-1+\alpha k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+n)!a^k}{k!}.\frac{1}{p^{\alpha n+\alpha k+\beta}}\\
&= \frac{1}{p^{\alpha n+\beta}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+n)!}{k!}\left[\frac{a}{p^{\alpha}}\right]^k\\
&= \frac{1}{p^{\alpha n+\beta}}\frac{n!}{\left(1-\dfrac{a}{p^{\alpha}}\right)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathcal{L}\left(t^{\alpha n+\beta-1}\mathbf{E}_{\alpha,\beta}^{(n)}(at^{\alpha})\right)(p) = \frac{n!p^{\alpha-\beta}}{(p^{\alpha}-a)^{n+1}}.$$

La preuve est terminée.

Pour terminer ce Chapitre, on énonce le résultat suivant

Théorème 1.2 *(Voir [2, Théorème B, page 38]).*
Si $x_1, x_2, ..., x_m$ sont éléments permutables ($x_ix_j = x_jx_i, 1 \leq \hat{\imath} \leq j \leq m$), pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^n = (x_1+x_2+...+x_m)^n = \sum_{\substack{a_1,a_2,...,a_m\geq 0\\ a_1+a_2+...+a_m=n}} \binom{n}{a_1,a_2,...,a_m} x_1^{a_1}.x_2^{a_2}...x_m^{a_m}. \tag{1.24}$$

où

$$\binom{n}{a_1,a_2,...,a_m} = \frac{n!}{a_1!.a_2!\dots a_m!},$$

s'appellent coefficients multinomiaux.

Chapitre 2

Sur la représentation explicite des solutions pour les systèmes d'équations différentielles fractionnaires linéaires avec retard d'ordre α

2.1 Introduction

Dans ce chapitre en utilisant la transformée de Laplace on donne la représentation explicite des solutions pour les systèmes d'équations différentielles fractionnaires linéaires avec retard d'ordre α du type

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^\alpha x(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i x(t-\tau_i) + f(t), & \text{si } t > 0, \\ x(t) = \varphi(t), & \text{si } -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où ${}^c\mathbf{D}_0^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$, B_i est une matrice carré d'ordre n avec $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et $B_iB_j = B_jB_i$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ une fonction d'ordre exponentiel, $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, $\tau =: max\,\{\tau_i\}$ et $\tau_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$.

On note pour $\alpha = 1$, la représentation explicite des solutions a été donnée par [7], [10] et [12] et par conséquent les résultats obtenus dans ce chapitre sont des généralisations de ceux obtenus dans les références précédentes.

2.2 Sur les systèmes d'équations différentielles fractionnaires avec un seul retard d'ordre α

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^\alpha X(t) = AX(t) + BX(t-\tau), & \text{si } t \geq 0, \\ X(t) = I_n, & \text{si } -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où ${}^{c}\mathbf{D}_0^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$, A, B sont deux matrices carrés d'ordre $n, n \in \mathbb{N}^*$, $\tau > 0$ et I_n est le vecteur unité.

On a le résultat suivant

Théorème 2.1 *La solution X du problème* (2.2) *est donnée par*

$$X(t) = I_n + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t), \qquad si\ (n-1)\tau \leq t \leq n\tau, \tag{2.3}$$

où

$$\varphi_n(t) = \frac{(t-n\tau)^{\alpha(n+1)}}{n!} \boldsymbol{E}_{\alpha,\alpha+1}^{(n)}[A(t-n\tau)^{\alpha}].B^n(A+B).\sigma(t-n\tau).$$

Preuve :

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'equation dans (2.2), on a

$$\mathcal{L}\left\{({}^{c}\mathbf{D}_0^{\alpha} X)(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{AX(t) + BX(t-\tau)\right\}$$

C'est -à-dire,

$$p^{\alpha}\tilde{X}(p) - p^{\alpha-1}X(0) = A\tilde{X}(p) + B\int_0^{+\infty} e^{-pt}X(t-\tau)dt.$$

Avec $\quad \tilde{X}(p) = \mathcal{L}(X(t))(p)$.

Si on pose $t - \tau = s$, on obtient

$$\begin{aligned} p^{\alpha}\tilde{X}(p) - p^{\alpha-1}I_n &= A\tilde{X}(p) + Be^{-p\tau}\int_{-\tau}^{+\infty} e^{-ps}X(s)ds \\ &= A\tilde{X}(p) + Be^{-p\tau}\left[\int_{-\tau}^{0} e^{-ps}X(s)ds + \int_{0}^{+\infty} e^{-ps}X(s)ds\right] \\ &= A\tilde{X}(p) + Be^{-p\tau}\left[\left(-\frac{1}{p} + \frac{e^{p\tau}}{p}\right)I_n + \tilde{X}(p)\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\left[p^{\alpha}I_n - A - Be^{-p\tau}\right]\tilde{X}(p) = p^{\alpha-1}I_n + p^{-1}(1-e^{-p\tau})BI_n,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\tilde{X}(p) &= \left[p^\alpha I_n - A - Be^{-p\tau}\right]^{-1}\left\{p^{\alpha-1}I_n + p^{-1}(1-e^{-p\tau}B)\right\}\\ &= p^{-1}\left[p^\alpha I_n - A - Be^{-p\tau}\right]^{-1}\left\{[p^\alpha I_n - A - Be^{-p\tau}] + (A+B)\right\},\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\tilde{X}(p) &= p^{-1}I_n + p^{-1}\left[p^\alpha I_n - A - Be^{-p\tau}\right]^{-1}(A+B)\\ &= \frac{1}{p}I_n + \frac{1}{p(p^\alpha I_n - A)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{Be^{-p\tau}}{(p^\alpha I_n - A)}\right)^n (A+B)\\ &= \frac{1}{p}I_n + \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Be^{-pn\tau}}{(p^\alpha I_n - A)^{n+1}}(A+B).\end{aligned}$$

Alors, d'après La Remarque du Chapitre 1, on a

$$X(t) = I_n + \sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(t), \qquad \text{si } (n-1)\tau \leq t \leq n\tau.$$

La preuve est achevée.

Maintenant on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^\alpha x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), & \text{si}\, t \geq 0,\\ x(t) = \varphi(t), & \text{si} - \tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, on note par X la solution fondamentale de (2.2) et x la solution de (2.4), alors on a le résultat suivant

Théorème 2.2 *(Voir [12, Théorème 4.1, page 555]).*
Si X est une solution fondamental du système (2.2)*, alors la solution générale x pour le système* (2.4) *est représentée sous la forme*

$$x(t) = X(t)\varphi(0) + B\int_{-\tau}^{0}\left[({}^c\boldsymbol{D}^{1-\alpha}X)(t-\tau-\theta) + \frac{(t-\tau-\theta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I_n\right]\varphi(\theta)d\theta. \tag{2.5}$$

Preuve :

Si on applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation dans (2.4), on ontient

$$p^\alpha\mathcal{L}[x(t)] - p^{\alpha-1}\varphi(0) = A\mathcal{L}[x(t)] + B\mathcal{L}[x(t-\tau)].$$

Comme

$$\mathcal{L}[x(t-\tau)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}x(t-\tau)dt = e^{-p\tau}\mathcal{L}[x(t)] + e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-pt}\varphi(t)dt,$$

on obtient

$$\left[p^\alpha I_n - A - Be^{-p\tau}\right]\mathcal{L}[x(t)] = p^{\alpha-1}\varphi(0) + Be^{-p\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-pt}\varphi(t)dt.$$

Alors la transformée de Laplace de la fonction x s'écrit

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[X(t)]\varphi(0) + \mathcal{L}[X(t)]Bp^{1-\alpha}e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-pt}\varphi(t)dt.$$

On définit les deux fonctions $\omega(.)$ et $\hat{\varphi}(.)$ par

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & \text{si}\, t \geq 0, \\ 1, & \text{si}\, t \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

et

$$\hat{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(0), & \text{si}\, t \geq 0, \\ \varphi(t), & \text{si}\, t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[X(t)]Bp^{1-\alpha}e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-pt}\varphi(t)dt &= Bp^{1-\alpha}\mathcal{L}[X(t)]e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{+\infty} e^{-pt}\hat{\varphi}(t)\omega(t)dt \\ &= Bp^{1-\alpha}\mathcal{L}[X(t)]\int_{0}^{+\infty} e^{-pt}\hat{\varphi}(t-\tau)\omega(t-\tau)dt \\ &= Bp^{1-\alpha}\mathcal{L}[X(t)]\mathcal{L}\left[\hat{\varphi}(t-\tau)\omega(t-\tau)\right]. \end{aligned}$$

D'autre par, comme $\alpha \in (0,1)$ on utilise les deux égalités suivantes

$$\mathcal{L}\left[({}^{c}\mathbf{D}_{0}^{1-\alpha}X(t)\right] = p^{1-\alpha}\mathcal{L}[X(t)](p) - p^{-\alpha}X(0),$$

et

$$p^{-\alpha}\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\mathbf{I}_{0}^{\alpha}f(t)](p),$$

où $\mathbf{I}_{0}^{\alpha}$ est une intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α.

Alors

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[X(t)]\varphi(0) + B\mathcal{L}\left[({}^{c}\mathbf{D}_{0}^{1-\alpha}X(t)\right]\mathcal{L}\left[\hat{\varphi}(t-\tau)\omega(t-\tau)\right] + B\mathcal{L}\left\{\mathbf{I}_{0}^{\alpha}\left[\hat{\varphi}(t-\tau)\omega(t-\tau)\right]\right\}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t)\varphi(0) + B\left[({}^{c}\mathbf{D}^{1-\alpha}X(t)\right] * \left[\hat{\varphi}(t-\tau)\omega(t-\tau)\right] + B\mathbf{I}^{\alpha}\left[\hat{\varphi}(t-\tau)\omega(t-\tau)\right] \\ &= X(t)\varphi(0) + B\int_{0}^{t}\left[({}^{c}\mathbf{D}^{1-\alpha}X(t-s) + \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I_n\right]\hat{\varphi}(t-\tau)\omega(t-\tau)ds \\ &= X(t)\varphi(0) + B\int_{0}^{\tau}\left[({}^{c}\mathbf{D}^{1-\alpha}X(t-s) + \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I_n\right]\varphi(t-\tau)ds. \end{aligned}$$

Si on pose $s = \tau + \theta$, on obtient

$$x(t) = X(t)\varphi(0) + B\int_{-\tau}^{0}\left[({}^{c}\mathbf{D}^{1-\alpha}X(t-\tau-\theta) + \frac{(t-\tau-\theta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I_n\right]\varphi(\theta)d\theta.$$

Ce qu'il fallait démontrée.

Maintenant on considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^\alpha x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(t), & \text{si}\, t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

où $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et admettant une transformée de Laplace F.

Alors on a le résultat suivant

Théorème 2.3 *(Voir [12, Théorème 4.2, page 556]).*
La solution x^* du problème (2.6) *est donnée par*

$$x^*(t) = x(t) + \boldsymbol{I}_0^\alpha f(t) + \int_0^t \left[({}^c\boldsymbol{D}_0^{1-\alpha} X(t-s) f(s) ds \right]. \tag{2.7}$$

Preuve :

Par l'application de la transformée de Laplace dans l'équation du système (2.6), on obtient

$$p^\alpha \mathcal{L}[x^*(t)] - p^{\alpha-1}\varphi(0) = A\mathcal{L}[x^*(t)] + B\mathcal{L}[x^*(t-\tau)] + \mathcal{L}\left[f(t)\right].$$

D'aprés la preuve précédente, on obtient

$$\mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{L}[X(t)]\varphi(0) + \mathcal{L}[X(t)]Bp^{1-\alpha}e^{-p\tau}\int_{-\tau}^0 e^{-pt}\varphi(t)dt + p^{1-\alpha}\mathcal{L}[X(t)]\mathcal{L}[f(t)],$$

c'est-à-dire,

$$\mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{L}[X(t)] + p^{1-\alpha}\mathcal{L}[X(t)]\mathcal{L}[f(t)].$$

Par suite, on a

$$x^*(t) = x(t)) + \mathbf{I}_0^\alpha f(t) + \int_0^t \left[({}^c\mathbf{D}_0^{1-\alpha} X(t-s) f(s) ds. \right.$$

La preuve est terminée.

2.3 Sur la représentation explicite des solutions pour les systèmes d'équations différentielles linéaires fractionnaires avec deux retards d'ordre α

Dans cette partie, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^\alpha x(t) = B_1 x(t-\tau_1) + B_2 x(t-\tau_2) + f(t), & \text{si}\, t > 0, \\ x(t) = \varphi(t), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

où $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$, $\tau =: max\,\{\tau_1, \tau_2\}$, B_1, B_2 deux matrices carrés d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$ avec $B_1B_2 = B_2B_1$, $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ et $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue d'ordre exponentiel admettant une transformée de Laplace F.

On a le résultat suivant

Théorème 2.4 *La solution x du problème*(2.8) *est donnée par*

$$x(t) = \sum_{\substack{k_1\tau_1+k_2\tau_2\leq t-s\\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2}\left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right)\left[\frac{(t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}\right]\varphi(0) \tag{2.9}$$

$$+\sum_{j=1}^{2} B_j\int_0^{\tau_j}\tilde{A}(t-s)\varphi(s-\tau_j)ds+\int_0^t \tilde{A}(t-s)f(s)ds,$$

où

$$\tilde{A}(t) = \sum_{\substack{k_1\tau_1+k_2\tau_2\leq t-s\\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2}\left(\prod_{m=1}^{2} b_m^{k_m}\right)\left[\frac{(t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right],$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Preuve :

Tout d'abord on définit la fonction ψ la fonction prolongée de φ par

$$\psi(t) = \begin{cases}\varphi(t), & \text{si}\, t\in[-\tau,0],\\ 0, & \text{si}\, t\notin[-\tau,0].\end{cases}$$

En prouvant par la transformée de Laplace en l'appliquant aux deux membres de l'équation dans le problème (2.8), on obtient

$$\begin{aligned}
p^\alpha\tilde{x}(p)-p^{\alpha-1}x(0) &= \sum_{i=1}^{2} B_i\int_0^{+\infty} e^{-ps}x(s-\tau_i)ds+F(p)\\
p^\alpha\tilde{x}(p)-p^{\alpha-1}\varphi(0) &= \sum_{i=1}^{2} B_i\int_0^{+\infty} e^{-ps}x(s-\tau_i)ds+F(p)\\
&= \sum_{i=1}^{2} B_i\left(\int_0^{\tau_i} e^{-ps}\varphi(s-\tau_i)ds+\int_{\tau_i}^{+\infty} e^{-ps}\varphi(s-\tau_i)ds\right)+F(p)\\
&= \sum_{i=1}^{2} B_i\left(\int_0^{+\infty} e^{-ps}\psi(s-\tau_i)ds+e^{-p\tau_i}\int_0^{+\infty} e^{-ps}x(s)ds\right)+F(p)\\
&= \sum_{i=1}^{2}\left[B_i\mathcal{L}\left(\psi(s-\tau_i)\right)+B_ie^{-p\tau_i}\tilde{x}(p)\right]+F(p),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\left[p^\alpha-\sum_{i=1}^{2} B_ie^{-p\tau_i}\right]\tilde{x}(p)=\varphi(0)p^{\alpha-1}+\sum_{i=1}^{2} B_i\mathcal{L}\left(\psi(s-\tau_i)\right)+F(p).$$

Comme

$$\left[1-\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^{k}.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(p)&=\frac{1}{p^\alpha}\left[1-\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^{-1}\left[\varphi(0)p^{\alpha-1}+\sum_{i=1}^{2}B_i\mathcal{L}\left(\psi(s-\tau_i)\right)+F(p)\right]\\&=A_0+\sum_{j=1}^{2}B_jA_j+A_f.\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}A_0&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^{k}\right)p^{\alpha-1}\varphi(0)\right\},\\A_j&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^{k}\right)\mathcal{L}(\psi(t-\tau_j))\right\},\qquad \text{pour } j=1,2,\end{aligned}$$

et

$$A_f=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^{k}\right)F(p)\right\}.$$

Calculons A_0, A_j pour $j=1,2$ et A_f.

Pour A_0, on a

$$\begin{aligned}A_0&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^{k}\right)p^{\alpha-1}\varphi(0)\right\}\\&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^{k}\right)\varphi(0)\right\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left(\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^{k}\right)\varphi(0)\right\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sigma*\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left(\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^{k}\right)\varphi(0)\right\}\right)\\&=(\sigma*\delta)(t)\varphi(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sigma*\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^{k}\right)\varphi(0)\right\}\right).\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 1.2 du Chapitre 1, on obtient

$$A_0 = \sigma(t)\varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sigma * \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\prod_{m=1}^{2}\left(\frac{B_m e^{-p\tau_m}}{p^\alpha}\right)^{k_m}\right)\varphi(0)\right\}\right)$$
$$= \sigma(t)\varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left(\sigma * \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\prod_{m=1}^{2}\left(\frac{B_m e^{-p\tau_m}}{p^\alpha}\right)^{k_m}\right)\varphi(0)\right\}\right).$$

D'après le Lemme 1.2 du Chapitre 1, on obtient

$$A_0 = \sigma(t)\varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\int_0^t \frac{(s-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m)^{\alpha\sum_{m=1}^{2}k_m - 1}}{\Gamma(\alpha\sum_{m=1}^{2}k_m)}\left(\prod_{m=1}^{2}B_m^{k_m}\right)\varphi(0)$$
$$\times\, \sigma\left(s-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m\right)\sigma(t-s)ds.$$

Comme

$$\sigma(t-s) = \begin{cases} 1, & \text{si}\, s<t,\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases}$$

et

$$\sigma(s-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m) = \begin{cases} 1, & \text{si}\, s>\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors,

$$\sigma(t-s).\sigma(s-\textstyle\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m) = \sigma(t-\sum_{m=1}^{n}k_m\tau_m)$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{si}\, t>s>\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Par suite, il résulte que

$$A_0 = \sigma(t)\varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\frac{(t-\sum_{m=1}^{n}k_m\tau_m)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}$$
$$\times\sigma(t-\textstyle\sum_{m=1}^{n}k_m\tau_m)\left(\prod_{m=1}^{2}B_m^{k_m}\right)\varphi(0)$$
$$= \sum_{\substack{\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m<t\\k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\frac{(t-\sum_{m=1}^{n}k_m\tau_m)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}\left(\prod_{m=1}^{2}B_m^{k_m}\right)\varphi(0).$$

Maintenant calculons les A_j pour $j=1,2,$

on a

$$
\begin{aligned}
A_j =& \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^\alpha}\right]^k\right)\mathcal{L}(\psi(t-\tau_j))\right\}\\
=&\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{L}\varphi(t-\tau_j)}{p^\alpha}\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^\alpha}\right)*\mathcal{L}^{-1}\left(\prod_{m=1}^{2}\left(\frac{e^{-p\tau_m}}{p^\alpha}\right)^{k_m}\right)\right.\\
&\left. *\left(\textstyle\prod_{m=1}^{2}B_m^{k_m}\right)\psi(.-\tau_j)\right]\\
=&\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.\psi(s-\tau_j)\sigma(t-s)ds+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^\alpha}\right)*\mathcal{L}^{-1}\left(\prod_{m=1}^{2}\left(\frac{e^{-p\tau_m}}{p^\alpha}\right)^{k_m}\right)\right.\\
&\left. *\left(\textstyle\prod_{m=1}^{2}B_m^{k_m}\right)\psi(.-\tau_j)\right]\\
=&\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.\psi(s-\tau_j)\sigma(t-s)ds+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left(\prod_{m=1}^{2}B_m^{k_m}\right)\\
&\times\left(E*\psi(.-\tau_j)\right).
\end{aligned}
$$

Avec

$$
E=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\sigma(t)*\frac{(s-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m)^{\alpha\sum_{m=1}^{2}k_m-1}}{\Gamma(\alpha\sum_{m=1}^{2}k_m)}\sigma\left(s-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m\right).
$$

On a

$$
E=\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\sigma(t-s)\frac{(s-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}\sigma\left(s-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m\right)ds
$$

$$
=\int_{\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(s-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}\sigma\left(t-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m\right)ds,
$$

Si on pose

$$
s=\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m+(t-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m)v.
$$

On obtient

$$
E=\int_0^1\frac{\left[(t-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m)v\right]^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}\frac{(t-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(1-v)^{\alpha-1}(t-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m)dv
$$

$$= \frac{(t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 v^{\alpha k-1}(1-v)^{\alpha-1}dv$$

$$= \frac{(t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k)\Gamma(\alpha)} \mathbf{B}(\alpha k,\alpha)$$

$$= \frac{(t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}.$$

Par suite,

$$A_j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right) \frac{(t-s-\sum\limits_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{\alpha\sum\limits_{m=1}^{2} k_m+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha\sum\limits_{m=1}^{2} k_m+\alpha)} \sigma\left(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m\right)$$

$$*\psi(.-\tau_j)$$

$$= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right) \left[\frac{(t-s-\sum\limits_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} \sigma\left(t-s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m\right)\psi(s-\tau_j)\right] ds$$

$$= \int_0^t \sum_{\substack{k_1\tau_1+k_2\tau_2\leq t-s\\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right) \left[\frac{(t-s-\sum\limits_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} \psi(s-\tau_j)\right] ds.$$

En conclusion, on a

$$A_j = \int_0^{\tau_j} \tilde{A}(t-s)\varphi(s-\tau_j)ds \qquad \text{pour } j=1,2.$$

De même pour A_f, on a

$$A_f = \int_0^t \sum_{\substack{k_1\tau_1+k_2\tau_2\leq t-s\\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right) \left[\frac{(t-s-\sum\limits_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} f(s)\right] ds$$

$$= \int_0^t \tilde{A}(t-s)f(s)ds.$$

Oui devait être prouvée.

2.3.1 Généralisation

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} {}^{c}\mathbf{D}_{0}^{\alpha}x(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i x(t-\tau_i) + f(t), & \text{si}\, t > 0, \\ x(t) = \varphi(t), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

où $0 < \alpha < 1$, B_i est une matrice carré d'ordre n avec $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et $B_i B_j = B_j B_i$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ une fonction d'ordre exponentiel, $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, $\tau =: max\,\{\tau_i\}$ et $\tau_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$.

Le Théorème 2.4 admet la généralisation suivante

Théorème 2.5 *La solution x du problème*(2.10) *est donnée par*

$$x(t) = \sum_{\substack{\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m \leq t-s \\ k_1,k_2,...,k_n \geq 0}} \binom{k}{k_1, k_2, ..., k_n} \left(\prod_{m=1}^{n} B_m^{k_m} \right) \left[\frac{(t - \sum_{m=1}^{n} k_m \tau_m)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right] \varphi(0) \tag{2.11}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} B_j \int_0^{\tau_j} \tilde{A}_n(t-s)\varphi(s-\tau_j)ds + \int_0^t \tilde{A}_n(t-s) f(s) ds,$$

où

$$\tilde{A}_n(t) = \sum_{\substack{\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m \leq t-s \\ k_1,k_2,...,k_n \geq 0}} \binom{k}{k_1, k_2, ..., k_n} \left(\prod_{m=1}^{n} B_m^{k_m} \right) \left[\frac{(t - \sum_{m=1}^{n} k_m \tau_m)^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \right],$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve : La preuve est similaire à celle du Théorème 2.4.

Chapitre 3

Sur la représentation explicite des solutions pour les systèmes d'équations différentielles fractionnaires linéaires avec retard d'ordre 2α

3.1 Introduction

Dans ce chapitre en utilisant la transformée de Laplace on donne la représentation explicite des solutions pour les systèmes d'équations différentielles fractionnaires linéaires avec retard d'ordre 2α du type

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^{2\alpha}x(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} B_i x(t-\tau_i) + f(t), & \text{si}\, t > 0, \\ x(t) = \varphi(t), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \\ x'(t) = \varphi'(t), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\dfrac{1}{2} < \alpha \leq 1$, B_i est une matrice carré d'ordre n avec $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et $B_iB_j = B_jB_i$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ une fonction d'ordre exponentiel, $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1, $\tau =: max\,\{\tau_i\}$ et $\tau_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$.

On note par $\alpha = 1$, la représentation explicite des solution a été donnée par [3], [6] et [10] et par conséquent les résultats obtenus dans ce chapitre sont des généralisations de ceux obtenus dans les références précédentes.

3.2 Sur les systèmes d'équations différentielles fractionnaires avec un seul retard d'ordre 2α

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^{2\alpha} x(t) + A^2 x(t-\tau) = 0, & \text{si}\, t > 0, \\ x(t) = I_n, & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \\ x'(t) = 0_{\mathbb{R}^n}, & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

où ${}^c\mathbf{D}_0^{2\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre 2α avec $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, A est une matrice carré d'ordre n avec $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est le vecteur unité et $\tau > 0$.

Proposition 3.1 *La solution x de* (3.2) *est donnée par*

$$x(t) = Cos_{\alpha,\tau}(At), \tag{3.3}$$

où la fonction $Cos_{\alpha,\tau}(At)$ est définie par

$$Cos_{\alpha,\tau}(At) = I_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{\Gamma(2\alpha n + 1)} (t-(n-1)\tau)^{2\alpha n}.\sigma(t-(n-1)\tau). \tag{3.4}$$

Preuve :

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (3.2), on obtient

$$p^{2\alpha}\tilde{x}(p) - p^{2\alpha-1}x(0) - p^{2\alpha-2}x'(0) + A^2 \left[\int_0^{+\infty} e^{-p\tau} x(t-\tau)dt \right] = 0,$$

où $\quad \tilde{x}(p) = \mathcal{L}(x(t))(p)$.

Si on pose $s = t - \tau$, on obtient

$$p^{2\alpha}\tilde{x}(p) - p^{2\alpha-1}I_n + A^2 e^{-p\tau} \left[-\frac{1}{p} + \frac{e^{p\tau}}{p} + \tilde{x}(p) \right] = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\left(p^{2\alpha} + A^2 e^{-p\tau}\right) \tilde{x}(p) = p^{2\alpha-1} I_n - \frac{A^2 e^{-p\tau}}{p}(e^{p\tau} - 1).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(p) &= (p^{2\alpha} + A^2 e^{-p\tau})^{-1} \left[p^{2\alpha-1} I_n - \frac{A^2 e^{-p\tau}}{p}(e^{p\tau} - 1) \right] \\ &= p^{-1}(p^{2\alpha} + A^2 e^{-p\tau})^{-1} \left[p^{2\alpha} I_n + A^2(e^{-p\tau} - 1) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p}I_n - \frac{A^2}{p[p^{2\alpha} + A^2 e^{-p\tau}]}$$
$$= \frac{1}{p}I_n - \frac{A^2}{p}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{A^{2k}e^{-kp\tau}}{p^{2\alpha(k+1)}},$$

c'est-à-dire,

$$\tilde{x}(p) = \frac{1}{p}I_n - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{\lambda^{2\alpha(k+1)}e^{-kp\tau}}{p^{2\alpha(k+1)+1}}.$$

Par suite,

$$x(t) = I_n - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{A^{2(k+1)}(t-k\tau)^{2\alpha(k+1)}}{\Gamma(2\alpha(k+1)+1)}.\sigma(t-(n-1)\tau)$$

$$= I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k A^{2n}}{\Gamma(2\alpha k+1)}(t-(k-1)\tau)^{2\alpha k}.\sigma(t-(n-1)\tau)$$

$$= Cos_{\alpha,\tau}(At).$$

La preuve de la proposition est terminée.

Maintenant on considère le problème suivant

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^{2\alpha}x(t) + A^2 x(t-\tau) = 0, & \text{si}\, t > 0, \\ x(t) = A(t+\tau), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \\ x'(t) = A, & \text{si} -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

On a le résultat suivant

Proposition 3.2 *La solution x de* (3.5) *est donnée par*

$$x(t) = Sin_{\alpha,\tau}(At), \tag{3.6}$$

où la fonction $Sin_{\alpha,\tau}(At)$ est définie par :

$$Sin_{\alpha,\tau}(At) = A(t+\tau) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{\Gamma(2\alpha k+2)}(t-(k-1)\tau)^{2\alpha k+1}.\sigma(t-(k-1)\tau). \tag{3.7}$$

Preuve :

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (3.5), on obtient

$$p^{2\alpha}\tilde{x}(p) - p^{2\alpha-1}x(0) - p^{2\alpha-2}x'(0) = -A^2 \int_0^{+\infty} e^{-pt}x(t-\tau)dt.$$

On pose $t - \tau = s$, on obtient

$$p^{2\alpha}\tilde{x}(p) - p^{2\alpha-1}x(0) - p^{2\alpha-2}x'(0) = -A^2 \int_0^{+\infty} e^{-p(s-\tau)}x(s)ds$$

$$p^{2\alpha}\tilde{x}(p) - p^{2\alpha-1}x(0) - p^{2\alpha-2}x'(0) = -A^2\left[e^{p\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-ps}x(s)ds + e^{p\tau}\tilde{x}(p)\right],$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\left[p^{2\alpha} + A^2 e^{-p\tau}\right]\tilde{x}(p) &= p^{2\alpha-1}A\tau + p^{2\alpha-2}A - A^3 e^{-p\tau}\left[-\frac{\tau e^{p\tau}}{p} + \left(\tau + \frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{p} + \frac{e^{p\tau}}{p}\right)\right] \\ &= p^{2\alpha-1}A\tau + p^{2\alpha-2}A + \frac{A^3\tau}{p} + \frac{A^3}{p}\left(\tau + \frac{1}{p}\right)e^{-p\tau} - \frac{A^3}{p}\left(\tau + \frac{1}{p}\right).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(p) = &\frac{p^{2\alpha-1}A\tau}{p^{2\alpha} + A^2e^{-p\tau}} + \frac{p^{2\alpha-2}A}{p^{2\alpha} + A^2e^{-p\tau}} + \frac{A^3\tau}{p\left[p^{2\alpha} + A^2e^{-p\tau}\right]} + \frac{A^3}{p}\left(\tau + \frac{1}{p}\right)\frac{e^{-p\tau}}{p^{2\alpha} + A^2e^{-p\tau}} \\ &- \frac{A^3}{p}\left(\tau + \frac{1}{p}\right)\frac{1}{p^{2\alpha} + A^2e^{-p\tau}},\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(p) = &\frac{A\tau}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n}e^{-np\tau}}{p^{2\alpha n}} + \frac{A}{p^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n}e^{-np\tau}}{p^{2\alpha n}} + A\tau\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n}e^{-np\tau}}{p^{2\alpha n+2\alpha+1}} \\ &+ \frac{A^3}{p}\left(\tau + \frac{1}{p}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n}e^{-(n+1)p\tau}}{p^{2\alpha(n+1)}} - \frac{A^3}{p}\left(\tau + \frac{1}{p}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n}e^{-np\tau}}{p^{2\alpha(n+1)}},\end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(p) = &\tau\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n+1}e^{-np\tau}}{p^{2\alpha n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n+1}e^{-np\tau}}{p^{2\alpha n+2}} + \tau\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n+3}e^{-np\tau}}{p^{2(n+1)\alpha+1}} \\ &+\tau\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n+3}e^{-(n+1)p\tau}}{p^{2(n+1)\alpha+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{A^{2n+3}e^{-(n+1)p\tau}}{p^{2(n+1)\alpha+2}} \\ &-\tau\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n+3}e^{-np\tau}}{p^{2(n+1)\alpha+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{A^{2n+3}e^{-np\tau}}{p^{2(n+1)\alpha+2}} \\ = &\frac{A\tau}{p} + \frac{A}{p^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{A^{2k+1}e^{-(k-1)p\tau}}{p^{2k\alpha+2}}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}x(t) &= A(t+\tau) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^kA^{2k+1}}{\Gamma(2\alpha k+2)}(t-(k-1)\tau)^{2\alpha k+1}\sigma(t-(k-1)\tau) \\ &= Sin_{\alpha,\tau}(At).\end{aligned}$$

La preuve de la proposition est achevée.

Maintenant considérons le problème suivant

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^{2\alpha}x(t) + A^2x(t-\tau) = 0, & \text{si}\, t > 0, \\ x(t) = \varphi(t), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \\ x'(t) = \varphi'(t), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

où $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^2.

On a le résultat suivant

Théorème 3.1 *La solution du problème* (3.8) *est donnée par*

$$x(t) = \varphi(-\tau)Cos_{\alpha,\tau}(At) + A^{-1}\left\{\varphi'(-\tau)Sin_{\alpha,\tau}(At) + \int_{-\tau}^{0} Sin_{\alpha,\tau}A(t-\tau-\xi)\varphi''(\xi)d\xi\right\}. \tag{3.9}$$

Preuve :

On cherche la solution du problème (3.8) sous la forme

$$x(t) = Cos_{\alpha,\tau}(At).c_1 + Sin_{\alpha,\tau}(At).c_2 + \int_{-\tau}^{0} Sin_{\alpha,\tau}A(t-\tau-\xi)y''(\xi)d\xi,$$

où c_1, c_2 sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $y : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^2.

Déterminant les vecteurs c_1 , c_2 et la fonction y.

Pour $-\tau \leq t \leq 0$, on a

$$x(t) = \varphi(t),$$

et

$$x'(t) = \varphi'(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= Cos_{\alpha,\tau}(At).c_1 + Sin_{\alpha,\tau}(At).c_2 + \int_{-\tau}^{0} Sin_{\alpha,\tau}A(t-\tau-\xi)y''(\xi)d\xi \\ &= Cos_{\alpha,\tau}(At).c_1 + Sin_{\alpha,}(At).c_2 + \int_{-\tau}^{t} Sin_{\alpha,\tau}A(t-\tau-\xi)y''(\xi)d\xi \\ &+ \int_{t}^{0} Sin_{\alpha,\tau}A(t-\tau-\xi)y''(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Comme

$$Cos_{\alpha,\tau}(At) = I_n, \qquad Sin_{\alpha,\tau}(At) = A(t+\tau),$$

et

$$\int_{t}^{0} Sin_{\alpha,\tau}A(t-\tau-\xi)y''(\xi)d\xi = 0.$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
\int_{-\tau}^{t} Sin_{\alpha,\tau}A(t-\tau-\xi)y''(\xi)d\xi &= \int_{-\tau}^{t} Sin_{\alpha,\tau}A(s)y''(t-\tau-s)ds \\
&= \int_{-\tau}^{t} A(s+t)y'(t-\tau-s)ds \\
&= -A(s+\tau)y'(t-\tau-s)\Big|_{-\tau}^{t} + A\int_{-\tau}^{t} y'(t-\tau-s)ds \\
&= -A(t+\tau)y'(-\tau) - A\left[y(-\tau)-y(t)\right].
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$\varphi(t) = I_n c_1 + A(t+\tau)c_2 - A(t+\tau)y'(-\tau) - A\left[y(-\tau)-y(t)\right].$$

Pour $t=-\tau$, on obtient

$$c_1 = \varphi(-\tau).$$

Maintenant si on dérive la fonction φ, on obtient

$$\varphi'(t) = Ac_2 - Ay'(-\tau) + Ay'(t).$$

Pour $t=-\tau$, on obtient

$$\varphi'(-\tau) = Ac_2.$$

Ce qui donne,

$$c_2 = A^{-1}\varphi'(-\tau).$$

Finalement, si on dérive une deuxième fois la fonction φ, on obtient

$$\varphi''(t) = Ay''(t),$$

c'est-à-dire,

$$y''(t) = A^{-1}\varphi''(t).$$

En conclusion, la solution de (3.8) est donnée par

$$x(t) = \varphi(-\tau)Cos_{\alpha,\tau}(At) + A^{-1}\left\{\varphi'(-\tau)Sin_{\alpha,\tau}(At) + \int_{-\tau}^{0} Sin_{\alpha,\tau}A(t-\tau-\xi)\varphi''(\xi)d\xi\right\}.$$

La preuve est terminée.

Maintenant on considère le problème suivant

$$
\begin{cases}
{}^{c}\mathbf{D}_0^{2\alpha}x(t) + A^2x(t-\tau) = f(t), & \text{si}\, t>0, \\
x(t) \equiv 0_{\mathbb{R}^n}, & \text{si} -\tau \le t \le 0, \\
x'(t) \equiv 0_{\mathbb{R}^n}, & \text{si} -\tau \le t \le 0,
\end{cases}
\tag{3.10}
$$

où $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

On a le résultat suivant

Théorème 3.2 *On suppose que la fonction f admet une transformée de Laplace, alors la solution du problème* (3.10) *est donnée par :*

$$x_0(t) = A^{-1}\left\{\int_0^t Sin_{\alpha,\tau}A(t-\tau-s)f(s)ds\right\}.$$

Preuve :

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (3.10), on obtient

$$p^{2\alpha}\tilde{x}(p) - p^{2\alpha-1}x(0) - p^{2\alpha-2}x'(0) + A^2\int_0^{+\infty} e^{-pt}x(t-\tau)dt = F(p),$$

c'est-à-dire,

$$p^{2\alpha}\tilde{x}(p) + A^2e^{-p\tau}\tilde{x}(p) = F(p)$$

$$\left[p^{2\alpha} + A^2e^{-p\tau}\right]\tilde{x}(p) = F(p).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(p) &= \frac{1}{[p^{2\alpha} + A^2e^{-p\tau}]}F(p)\\ &= \frac{1}{p^{2\alpha}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n}e^{-np\tau}}{p^{2\alpha n}}F(p).\end{aligned}$$

Ce qui donne,

$$\tilde{x}(p) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n}e^{-np\tau}}{p^{2\alpha(n+1)}}F(p).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nA^{2n}\frac{(t-s-n\tau)^{2\alpha(n+1)-1}}{\Gamma(2\alpha(n+1))}f(s)ds\\ &= A^{-1}\int_0^t\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nA^{2n+1}\frac{[t-s-\tau-(n-1)\tau]^{2\alpha(n+1)-1}}{\Gamma(2\alpha(n+1))}f(s)ds\\ &= A^{-1}\int_0^t Sin_{\alpha,\tau}\left[A(t-s-\tau)\right]f(s)ds.\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrée.

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^{2\alpha}x(t) + A^2x(t-\tau) = f(t), & \text{si } t > 0,\\ x(t) = \varphi(t), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0,\\ x'(t) = \varphi'(t), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

où $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^2 et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

D'après les Théorèmes 3.1 et 3.2 on a le résultat suivant

Corollaire : La solution x du problème (3.11) est donnée par

$$x(t) = Cos_{\alpha,\tau}(At)\varphi(-\tau) + A^{-1}\left\{ Sin_{\alpha,\tau}(At)\varphi'(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} Sin_{\alpha,\tau}A(t-\tau-\xi)\varphi''(\xi)d\xi \right\} \tag{3.12}$$

$$+A^{-1}\left\{ \int_0^t Sin_{\alpha,\tau}A(t-\tau-\xi)f(\xi)ds \right\}.$$

3.3 Sur les systèmes d'équations différentielles fractionnaires avec deux retards d'ordre 2α

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} {}^{c}\mathbf{D}_0^{2\alpha}x(t) = B_1x(t-\tau_1) + B_2x(t-\tau_2) + f(t), & \text{si}\, t > 0, \\ x(t) = \varphi(t), & \text{si} -\tau \le t \le 0, \\ x'(t) = \varphi'(t), & \text{si} -\tau \le t \le 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

où $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$, $\tau =: max\,\{\tau_1, \tau_2\}$, B_1, B_2 sont deux matrices carrés d'ordre n, $n \in \mathbb{N}$ avec $(B_1.B_2 = B_2.B_1)$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue d'ordre exponentiel, $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 et $\dfrac{1}{2} < \alpha \le 1$.

On a le résultat suivant

Théorème 3.3 *La solution x du problème* (3.13) *est donnée par*

$$x(t) = \sum_{\substack{k_1\tau_1+k_2\tau_2 \le t-s \\ k_1,k_2 \ge 0}} \binom{k}{k_1, k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m} \right) \left[\frac{(t - \sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} \right] \varphi(0)$$

$$+ \sum_{\substack{\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m \le t-s \\ k_1,k_2 \ge 0}} \binom{k}{k_1, k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m} \right) \left[\frac{(t - \sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k+1}}{\Gamma(2\alpha k+2)} \right] \varphi'(0)$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} B_j \int_0^{\tau_j} \tilde{C}(t-s)\varphi(s-\tau_j)ds + \int_0^t \tilde{C}(t-s)f(s)ds.$$

où

$$\tilde{C}(t) = \sum_{\substack{k_1\tau_1+k_2\tau_2 \le t-s \\ k_1,k_2 \ge 0}} \binom{k}{k_1, k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m} \right) \left[\frac{(t - \sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k+2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha k+2\alpha)} \right],$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve : Tout d'abord on définit la fonction ψ par :

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si}\, t \in [-\tau, 0], \\ 0, & \text{si}\, t \notin [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Maintenant en appliquant la transformée de Laplace à l'équation dans (3.13), on obtient

$$\begin{aligned}
p^{2\alpha}\tilde{x}(p) - p^{2\alpha-1}x(0) - p^{2\alpha-2}x'(0) &= \sum_{i=1}^{2} B_i \int_0^{+\infty} e^{-ps}x(s-\tau_i)ds + F(p) \\
p^{2\alpha}\tilde{x}(p) - p^{2\alpha-1}\varphi(0) - p^{2\alpha-2}\varphi'(0) &= \sum_{i=1}^{2} B_i \int_0^{+\infty} e^{-ps}x(s-\tau_i)ds + F(p) \\
&= \sum_{i=1}^{2} B_i \left(\int_0^{\tau_i} e^{-ps}\varphi(s-\tau_i)ds + \int_{\tau_i}^{+\infty} e^{-ps}\varphi(s-\tau_i)ds \right) + F(p) \\
&= \sum_{i=1}^{2} B_i \left(\int_0^{+\infty} e^{-ps}\psi(s-\tau_i)ds + e^{-p\tau_i} \int_0^{+\infty} e^{-ps}x(s)ds \right) + F(p) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left[B_i \mathcal{L}\left(\psi(s-\tau_i)\right) + B_i e^{-p\tau_i} x(p) \right] + F(p).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\left[p^{2\alpha} - \sum_{i=1}^{2} B_i e^{-p\tau_i} \right] \tilde{x}(p) = \varphi(0)p^{2\alpha-1} + \varphi'(0)p^{2\alpha-2} + \sum_{i=1}^{2} B_i \mathcal{L}\left(\psi(s-\tau_i)\right) + F(p).$$

Comme

$$\left[1 - \sum_{i=1}^{2} \frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}} \right]^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}} \right]^k.$$

On obtient

$$\tilde{x}(p) = \frac{1}{p^{2\alpha}} \left[1 - \sum_{i=1}^{2} \frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}} \right]^{-1} \left[\varphi(0)p^{2\alpha-1} + \varphi'(0)p^{2\alpha-2} + \sum_{i=1}^{2} B_i \mathcal{L}\left(\psi(s-\tau_i)\right) + F(p) \right].$$

Par suite,

$$x(t) = A_0 + A_0' + \sum_{j=1}^{2} B_j A_j + A_f.$$

Avec

$$A_0 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^{2\alpha}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}} \right]^k \right) p^{2\alpha-1}\varphi(0) \right\},$$

$$A_0' = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{2\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}}\right]^k\right)p^{2\alpha-2}\varphi'(0)\right\},$$

$$A_j = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{2\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}}\right]^k\right)\mathcal{L}(\psi(t-\tau_j))\right\}, \qquad \text{pour } j=1,2,$$

et

$$A_f = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{2\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}}\right]^k\right)F(p)\right\}.$$

Calculons A_0,A_0',A_j pour $j=1,2$ et A_f .

Pour A_0, on a

$$\begin{aligned}
A_0 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{2\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}}\right]^k\right)p^{2\alpha-1}\varphi(0)\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}}\right]^k\right)\varphi(0)\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left(\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}}\right]^k\right)\varphi(0)\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sigma * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left(\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}}\right]^k\right)\varphi(0)\right\}\right)\\
&= (\sigma * \delta)(t)\varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sigma * \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}}\right]^k\right)\varphi(0)\right\}\right).
\end{aligned}$$

Utilisant le Théorème 1.2 du Chapitre 1, on obtient

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sigma(t)\varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sigma * \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\prod_{m=1}^{2}\left(\frac{B_m e^{-p\tau_m}}{p^{2\alpha}}\right)^{k_m}\right)\varphi(0)\right\}\right)\\
&= \sigma(t)\varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left(\sigma * \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\prod_{m=1}^{2}\left(\frac{B_m e^{-p\tau_m}}{p^{2\alpha}}\right)^{k_m}\right)\varphi(0)\right\}\right).
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.2 du Chapitre 1, on a

$$A_0 = \sigma(t)\varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\int_0^t \frac{(s-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m)^{\alpha\sum_{m=1}^{2}k_m - 1}}{\Gamma(\alpha\sum_{m=1}^{2}k_m)}\left(\prod_{m=1}^{2}B_m^{k_m}\right)\varphi(0)$$

$$\times\, \sigma\left(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m\right)\sigma(t-s)ds.$$

On a

$$\begin{aligned}\sigma(t-s).\sigma(s-\textstyle\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m) &= \sigma(t-\textstyle\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m)\\ &= \begin{cases}1, & \text{si}\, t>s>\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}A_0 &= \sigma(t)\varphi(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\frac{(t-\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}\\ &\quad\times\sigma(t-\textstyle\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m)\left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right)\varphi(0)\\ &= \sum_{\substack{\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m<t\\ k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\left[\frac{(t-\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}\right]\varphi(0).\end{aligned}$$

Maintenant calculons A_0', on a

$$\begin{aligned}A_0' &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{2\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}}\right]^k\right)p^{2\alpha-2}\varphi'(0)\right\}\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{2}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}}\right]^k\right)\varphi'(0)\right\}\\ &=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\varphi'(0)}{p^2}\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)*\mathcal{L}^{-1}\left(\prod_{m=1}^{2}\left(\frac{e^{-p\tau_m}}{p^{2\alpha}}\right)^{k_m}\right)\right.\\ &\quad *\left(\textstyle\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right)\varphi'(0)\\ &= t.\sigma(t).\varphi'(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)*\mathcal{L}^{-1}\left(\prod_{m=1}^{2}\left(\frac{e^{-p\tau_m}}{p^{2\alpha}}\right)^{k_m}\right)\right.\\ &\quad *\left(\textstyle\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right)\varphi'(0)\\ &= t.\sigma(t).\varphi'(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right)\varphi'(0)\times(E),\end{aligned}$$

où

$$E = t.\sigma(t)*\frac{(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha\sum_{m=1}^{2} k_m-1}}{\Gamma(2\alpha\sum_{m=1}^{2} k_m)}\sigma\left(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m\right)$$

$$= \int_0^t (t-s)\sigma(t-s)\frac{(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k-1}}{\Gamma(2\alpha k)}\sigma\left(s-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m\right)ds$$

$$= \int_{\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m}^{t} (t-s)\frac{(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k-1}}{\Gamma(2\alpha k)}\sigma\left(t-\sum_{m=1}^{2}k_m\tau_m\right)ds.$$

Si on pose

$$s = \sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m + (t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)v.$$

On obtient

$$E = \frac{(t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k+1}}{\Gamma(2\alpha k+2)}.$$

Par suite, il résulte que

$$A_0' = t.\sigma(t).\varphi'(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left(\prod_{m=1}^{2}B_m^{k_m}\right)\frac{(t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k+1}}{\Gamma(2\alpha k+2)}\varphi'(0)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left(\prod_{m=1}^{2}B_m^{k_m}\right)\frac{(t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k+1}}{\Gamma(2\alpha k+2)}\varphi'(0)$$

$$= \sum_{\substack{\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m\leq t-s\\ k_1,k_2,\ldots,k_n\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left(\prod_{m=1}^{2}B_m^{k_m}\right)\frac{(t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k+1}}{\Gamma(2\alpha k+2)}\varphi'(0).$$

Maintenant calculons les A_j pour $j=1,2$.

On a

$$A_j = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{2\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i e^{-p\tau_i}}{p^{2\alpha}}\right]^k\right)\mathcal{L}(\psi(t-\tau_j))\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{L}(\varphi(t-\tau_j))}{p^{2\alpha}}\right\} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}}\binom{k}{k_1,k_2}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^{2\alpha}}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\prod_{m=1}^{2}\left(\frac{e^{-p\tau_m}}{p^{2\alpha}}\right)^{k_m}\right)\right.$$

$$* \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right)\psi(.-\tau_j)$$

$$= \int_0^t \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}.\psi(s-\tau_j)\sigma(t-s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2} \left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^{2\alpha}}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\prod_{m=1}^{2}\left(\frac{e^{-p\tau_m}}{p^{2\alpha}}\right)^{k_m}\right)\right.$$

$$\left. * \left(\prod_{m=1}^2 B_m^{k_m}\right)\psi(.-\tau_j)\right.$$

$$= \int_0^t \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}.\psi(s-\tau_j)\sigma(t-s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right) \times [F * \psi(.-\tau_j)].$$

Avec

$$F = \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\sigma(t) * \frac{(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha\sum_{m=1}^{2} k_m - 1}}{\Gamma(2\alpha\sum_{m=1}^{2} k_m)}\sigma\left(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m\right)$$

$$= \int_0^t \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha-1)}\sigma(t-s)\frac{(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k-1}}{\Gamma(2\alpha k)}\sigma\left(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m\right)ds$$

$$= \int_{\sum_{m=1}^2 k_m\tau_m}^{t} \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\frac{(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k-1}}{\Gamma(2\alpha k)}\sigma\left(t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m\right)ds$$

$$= \frac{(t-\sum_{m=1}^2 k_m\tau_m)^{2\alpha k+2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha k+2\alpha)}.$$

Par suite,

$$A_j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right) \frac{(t-s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha\sum_{m=1}^{2} k_m + 2\alpha - 1}}{\Gamma(2\alpha\sum_{m=1}^{2} k_m + 2\alpha)}$$

$$\times\sigma\left(s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m\right) * \psi(.-\tau_j)$$

$$= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right) \left[\frac{(t-s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k+2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha k+2\alpha)}\sigma\left(t-s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m\right)\psi(s-\tau_j)\right] ds$$

$$= \int_0^t \sum_{\substack{k_1\tau_1+k_2\tau_2\leq t-s\\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right) \left[\frac{(t-s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k+2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha k+2\alpha)} \psi(s-\tau_j) \right] ds.$$

En conclusion, on a

$$A_j = \int_0^{\tau_j} \tilde{C}(t-s)\varphi(s-\tau_j)ds, \qquad pour\, j=1,2.$$

De même pour A_f, on a

$$A_f = \int_0^t \sum_{\substack{k_1\tau_1+k_2\tau_2\leq t-s\\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2} \left(\prod_{m=1}^{2} B_m^{k_m}\right) \left[\frac{(t-s-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k+2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha k+2\alpha)} f(s) \right] ds$$

$$= \int_0^t \tilde{C}(t-s)f(s)ds.$$

Oui devait être prouvée.

3.3.1 Généralisation

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{D}_0^{2\alpha} x(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i x(t-\tau_i) + f(t), & \text{si}\, t>0, \\ x(t) = \varphi(t), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \\ x'(t) = \varphi'(t), & \text{si} -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{3.14}$$

où $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, B_i est une matrice carré d'ordre n avec $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et $B_iB_j = B_jB_i$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ une fonction d'ordre exponentiel, $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1, $\tau =: max\, \{\tau_i\}$ et $\tau_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$.

Le Théorème 3.3 admet la généralisation suivante

Théorème 3.4 *Le problème* (3.14) *admet une solution x donnée par*

$$x(t) = \sum_{\substack{\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m\leq t-s\\ k_1,k_2,...,k_n\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2,...,k_n} \left(\prod_{m=1}^{n} B_m^{k_m}\right) \left[\frac{(t-\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} \right] \varphi(0) \tag{3.15}$$

$$+ \sum_{\substack{\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m\leq t-s\\ k_1,k_2,...,k_n\geq 0}} \binom{k}{k_1,k_2,...,k_n} \left(\prod_{m=1}^{n} B_m^{k_m}\right) \left[\frac{(t-\sum_{m=1}^{2} k_m\tau_m)^{2\alpha k+1}}{\Gamma(2\alpha k+2)} \right] \varphi'(0)$$

$$+\sum_{j=1}^{n} B_j \int_0^{\tau_j} \tilde{C}_n(t-s)\varphi(s-\tau_j)ds + \int_0^t \tilde{C}_n(t-s)f(s)ds,$$

où

$$\tilde{C}_n(t) = \sum_{\substack{\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m \le t-s \\ k_1,k_2,\ldots,k_n \ge 0}} \binom{k}{k_1, k_2, ..., k_n} \left(\prod_{m=1}^{n} B_m^{k_m}\right) \left[\frac{(t-\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m)^{2\alpha k+2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha k+2\alpha)}\right],$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve : La preuve est similaire à celle du Théorème 3.3.

Bibliographie

[1] Bellman, R. et K.L. Cooke, Differential Difference Equations. Academic Press, New York, 1963.

[2] L. Comptet, Analyse Combinatoire, Presses Universitaires de France, Vol. 1, Paris, 1970.

[3] J. Diblík, M. Fečkan and M. Pospíšil, Representation of a solution of the Cauchy problem for an oscillating system with two delays and permutable matrices, Ukrainian Math. J. 65(2013), 64-76.

[4] A. Halanay, Differential Equations : Stability, Oscillations, Time Lags. Academic Press, New York, 1966.

[5] J. Hale, Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1977.

[6] D. Ya. Khusainov, J. Diblík, M. Růžičková and J. Lukáčová, Representation of a solution of the Cauchy problem for an oscillating system with pure delay, Nonlinear Oscillations, 11(2008), 276-285.

[7] D. Ya. Khusainov, A. F. Ivanov and G. V. Shuklin, On a representation of solutions of linear delay systems, Differ. Equ. 41(2005), 1054-1058.

[8] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[9] V. B. Kolmanovskii and A. Myshkis, Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Kluwer Acad., Dordrecht, 1999.

[10] M. Pospíšil, F. Jaroš, On the representation of solutions of delayed differential equations via Laplace transform, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016(2016), 1-13.

[11] M. R. Spiegel, Transformée de Laplace, Cours et problèmes - 450 exercices résolus, McGraw-Hill, Série Schaum, 1980.

[12] H. ZHANG and D. Wu, Variation of constant formulae for time invariant and time varying Caputo fractional delay differential systems, J. Math. Res. Appl. 34(2014), 549-560.

Résumé

En utilisant la transformée de Laplace on donne dans ce mémoire les solutions explicites pour certains systèmes d'équations différentielles fractionnaires linéaires avec retard au sens de Caputo.

Mots clés : Transformée de Laplace, fonction de Mittag-Leffler, fonction de Heaviside, intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo.

Abstract

By using the Laplace transform, we give in this memory the explicit solutions for some systems of linear fractional derivative with delay in the sense of Caputo

Keywords : Laplace transform, Mittag-Leffler function, Heaviside function, Riemann-Liouville Fractional Integral, Riemann-Liouville and Caputo Fractional Derivative.