



جامعة أبو بكر بلقايد - تلمسان

Université Abou Bakr Belkaïd de Tlemcen

Faculté de Technologie

Département de Génie Biomédical

Laboratoire de Recherche de Génie Biomédical

MEMOIRE DE PROJET DE FIN D'ETUDES

pour l'obtention du Diplôme de

MASTER en GENIE BIOMEDICAL

Spécialité : Imagerie Médicale

présenté par : KERMOUNI SERRADJ Nadia et LAIDAOUI Asma

**Analyse multifractale par ondelettes
Application en mammographie**

Soutenu le 13 Septembre 2017 devant le Jury

Mr.	DJEBBARI Abdelghani	<i>MCB</i>	Université de Tlemcen	Président
Mme	BENSEGHIR Sihem	<i>MCB</i>	Université de Tlemcen	Encadreur
Mme	LOUDJDI Kamila	<i>MCB</i>	Université de Tlemcen	Examinatrice

Année universitaire 2016- 2017

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant et miséricordieux de m'avoir donné la force et la patience pour accomplir ce modeste travail.

La première personne que je tiens à remercier est mon encadreur Mme Benseghir pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail. Je voudrais également lui témoigner ma gratitude pour sa patience et son soutien afin de mener ce travail au bon port.

Mes remerciements s'étendent également à Mr Djebbari qui a accepté de présider le jury et à Mme Loudjdi pour l'intérêt qu'elle a porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail.

Je saisis cette occasion pour remercier tous les professeurs du département de génie biomédical qui nous ont enseigné durant ces cinq ans d'études.

J'adresse mes remerciements les plus sincères et mes profondes reconnaissances à mes chers parents pour leur éducation, leurs encouragements et leur amour. Sans eux, je n'en serais pas là.

Bien sûr, je n'oublie pas de remercier mon mari pour son soutien et sa patience durant ces deux ans de master et qui m'a donné la force et le courage pour surmonter tous les obstacles et d'aller jusqu'au bout.

Enfin, je tiens à remercier mon binôme Asma, mes amies et tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Merci à tous et à toutes !

Nadia Kermouni Serradj Ep Bemrah

Remerciements

Tout d'abord je remercie Dieu qui m'a donné du courage de terminer ce modeste travail.

En premier lieu je tiens à exprimer toute ma reconnaissance pour mon encadreur Madame Bensghir. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les membres de jury : Mr Djebbari d'accepter d'être le président du jury, Madame Loudjdi qui nous a orienté dans le premier jour et qui nous a conseillé de choisir ce thème, et à Mr Boukli de son aide.

Sans oublier tous les professeurs à qui j'ai assisté à leur cours durant les cinq ans de formation.

Un spécial merci aussi à Mr Benouis professeur à l'université de Msila qui m'a aidé.

Un grand merci cette fois-ci adressé aux gens qui sont toujours auprès de moi, à ma chère maman Tebboune Zakia pour son amour, sa patience et l'encouragement qu'elle m'a donné toujours.

Merci à mon père et mes sœurs, mes tantes et mon oncle, mes cousines plus particulièrement Hadjer, toute la famille Laidaoui et Tebboune. Merci à mon amie et mon binôme Nadia, à ma copine de chambre Imene, mes sœurs de cœur Fatima, Sihem et Amina et à tous mes amies.

A tous les intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Asma Laidaoui

Glossaire.....	06
Liste des figures.....	07
Liste des tableaux.....	10
Introduction générale.....	11

CHAPITRE I : Géométrie fractale & Analyse multifractale

Introduction.....	14
1. Géométrie fractale.....	14
1.1. Historique.....	14
1.2. Objet fractal.....	17
1.3. Dimensions.....	19
1.4. Méthodes de calcul de la dimension fractale.....	21
2. Analyse multifractale.....	22
2.1. Du mono au multifractal.....	22
2.2. De la régularité globale à la régularité locale.....	23
2.3. Spectre de singularités.....	24
2.4. Méthodes de calcul du spectre multifractal.....	26
Conclusion.....	31

CHAPITRE II : Analyse multifractale basée sur la transformée en ondelettes

Introduction.....	33
1. Analyse multi-échelle : les ondelettes.....	33
1.1. La transformée en ondelettes.....	33
1.2. Propriétés des ondelettes.....	35
1.3. Propriétés des coefficients d'ondelettes.....	36

1.4. Choix de l'ondelette.....	37
2. Analyse multifractale et ondelettes.....	37
3. Formalisme multifractal basé sur les ondelettes.....	38
3.1. La méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes.....	38
3.2. La méthode des coefficients d'ondelettes discrets.....	43
3.3. La méthode des coefficients dominants.....	43
4. Etat de l'art.....	43
Conclusion.....	46

CHAPITRE III : Application de l'analyse multifractale par ondelettes en mammographie

Introduction.....	48
1. Contexte médical.....	48
1.1. Anatomie du sein.....	48
1.2. La densité mammaire.....	49
1.3. Pathologies du sein.....	50
1.4. L'image mammographique.....	55
2. Méthodologie.....	55
3. Choix et fixation des paramètres de calcul de l'image alpha.....	57
4. Etude du spectre multifractal.....	61
5. Application en mammographie.....	63
5.1. Caractérisation.....	63
5.1.1. Caractérisation des tissus mammaires sains et pathologiques.....	63
5.1.2. Caractérisation des tissus mammaires denses et gras.....	67
5.1.3. Caractérisation des pathologies malignes et bénignes.....	70
5.2. Segmentation.....	71

5.2.1. Segmentation des masses mammaires.....	72
5.2.2. Segmentation des microcalcifications.....	75
Conclusion.....	76
Conclusion générale.....	78
Références et bibliographie.....	80
Résumé.....	85

Glossaire

D_T : Dimension topologique

D_F : Dimension fractionnaire

D_H : Dimension de Hausdorff

CDB : Comptage de boites différentiel

H : Exposant de Hurst

F_H : Spectre de Hausdorff

F_G : Spectre de grandes déviations

F_L : Spectre de Legendre

D_q : Dimension Généralisée

\dim_H : Dimension de Hausdorff

TO : Transformée en Ondelettes

TOC : Transformée en Ondelettes Continue

TOD : Transformée en Ondelettes Discrète

MMTO : Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes

MM : Module Maximum

ML : Ligne Maximale

L^2 : l'espace des fonctions de carré intégrable

\mathbb{R} : l'espace des réels

$V_j \oplus W_j$: Somme discrète de deux espaces vectoriels

ACR: American College of Radiology

BI-RADS: Breast Imaging Reporting and Data System

RI: Région d'Intérêt

MIAS : Mammographic Image Analysis Society

Liste des figures

Fig I.1 : La baderne d'Apollonius.....	15
Fig I.2 : Les fractals de Sierpinski, tapis et triangle.....	15
Fig I.3 : Quelques fractales artificielles et leurs étapes de construction.....	16
Fig I.4 : Fractals naturels.....	16
Fig I.5 : Fractals dans le corps humain.....	16
Fig I.6 : Autosimilarité exacte et statistique dans différentes échelles d'observation.....	18
Fig I.7 : L'invariance d'échelle pour un fractal naturel.....	18
Fig I.8 : Dimensions de quelques éléments de base de la géométrie.....	19
Fig I.9 : Dimension fractale selon Hausdorff.....	20
Fig I.10 : Grille de pavés réguliers pour le calcul de la dimension de boîtes.....	21
Fig I.11: Schéma descriptif de la méthode de comptage de boîtes pour un objet 1D (à gauche), un objet 2D (au milieu) et un objet 3D (à droite).....	22
Fig I.12 : Exemple de calcul de l'exposant de Hölder.....	23
Fig I.13 : Spectre de singularités pour un signal 1D et 2D.....	25
Fig I.14 : Ensemble de Cantor et son spectre $f(\alpha)$ de singularités associé aux mesures multifractales.....	28
Fig I.15 : Exemple de spectre multifractal avec q le moment d'ordre, $D(q)$ dimensions fractales et Δ_h la largeur du spectre.....	30
Fig II.1 : Représentation de quelques types d'ondelettes.....	33
Fig II.2 : Dilatation et translation d'une ondelette.....	34
Fig II.3 : Transformée en ondelettes continue d'un signal.....	37
Fig II.4 : Analyse d'une régularité et d'une singularité sur un signal 1D par MMTO.....	39

Fig II.5 : Représentation tridimensionnelle de l'évolution des chaînes MMTO.....	41
Fig II.6 : Détection d'un amas de microcalcifications.....	44
Fig II.7 : (a) : Image ultrasonore de la peau, (b) : Spectre multifractal obtenu par la méthode des coefficients discrets, (c) : Spectre multifractal obtenu par méthode des coefficients dominants.....	45
Fig II.8 : (a) : Image d'IRM du cerveau, (b) : Spectre multifractal obtenu par méthode des coefficients dominants.....	45
Fig III.1 : Schéma de l'anatomie du sein.....	49
Fig III.2 : Densité mammaire selon le lexique BI-RADS.....	50
Fig III.3 : Les différents types de microcalcifications.....	51
Fig III.4 : Les différentes distributions des microcalcifications.....	51
Fig III.5 : Les différentes formes possibles d'une masse.....	52
Fig III.6 : Les différents contours d'une masse.....	53
Fig III.7 : Quelques pathologies mammaires.....	53
Fig III.8 : Schéma général résumant la méthode de travail.....	57
Fig III.9 : Image de test 'boule'.....	57
Fig III.10 : les images (a), (b) et (c) représentent l'image test avec différentes tailles et les images α correspondants.....	58
Fig III.11 : Les spectres multifractals des trois images.....	58
Fig III.12 : (a), (b), (c) et (d) représentent respectivement les images α aux échelles 5, 10, 20 et 30.....	60
Fig III.13 : Les spectres multifractals des images (a), (b), (c) et (d).....	60
Fig III.14 : (a), (b), (c) et (d) représentent respectivement les images α obtenues en utilisant l'ondelette gaussienne, chapeau mexicain, gaussienne d'ordre 3 et Morlet.....	61
Fig III.15 : Représentation de trois images différentes (a), (b) et (c) et leurs images α (d), (e) et (f).....	62

Fig III.16 : Les spectres multifractals des images (d), (e) et (f).....	62
Fig III.17 : Mammographie normale des deux seins droit et gauche.....	64
Fig III.18 : Spectres multifractals du sein gauche et droit.....	64
Fig III.19 : 3 exemples de trois mammographies des deux seins.....	65
Fig III.20 : Spectres multifractals des trois mammographies.....	65
Fig III.21 : Mammographie présentant des microcalcifications.....	66
Fig III.22 : Spectres multifractals des deux R.I.....	66
Fig III.23 : Quatre mammographies de densité mammaire croissante.....	67
Fig III.24 : Spectres multifractals des quatre mammographies.....	68
Fig III.25 : mammographies de seins denses et seins gras.....	68
Fig III.26 : Spectres multifractals des six mammographies.....	69
Fig III.27 : Mammographies présentant différentes pathologies dans le cas bénin et malin.....	70
Fig III.28 : Spectres multifractals des différentes pathologies.....	71
Fig III.29 : Mammographie montrant une masse maligne.....	72

Liste des tableaux

Tableau III.1 : Classification des pathologies mammaires selon BIRADS de l'ACR.....54

Tableau III.2 : Atténuation radiologique des composants mammaires.....55

Tableau III.3 : Variation du temps de calcul et de la crête du spectre en fonction de l'échelle.....59

Tableau III.4 : Variation du temps de calcul et de la crête du spectre en fonction de l'échelle.....60

Tableau III.5 : Paramètres de calcul de l'image alpha et du spectre multifractal.....61

Tableau III.6 : Variation de la largeur des spectres des trois images.....63

Tableau III.7 : Valeurs des exposants de Hölder et largeur des spectres.....64

Tableau III.8 : Valeurs des exposants de Hölder et largeur des spectres.....66

Tableau III.9 : Valeurs des exposants de Hölder et largeur du spectre.....67

Tableau III.10 : Valeurs des exposants et de la largeur des spectres.....68

Tableau III.11 : Valeurs des exposants et des largeurs des spectres des tissus denses et gras.....69

Tableau III.12 : Valeurs des exposants et des largeurs des spectres des pathologies malignes et bénignes.....71

Tableau III.13 : Segmentation de la masse pour différentes échelles.....73

Tableau III.14 : Segmentation d'une masse circonscrite pour 10 échelles.....74

Tableau III.15 : Segmentation d'une R.I contenant des microcalcifications pour 10 échelles.....75

Introduction générale

Le développement d'outils d'aide à la détection et au diagnostic de différentes lésions est un domaine de l'imagerie médicale qui a passionné de nombreux chercheurs. C'est un ensemble d'algorithmes développés pour la numérisation, l'extraction de caractéristiques et la classification des images médicales. Dans le cas de la mammographie, ces systèmes sont capables de détecter les zones suspectes, les foyers de microcalcifications, masses ou distorsions architecturales et de les caractériser.

Le traitement d'images est un domaine très étendu qui ne cesse de se développer depuis quelques dizaines d'années. La détection des régions d'intérêt et des contours est l'un de ses thèmes privilégiés. En effet, l'information essentielle d'une image réside souvent dans ses singularités et ses structures irrégulières pertinentes. De même, un contour est défini comme une zone où l'image varie brutalement, ce concept est très proche de celui de singularité.

L'analyse fractale est née dans les années 70 pour étudier les phénomènes et les objets complexes présentant des formes irrégulières dont la géométrie d'Euclide ne permettait pas leur description. Ces objets dit "fractals" présentent cependant une irrégularité qui est partout la même, alors qu'il existe des objets plus complexes et très irréguliers, leur irrégularité varie d'un point à un autre, d'où la naissance du mot "multifractal". Ainsi est née l'analyse multifractale pour étudier la régularité ponctuelle de ces objets à travers les échelles. C'est cette notion d'échelle qui a conduit à tisser le lien avec la transformée en ondelettes. L'aspect intéressant des ondelettes est qu'elles permettent de prendre en compte à la fois la notion d'échelle et celle de singularité.

Le but de ce mémoire est d'exploiter l'analyse multifractale par ondelettes pour la caractérisation et la segmentation des images mammographiques. L'approche choisie est celle basée sur la méthode des Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes (MMTO). Les algorithmes de calcul sont implémentés sous l'environnement MATLAB (R2016b) et appliqués sur des images mammographiques extraites de la base de données MIAS.

Afin de présenter un travail cohérent, nous avons structuré notre mémoire en trois chapitres :

Le premier chapitre aborde les notions de base nécessaires à la compréhension du monde des fractals à travers des exemples naturels et d'autres mathématiques. Une introduction et un bref historique suivis de quelques caractéristiques des objets fractals sont présentés en premier lieu. Ensuite, la différence entre la dimension topologique et la dimension fractionnaire est définie en citant quelques types de la dimension fractionnaire et une méthode de calcul de cette dernière. Le spectre multifractal prend aussi un coin dans ce chapitre avec une définition de ses trois types et deux méthodes pour le calculer dont l'une est détaillée dans le chapitre d'après.

Le deuxième chapitre est un aperçu sur les ondelettes, leurs types de transformation, leurs caractéristiques et leurs points communs avec l'analyse multifractale. En arrivant aux différentes méthodes de l'analyse multifractale par ondelettes, une grande partie est consacrée à l'explication de l'approche choisie (MMTO) suivi d'une idée générale sur les deux autres méthodes. Un bref état de l'art et des applications en imagerie médicale sont présentés à la fin du chapitre.

La mise en œuvre de cette approche et les résultats obtenus sont présentés et discutés dans le troisième chapitre où une présentation du contexte médical et une partie de test et de fixation de paramètres de calcul précèdent l'application médicale.

L'application médicale consiste à appliquer notre approche sur des images mammographiques. Elle est divisée en deux parties. La première concerne la caractérisation : discriminer entre sein sain et pathologique, entre tissu gras et dense et entre cas malin et cas bénin. Cette caractérisation se fait à l'aide du spectre de Legendre. La deuxième partie concerne la segmentation des lésions du sein comme les microcalcifications et les masses à l'aide du spectre géométrique.

Chapitre I :

Géométrie fractale

&

Analyse multifractale

Introduction :

‘La rugosité fait partie de la vie humaine depuis toujours et à jamais. Des écrivains de l’antiquité ont écrit sur ce sujet. C’était pratiquement incontrôlable’ : Benoit Mandelbrot.

Pour pallier les lacunes de la géométrie euclidienne et étudier les propriétés des ensembles assez complexes, le mathématicien franco-américain Mandelbrot a introduit la notion de ‘fractal’ en 1975.

Ce chapitre introduit plus formellement la notion de la géométrie fractale et de l’analyse multifractale.

1. Géométrie fractale :

1.1. Historique :

Le caractère fractal de certaines scènes naturelles n’était étudié qu’après que Mandelbrot ait introduit cette notion pour désigner des objets aux propriétés inhabituelles en géométrie classique [39]. Il a montré que les fractals sont présentés de façon universelle dans la nature et que leur description nécessite une géométrie bien adaptée. Notant que quelques objets de ce type avaient déjà été décrits par les mathématiciens du XIXe siècle et étaient considérés comme des curiosités [41] ou des contre-exemples par les scientifiques de l’époque.

C’est à trois siècles avant J.-C et plus exactement dans le livre ‘Tangencies’ de Perge qu’on trouve la plus ancienne référence des images fractales, où il a démontré comment tracer un cercle tangent à trois autres objets qui sont soit des points, soit des lignes ou des cercles. Perge a utilisé ce résultat pour construire une figure qui sera étudiée plus tard par Mandelbrot en tant qu’image fractale. Son principe était de construire avec un triangle curviligne dont des arcs de cercles sont ses cotés, une suite de cercles à l’intérieur. Cette étape crée trois nouveaux triangles curvilignes dans chacun desquels on peut inscrire un autre cercle [41]. En continuant ce procédé jusqu’à l’infini, on trouve une image appelée la baderne d’Apollonius (Fig I.1).

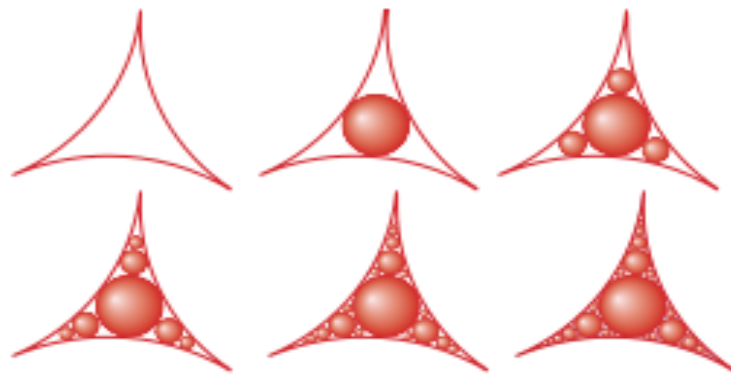


Fig I.1 : La baderne d'Apollonius

Ce n'est qu'en 1520 qu'apparaît une autre image fractale : le pentagone de Durer. Son image fractale consiste en un pentagone régulier dans lequel on place six petits pentagones similaires ; cinq d'entre eux pour recouvrir les angles du pentagone initial et le dernier doit se situer au centre du grand pentagone mais en ayant subi une rotation de 180° par rapport à celui-ci. En reprenant ce processus pour chacun des nouveaux pentagones et ainsi de suite, on trouve une image ressemblant à une dentelle [41]. Cette figure sera étudiée plus tard par Sierpinski dans ses ensembles (Fig I.2).

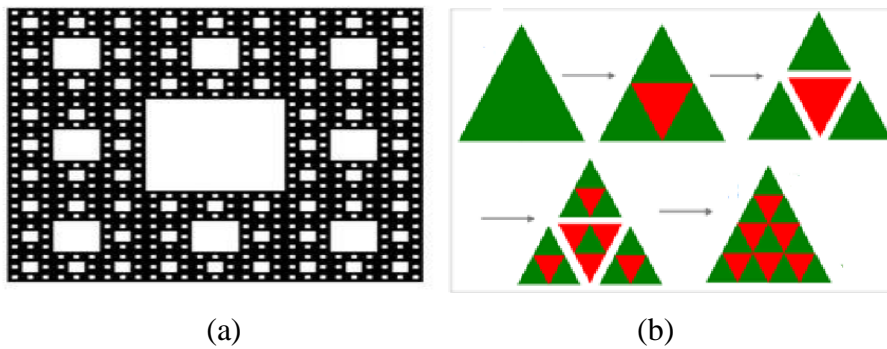


Fig I.2 : Les fractals de Sierpinski :
 (a) tapis de Sierpinski ; (b) triangle de Sierpinski.

Ultérieurement, un nombre assez important des mathématiciens ont essayé de produire des fractales artificielles (figure I.3) qui portent leurs noms. On peut citer la fractale de Cantor (1884), fractale de Peano (1890) et le célèbre flocon Von Koch (1904).

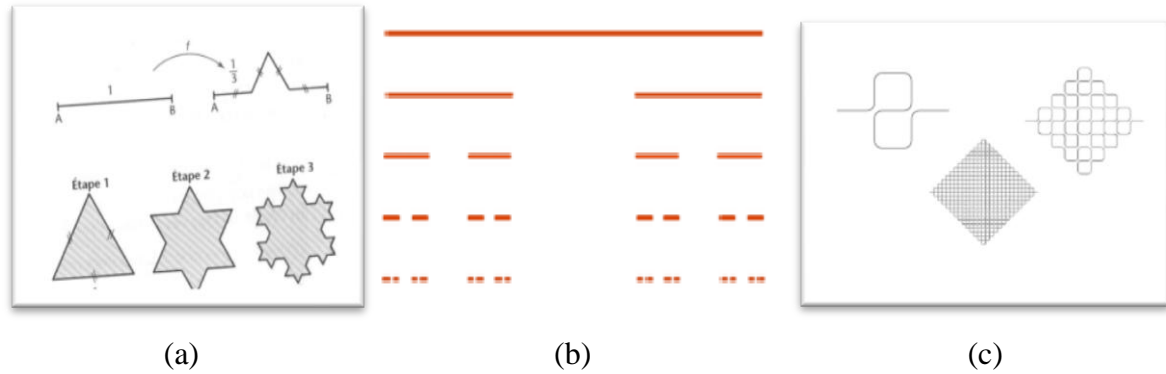


Fig I. 3 : Quelques fractales artificielles et leurs étapes de construction

(a) le flocon de Von Koch, (b) l'ensemble de Cantor, (c) fractal de Peano.

Il a fallu attendre jusqu'aux années 1950 pour que Mandelbrot débute ses travaux sur les fractals. Comme chercheur chez IBM, il commence à s'intéresser à la géométrie de la nature [1] et en créer une nouvelle instance plus représentative de la réalité : la géométrie fractale.

D'abord, ces phénomènes se présentent fréquemment dans la nature et dans la vie quotidienne : les séries de montagnes, les arbres, quelques plantes comme la fougère et le chou-fleur (Fig I.4). On les retrouve aussi dans le corps humain : l'imbrication des bronches pulmonaires, les vaisseaux sanguins, le réseau rétinien et le réseau nerveux (Fig I.5).



Fig I. 4 : Fractals naturels

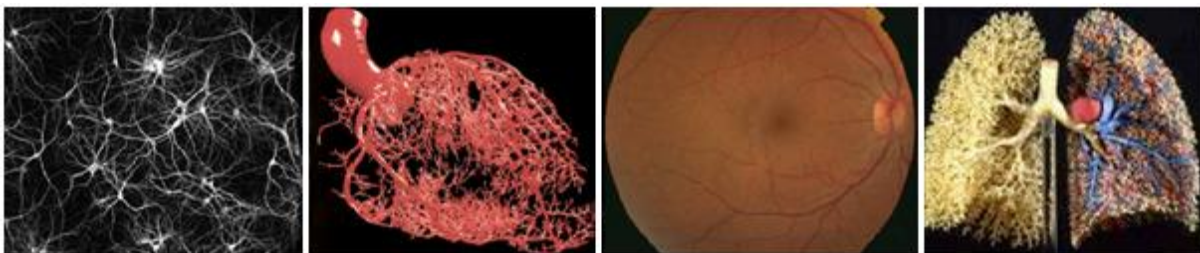


Fig I.5 : Fractals dans le corps humain

1.2. Objet fractal:

1.2.1. Définition:

Fractal adjectif proposé par Benoit Mandelbrot qui provient du mot latin « fractus » et qui signifie à la fois briser, présenter des irrégularités, fragmenter à toutes les échelles ou encore bien fractionner à l'infini [19], s'applique aux objets complexes dans l'espace ou aux fluctuations dans le temps qui possèdent une forme d'autosimilarité, et qui ne peuvent être décrits avec une seule échelle de mesure.

En effet, un fractal est un objet géométrique «infiniment morcelé» dont les détails sont observables à une échelle arbitrairement choisie.

1.2.2. Caractéristiques des fractales :

Comme l'a fait remarquer Mandelbrot, les nuages ne sont pas des sphères, les montagnes des cônes, ni les îles des cercles et leur description nécessite une géométrie adaptée. Leurs propriétés géométriques les plus communes sont :

- Une irrégularité à toutes les échelles.
- Une fractale ne présente pas des contours (surfaces) lisses.
- Toutes les images fractales mathématiques sont obtenues par une procédure récursive et les étapes successives de la construction donnent des approximations de plus en plus exactes de ces objets.
- Une fractale est une structure invariante lors de transposition d'échelle dans un sens déterministe ou statistique, elle est auto-similaire.
- Une fractale est caractérisée par une dimension fractionnaire non entière.

1.2.3. Autosimilarité :

Contrairement à une figure géométrique euclidienne, une fractale n'a pas d'échelle ou de grandeur caractéristique [19]. On dit qu'une figure qui préserve une certaine symétrie interne malgré les variations d'échelle est auto-similaire, pour les images fractales c'est la propriété la plus connue. Ceci signifie que chaque portion d'une fractale reproduit la forme générale, quelque soit le grossissement.

Cette notion englobe tout ce qu'on appelle fractal, sous diverses formes :

- *Autosimilarité exacte* : le fractal est identique à lui-même à plusieurs échelles, le triangle de Sierpinski et la courbe de Von Koch sont des exemples de fractales auto-similaires.
- *Autosimilarité statistique* : Pour beaucoup d'objets naturels, l'autosimilarité n'est pas exacte, l'objet agrandi ressemble à son image initiale mais ce n'est pas exactement le même. C'est le cas, par exemple, d'une côte rocheuse ou d'un profil topographique (Fig I.6).

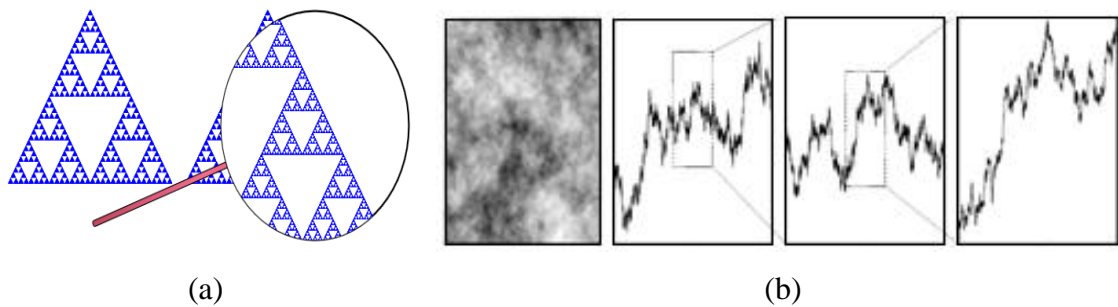


Fig I.6 : (a) : Autosimilarité exacte, (b) : Autosimilarité statistique.

1.2.4. Invariance d'échelle :

L'invariance d'échelle d'un processus suppose que celui-ci n'est caractérisé par aucune échelle de temps ou de longueur privilégiée, cela veut dire que la symétrie se retrouve à toutes les échelles [27]. Elle implique la récurrence d'un motif à l'intérieur d'un autre (un petit a les mêmes caractéristiques qu'un grand). On l'appelle aussi symétrie de dilatation.



Fig I.7 : l'invariance d'échelle pour un fractal naturel.

Remarque : L'invariance d'échelle est équivalente à l'autosimilarité exacte. Si une image fractale ne présente pas une autosimilarité exacte, elle n'est pas invariante d'échelle.

1.3. Dimensions :

1.3.1. Dimension euclidienne :

La notion usuelle de dimension d'un ensemble est celle de dimension euclidienne qui est reliée à l'espace occupé par cet ensemble, c'est la plus simple des dimensions.

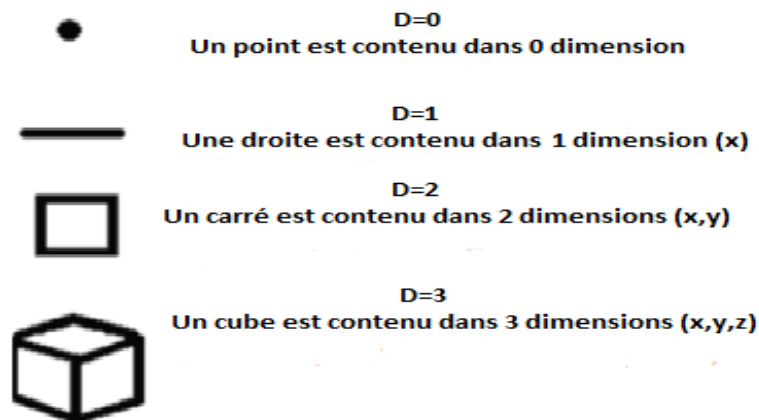


Fig I.8 : Dimensions de quelques éléments de base de la géométrie.

1.3.2. Dimension topologique :

La dimension topologique utilisée en géométrie Euclidienne est associée au nombre de degré de liberté d'un point se déplaçant à l'intérieur d'un objet. Autrement dit, la dimension topologique fait référence à un nombre entier de vecteurs indépendants qui forment la base de cet objet. Ainsi, un point est considéré comme un objet de dimension 0, une courbe comme un objet 1D et une surface comme un objet 2D, D'une manière générale, un objet de dimension n est représenté dans espace euclidien R^n [43].

1.3.3. Dimension fractionnaire :

La troisième particularité importante des fractales est leur dimension. Suivant la géométrie euclidienne, tous les objets possèdent une dimension entière mais seules les fractales disposent une dimension fractionnaire DF.

Cette dimension permet de mesurer le degré d'irrégularité d'une structure, de rugosité ou de fragmentation d'un objet. C'est un nombre qui a été introduit par la théorie fractale [36]. Il peut être entier (dans certaines fractales déterministes comme la courbe de Peano), réel et c'est le cas le plus courant, ou un nombre irrationnel (π , 1.23, etc.) [41]. Elle est connue sous différents types :

1.3.3.1. Dimension de Hausdorff :

En 1919, Hausdorff propose une nouvelle notion de dimension qui s'étend à des ensembles fractals, D_H dite aussi dimension de 'recouvrement'. Elle a la particularité d'être applicable, notamment, aux objets non rigoureusement auto-similaires [7]. Elle est défini par :

$$D_H (I) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\eta}{\ln \left(\frac{1}{\eta}\right)} \quad (\text{eq I.1})$$

Où N_η est le nombre minimal de boules de diamètre η nécessaires au recouvrement (pavage) de l'objet.

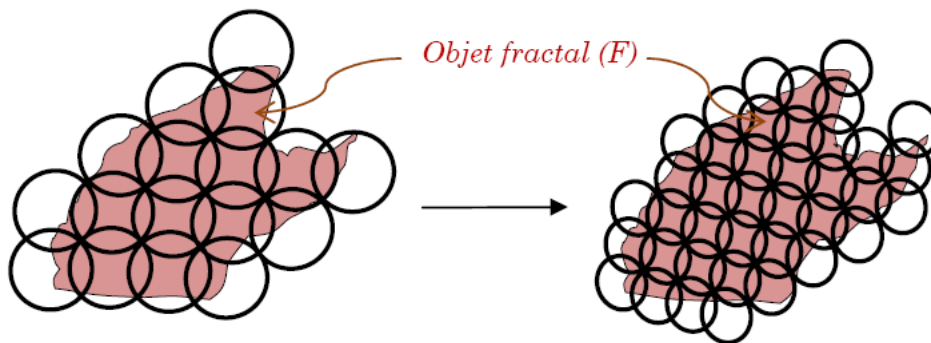


Fig I.9 : Dimension fractale selon Hausdorff.

On dit qu'un objet a une dimension fractale si sa dimension de Hausdorff est strictement supérieure à sa dimension topologique D_T . Pour la courbe de Von Koch, la dimension topologique est 1, la dimension de Hausdorff de $\log 4 / \log 3 \approx 1.26$ [16].

C'est la plus ancienne des dimensions. Cependant, elle est souvent difficile à évaluer. C'est pourquoi, on préfère parfois utiliser la dimension des boîtes.

1.3.3.2. Dimension des boîtes :

La dimension des boîtes est apparue dans les années 1930 mais ses débuts semblent difficiles à retracer. Cette dimension, notée D_b , a la particularité d'être définie à partir du comptage du nombre N_δ de pavés d'une grille interceptant un objet, et non pas, à partir de la mesure de ces pavés. Elle coïncide dans de nombreux cas, avec la dimension de Hausdorff. Elle est définie par :

$$D_b(I) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(I)}{\log 1/\delta} \quad (\text{eq I.2})$$

δ est le pas de la grille de pavage de l'objet.

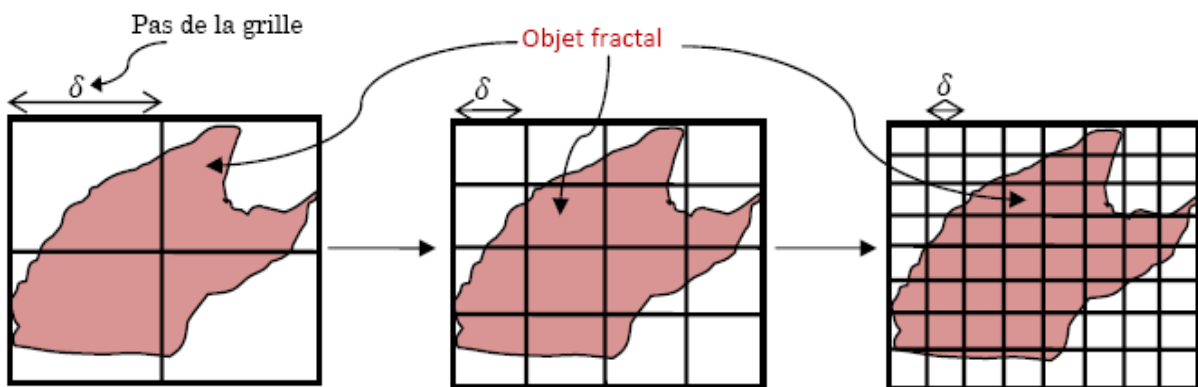


Fig I.10 : Grille de pavés réguliers pour le calcul de la dimension des boîtes.

1.4. Méthode de calcul de la dimension fractale :

La géométrie fractale est dans la majorité des cas utilisée à travers la notion de dimension fractale (DF). De nombreuses méthodes existent pour la calculer, chacune ayant ses propres bases théoriques. Bien qu'elles soient différentes, le principe de base du calcul de la DF est le même [43] :

- Mesurer les quantités représentées par l'objet en utilisant différentes « mesures ».
- Tracer le logarithme des quantités mesurées en fonction du logarithme des tailles et approximer cette droite par régression linéaire.
- Estimer la DF comme étant la pente de la droite obtenue.

Parmi les méthodes d'estimation de la DF, la méthode de comptage de boîtes est la plus utilisée. Son principe général est de recouvrir le signal par des boîtes de taille ε . La DF est ainsi donnée par :

$$DF = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (\text{eq I.3})$$

Où $N(\varepsilon)$ est le nombre de boîtes nécessaires pour recouvrir complètement le signal.

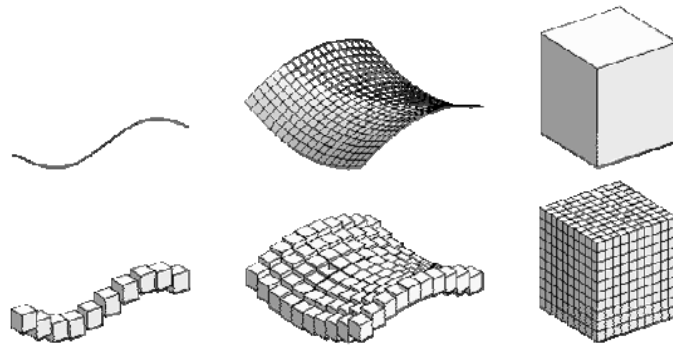


Fig I.11 : Schéma descriptif de la méthode de comptage des boîtes pour un objet 1D (à gauche), un objet 2D (au milieu) et un objet 3D (à droite).

2. Analyse multifractale :

2.1. Du mono au multifractal :

L'analyse fractale n'est plus efficace lorsque l'objet est très complexe et présente une régularité ponctuelle variant fortement d'un point à un autre, sa dimension ne peut pas le caractériser toute seule. Il faut donc calculer sa DF locale pour décrire son irrégularité en chaque point. On dit que l'objet n'est plus homogène, on parle alors d'un objet inhomogène qu'on l'appelle « multifractal ». L'étude de ces objets, leurs comportements locaux et leurs propriétés d'invariance d'échelle est faite par l'analyse multifractale.

Cette analyse née dans les années 80 pour expliquer les observations effectuées sur des signaux de turbulence, a fourni de nouveaux outils pour l'analyse et la modélisation des signaux issus de multiples domaines scientifiques [57]. Son intérêt provient de ses fortes interactions avec de nombreux domaines des mathématiques, de la physique et du traitement

de signal et de l'image, c'est donc un domaine très vaste et très utile pour traiter les singularités dans une image médicale.

2.2. De la régularité globale à la régularité locale :

Pour marquer la différence entre la dimension fractale et la dimension topologique, on définit un autre paramètre : l'exposant de Hurst H . La relation qui le relie à la dimension fractale D_F est [8] :

$$D_F + H = D_T \quad (\text{eq I.4})$$

Cet exposant décrit la régularité (ou l'irrégularité) globale des fonctions. Cependant, dans certaines situations, les informations essentielles sont contenues dans la régularité locale de la fonction (f). Il faut donc introduire un autre paramètre pour mesurer le degré de l'irrégularité dans un point donné. Il s'agit de l'exposant de Hölder α dit aussi exposant de Hurst local, qui vérifie la même relation que l'équation (I.4) mais localement.

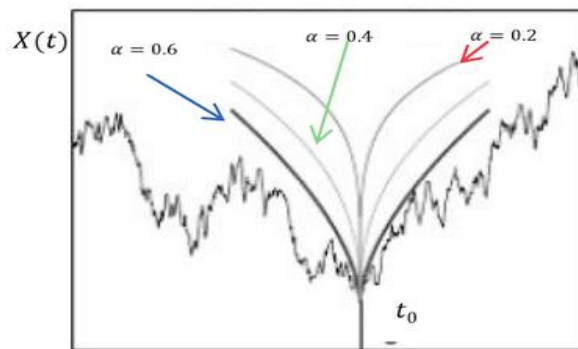
Exposant de Hölder :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; $f(t_0)$ appartient à $C_\alpha(t_0)$ s'il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P , de degré $\text{deg}(P) < \alpha$, tels que :

$$|f(t) - P(t - t_0)| \leq C|t - t_0|^\alpha \quad (\text{eq I.5})$$

L'exposant de Hölder est défini comme le supremum des α :

$$\alpha(t_0) = \sup \{ \alpha : f \in C^\alpha(t_0) \} \quad (\text{eq I.6})$$



Exposant de Hölder en t_0 : $h_X(t_0) = 0,6$

Fig I.12 : Exemple de calcul de l'exposant de Hölder.

En général, plus $\alpha(t_0)$ est petit, plus la fonction f est irrégulière en t_0 . Un exposant négatif est le signe d'une discontinuité, alors que si $\alpha(t_0)$ est strictement supérieur à 1, f est au moins une fois dérivable en t_0 .

La caractérisation des signaux par leur régularité Höldérienne a été considérée par de nombreux auteurs d'un point de vue théorique (par exemple en relation avec la décomposition en ondelettes) et dans les applications en traitement du signal (analyse de la turbulence).

En traitement d'images, c'est en particulier le cas quand on cherche à détecter des contours dans une image, plus la valeur de $\alpha(t_0)$ est importante, plus l'image est régulière à la position $t_0(x_0, y_0)$.

2.3. Spectre de singularités:

Pour définir une description multifractale des images, il convient de pouvoir caractériser les points de mêmes singularités et de distinguer dans une image les différents comportements locaux, plus pratiquement à décrire d'un point de vue géométrique ou statistique la répartition des exposants de Hölder de l'image.

Le spectre de singularités consiste essentiellement à décomposer le signal f (1D ou 2D) en sous-ensembles ayant la même régularité, puis à mesurer la « taille » des sous-ensembles obtenus. Plus précisément, il est défini par l'ensemble des points t où f prend le même exposant de Hölder α , ces points sont regroupés dans des ensembles $E(\alpha)$ qu'on appelle les ensembles iso-Hölder :

$$E(\alpha) = \{t : \alpha(t) = \alpha\} \quad (\text{eq I.7})$$

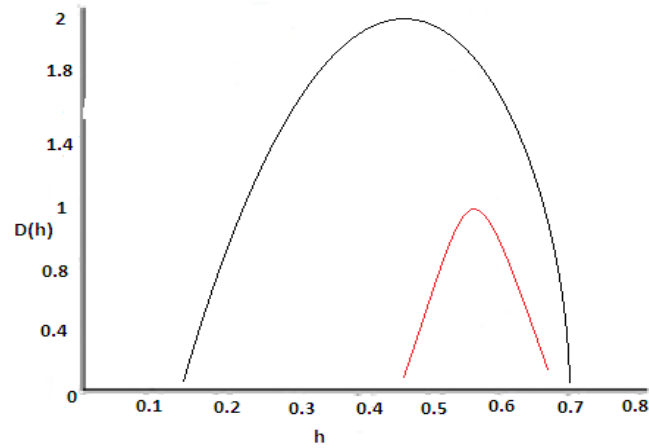


Fig I.13 : Spectre de singularités pour un signal 1D (en rouge) et pour un signal 2D (en noir).

Effectuer une analyse multifractale d'une mesure revient à estimer son spectre multifractal. Le calcul numérique du spectre de singularités d'un signal est clairement impossible à effectuer directement à partir de la définition précédente. Les outils permettant d'effectuer l'analyse d'un point de vue pratique sont appelés 'formalisme multifractal' [21]. Cette notion correspond à la séquence des formules mathématiques extraites l'une à partir de l'autre qui permet le calcul du spectre multifractal. Les bases de ce formalisme ont été introduites en 1985 par Parisi et Frish dans leur célèbre article [16].

Il existe trois types de spectres qui fournissent des informations complémentaires : spectre de Hausdorff F_H , spectre de grandes déviations F_G et le spectre de Legendre F_L .

2.3.1. Spectre de Hausdorff :

Le spectre de Hausdorff F_H ou spectre géométrique mesure la raréfaction des ensembles de points ayant même exposant de Hölder ponctuel. C'est ce spectre qui donne son nom à l'analyse multifractale, il est fondé sur la dimension de Hausdorff D_H .

Pour calculer ce spectre, on considère que chaque exposant présente un ensemble fractal avec la même régularité et dont on va calculer sa dimension, et que le signal f (1D ou 2D) est formé de l'union de ces ensembles fractals de dimensions différentes. Plus précisément :

$$f(\alpha) = \dim(E_f(\alpha) = \{t : \alpha(t) = \alpha\}) \quad (\text{eq I.8})$$

Le couple $(\alpha, f(\alpha))$ fournit une information à la fois locale (via α) et globale (via $f(\alpha)$). Il est désigné sous le nom du spectre de Hausdorff de f . Ce spectre fournit une caractérisation géométrique globale des singularités du signal, d'après la mesure de la répartition globale des différents exposants de Hölder.

2.3.2. Spectre de grandes déviations :

Une autre possibilité est de donner une caractérisation statistique de la répartition des singularités. Plus précisément, le spectre de grandes déviations $F_G(\alpha)$ mesure la vitesse exponentielle de décroissance de la probabilité de rencontrer une singularité à peu près égale à α à la résolution n quand cette dernière tend vers l'infini [62].

Bien que le spectre de grandes déviations joue un rôle essentiel dans l'analyse multifractale [62], les méthodes pour l'estimer demeurent à l'heure actuelle peu développées.

2.3.3. Spectre de Legendre :

Il existe des limitations dues aux difficultés algorithmiques d'estimation des deux premiers spectres F_H (Hausdorff) et F_G (Grandes déviations). Une façon élégante de dépasser ces obstacles consiste à calculer le spectre de Legendre F_L , qui est la transformée de Legendre d'une certaine quantité qu'on appelle dimensions de Rényi ou dimensions généralisées D_q qui présentent des fonctions de l'ordre de probabilité du moment q [43].

La transformée de Legendre est une opération mathématique qui, schématiquement, transforme une fonction définie par sa valeur en un point (dans ce cas les exposants de Hölder) en une fonction définie par sa tangente, cette fonction correspond au spectre.

2.4. Méthodes de calcul du spectre multifractal :

Les méthodes de calcul du spectre multifractal peuvent être divisées en deux classes : celles dites de comptage de boîtes et celles basées sur les ondelettes.

2.4.1. Méthodes de comptage de boîtes :

Les méthodes de comptage de boîtes sont définies à partir des dimensions des boîtes, elles sont appliquées avec différentes techniques statistiques ou bien géométriques.

2.4.1.1. Approche géométrique :

Elle est basée sur le calcul d'une mesure d'intensité dans la boîte ou la fenêtre qui couvre le signal en choisissant le type de la mesure [31] [47] :

- La mesure maximale : évalue l'intensité maximale des pixels dans une fenêtre de voisinage de taille ε .
- L'inverse minimum : utilise la valeur d'intensité minimale soustraite de la valeur 1.
- La mesure de sommation calcule la valeur d'intensité totale.
- L'iso compte le nombre de pixels proches qui ont une valeur similaire au pixel central.

Après le calcul de la mesure $u(B(x, \varepsilon))$, l'exposant de Hölder est calculé par une régression linéaire entre la valeur logarithmique de la mesure de l'intensité dans chaque boîte B de taille ε pour chaque point x et valeur logarithmique de la taille ε :

$$\alpha = \frac{\log(u(B(x, \varepsilon)))}{\log(\varepsilon)} \quad (\text{eq I.9})$$

En comptant le nombre de boîtes $N_\varepsilon(\alpha)$ ayant le même exposant de Hölder α , le spectre multifractal est estimé par :

$$f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(\alpha)}{\ln(\varepsilon)} \quad (\text{eq I.10})$$

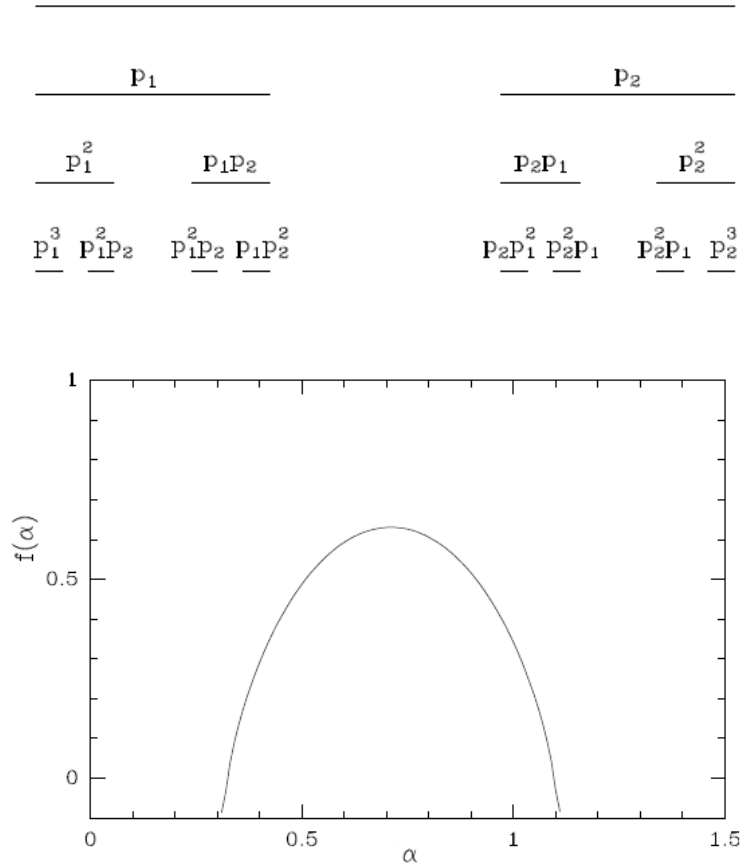


Fig I.14 : Ensemble de Cantor et son spectre $f(\alpha)$ de singularités associés aux mesures multifractales. Le maximum de la courbe $f(\alpha)$ correspond à la dimension de Hausdorff du support de la mesure.

2.4.1.2. Approche statistique:

Dite aussi des moments, elle est basée sur le calcul des dimensions généralisées pour les moments d'ordre positifs et négatifs [43][44].

La dimension généralisée est définie par :

$$D(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln(Z(q, \varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} \quad (\text{eq I.11})$$

Avec :

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{NB(\varepsilon)} \mu_i^q(\varepsilon) \quad (\text{eq I.12})$$

Où q est un entier qui correspond au moment d'ordre de la répartition des mesures μ_i , il est considéré comme un microscope permettant d'explorer différentes régions de la distribution des μ_i [43].

Et $Z(q, \varepsilon)$ est la fonction de partition. Elle a un comportement en loi de puissance, la courbe peut être approchée par une droite de pente τ appelée exposant d'échelle :

$$Z(q, \varepsilon) \cong \varepsilon^{\tau(q)} \quad (\text{loi de puissance}) \quad (\text{eq I.13})$$

Les dimensions fractales sont calculées à partir de la relation :

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} \quad (\text{eq I.14})$$

Si les dimensions $D(q)$ forment une ligne horizontale, le signal est homogène et possède les mêmes propriétés d'échelles : c'est un signal monofractal.

A l'inverse, si les $D(q)$ représentent une courbe, le signal est non-homogène et présente des propriétés d'échelles différentes, il s'agit donc d'un signal multifractal [54].

Finalement, le spectre multifractal $D(h)$ qui permet de rendre compte de la densité de distribution des irrégularités peut être calculé à partir de la transformée de Legendre :

$$D(h(q)) = h(q) \times q - \tau(q) , \quad h(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (\text{eq I.15})$$

Où h correspond à l'exposant de Hölder qui mesure l'intensité des irrégularités locales d'un signal.

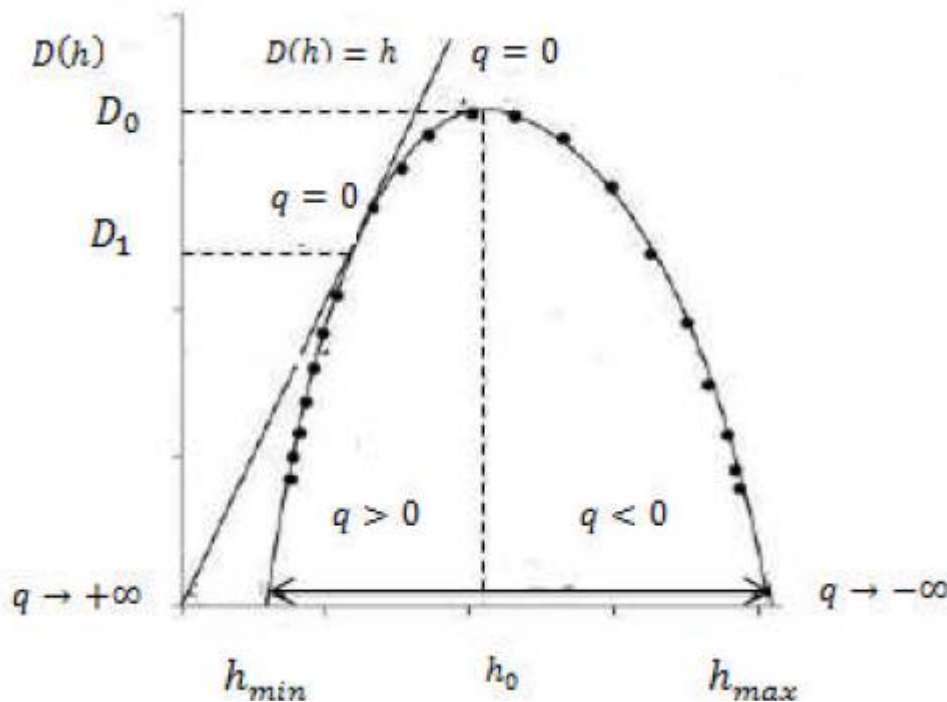


Fig I.15 : Exemple de spectre multifractal avec q le moment d'ordre, $D(q)$ les dimensions fractales et Δ_h la largeur du spectre.

- Si le spectre multifractal est réduit à un point, le signal est monofractal. A l'inverse, pour un signal multifractal, le spectre a la forme d'une cloche.
- Pour une image, le $D(h)$ prend ses valeurs dans $[0,2] \cup \{-\infty\}$. La valeur $-\infty$ correspond au cas où l'ensemble iso-Hölder $E_x(h)$ est vide.
- Si $E_x(h)$ est une ligne de l'image, alors $D(h) = 1$.
- Si tous les pixels d'une zone de l'image ont pour exposant h_0 , alors $D(h) = 2$.
- Plusieurs paramètres peuvent être déduits du spectre multifractal tels que la courbure, la largeur Δ_h qui correspond à l'écart entre les deux extrémités du spectre ($\Delta_h = h_{max} - h_{min}$) et la symétrie qui permet de localiser les irrégularités. La largeur du spectre multifractal, à travers l'exposant de Hölder, permet d'estimer la gamme d'intensité des irrégularités locales [53].

2.4.2. Méthodes basées sur les ondelettes :

En entamant la recherche sur les méthodes d'approximation du spectre de singularités plus particulièrement celui de Legendre, on trouve trois formalismes fondés sur la transformée en ondelettes utilisant trois méthodes différentes : la méthode des maxima de modules de la transformée en ondelettes (MMTO), la méthode des coefficients discrets et la méthode des coefficients dominants. Dans notre travail, on s'intéresse à la méthode MMTO qui sera détaillée dans le chapitre suivant.

Conclusion :

Comme étendue de la géométrie euclidienne, la géométrie fractale et l'analyse multifractale sont apparues pour simplifier les mesures d'objets naturels complexes. Pour ce premier chapitre, nous avons généralisé les concepts de ces deux théories.

Ces techniques sont appliquées dans plusieurs domaines de la science tels que la biologie, la physique, la chimie, la géographie, l'hydrologie, la médecine, l'informatique, l'économie et les finances, le domaine biomédicale . . . etc.

La transformée en ondelettes est un outil mathématique qui est principalement lié à la notion d'échelle. Dans le chapitre suivant, nous allons voir le mariage de cet outil avec l'analyse multifractale pour l'étude des processus multifractals.

Chapitre II :

Analyse multifractale basée sur la transformée en ondelettes

Introduction :

L'analyse multifractale est apparue dans les années 1980 pour étudier les phénomènes complexes et caractériser les singularités et les structures irrégulières. D'autre part, la transformée en ondelettes est reconnue comme un microscope mathématique adapté à l'étude des propriétés d'invariance d'échelle permettant d'analyser les structures locales d'un signal.

Les concepts qui nous intéressent dans ce mémoire concernent les outils de l'analyse multifractale basée sur la transformée en ondelettes, particulièrement la méthode des Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes (MMTO).

1. Analyse multi-échelle : les ondelettes

1.1. La transformée en ondelettes :

La transformée en ondelettes a été introduite par Grossmann et Morlet en 1984 comme un moyen de réaliser une analyse temps-fréquence et comme outil pour la détection des singularités à l'aide d'une fonction (ψ) qu'on appelle ondelette.

Une ondelette est une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\varepsilon)|^2}{\varepsilon} d\varepsilon < +\infty \tag{eq II.1}$$

Où $\hat{\psi}(\varepsilon)$ est la transformée de Fourier de l'ondelette ψ .

Cette condition est équivalente à : $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0$ c-à-d une fonction de moyenne nulle.

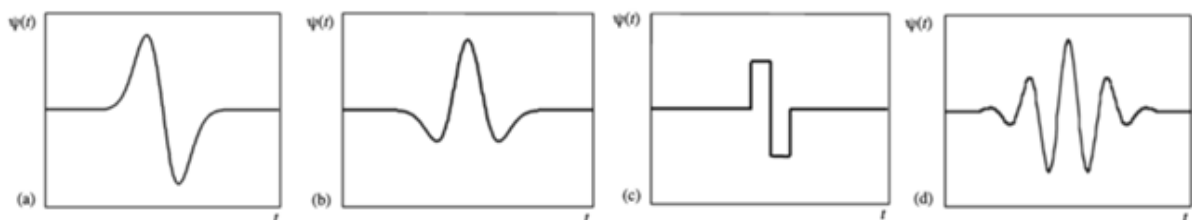


Fig II.1 : Représentation de quelques types d'ondelettes. (a) : ondelette gaussienne (dérivée première d'une gaussienne) ; (b) : chapeau mexicain (dérivée seconde d'une gaussienne) ; (c) : ondelette de Haar ; (d) : ondelette de Morlet.

Dans l'analyse par ondelettes, l'ondelette mère ψ génère une famille d'ondelettes qui sont définies à partir de ses translations et ses dilatations/contractions :

$$\left\{ \psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \right\}_{b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^{+*}} \quad (\text{eq II.2})$$

où b définit la translation temporelle et $a > 0$ est l'échelle de dilatation/contraction.

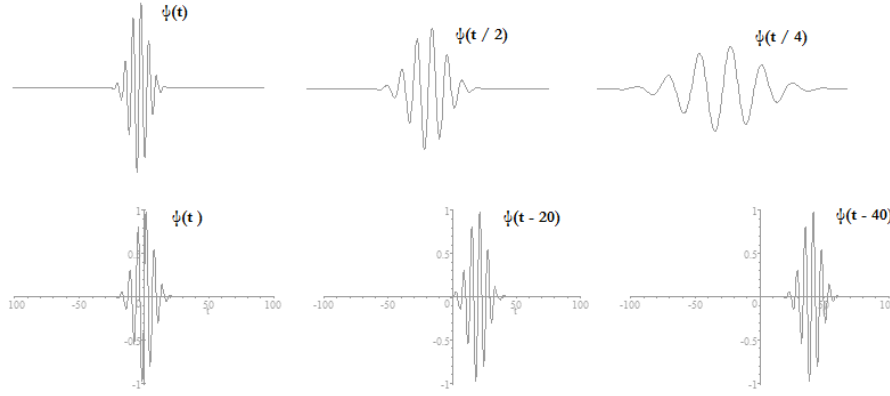


Fig II.2 : Dilatation et translation d'une ondelette.

1.1.1. La transformée en ondelette continue :

La transformée en ondelette continue (TOC) d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ au point $b \in (\mathbb{R})$ et à l'échelle $a > 0$ est définie par :

$$W_f(b, a) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (\text{eq II.3})$$

Où :

- ψ^* est le complexe conjugué de ψ et $\langle f, \psi_{b,a} \rangle$ le produit scalaire défini dans $L^2(\mathbb{R})$.
- b paramètre de translation : le point autour duquel l'analyse se fait.
- a paramètre d'échelle : plus a est grand, plus $\psi_{b,a}$ est dilatée, plus l'analyse se fait sur une large zone de f .
- $W_f(b, a)$: le coefficient d'ondelette. Il caractérise les fluctuations du signal $f(t)$ au voisinage de la position b à l'échelle a .

On peut reconstruire $f(t)$ en intégrant sur toutes les échelles et à toutes les positions de la manière suivante :

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} W_f(b, a) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) db da \quad (\text{eq II.4})$$

1.1.2. La transformée en ondelette discrète :

La discrétisation de la TOC consiste à échantillonner les paramètres d'échelles et de translations d'ondelettes en utilisant des ensembles discrets :

$$\left. \begin{array}{l} a = a_0^m, \quad a_0 > 1 \\ b = nb_0 a_0^m, \quad b_0 > 0 \end{array} \right\} m, n \in \mathbb{Z}$$

La transformée en ondelette discrète (TOD) est définie par :

$$W_f(m, n) = c_{m,n}[f(t)] = \langle f, \psi_{m,n} \rangle = a_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(a_0^{-m} t - nb_0) dt \quad (\text{eq II.5})$$

La reconstruction de $f(t)$ à partir des coefficients d'ondelettes s'écrit :

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} [f(t)] \psi_{m,n}(t) \quad (\text{eq II.6})$$

1.1.3. La transformée en ondelette dyadique :

Pour simplifier l'implémentation, on construit une représentation par ondelette invariante par translation : discrétiser le paramètre d'échelle sans discrétiser le paramètre de translation. Le paramètre $a_0 = 2$ d'où le terme dyadique (base 2) ce qui donne une échelle $a = 2^j$ et $b_0 = 1$. On obtient ainsi la transformée en ondelette dyadique de $f \in L^2$ définie par :

$$W_f(b, 2^j) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-b}{2^j}\right) dt \quad (\text{eq II.7})$$

1.2. Propriétés des ondelettes :

Les ondelettes sont des fonctions qui sont caractérisées par certaines propriétés :

1.2.1. Taille du support :

Les ondelettes sont des fonctions bien localisées en temps et en fréquence. La résolution en temps est bonne pour les hautes fréquences et la résolution en fréquence est bonne pour les basses fréquences. Donc, il faut un compromis entre la localisation spatiale et fréquentielle : il faut diminuer l'échelle (inverse de la fréquence) donc la taille du support de ψ pour minimiser le nombre de coefficients de grande amplitude.

1.2.2. Moments nuls :

ψ a p moments nuls si : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0$ tel que $0 \leq k < p$. Ceci signifie que ψ est orthogonale à tout polynôme de degré $p - 1$.

Le nombre de moments nuls de l'ondelette correspond à la capacité d'approximation du signal. Il contrôle la petitesse des coefficients d'ondelettes sur les zones lisses.

1.2.3. Régularité :

La régularité de l'ondelette est liée à son nombre de moments nuls. D'autre part, si l'ondelette est régulière, l'erreur produite sur le coefficient et donc sur le signal reconstruit est régulière et se voit moins qu'une erreur irrégulière en codage d'image.

1.3. Propriétés des coefficients d'ondelettes :

Le coefficient d'ondelette contient une information sur le comportement de f , il caractérise la régularité présente dans un signal en mesurant l'intensité des variations locales : Ces coefficients sont forts (en module) là où la fonction est irrégulière, tandis qu'ils sont faibles là où la fonction est régulière.

Dans la figure ci-dessous, les points noirs, gris et blancs correspondent respectivement à des coefficients d'ondelettes positifs, nuls et négatifs. Les singularités créent des coefficients de grande amplitude dans leur cône d'influence.

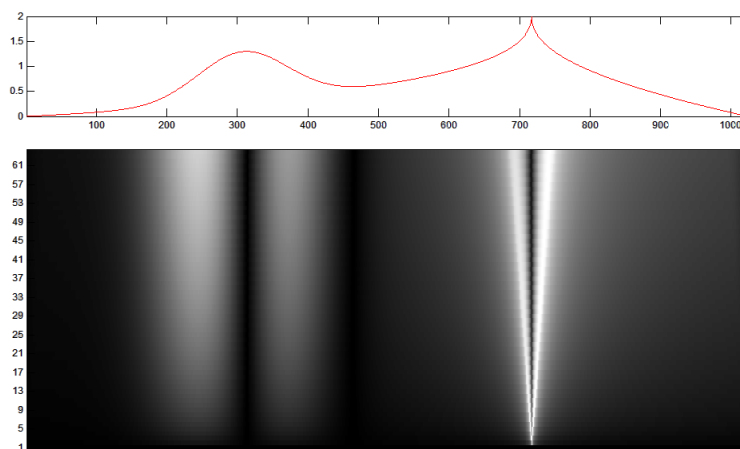


Fig II.3 : Transformée en ondelettes continue d'un signal.

1.4. Choix de l'ondelette :

Lors du choix de l'ondelette, on doit faire un compromis entre la taille du support (échelle) et le nombre de moments nuls : Si f a peu de singularités, il est plus approprié de choisir une ondelette ayant de nombreux moments nuls afin d'obtenir un grand nombre de coefficients d'ondelettes de petite amplitude. Lorsque la densité des singularités augmente, il vaut mieux diminuer la taille du support, pour avoir moins de coefficients de grande amplitude affectés par une singularité [45].

Pour pouvoir mesurer la régularité locale, il est nécessaire d'utiliser des ondelettes qui soient suffisamment régulières.

Certaines ondelettes sont plus adaptées à la TOC comme les ondelettes dérivées n-ième de la Gaussienne. D'autres sont plutôt adaptées à la TOD comme les ondelettes de Daubechies.

2. Analyse multifractale et ondelettes :

La régularité locale (exposant de Hölder) sert à décrire les singularités et les structures irrégulières qui correspondent souvent à des informations pertinentes dans un signal. Dans le cas de l'imagerie médicale, l'image d'une tumeur peut correspondre à des discontinuités ou des variations brusques des niveaux de gris.

Les régularités sont gênantes dans la détermination du spectre multifractal qui ne s'intéresse qu'au caractère fractal, donc aux singularités. La transformée en ondelettes possède cette propriété de pouvoir réaliser le filtrage des régularités de la fonction étudiée afin d'isoler ces singularités. C'est un microscope mathématique permettant d'étudier les propriétés d'invariance d'échelle des objets fractals [10]. Elle permet d'effectuer des zooms sur des structures bien localisées en réduisant progressivement le paramètre d'échelle lors de l'analyse.

L'analyse multifractale et la TO sont deux concepts s'appuyant sur des notions communes : oscillation d'une fonction bien localisée, notion d'échelle et localisation de singularités.

Lien entre la T.O et la régularité locale :

L'exposant de Hölder peut être mesuré en x_0 en étudiant le comportement de la T.O à ce point lorsque l'échelle a tend vers 0 [29] :

$$T_\psi[f](x_0, a) \sim a^{h(x_0)}, \quad a \rightarrow 0^+ \quad (\text{eq II.8})$$

Ainsi, les coefficients d'ondelettes permettent de caractériser la régularité ponctuelle :

- Dans le cas de la TOC : $|W_f(b, a)| \leq Aa^{\frac{\alpha+1}{2}}$ avec $n \geq \alpha$ (eq II.9)

- Dans le cas de la TOD : $|d(j, k)| \leq A2^{j\alpha} (1 + |2^{-jt_0} - k(j, t_0)|^\alpha)$ (eq II.10)

Où α est l'exposant de Hölder et $k(j, t_0)$ la valeur qui correspond à la position t_0 dans l'échelle dyadique, A constante.

Remarque : Il est à noter que la régularité de l'ondelette utilisée n'intervient pas ici, seul son nombre de moments nuls n est important : il doit être supérieur à la régularité α que l'on essaye de caractériser : $n \geq \alpha$ [52].

3. Formalisme multifractal basé sur les ondelettes :

Le formalisme multifractal basé sur les ondelettes a été introduit par Arnéodo, Bacry et Muzy. Ils ont montré qu'il existe une autre façon d'effectuer une analyse multifractale en utilisant la transformée en ondelettes [48].

3.1. La méthode des Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes (MMTO) :

La méthode des Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes (MMTO) (WTMM en anglais pour Wavelet-Transform Modulus Maxima) est un formalisme multifractal basé sur les ondelettes introduit par Arneodo et ces collaborateurs [48] où les boîtes utilisées dans le formalisme multifractal standard sont remplacées par les ondelettes. Ils se sont inspirés des théorèmes de S.Mallat et S.Jaffard [45] qui ont montré que la régularité locale de f dépend de la décroissance du module de la transformée en ondelettes à travers les échelles et que cette décroissance est contrôlée par les valeurs des maxima locaux : Les singularités peuvent être détectées en suivant les maxima locaux de la transformée en ondelettes aux petites échelles.

3.1.1. La Méthode MMTO 1D [52] :

Un point (b_0, a_0) est un module maximal si $|W_f(b, a_0)|$ admet un maximum local en $b = b_0$. A une échelle fixée, les modules maximaux sont les maxima locaux en espace du module de la TOC de f . On les appelle les extrema de la TOC.

Une maxima line est une courbe connexe du plan espace-échelle (b, a) formée de modules maximaux. La notion des maxima lines est un outil intéressant pour détecter et caractériser des singularités aux échelles les plus fines.

Les singularités (comme les contours) sont alors représentées par les coefficients de plus fort module, les « maxima » de la TO. Dans la MMTO, ces maxima seront extraits puis reliés d'une échelle à l'autre par des liens ou lignes de maxima.

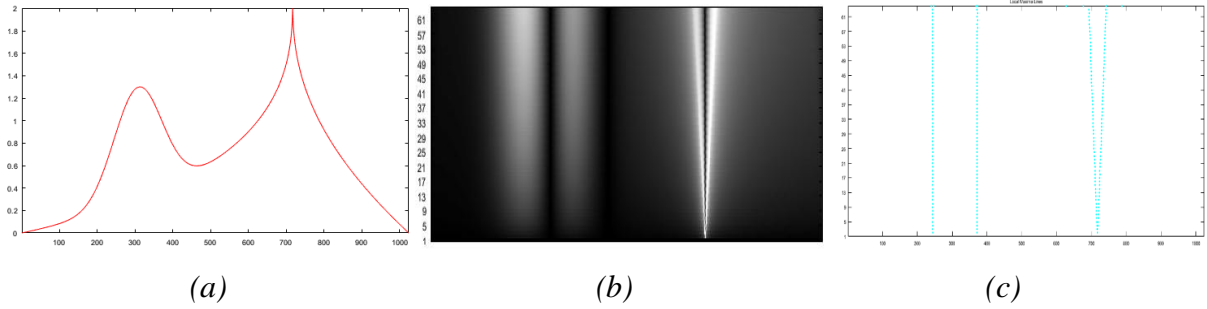


Fig II.4 : Analyse d'une régularité et d'une singularité sur un signal 1D par MMTO
 (a) : le signal original, (b) : la TOC du signal : Les coefficients sont plus élevés sur la singularité que sur la régularité, (c) montre les lignes de maxima extraites des coefficients.

3.1.2. La méthode MMTO 2D :

La méthode MMTO a été généralisée de 1D à 2D par Arneodo et ces collaborateurs [8]. Ils ont montré que la méthode MMTO 2D peut être utilisée à de nombreuses fins dans le traitement d'images, y compris la détection de contours, la reconnaissance de formes et le débruitage d'images.

Elle est primordialement un outil d'analyse multifractale qui permet d'estimer le spectre de singularités $D(h)$, c'est-à-dire la dimension fractale de l'ensemble des points qui sont caractérisés par un exposant h de la rugosité locale spécifique (Hölder) ou, dans le cas d'une signature monofractale, par un exposant global H (Hurst).

3.1.2.1. Description de la méthode [9] :

Considérons deux ondelettes qui sont respectivement les dérivées partielles par rapport à x et y d'une fonction Gaussienne 2D :

$$\phi_{Gau}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2} = e^{-|x|^2/2} \quad (\text{eq II.11})$$

C'est-à-dire :

$$\psi_1(x, y) = \partial \phi_{Gau}(x, y) / \partial x \quad \text{et} \quad \psi_2(x, y) = \partial \phi_{Gau}(x, y) / \partial y \quad (\text{eq II.12})$$

Pour toute fonction $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R})$, la transformée en ondelettes de f par rapport à ψ_1 et ψ_2 est exprimée sous forme de vecteur:

$$T_\psi[f](b, a) = \begin{pmatrix} T_{\psi_1}[f] = a^{-2} \int d^2x \psi_1(a^{-1}(x-b))f(x) \\ T_{\psi_2}[f] = a^{-2} \int d^2x \psi_2(a^{-1}(x-b))f(x) \end{pmatrix} = \nabla \{T_{\phi_{Gau}}[f](b, a)\} \quad (\text{eq II.13})$$

Où a est le paramètre d'échelle et b le vecteur de position.

La TO peut être écrite en termes de module et d'argument :

$$T_\psi[f](b, a) = (\mathcal{M}_\psi[f](b, a), \mathcal{A}_\psi[f](b, a)) \quad (\text{eq II.14})$$

Où :

$$\mathcal{M}_\psi[f](b, a) = \sqrt{(T_{\psi_1}[f](b, a))^2 + (T_{\psi_2}[f](b, a))^2} \quad (\text{eq II.15})$$

Et :

$$\mathcal{A}_\psi[f](b, a) = \text{Arg} (T_{\psi_1}[f](b, a) + i T_{\psi_2}[f](b, a)) \quad (\text{eq II.16})$$

A une échelle donnée $a > 0$, le maxima module de transformée d'ondelettes (MMTO) est défini par les positions b où le module de transformée en ondelettes $\mathcal{M}_\psi[f](b, a)$ est localement maximal le long de la direction du gradient $T_\psi[f]$ donnée par l'argument de TO $\mathcal{A}_\psi[f](b, a)$. Ces maxima modules sont les points résultant de $f * \phi_a(x)$.

Ces MMTO reposent sur des chaînes connectées appelées chaînes des maxima. Il suffit d'enregistrer la position des maxima locaux de $\mathcal{M}_\psi[f]$ le long des chaînes des maxima avec la valeur de $\mathcal{M}_\psi[f]$ et $\mathcal{A}_\psi[f]$ aux emplacements correspondants.

A chaque échelle a , l'analyse en ondelettes se réduit donc à stocker uniquement les maxima des MMTO (MMMTO). Ils indiquent localement la direction où le signal a la plus forte variation. Ces MMMTO sont disposés le long de courbes connectées à travers les échelles appelées lignes des maxima. Le squelette de la transformée en ondelettes est défini comme l'ensemble des lignes. Ce squelette contient toutes les informations sur les propriétés de régularité locale de Hölder de la fonction f considérée.

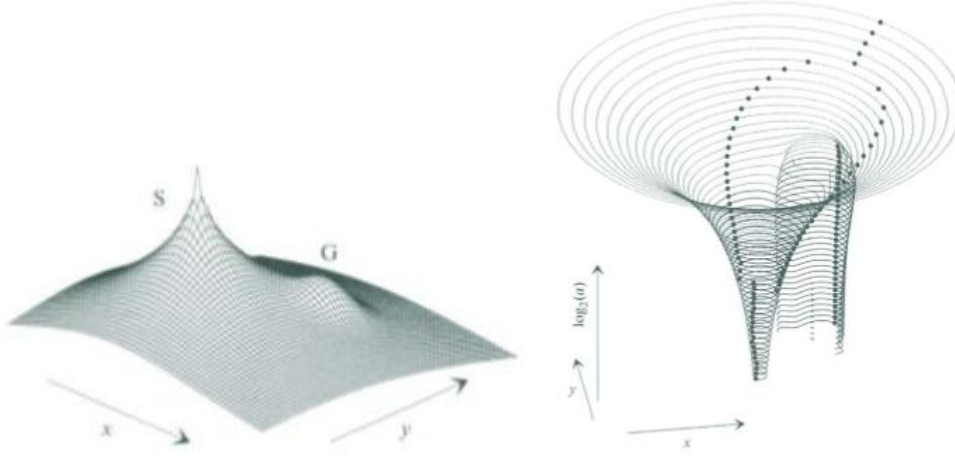


Fig II.5 : Représentation tridimensionnelle de l'évolution des chaînes MMTO.

Les MMMTO (•) sont disposés sur des courbes connectées appelées lignes maxima. Ces lignes maxima sont obtenues en reliant chaque MMMTO calculé à une échelle donnée au MMMTO le plus proche calculé à l'échelle juste au-dessus. Il y a deux lignes maxima pointant respectivement sur la singularité S et sur la structure lisse localisée G.

3.1.2.2. Calcul du spectre multifractal :

Les lignes maxima définies à partir des MMMTO calculées à différentes échelles peuvent être utilisées pour détecter les positions où les singularités sont localisées. La méthode consiste à définir les fonctions de partitions directement à partir des MMMTO appartenant au squelette de la transformée en ondelettes:

$$Z(q, a) = \sum_{L \in \mathcal{L}(a)} [\sup \mathcal{M}_\psi [f](x, a')]^q \quad (\text{eq II.17})$$

Où $q \in \mathbb{R}$ est l'ordre du moment et $\mathcal{L}(a)$ l'ensemble des lignes maxima qui existent à l'échelle a et qui contiennent des maxima à toute échelle $a' \leq a$.

Or, on peut définir l'exposant d'échelle $\tau(q)$ du comportement en loi de puissance de la fonction de partition:

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad a \rightarrow 0^+ \quad (\text{eq II.18})$$

Le spectre d'exposant est estimé par une régression linéaire de $\log(Z(q, a))$ versus $\log(a)$.

Le spectre de singularité $D(h)$ peut être déterminé à partir de la transformée de Legendre de l'exposant d'échelle $\tau(q)$:

$$D(h) = \min_{q \neq 0} (qh - \tau(q)) \quad (\text{eq II.19})$$

Suite à des inconvénients numériques, on peut éviter d'exécuter directement la transformée de Legendre en calculant le spectre multifractal comme suit :

$$W_\psi[f](q, \mathcal{L}, a) = \frac{|\sup_{(x, a') \in \mathcal{L}, a' \leq a} \mathcal{M}_\psi[f](x, a')|^q}{Z(q, a)} \quad (\text{eq II.20})$$

Puis on calcule les valeurs d'espérance :

$$h(q, a) = \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}(a)} \ln |\sup_{(x, a') \in \mathcal{L}, a' \leq a} \mathcal{M}_\psi[f](x, a')| W_\psi[f](q, \mathcal{L}, a) \quad (\text{eq II.21})$$

Et

$$D(q, a) = \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}(a)} W_\psi[f](q, \mathcal{L}, a) \ln(W_\psi[f](q, \mathcal{L}, a)) \quad (\text{eq II.22})$$

D'où, on extrait :

$$h(q) = \lim_{a \rightarrow 0^+} h(q, a) / \ln a \quad (\text{eq II.23})$$

et

$$D(q) = \lim_{a \rightarrow 0^+} D(q, a) / \ln a \quad (\text{eq II.24})$$

Et enfin le spectre de singularité $D(h)$ en éliminant q .

3.2. La méthode des coefficients d'ondelettes discrets :

L'analyse multifractale fondée sur la méthode MMT0 a montré ces limites dans la complexité algorithmique, la difficulté de son implémentation et les couts de calculs élevés. Une alternative à cette méthode est le formalisme multifractal fondé sur les coefficients d'ondelettes discrets.

Cette méthode repose sur l'utilisation de la transformée en ondelettes discrète ou dyadique. La fonction de structure et le spectre multifractal sont calculés à partir des modules des coefficients de cette transformée [45] [52].

3.3. La méthode des coefficients dominants :

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelettes discrets a aussi montré ses limites dans la mesure incomplète du spectre de certains types de singularités (non-oscillantes). Pour cela, S.Jaffard et ces collaborateurs ont développé une nouvelle approche définie à partir des coefficients d'ondelettes discrets nommé coefficients dominants [35] [36]. L'idée du coefficient dominant est que le coefficient d'ondelette discret est remplacé par celui possédant la plus grande valeur absolue parmi les coefficients existants dans le voisinage spatiale du coefficient remplacé à toutes les échelles [63]. L'avantage de ce formalisme est qu'il est valable pour tous types de singularités (oscillantes et non-oscillantes) et permet de mesurer la totalité du spectre.

4. Etat de l'art : Applications en imagerie médicale :

L'analyse multifractale fondée sur la transformée en ondelettes particulièrement celle basée sur la méthode MMTO a été appliquée dans de nombreux travaux notamment dans le domaine médical. Cette approche a été largement utilisée par les chercheurs pour étudier les signaux ([10] [58] [29] [30]) et les images médicaux ([37] [38] [39] [46]) dans le but d'analyse de texture, de détection d'anomalies, de caractérisation et de classification.

Parmi les travaux marquants dans l'imagerie médicale, on peut citer ceux de P.Kestener [37] où il a réalisé une analyse multifractale sur des images mammographiques en utilisant la méthode MMTO. Cette analyse lui a permis de discriminer entre les zones grasses et les zones denses à partir du spectre multifractal et de détecter les microcalcifications qui correspondent à des singularités beaucoup plus fortes que celles du tissu de fond. Il a aussi montré, avec ces collaborateurs [38], les potentialités de la méthode pour la segmentation et la caractérisation géométrique d'amas de microcalcifications, signes précoces d'apparition du cancer du sein.

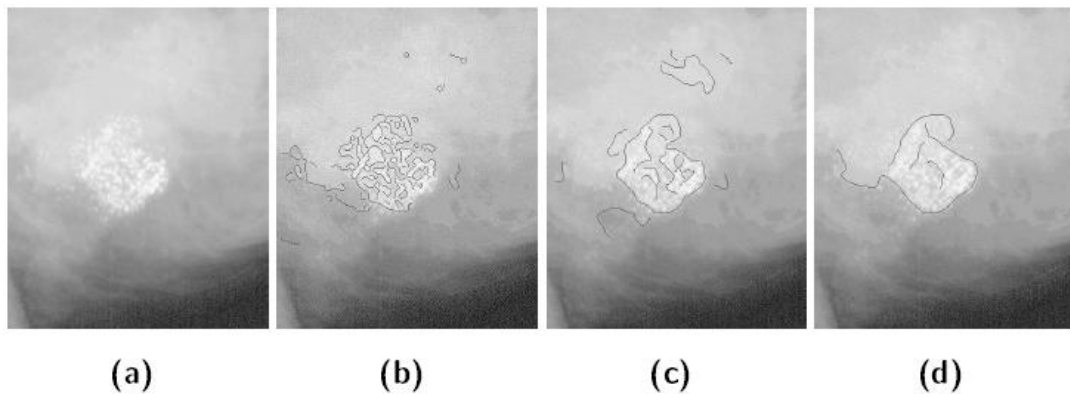


Fig II.6 : Détection d'un amas de microcalcifications,

(a) Mammographie originale, (b), (c) et (d) montrent les chaînes de maxima pour les valeurs respectives d'échelles $a=2, 4$ et 8 .

Une autre application intéressante est celle de Khider [39] où il a proposé des procédures de classification des images IRM et CT scanner de texture osseuse pour le dépistage de l'ostéoporose en utilisant la méthode MMTO. Il a pu classifier ces images en deux catégories: ostéoporotiques ou normales à partir des valeurs de l'exposant de Hölder.

Les deux autres méthodes basées sur la transformée en ondelettes ont aussi été appliquées sur des images ultrasonores (Fig II.7) et des images d'IRM cérébrale (Fig II.8) [53] [54] pour discriminer entre le tissu sain et le tissu pathologique. Les spectres multifractals, les valeurs des exposants de Hölder et de la dimension fractale sont discriminantes et arrivent à séparer ces deux types de tissus.

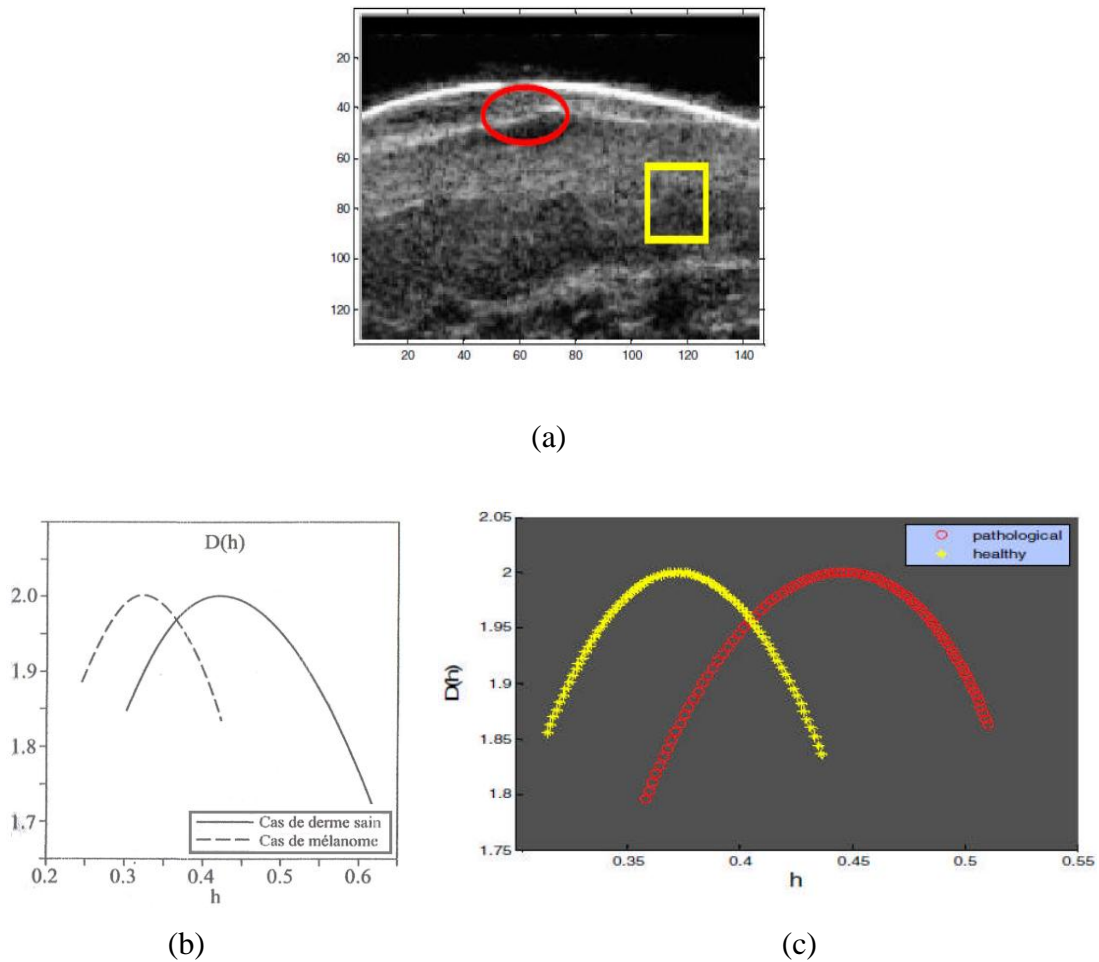


Fig II.7 : (a) : Image ultrasonore de la peau. L'ellipse rouge délimite la zone du mélanome et le carré jaune délimite une partie du tissu sain, (b) : Spectre multifractal obtenu par la méthode des coefficients discrets, (c) : Spectre multifractal obtenu par méthode des coefficients dominants.

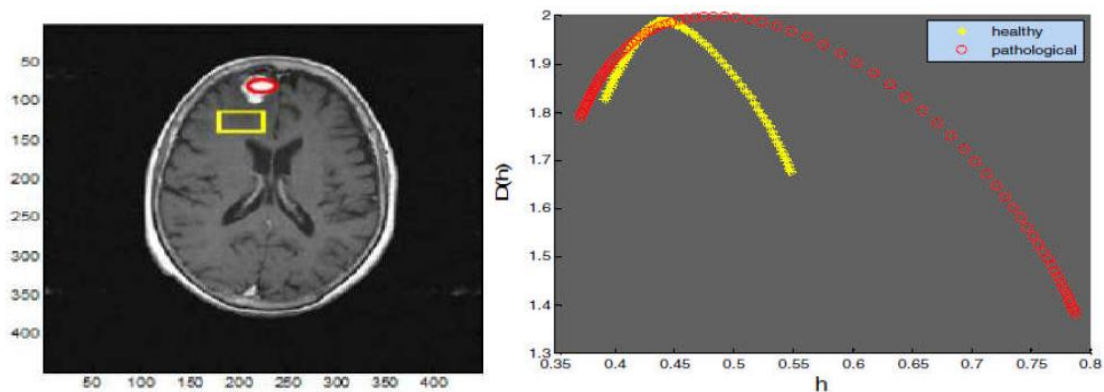


Fig II.8 : (a) : Image d'IRM du cerveau. L'ellipse rouge délimite la zone d'une tumeur et le carré jaune délimite une partie du tissu sain, (b) : Spectre multifractal obtenu par méthode des coefficients dominants.

Ces travaux et ces résultats prouvent que cette approche est robuste et utile pour la segmentation et la caractérisation et peuvent être intégrés dans des protocoles de classification automatique des images médicales.

Conclusion :

Ce chapitre apporte des outils de base de l'analyse multifractale à base d'ondelettes où nous avons vu comment caractériser la régularité locale à l'aide la transformée en ondelettes. Pour une description plus précise et détaillée de ces aspects, nous renvoyons le lecteur aux références [45], [52] et [61].

Or, le formalisme multifractal fondé sur la transformée en ondelettes inclut trois méthodes : la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO), la méthode des coefficients d'ondelettes discrets et la méthode des coefficients dominants. La méthode qui nous concerne et sur laquelle est basée notre approche est la méthode MMTO qui sera mise en œuvre dans le chapitre suivant.

Chapitre III :

Application de l'analyse multifractale par ondelettes en mammographie

Introduction :

La mammographie est l'examen de référence de dépistage et de diagnostic des maladies du sein. Dans ce chapitre, nous allons appliquer l'approche multifractale par ondelettes sur des images mammographiques pour montrer les potentialités de la méthode MMTO dans la caractérisation du tissu mammaire et la segmentation des lésions.

1. Contexte médical :

La mammographie est le principal outil d'exploration des seins. C'est une technique basée sur l'utilisation des rayons X. L'appareil utilisé est le mammographe. Elle sert à étudier la glande mammaire et permet de dépister à un stade précoce un cancer du sein et à rechercher des anomalies telles que les opacités et les microcalcifications.

Cet examen est indiqué lors de la découverte d'une boule dans le sein, d'un écoulement anormal du mamelon ou d'une anomalie de la peau du sein et pour la surveillance des seins déjà traités pour un cancer. Il est également prescrit chez les femmes âgées de 40 ans et plus et doit être refait tous les deux ans dans le cadre du dépistage du cancer du sein.

1.1. Anatomie du sein :

Les seins sont des organes glandulaires pectoraux, au nombre de deux, ils sont destinés à la sécrétion lactée. De forme hémisphérique, chaque sein présente un mamelon au centre d'une zone pigmentée, l'aréole. Il est essentiellement constitué de 15 à 25 lobes glandulaires subdivisés en lobules et en acini. L'appareil excréteur, ou arbre galactophore est formé de canaux qui se réunissent pour se terminer au niveau du mamelon. L'ensemble est enveloppé dans un tissu conjonctif et un tissu adipeux. La figure III.1 détaille ces différents composants mammaires [56].

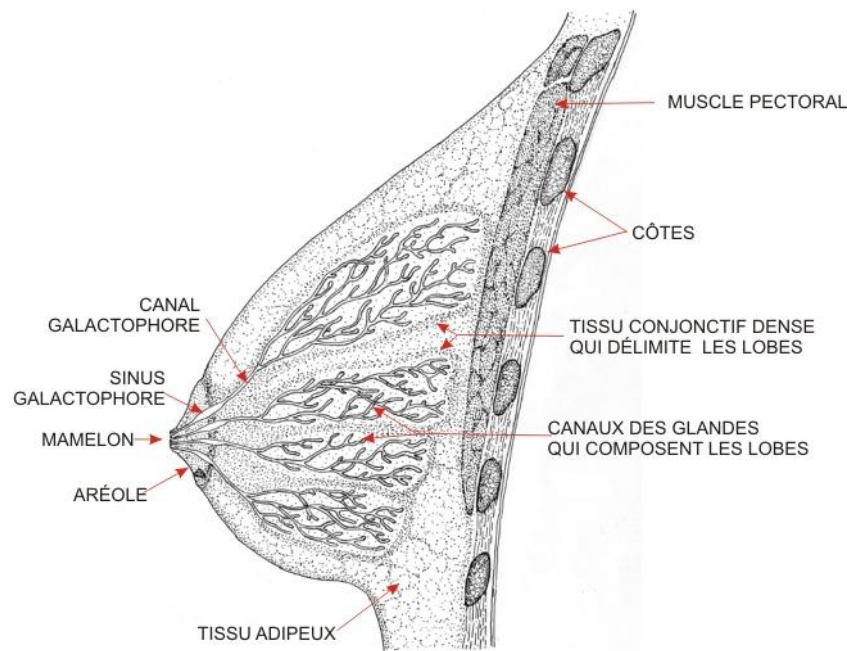


Fig III.1 : Schéma de l'anatomie du sein.

1.2. La densité mammaire :

Le tissu mammaire du sein normal varie d'une femme à une autre. On distingue entre tissu gras et tissu dense. Afin de standardiser les comptes rendus mammographiques, la classification BI-RADS (Breast Imaging Reporting and Data System) de l'ACR (American College of Radiology) définit quatre classes de la composition du sein [6] :

- BI-RADS 1 : Sein grasseux homogène, presque totalement grasseux, moins de 25 % de tissu dense.
- BI-RADS 2 : Sein grasseux hétérogène, 25 à 50 % de structures denses.
- BI-RADS 3 : Sein dense hétérogène, 51 à 75 % de tissu dense.
- BI-RADS 4 : Sein dense homogène, extrêmement dense, plus de 75 % de tissu dense.

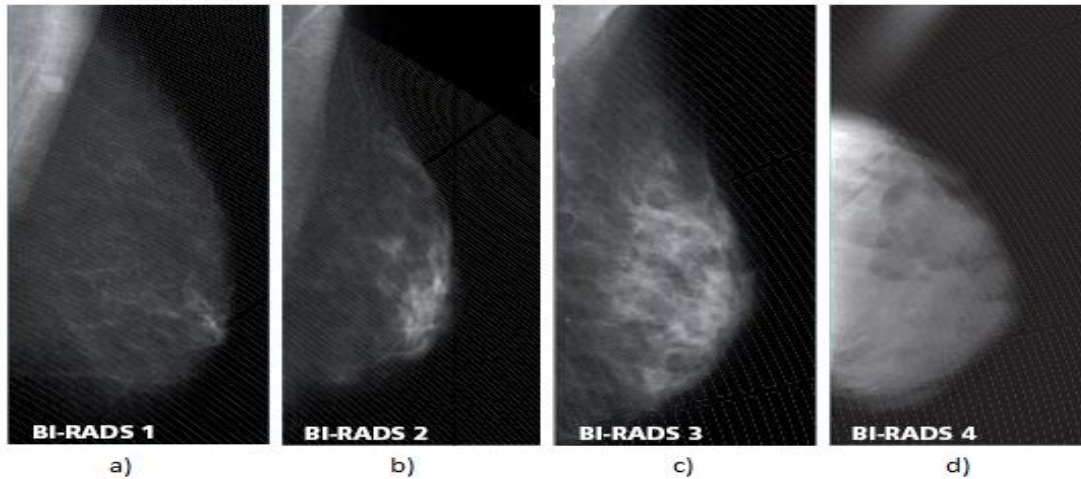


Fig III.2 : Densité mammaire selon le lexique BIRADS :

a) Densité $< 25\%$, b) Densité entre 25 et 50%, c) Densité entre 51 et 75%, d) Densité $> 75\%$.

1.3. Pathologies du sein :

1.3.1. Les microcalcifications :

Une microcalcification est un dépôt de sels de calcium composé des substances chimiques. Ces substances sont très radio-opaques et se traduisent dans les clichés mammographiques par de petits points clairs. Les caractéristiques qui distinguent les microcalcifications des autres éléments sont leur fort contraste et leur petite taille ($< 0,5\text{mm}$). Si leur taille dépasse 1mm, on les appelle des macrocalcifications et elles sont souvent bénignes. La description des microcalcifications permettant de décider leur degré de suspicion inclut simultanément le critère de morphologie (Fig III.3), de distribution (Fig II.4) et de nombre [22].

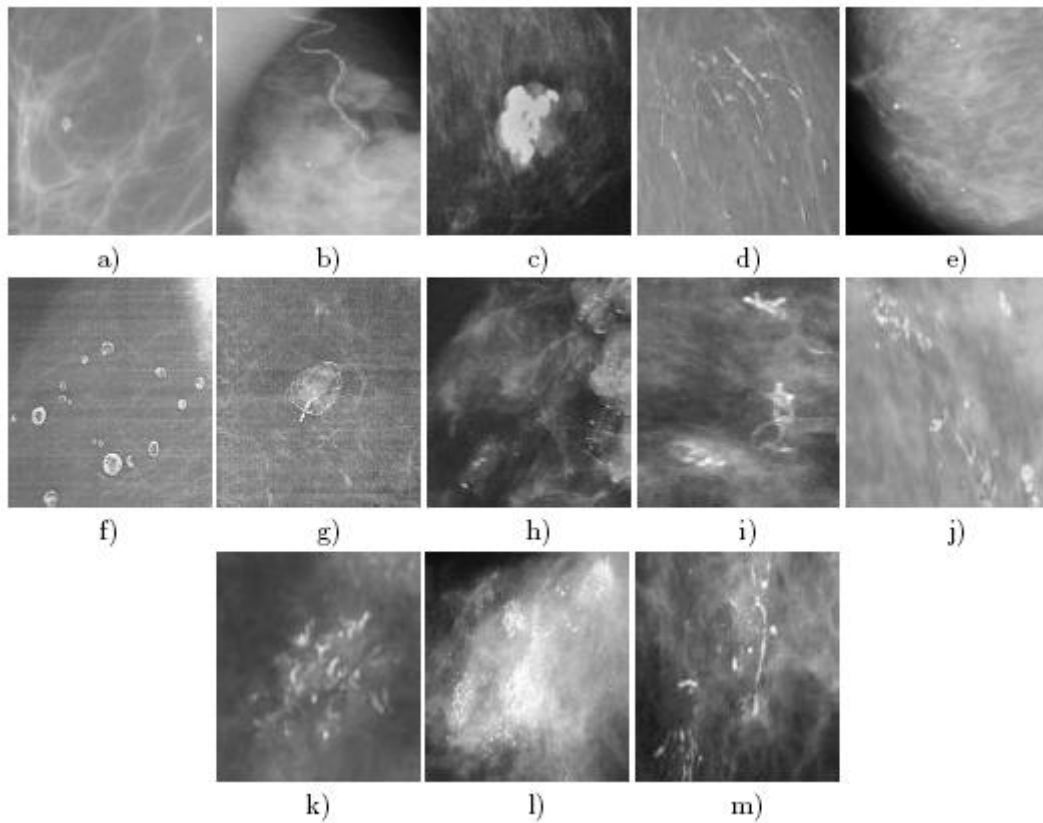


Fig III.3 : Les différents types de microcalcifications : a) cutanées ou dermiques, b) vasculaires, c) grossières ou coralliformes, d) en bâtonnets, e) rondes, f) à centres clairs, g) en coquille d'œuf ou pariétales, h) à type de lait calcique, i) de suture, j) dystrophiques, k) amorphes ou indistinctes, l) fines polymorphes, m) linéaires ramifiées.

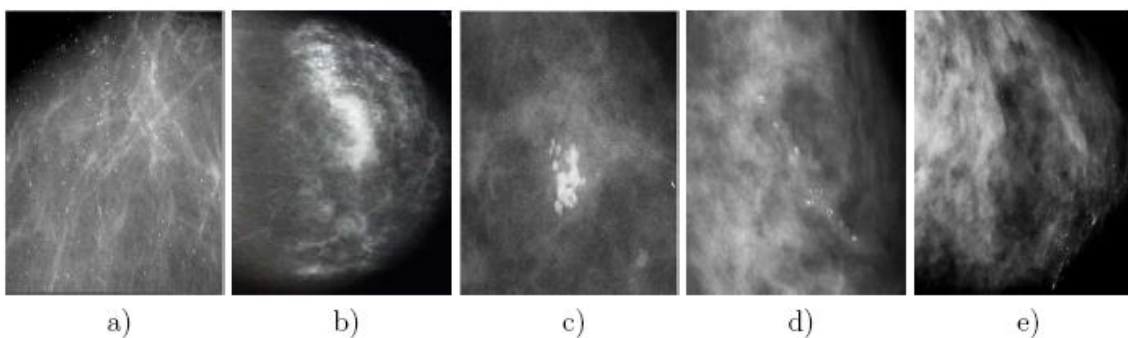


Fig III.4 : Les différentes distributions des microcalcifications : a) Mcs diffuses ou éparses, Répartition : b) Régionale, c) En cluster, d) Linéaire et e) Segmentaire.

1.3.2. Les masses :

Une opacité ou une masse est une lésion importante occupant un espace. Différentes caractéristiques de ces masses sont à décrire à savoir la forme et le contour [22].

a. La forme : Selon la description du BI-RADS, les masses peuvent avoir la forme :

- Ronde : Il s'agit de masse sphérique, circulaire ou globuleuse.
- Ovale : Elle présente une forme elliptique (ou en forme d'œuf).
- Lobulée : La forme de la masse présente une légère ondulation.
- Irrégulière : Cette appellation est réservée aux masses dont la forme est aléatoire et ne peut être caractérisée par les termes cités ci-dessus.

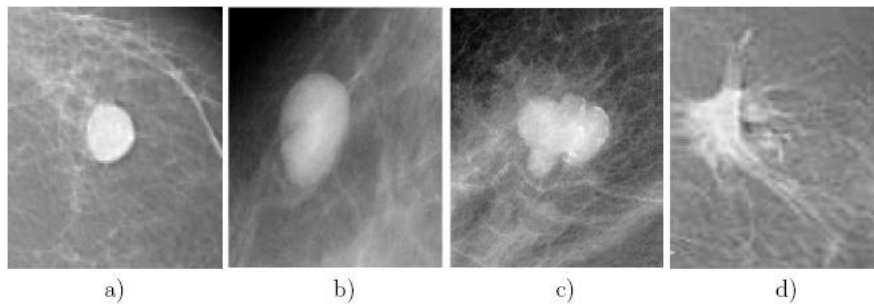


Fig III.5 : Les différentes formes possibles d'une masse :

a) Ronde, b) Ovale, c) Lobulée, d) Irrégulière.

b. Le contour : Le contour des masses mammaires est soit :

- Circonscrit : Le contour est net et bien défini. Pour qu'une masse soit qualifiée de circonscrite, il faut qu'au moins 75% de son contour soit nettement délimité.
- Microlobulé : Dans ce cas, de courtes dentelures du contour créent de petites ondulations.
- Masqué : Un contour masqué est un contour qui est caché par le tissu normal adjacent.
- Indistinct : Le contraire de circonscrit, le contour est mal défini.
- Spiculé : La masse est caractérisée par des lignes radiaires prenant naissance sur le contour de la masse. Ces lignes radiaires sont appelées les spicules.

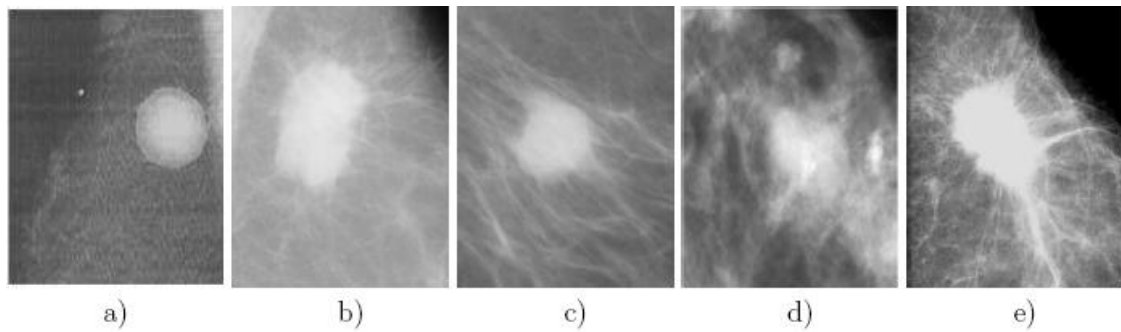


Fig III.6 : Les différents contours d'une masse :

a) Circonscrit, b) Microlobulé, c) Masqué, d) Indistinct, e) Spiculé.

1.3.3. Classification des pathologies mammaires :

L'ACR a souligné l'importance d'un protocole mammographique standardisé et complet qui tient en compte les différents facteurs de malignité. Il a établi le système BI-RADS. Ce système permet de classer les images mammographiques en sept catégories en fonction du degré de suspicion de leur caractère pathologique [6].

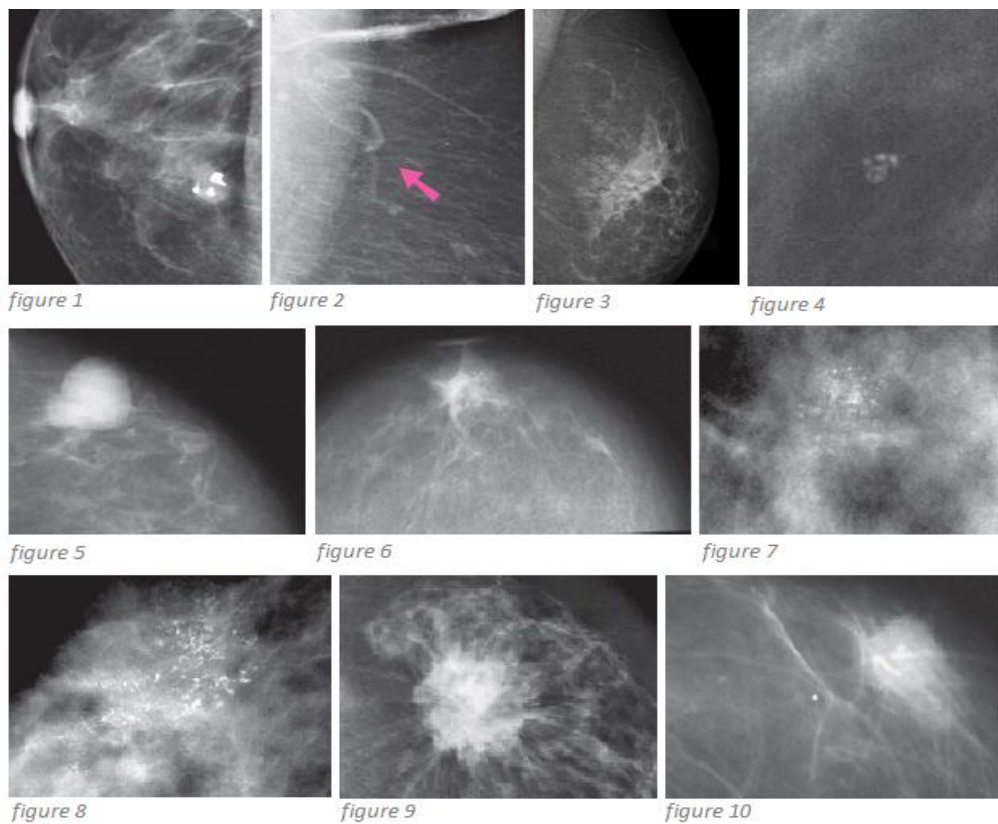


Fig III.7 : Quelques pathologies mammaires citées dans le tableau ci-dessous.

ACR 0	(classification d'attente) Investigations complémentaires nécessaires : comparaison avec les documents antérieurs, clichés centrés comprimés, agrandissement de microcalcifications, échographie, etc.
ACR 1	Mammographie normale.
ACR 2	Anomalies bénignes ne nécessitant ni surveillance ni examen complémentaire : – opacité ronde avec macrocalcifications (adénofibrome [fig 1] ou kyste), – opacité ovale à centre clair (ganglion lymphatique [fig 2]), – opacité ronde correspondant à un kyste typique en échographie, – image de densité graisseuse ou mixte (lipome, hamartome [fig 3]).
ACR 3	Anomalie probablement bénigne, une surveillance à court terme est conseillée : – microcalcifications rondes ou punctiformes régulières, peu nombreuses, en petit amas rond isolé (fig 4), – petit amas rond ou ovale de calcifications, peu nombreuses, – opacité bien circonscrite, ronde ou ovale, non calcifiée, non liquidienne en échographie (fig 5).
ACR 4	Anomalie indéterminée ou suspecte qui indique une vérification histologique : – opacité spiculée sans centre dense (fig 6), – opacité non liquidienne ronde ou ovale aux contours lobulés, ou masqués, – distorsion architecturale en dehors d'une cicatrice connue et stable, – microcalcifications punctiformes régulières nombreuses et/ou groupées en amas aux contours ni ronds ni ovales, – microcalcifications irrégulières, polymorphes ou granulaires, peu nombreuses, – microcalcifications pulvérulentes groupées et nombreuses (fig 7).
ACR 5	Anomalie évocatrice de cancer : – microcalcifications irrégulières, polymorphes ou granulaires, nombreuses et groupées (fig 8), – microcalcifications évolutives ou associées à une anomalie architecturale ou à une opacité, – opacité spiculée à centre dense (fig 9), – opacité mal circonscrite aux contours flous et irréguliers (fig 10).
ACR 6	Cancer prouvé par biopsie.

Tableau III.1 : Classification des pathologies mammaires selon BIRADS de l'ACR.

1.4. L'image mammographique :

L'image mammographique est le résultat d'atténuation d'un faisceau de rayons X traversant les différents tissus mammaires. L'atténuation de ce faisceau dépend essentiellement de la composition des tissus traversés. Le tableau III.2 résume la correspondance entre les composant du tissu mammaire, la radio opacité et l'aspect sur le cliché mammographique. On peut dire que l'aspect général d'une mammographie est sombre alors que les zones contenant des microcalcifications ou des masses (composées de calcium) sont plus claires [22].

Composant	Atténuation radiologique	Aspect sur mammographie
Graisse	Radio transparent	Très sombre
Eau	Légèrement radio opaque	Sombre
Tissu conjonctif	Radio opaque	Clair
Calcium	Très radio opaque	Très clair

Tableau III.2 : Atténuation radiologique des composants mammaires.

2. Méthodologie :

Le but de ce travail est de faire la caractérisation et la segmentation des images mammaographiques. Ces deux opérations sont faites respectivement à partir du spectre de Legendre et du spectre géométrique (Spectre de Hausdorff) qui sont calculés à partir de l'image alpha par la méthode des Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes (MMTO).

Notre approche MMTO a été appliquée sur des images mammographiques extraites de la base de données MIAS. Cette base contient 322 images classées selon le type du tissu mammaire (Gras/Dense), le type de l'anomalie (Normal, Calcification, masse circonscrite, masse spiculée, masse mal-définie, distorsion architectural, asymétrie) et la gravité de l'anomalie (maligne ou bénigne).

2.1. Algorithme de calcul de l'image alpha par la méthode MMTO :

L'implémentation de la méthode MMTO et l'obtention de l'image alpha se fait suivant les étapes suivantes :

- Calculer la TOC 2D de l'image originale convertie en niveaux de gris :

La TOC 2D a été calculée sous MATLAB en utilisant la commande 'cwtft2' qui admet comme paramètres d'entrées : l'image originale, le type d'ondelette et le vecteur d'échelle. Le choix du type d'ondelette et du vecteur d'échelle sera discuté dans la première partie avant de passer à l'application médicale.

La TOC est donc calculée pour un certain nombre d'échelle : $scale = [1 : n]$.

Ensuite, pour chaque échelle $k \in [1 : n]$:

- Extraire la matrice des modules des coefficients d'ondelettes,
- Calculer les maximas des modules (MMTO),
- Retrouver et récupérer la position du maximum des MMTO (MMMTO),

Enfin,

- Appliquer une régression linéaire entre le vecteur d'échelle et des MMMTO pour obtenir l'image alpha.

2.2. Algorithme de calcul du spectre multifractal de Legendre :

- Calculer la fonction de partition selon l'équation (eq II.17) en utilisant l'image alpha,
- Calculer $h(q, a)$ et $D(q, a)$ selon les équations (eq II.20) , (eq II.21) et (eq II.22),
- Extraire le $h(q)$ et $D(q)$ selon les équations (eq II.23) et (eq II.24),
- Tracer $D(h)$ en fonction de h : spectre multifractal.

2.3. Algorithme de calcul du spectre multifractal géométrique :

Ce spectre est calculé par la méthode de comptage de boîtes vue dans le chapitre I, sauf que la mesure α est calculée à partir de la méthode MMTO et non pas par la dimension de boîtes.

- Subdivision de l'image alpha en boîtes de tailles différentes,
- Calculer le nombre de boîtes ayant le même exposant de Hölder,
- Estimer le spectre multifractal géométrique par l'équation (eq I.10).

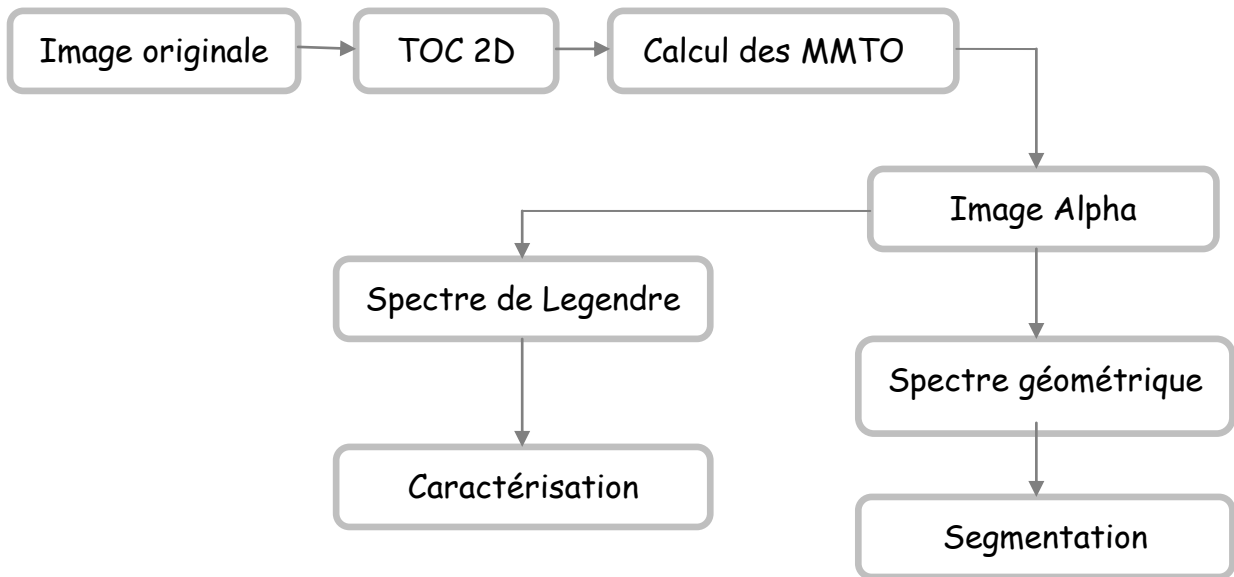


Fig III.8 : Schéma général résumant la méthode de travail.

3. Choix et fixation des paramètres de calcul de l'image alpha :

Tout d'abord, on commence par tester et fixer les paramètres d'entrée utilisés pour le calcul de l'image alpha et du spectre multifractal. On a préféré faire ces tests sur une image classique telle que l'image 'boule', c'est une image couleur de taille 256*256.



Fig III.9 : Image de test 'boule'.

3.1. La taille de l'image :

On prend l'image de test convertie en niveaux de gris avec trois tailles différentes : taille originale (256*256), taille redimensionnée à 128*128 et taille quelconque selon la région d'intérêt. Pour chaque image, on calcule son image alpha ainsi que son spectre sur 20 échelles utilisant l'ondelette chapeau mexicain. Les résultats sont présentés dans les figures suivantes.

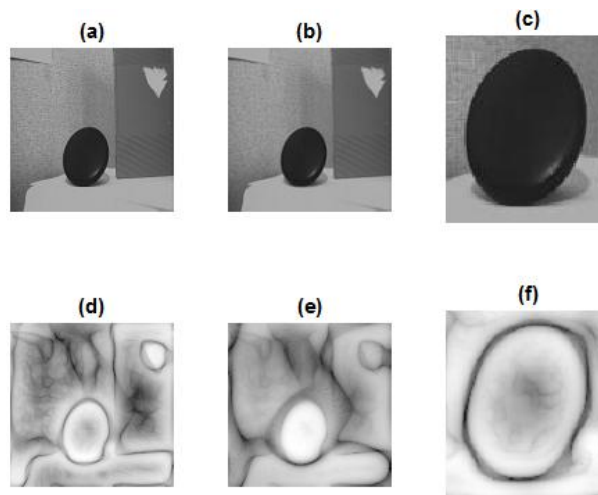


Fig III.10 : les images (a), (b) et (c) représentent respectivement l'image originale de taille 256*256, l'image originale redimensionnée à 128*128 et l'image de la région d'intérêt. (d), (e) et (f) représentent respectivement leurs images α .

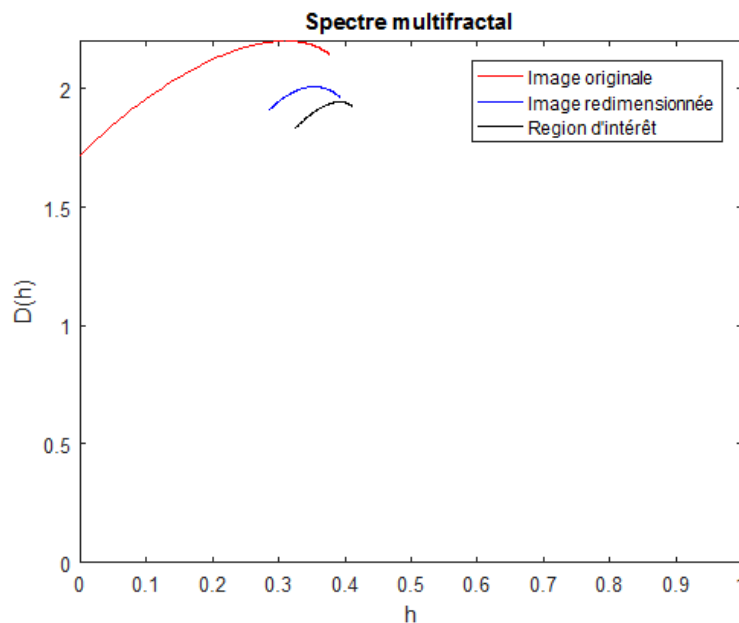


Fig III.11 : Les spectres multifractals des trois images.

Image	Taille de l'image	Temps de calcul	Crête du spectre
(a)	256*256	32.824831 seconds	2.2003 + 4.5324i
(b)	128*128	8.406644 seconds	2.0076 + 4.5324i
(c)	101*78	8.867785 seconds	1.9438 + 4.5324i

Tableau III.3 : Variation du temps de calcul et de la crête du spectre en fonction de la taille de l'image.

Discussion :

Les singularités dans l'image α (d) de taille 256*256 sont bien distinguées et les contours sont bien délimités ce qui permet d'avoir une bonne segmentation. L'image α (e) de l'image redimensionnée à 128*128 perd quelques détails par rapport à (d) mais les différentes zones restent différenciables et peuvent être segmentées.

Pour les spectres multifractals des trois images, on remarque que pour une grande taille de l'image, le spectre dépasse $D(h) \approx 2$ et couvre une large partie de l'axe h car l'image contient toutes les singularités. Plus on réduit la taille, plus il décroît et devient étroit (moins de singularités) et plus le temps de calcul est réduit.

En sélectionnant la région d'intérêt (R.I), on obtient un spectre très précis concernant cette région, mais le problème rencontré est que la taille de la R.I varie : à chaque test, on sélectionne la R.I et donc on obtient un spectre différent ce qui va gêner dans la comparaison des résultats.

3.2. L'échelle :

L'échelle joue un rôle très important dans la détection des singularités. Pour fixer le nombre d'échelles, pour une même image, on calcule l'image α pour 5, 10, 20 et 30 échelles et leurs spectres multifractals. Les résultats sont présentés dans les figures suivantes.

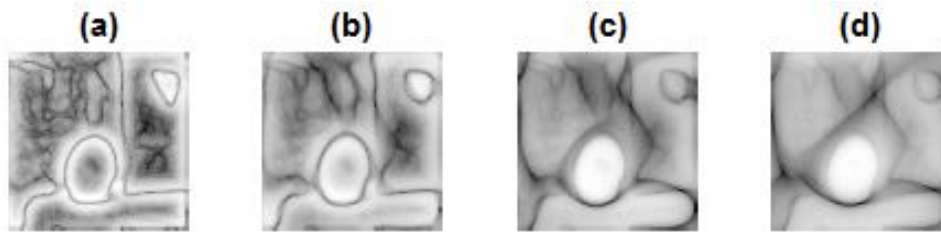


Fig III.12 : (a), (b), (c) et (d) représentent respectivement les images α aux échelles 5, 10, 20 et 30.

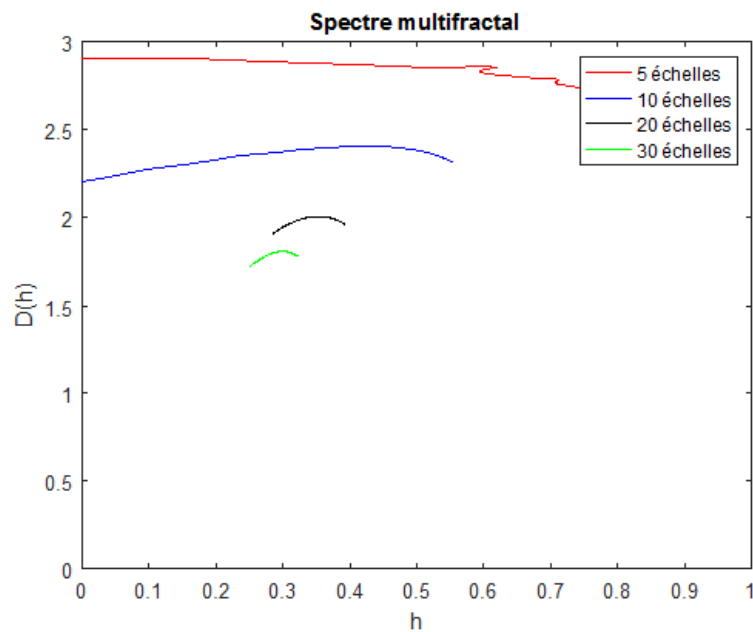


Fig III.13 : Les spectres multifractals des images (a), (b), (c) et (d).

L'image	L'échelle	Temps de calcul	Crête du spectre
(a)	5	3.473982 seconds	$2.9057 + 4.5324i$
(b)	10	7.586928seconds	$-10.9253 - 2.5715i$
(c)	20	8.122358seconds	$2.0076 + 4.5324i$
(d)	30	11.928210 seconds	$1.8089 + 4.5324i$

Tableau III.4 : Variation du temps de calcul et de la crête du spectre en fonction de l'échelle.

Discussion :

Aux fines échelles, toutes les singularités de l'image sont détectées. Plus on augmente les échelles, plus la détection est grossière et le temps de calcul augmente.

Pour 20 échelles, l'image α est claire et le spectre est le plus approprié $D(h) \approx 2$.

3.3. Type d'ondelette :

Pour le type d'ondelettes, on teste quatre types d'ondelettes : gaussienne, chapeau mexicain (dérivée seconde de la gaussienne), gaussienne d'ordre 3 et Morlet.

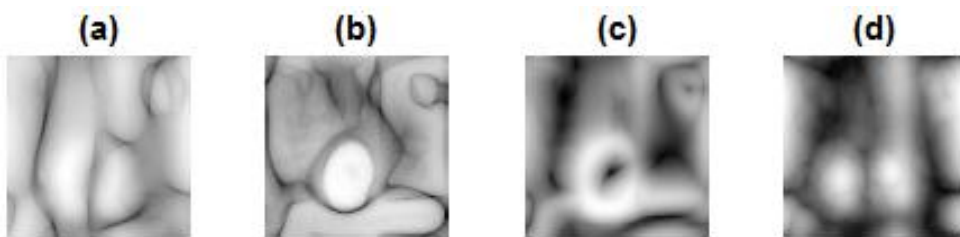


Fig III.14 : (a), (b), (c) et (d) représentent respectivement les images α obtenues en utilisant l'ondelette gaussienne, chapeau mexicain, gaussienne d'ordre 3 et Morlet.

Discussion :

L'image α obtenue par l'ondelette chapeau mexicain (dérivée seconde de la gaussienne) est la plus nette.

D'après les résultats obtenus et discutés, on fixe les paramètres d'entrée comme suit :

Taille	Echelle	Ondelette
128*128	[1 : 20]	Chapeau mexicain

Tableau III.5 : Paramètres de calcul de l'image alpha et du spectre multifractal.

4. Etude du spectre multifractal :

Après avoir fixé les paramètres, on étudie la variation du spectre multifractal en fonction de la régularité de l'image. Cette étude va nous permettre de comprendre le comportement du

spectre (allure de la courbe, largeur du spectre, valeur de h pour $D(h) \approx 2$.) vis-à-vis les singularités présentes dans l'image.

Vu les difficultés d'avoir des images de régularité différente (la plus régulière, la moins régulière), nous avons créé, à partir de l'image test, deux autres images qui contiennent plus d'objets (singularités) et calculé leur spectres multifractals.

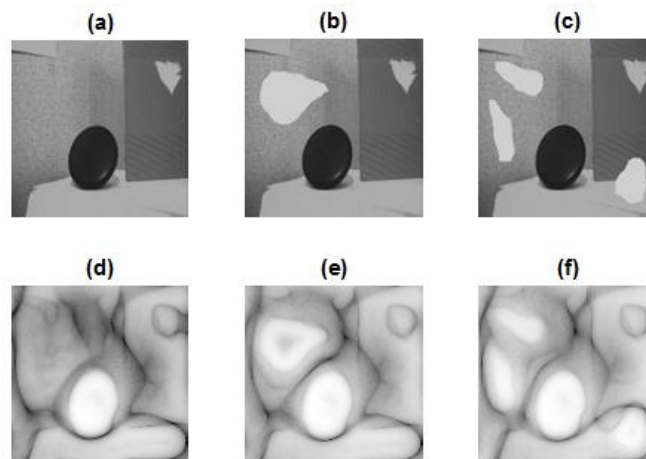


Fig III.15 : Représentation de trois images différentes (a), (b) et (c) et leurs images α (d), (e) et (f).

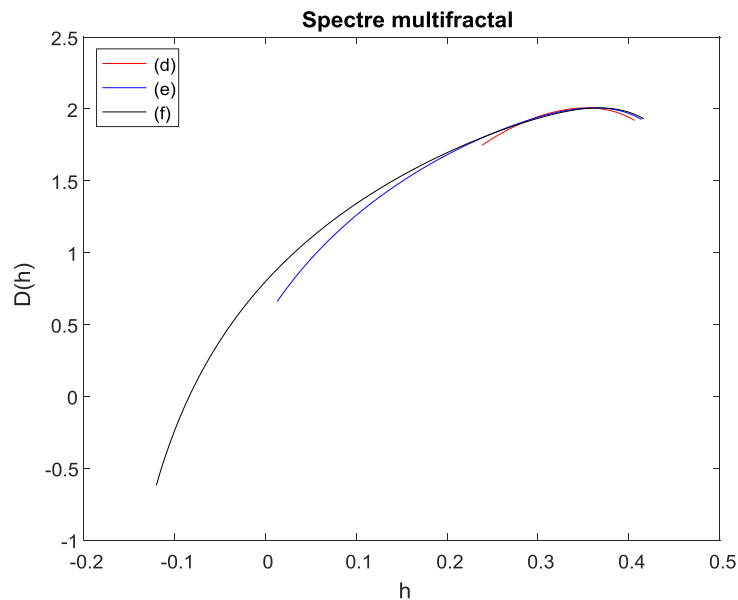


Fig III.16 : Les spectres multifractals des images (d), (e) et (f).

Image	(a)	(b)	(c)
Largeur	0.1676	0.4006	0.5362

Tableau III.6 : Variation de la largeur des spectres des trois images.

Discussion :

L'image α (f) correspondante à l'image (c) qui contient *plus de singularités* a *le plus large spectre, penché vers la gauche* et couvre une large partie des *faibles valeurs de h*.

L'image alpha (d) correspondante à l'image (a) qui contient *moins de singularités* a *le spectre le plus étroit*.

On conclut que plus l'image est régulière, plus son spectre est étroit et vice-versa.

5. Application en mammographie :

5.1. Caractérisation :

5.1.1. Caractérisation des tissus mammaires sains et pathologiques :

La première application en mammographie consiste à la caractérisation des tissus mammaires sains et pathologiques. Pour cela, nous avons pris trois exemples :

- Le premier est une mammographie normale des deux seins droit et gauche.
- Le deuxième comprend trois mammographies (des deux seins), chaque mammographie présente une pathologie au niveau de l'un des seins. Pour chaque sein (normal et pathologique), on trace le spectre multifractal et on les compare.
- Le troisième exemple est une mammographie présentant des microcalcifications. On sélectionne deux régions d'intérêt (R.I) de cette image : une saine et l'autre contenant les microcalcifications et on trace leurs spectres multifractals.

Exemple 1 :

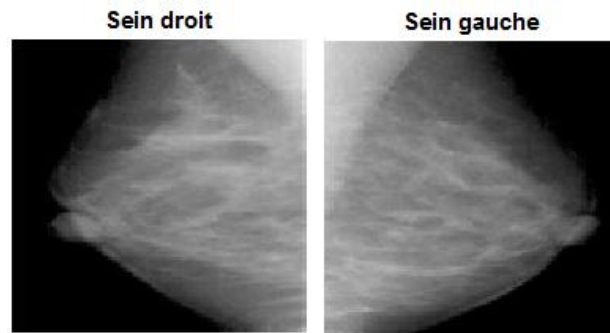


Fig III.17 : Mammographie normale des deux seins droit et gauche.

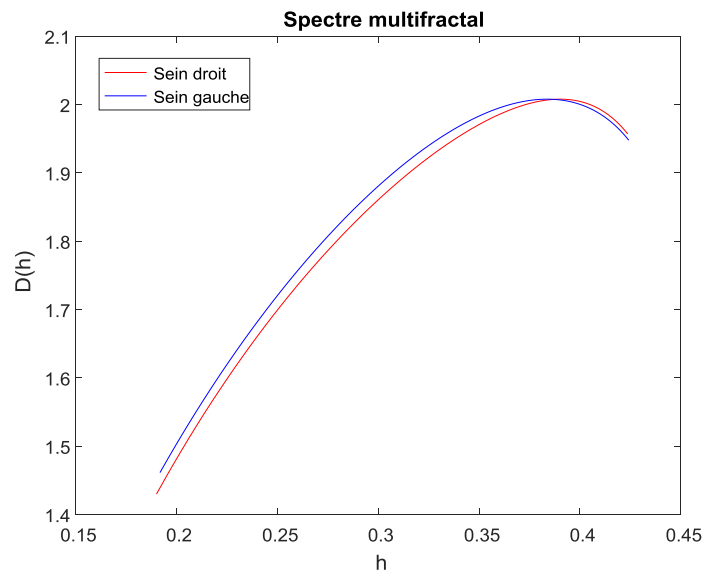


Fig III.18 : Spectres multifractals du sein gauche et droit.

	Largeur	h_0
Sein droit	0.2335	0.3902
Sein gauche	0.2323	0.3895

Tableau III.7 : Valeurs des exposants de Hölder et largeur des spectres.

Exemple 2 :

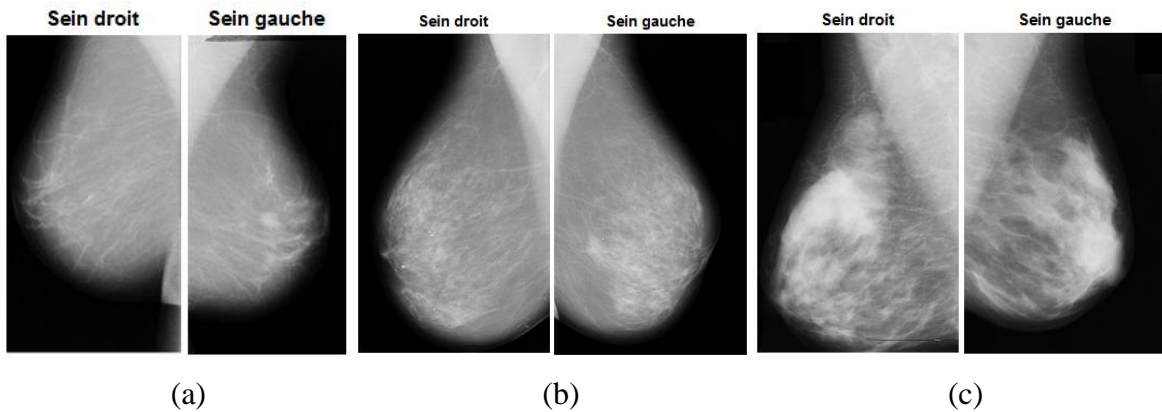


Fig III.19 : 3 exemples de trois mammographies des deux seins.

- (a) Mammographie présentant une masse bénigne au niveau du sein gauche.
- (b) Mammographie présentant une masse maligne au niveau du sein gauche.
- (c) Mammographie présentant une distorsion architecturale au niveau du sein droit.

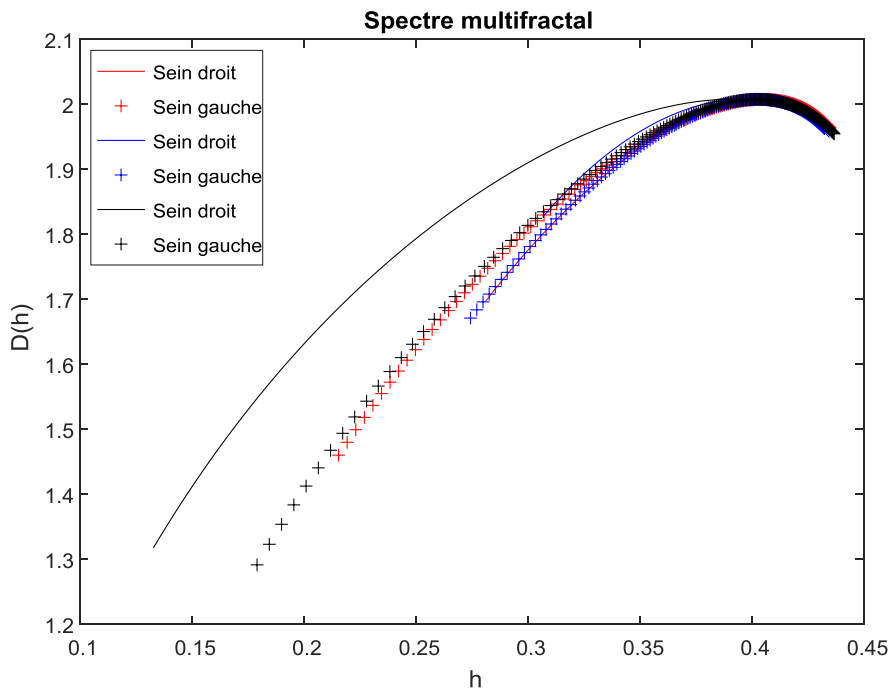


Fig III.20 : Spectres multifractals des trois mammographies

- (a) en rouge, (b) en bleu et (c) en noir.

Figure	(a)		(b)		(c)	
Sein	Droit	Gauche	Droit	Gauche	Droit	Gauche
Largeur	0.1512	0.2193	0.1277	0.1580	0.3039	0.2575
h_0	0.4044	0.4051	0.3955	0.4027	0.4022	0.3904

Tableau III.8 : Valeurs des exposants de Hölder et largeur des spectres.

Exemple 3 :

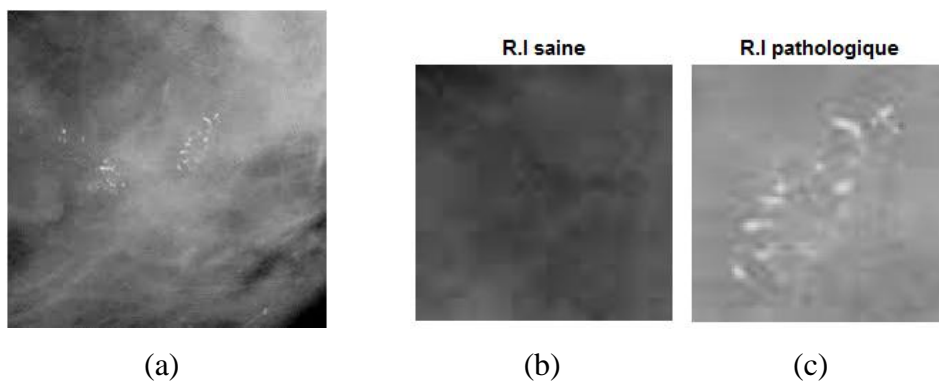


Fig III.21 : (a) : Mammographie présentant des microcalcifications.
(b) et (c) : les deux R.I. saine et pathologique.

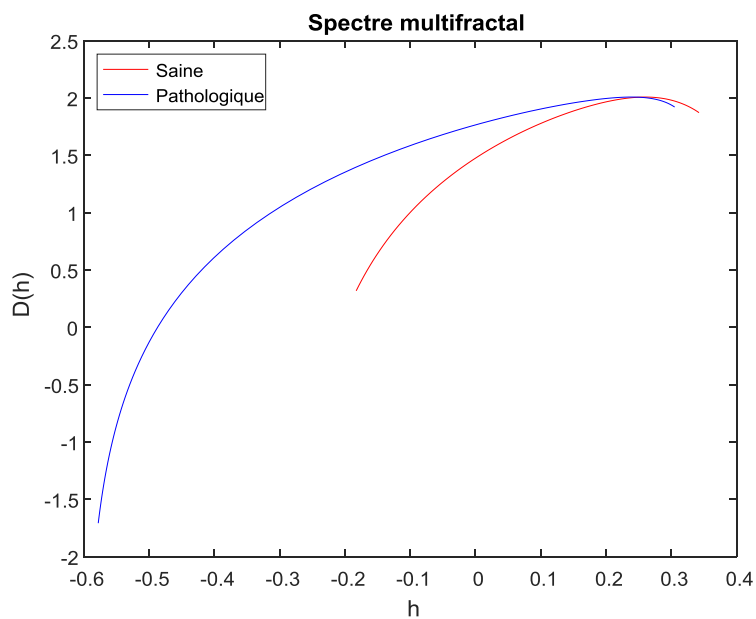


Fig III.22 : Spectres multifractals des deux R.I.

	R.I saine	R.I pathologique
Largeur	0.5249	0.8826
h_0	0.2598	0.2390

Tableau III.9 : Valeurs des exposants de Hölder et largeur du spectre.

Discussion :

Les spectres multifractals des tissus mammaires pathologiques sont plus larges que les spectres multifractals des tissus mammaires sains et l'exposant de Hölder h_0 des tissus sains est plus élevé que celui des tissus pathologiques. Cela confirme l'irrégularité présente dans le tissu mammaire pathologique par rapport au tissu sain.

5.1.2. Caractérisation des tissus mammaires denses et gras :

La deuxième application en mammographie consiste à distinguer entre tissu gras et dense. Pour cela, nous avons pris deux exemples. Le premier consiste à tracer les spectres multifractals de quatre images mammographiques de densité mammaire croissante (du moins dense au plus dense). Pour le deuxième exemple, nous avons pris trois mammographies quelconques de seins denses et trois mammographies quelconques de seins gras. Pour chacune, on calcule le spectre multifractal, sa largeur et la valeur de l'exposant h_0 .

Exemple 1 :

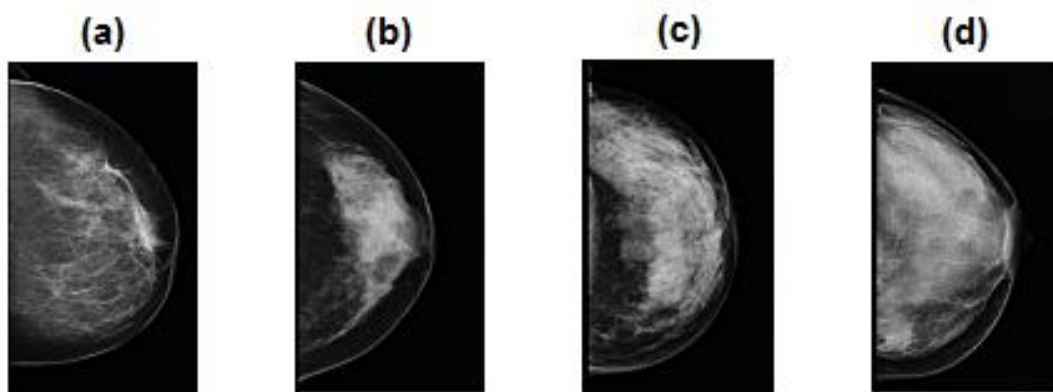


Fig III.23 : Quatre mammographies de densité mammaire croissante.

(a) sein le moins dense, (d) sein le plus dense.

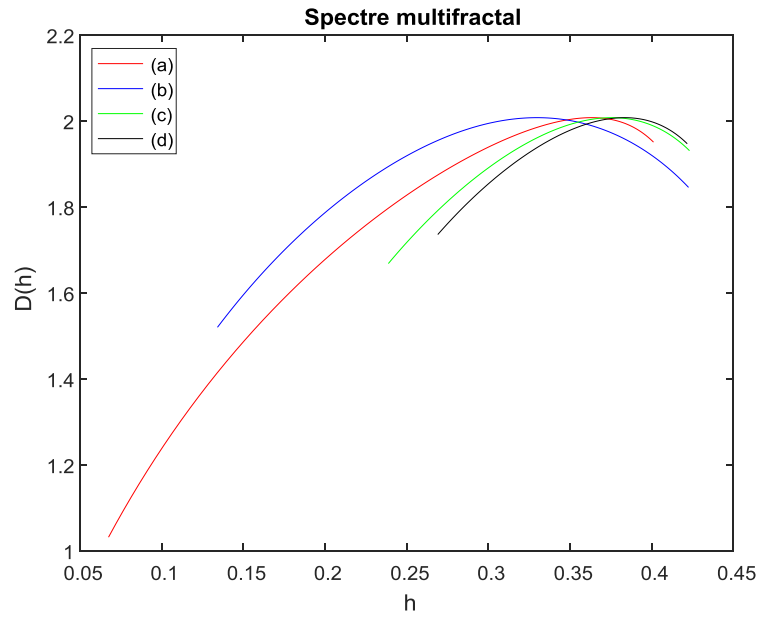


Fig III.24 : Spectres multifractals des quatre mammographies.

	(a)	(b)	(c)	(d)
Largeur	0.3335	0.2883	0.1843	0.1527
h_0	0.3632	0.3297	0.3756	0.3834

Tableau III.10 : Valeurs des exposants et de la largeur des spectres.

Exemple 2 :

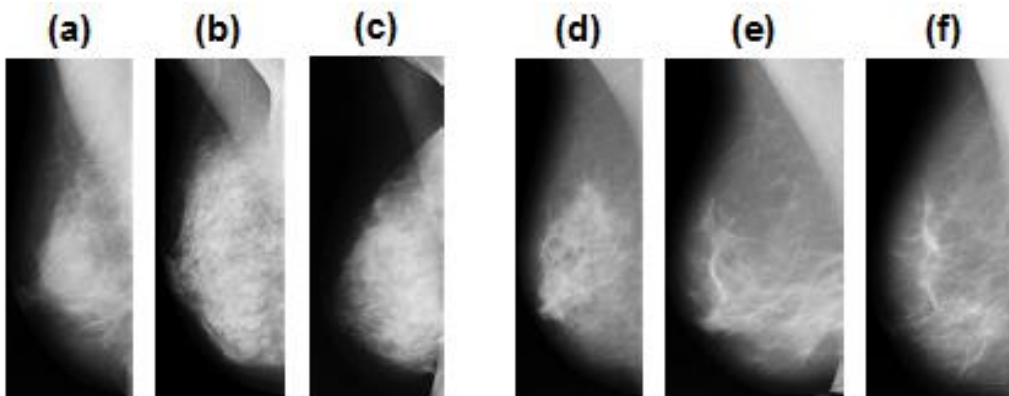


Fig III.25 : (a), (b) et (c) : mammographies de seins denses,
(d), (e) et (f) : mammographies de seins gras.

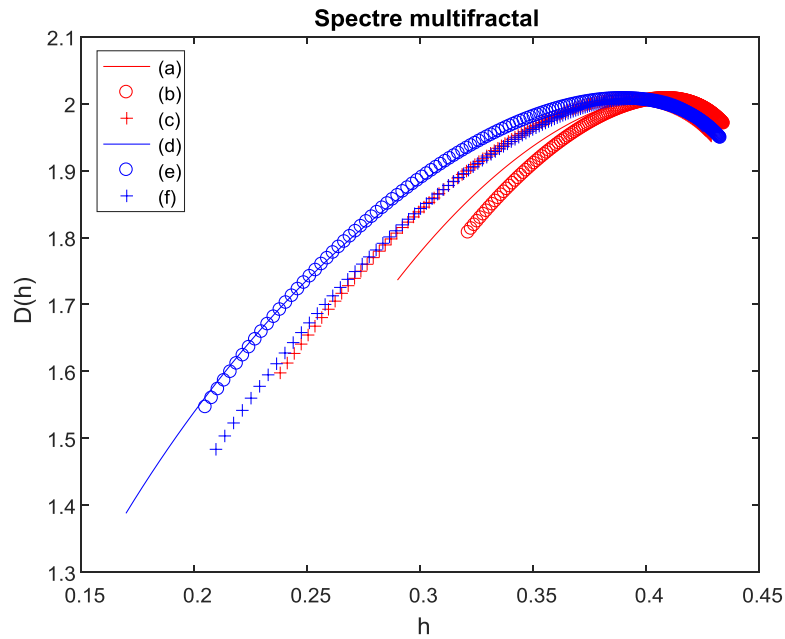


Fig III.26 : Spectres multifractals des six mammographies.
en rouge : des seins denses, en bleu : des seins gras.

	Tissus mammaires denses			Tissus mammaires gras	
	Largeur	h_0		Largeur	h_0
(a)	0.1430	0.4034	(d)	0.2556	0.3895
(b)	0.1131	0.4090	(e)	0.2279	0.3897
(c)	0.1908	0.3921	(f)	0.2205	0.3958
Moyenne	0.1490	0.4015	Moyenne	0.2347	0.3917

Tableau III.11 : Valeurs des exposants et des largeurs des spectres des tissus denses et gras.

Discussion :

Le spectre multifractal du tissu gras est le plus large. Plus la densité augmente, plus il devient étroit et l'exposant de Hölder augmente. On conclut que plus la densité mammaire augmente, plus le tissu mammaire devient homogène.

Le choix des images est très important pour pouvoir faire la comparaison des spectres car il ne s'agit pas d'une comparaison de deux seins de la même personne comme les applications précédentes. Par exemple, si on prend un sein dense de grande taille et un sein gras de petite taille, le spectre multifractal du sein dense sera plus large que le sein gras. Pour éviter ce

genre de situation, nous avons essayé de choisir des mammographies de seins à peu près de même taille.

5.1.3. Caractérisation des pathologies malignes et bénignes :

La troisième application consiste à différencier entre les pathologies bénignes et malignes du tissu mammaire. Nous avons pris trois exemples de pathologies : Calcifications, masse circonscrite et masse spiculée, chacune dans le cas bénin et malin.

Comme discuté dans la partie précédente, pour une comparaison fiable, nous avons pris des mammographies de seins à peu près de même taille et qui ont le même tissu mammaire (gras).

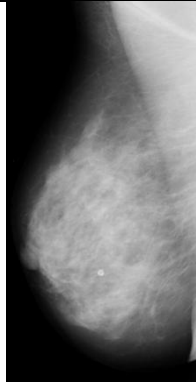
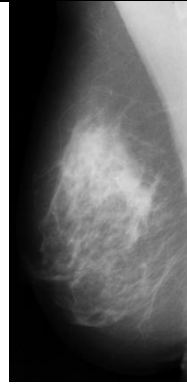
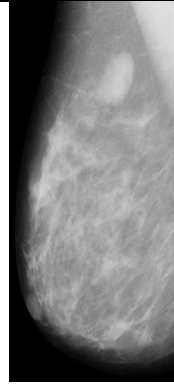
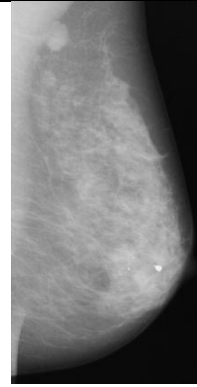
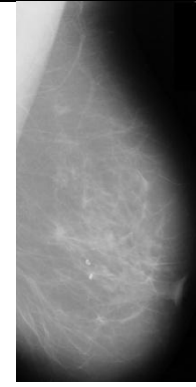
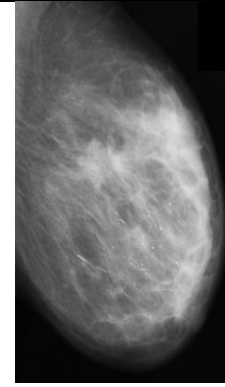
Calcifications		Masse circonscrite		Masse spiculée	
Bénignes	Malignes	Bénigne	Maligne	Bénigne	Maligne
					

Fig III.27 : Mammographies présentant différentes pathologies dans le cas bénin et malin.

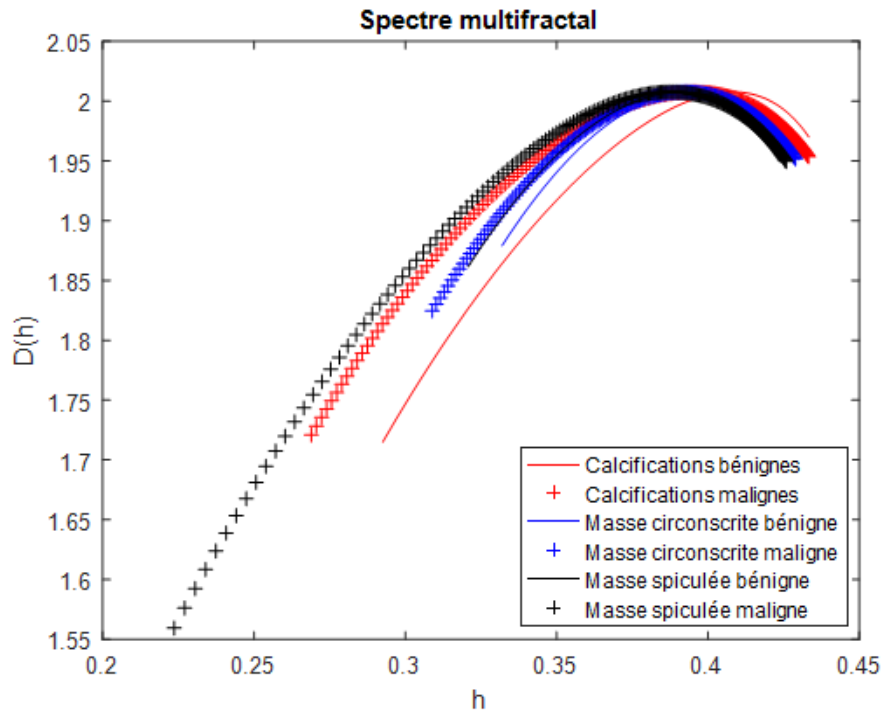


Fig III.28 : Spectres multifractals des différentes pathologies.

	Calcifications		Masse circonscrite		Masse spiculée	
	Bénignes	Malignes	Bénigne	Maligne	Bénigne	Maligne
Largeur	0.1392	0.2277	0.0980	0.1200	0.1061	0.2022
h₀	0.4030	0.3954	0.3948	0.3926	0.3916	0.3876

Tableau III.12 : Valeurs des exposants et des largeurs des spectres des pathologies malignes et bénignes.

Discussion :

Les seins contenant des pathologies malignes ont des spectres plus larges et des exposants faibles par rapport à ceux contenant des pathologies bénignes.

5.2. Segmentation :

La segmentation est une opération fondamentale et l'un des outils clés dans la vision par ordinateur et l'analyse d'images. Elle consiste à identifier les régions d'intérêt dans les images. De nombreuses méthodes de segmentation ont été proposées dans la littérature. Dans cette partie, nous allons utiliser le spectre géométrique calculé à partir de l'image α obtenue par la méthode MMTO pour la segmentation des images mammographiques.

5.2.1. Segmentation des masses mammaires :

Exemple 1 :

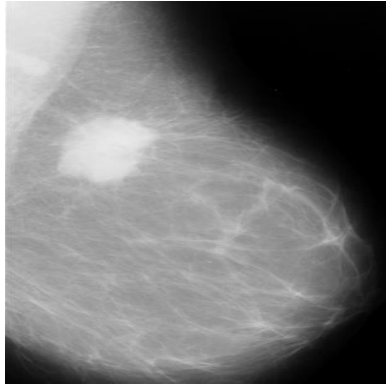


Fig III.29 : Mammographie montrant une masse maligne.

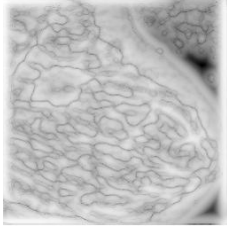
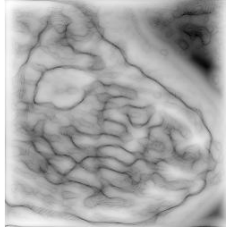
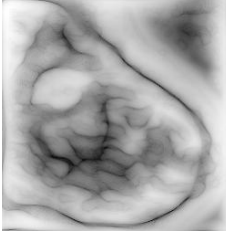
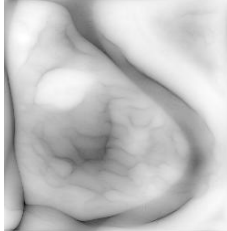
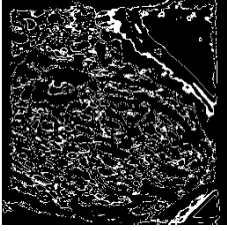



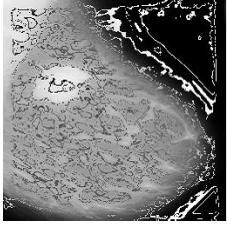
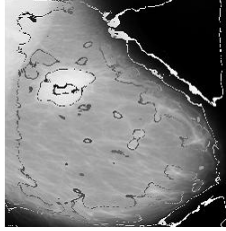
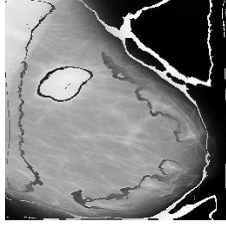
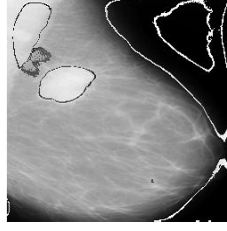
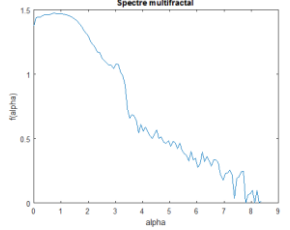
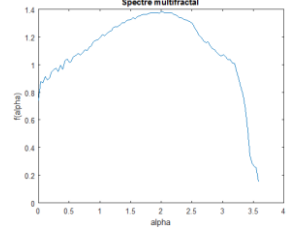
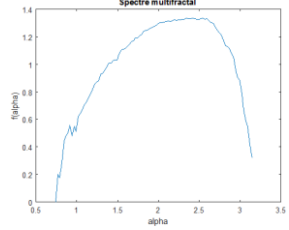
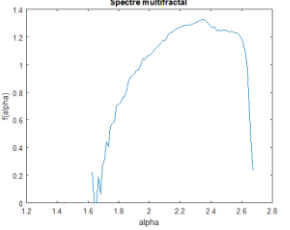
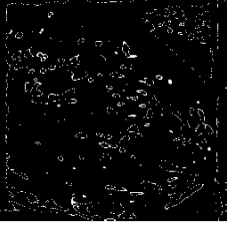



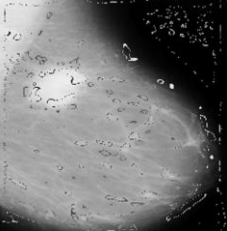
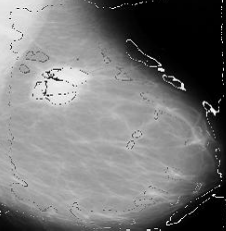
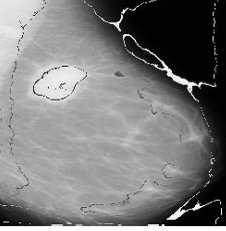
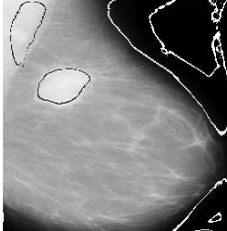
5 échelles	10 échelles	20 échelles	50 échelles
			
			
$0.6 < \alpha \leq 0.9$	$2.2 < \alpha \leq 2.3$	$2.5 < \alpha \leq 2.6$	$2.52 < \alpha \leq 2.54$
			
			
			
$1.41 < f(\alpha) \leq 1.42$	$1.32 < f(\alpha) \leq 1.33$	$1.33 < f(\alpha) \leq 1.34$	$1.22 < f(\alpha) \leq 1.23$
			

Tableau III.13 : Segmentation de la masse pour différentes échelles.

Exemple 2 :

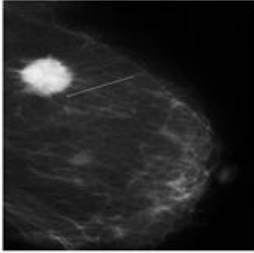
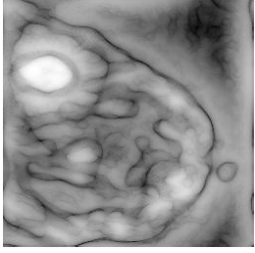
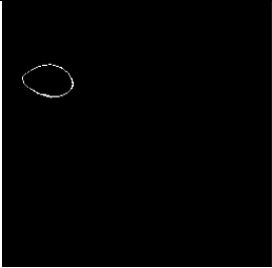
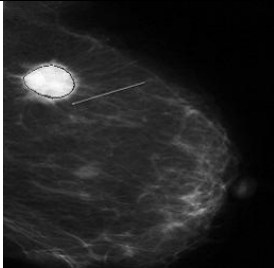
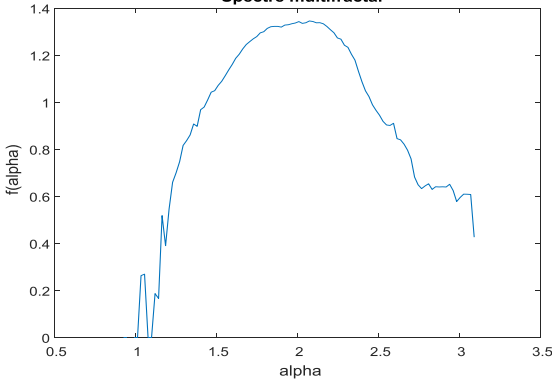
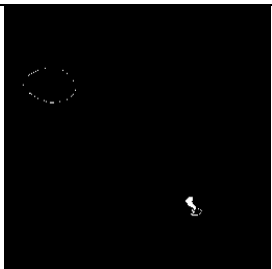
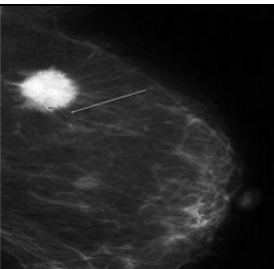
Image originale	Image alpha (10 échelles)
	
Segmentation de l'image alpha	Superposition
 <p data-bbox="416 987 644 1025">$3 \leq \alpha < 3.1$</p>	
<p data-bbox="730 1055 895 1077" style="text-align: center;">Spectre multifractal</p> 	
Segmentation de l'image $f(\alpha)$	Superposition
 <p data-bbox="373 1812 687 1850">$0.7 \leq f(\alpha) < 0.75$</p>	

Tableau III.14 : Segmentation d'une masse circonscrite pour 10 échelles.

5.2.2. Segmentation des microcalcifications :

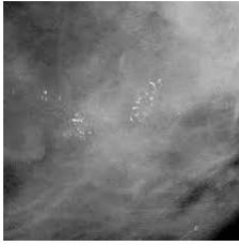

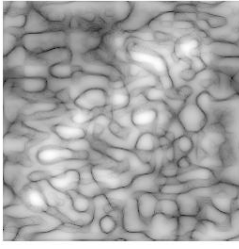
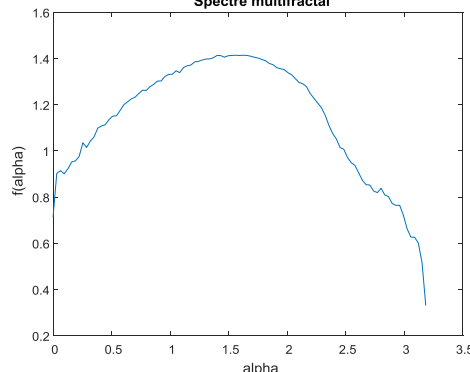
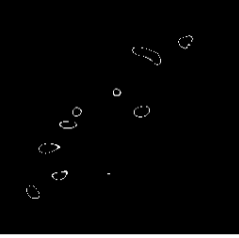
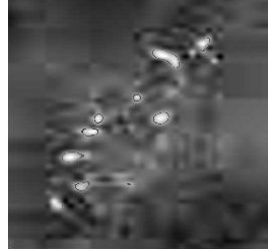

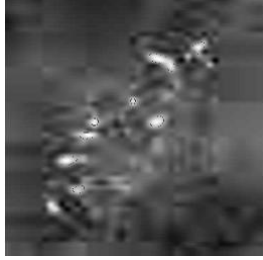
Image originale	Région d'intérêt	Image alpha (10 échelles)
		
<p style="text-align: center;">Spectre multifractal</p> 		
Segmentation de l'image alpha		Superposition
 <p style="text-align: center;">$2.7 \leq \alpha < 2.8$</p>		
Segmentation de l'image $f(\alpha)$		Superposition
 <p style="text-align: center;">$0.85 \leq f(\alpha) < 1.1$</p>		

Tableau III.15 : Segmentation d'une R.I contenant des microcalcifications pour 10 échelles.

Discussion :

En augmentant les échelles, l'image α perd les détails comme la forme du contour et le spectre multifractal devient de plus en plus étroit. Pour 5 et 10 échelles, nous avons tous les détails de l'image particulièrement la masse mais le spectre est trop large ce qui rend la segmentation difficile. Pour 20 échelles et plus, le contour de la masse perd un peu son aspect et le spectre se rétrécit (moins de détails) mais le résultat de la segmentation est acceptable.

Pour les deux autres exemples, nous avons travaillé sur 10 échelles et les résultats de la segmentation sont satisfaisants.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons appliqué l'approche multifractale basée sur la transformée en ondelettes sur des images mammographiques extraites de la base de données MIAS dans le but de faire la caractérisation et la segmentation.

Dans la première partie de l'application, nous avons fait la caractérisation du tissu mammaire en calculant le spectre de Legendre. Ce dernier nous a permis de différencier entre tissu gras et dense, tissu sain et pathologique et distinguer entre lésion bénigne et maligne. Cette caractérisation a été faite en calculant la largeur du spectre et la valeur de l'exposant de Hôlder : plus le spectre est large et la valeur de l'exposant est faible, plus c'est irrégulier.

Dans la deuxième partie, nous avons fait la segmentation de quelques lésions mammaires à partir du spectre géométrique en choisissant les valeurs adéquates de α et $f(\alpha)$. Les résultats de la segmentation sont satisfaisants.

Le paramètre d'échelle joue un rôle dans la qualité de la segmentation : plus il est grand plus on perd les détails. Donc il faut bien choisir l'échelle surtout quand il s'agit d'un contour irrégulier.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'analyse multifractale est reconnue comme un outil puissant pour étudier et caractériser les singularités et les structures irrégulières. Plusieurs études ont montré les possibilités offertes par cette analyse dans le traitement d'image, notamment dans la classification des images médicales.

Dans ce mémoire, nous avons présenté une stratégie de caractérisation et de segmentation des images mammographiques. Il s'agit d'une analyse multifractale basée sur la transformée en ondelettes continue. Nous avons montré que cette approche est adaptée à l'analyse des irrégularités présentes dans les images mammographiques sachant que les changements qui se produisent lors d'une maladie comme le cancer se manifestent dans leurs propriétés locales.

Dans cette étude, la caractérisation a été faite à partir du spectre de Legendre où nous avons calculé quelques paramètres multifractals comme le coefficient de Hölder h_0 et la largeur du spectre qui indiquent le degré de complexité des structures présentes dans l'image. Notons que les valeurs des coefficients de Hölder sont petites et les largeurs des spectres sont grandes lorsqu'il s'agit de fortes irrégularités (pathologies) et vice versa (lorsque c'est plus régulier).

En utilisant cette méthode, nous avons pu discriminer entre le cas sain et le cas pathologique, le tissu gras et le tissu dense et les lésions malignes et bénignes. Les résultats montrent que la multifractalité augmente pour les mammographies pathologiques par rapport aux mammographies normales, pour les lésions malignes par rapport aux lésions bénignes et elle diminue avec l'augmentation de la densité mammaire.

La deuxième partie concerne la segmentation des pathologies mammaires. Elle est basée sur l'image alpha et le bon choix de α (description locale) et $f(\alpha)$ (description globale) à partir du spectre multifractal de Hausdorff.

Dans les deux applications (caractérisation et segmentation), les spectres multifractals sont calculés à partir de l'image alpha. Le calcul de cette dernière s'appuie sur deux paramètres essentiels : le type d'ondelette (Chapeau mexicain) et l'échelle où nous avons travaillé sur une gamme de vingt échelles dans la caractérisation. Par contre, dans la segmentation, ce paramètre joue un rôle très important particulièrement dans la détection de contours, cela a été discuté dans la segmentation des lésions mammaires.

Nous avons envisagé d'enrichir notre travail en comparant la méthode MMTO avec les deux autres méthodes (coefficients discrets et coefficients dominants) qui utilisent la transformée en ondelettes discrète, mais malheureusement, nous ne sommes pas arrivées à le faire car l'implémentation de la méthode MMTO était difficile ainsi que le calcul du spectre multifractal.

Références et Bibliographie

- [1] <http://bibliobs.nouvelobs.com/en-partenariat-avec-books/20140905.OBS8326/benoit-mandelbrot-l-homme-qui-inventa-le-mot-de-passe-informatique-entre-autres.html>
- [2] <http://peipa.essex.ac.uk/info/mias.html> The mini-MIAS database of mammograms
- [3] Abry P et al , *Irregularities and Scaling in Signal and Image Processing*, Multifractal Analysis.
- [4] Abry P et al, *Etude de la variation du rythme cardiaque par Analyse Multifractale par les coefficients dominants, Application sur ECG feotal.*
- [5] Abry P et al, *when Van Gogh meets Mandelbrot : Multifractal classification of painting's texture*, Signal Processing,2012.
- [6] Alunni J.et al, *densité mammaire, Classification BI-RADS : ACR*, Fiche technique n°1, Classification BI-RAD, La Lettre du Sénologue n° 40 - avril -mai-juin 2008.
- [7] Amblard , *Fractales ?*, Cours de DEA SIPT.
- [8] Arneodo.A, « *A wavelet-based method for multifractal image analysis* », The European physical Journal, 2000.
- [9] Arneodo. A, « *A Wavelet-Based Method for Multifractal Image Analysis: From Theoretical Concepts to Experimental Applications* », Advances in imaging and electronphysics, vol. 126.
- [10] Arnéodo.A, « *La transformation en ondelettes continue : un microscope mathématique adapté à l'étude des propriétés d'invariance d'échelle et de corrélations à longue portée des séquences d'ADN* ».
- [11] Arneodo.A, et al, *Ondelettes, Multifractales et Turbulences : de l'ADN aux croissances cristallines* (Diderot Editeur, Art et Sciences, Paris, 1995).
- [12] Arneodo, A.et al. *Waveletbased multifractal formalism: Application to DNA sequences, satellite images of the cloud structure and stock market data*. The Science of Disasters: Climate Disruptions, Heart Attacks, and Market Crashes (A. Bunde, J. kropp& H. J. Schellnhuber, eds.),pp.26–102.Springer,Berlin (2002).
- [13] Arneodo.A, Audit.B, Kestener.P, Roux.S, « *Multifractal Formalism based on the Continuous Wavelet Transform* ».
- [14] Arneodo, A., Bacry, E., Graves, P. V. &Muzy, J.-F. (1995). *Characterizing long-range correlations in DNA sequences from wavelet analysis*. Phys. Rev. Lett. 74, 3293–3296.

- [15] Arneodo, A., et al. *Wavelet based fractal analysis of DNA sequences*. (1996) *Physica D* 96, 291– 320.
- [16] Arneodo et Jaffard , *analyse multifractal des signaux*, Images des Mathématiques, 2004.
- [17] Baile R, *Analyse et Modélisation Multifractale de vitesses de vent, Applications à la prévision de la ressource éolienne*, thèse de doctorat de l'Université de Corse, 2010.
- [18] Barnsley et al, *The science of fractal images*, Mathematical Annalen, 1989.
- [19] Benoit Mandelbrot, livre '*Les Objets Fractals : forme, hasard et dimension*', Edition Flammarion, 1975.
- [20] Brodu N et al, *exploring two novel features for EEG-based brain-computer interfaces: Multifractal cumulants and predictive complexity*, *Neuro Computing*, 1993.
- [21] Bruno Lashermes, *Analyse Multifractale pratique : coefficients dominants et ordre critiques, Applications à la turbulence pleinement développée*, Effets de nombre de Reynolds fini, 2005.
- [22] Cheikhrouhou Imene, « *Description et classification des masses mammaires pour le diagnostic du cancer du sein* », thèse de doctorat, Spécialité: Sciences pour l'ingénieur, Traitement des images et du signal, Université d'Evry Val d'Essonne, Juin 2012.
- [23] Chhabra et al, *Direct determination of the singularity spectrum and its application to fully developed turbulence*, *Physical review*, 1989.
- [24] Damerval.C, *Thèse de doctorat «Ondelettes pour la détection de caractéristiques en traitement d'images : Applications à la détection de régions d'intérêt* », Université Joseph Fourier, 2008.
- [25] Dauphiné et al, *Géographie fractale : fractals auto-similaire et auto-affine*, Paris, 2011.
- [26] Dubois J et al, *le monde des fractales : la géométrie cachée de la nature*, Ellipse, Paris, 2006.
- [27] Flandrin. P, et al, *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, édité par P. Abry, P. Goncalves, J. Lévy Véhel (Hermès, Paris, 2002), Vol. 2, Chap. Analyses en ondelettes et lois d'échelle.
- [28] Forriez M, *Lois d'échelle et transitions fractal-non fractal en géographie*, Article, 2009.

- [29] Galaska R, *Comparison of Wavelet Transform Modulus Maxima and Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Heart Rate in Patients with Systolic Dysfunction of Left Ventricle*, First Department of Cardiology, Medical University of Gdansk, 7 Debinki St., 80-211 Gdansk, Poland , Journal compilation C, 2008.
- [30] Grasimova E, *Wavelet based multifractal analysis of dynamic infrared thermograms to assist in early breast cancer diagnosis*, *frontiers in physiology*, Original Research Article, 2014.
- [31] Hemsley A. and Mukundan R., "*Multifractal Measures for Tissue Image Classification and Retrieval*," in *Multimedia*, 2009. ISM '09. 11th IEEE International Symposium on, 2009, pp. 618-623.
- [32] Jaffard, S. (1989). *Exposants de Hölder en des points donnés et coefficients en ondelettes*. C.R.Acad.Sci.ParisSér.I 308 79–81.
- [33] Jaffard S et al, *Wavelet techniques in multifractal analysis, fractal geometry and applications: A jubilee of Benoit Mandelbrot, Proceedings of Symposia in Pure mathematics Providence, aMS, 2004*.
- [34] Jaffard S et al, *Wavelet leaders in multifractal analysis*, 2006.
- [35] Jaffard.S, Abry.P et Roux.S, « *Singularités oscillantes et coefficients d'ondelettes dominants* ».
- [36] Jaffard.S, Lashermes.B, Abry.P,« *Wavelet leaders in multifractal analysis* », in *Wavelet Analysis and Applications*, 2006, pp. 219–264.
- [37] Kestener.P, « *Wavelet-based multifractal formalism to assist in diagnosis in digitized mammograms* », *Image Anal Stereol*, 2001.
- [38] Kestener P , *Analyse Multifractale 2D et 3D à l'aide de la transformation en ondelettes :applications en mammographie et en turbulence développée*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux, 2003.
- [39] Khider M, *Analyse multifractale par MMTO-2D : Evaluation sur des images radar et médicales*, thèse de doctorat, Université Houari Boumediene.
- [40] Korchyine et al, *Spectre Multifractal : Applications aux images médicales*, 2012.
- [41] Lajoie Josiane, *La géométrie fractale*, mémoire, Université du Québec à Trois-Rivières, 2006.
- [42] Le Cadet. O, *Thèse de doctorat « Méthodes d'ondelettes pour la segmentation d'images : Applications à l'imagerie médicale et au tatouage d'images »*, Institut national polytechnique de Grenoble, 2004.

- [43] Lopes R, *Analyse fractale et multifractale en imagerie médicale : outils, validations et applications*, Thèse de doctorat, Université de Lille, 2009.
- [44] Lopes R et al, *La géométrie fractale pour l'analyse des signaux médicaux: état de l'art*, Ingénierie et Recherche Biomédicale, 2010.
- [45] Mallat.S, *Livre « Une exploration des signaux en ondelettes »*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, France, 2000.
- [46] Marin Z et Grasmova E, *Mammographic evidence of microenvironment changes in tumorous breasts*, Laboratory of Physical Foundation of Strength, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia, Janvier 2017.
- [47] Mukundan R. and Hemsley A., "*Tissue Image Classification Using Multi-Fractal Spectra*," International Journal of Multimedia Data Engineering and Management (IJMDEM), vol. 1, 2010.
- [48] Muzy, Bacry, Arneodo, « *The multifractal formalism revisited with wavelets* », International Journal of Bifurcation and Chaos, April 1994.
- [49] Olivier Nocent, *Les objets Fractals : vers une géométrie de la nature*, Maitre de Conférence en informatique, Université de Reims Champagne- Ardnne, 2007.
- [50] Ouahabi A, *Formalisme multifractal fondé sur les Ondelettes :quelques Applications*.
- [51] Ouahabi A et al, *Ondelettes et fractales pour l'analyse du signal et de l'image, in optimisation en traitement du Signal et de l'Image*, IC2, Hermès-Lavoisier, 2007.
- [52] Ouahabi V, livre '*Analyse Multirésolution pour le signal et l'image*', Hermes science & Lavoisier, 2012.
- [53] Oudjemia S, *Analyse de la complexité des signaux par approches multifractales*, Rapport de Master, Université François Rabelais, Tours, 2011.
- [54] Oudjemia S, *Analyse des signaux biomédicaux par des approches multifractales et entropiques : Application à la variabilité du rythme cardiaque fœtal*, Université de Tizi Ouzou, 2013.
- [55] Pascal Monceau, *Transitions de phase en dimensions fractale.s*
- [56] Pr Domart & Dr Bourneuf, « *Larousse de la médecine* », 3ème tome, Librairie Larousse, 1972.
- [57] Seuret S, *Quelques résultats d'analyse multifractale en analyse*, Séminaire Laurent Schwartz,EDP et applications,2012-2013.
- [58] Shimizu yu, *Wavelet-based multifractal analysis of fMRI time series*, NeuroImage, 2004.
- [59] Tricot C, *Evaluation de la dimension fractale d'un graphe*, Revus physique, 1988.

- [60] Tricot C, *courbes et dimension fractale*, 1993.
- [61] Torrèsani.B , *Livre « Analyse continue par ondelettes »*, Inter Éditions& CNRS (Centre de Physique Théorique de Marseille) Éditions, France, 1995.
- [62] Vehil-levy, *Fractal and multifractal processing of images*, Traitement du Signal 2003 – Volume 20 n° 3 – Spécial 2003, INRIA, Projet Fractales, Domaine de Voluceau, 78153 Le Chesnay Cedex, France.
- [63] Wendt H, *Analyse multifractale d'image : l'apport des coefficients dominants*, Ecole Normale Supérieure de Lyon, France.

Résumé

Dans ce présent travail, nous nous intéressons à une étude multifractale à base d'ondelettes des images mammographiques. Le principe de la méthode consiste à calculer les maxima des modules de la transformée en ondelettes (MMTO) le long des échelles. Ces MMTOs révèlent la présence de singularités locales et permettent de mesurer l'exposant de Hölder. Deux approches sont considérées. La première pour la caractérisation ; elle est basée sur le formalisme multifractal à travers la transformée de Legendre pour estimer le spectre multifractal. La seconde pour la segmentation ; c'est une méthode directe basée sur l'algorithme de comptage de boîtes qui calcule la dimension de Hausdorff des ensembles du même degré de singularité. Les résultats obtenus démontrent la puissance de cette analyse dans la détection des pathologies mammaires.

Mots clés : *analyse multifractale, MMTO, Hölder, spectre multifractal, mammographie.*

Absract

In this work, we are interested in a multifractal study based on wavelets of mammographic images. The principle of the method consists in calculating the Wavelet Transform Modulus Maxima (WTMM) along the scales. These WTMM reveal the presence of local singularities and allow measuring the Hölder exponent. Two approaches are considered. The first one for characterization ; it is based on multifractal formalism through the Legendre transform to estimate the multifractal spectrum . The second one for segmentation ; it is a direct method based on the box counting algorithm that calculates the Hausdorff dimension of sets of the same degree of singularity. The results obtained demonstrate the power of this analysis in the detection of mammary pathologies.

Key words: *multifractal analysis, MMTO, Hölder, multifractal spectrum, mammography.*

ملخص

في هذا العمل، نحن مهتمون بدراسة متعددة التكسير على أساس الموجات للصورة الماموجرافية. مبدأ الطريقة يتركز على حساب الحدود الكبرى لمعاملات التحويل بالموجات (MMTO) عبر مختلف السلالم. هذه المعاملات تكشف عن وجود فروق محلية وتسمح بقياس الأس "هولدر". تم النظر في نهجين. الأول للتوصيف؛ يقوم على الشكلية متعددة التكسير من خلال تحويل "ليجنر" لتقدير الطيف متعدد التكسير. والثاني للتجزئة؛ بل هو طريقة مباشرة تستند على خوارزمية عد الصناديق حيث يتم حساب بعد "هوسدورف" للمجموعات التي لها نفس الدرجة من التفرد. أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها قوة هذا التحليل في الكشف عن الأمراض الثديية.

الكلمات الدالة: *تحليل متعدد التكسير، MMTO، أس "هولدر"، طيف متعدد التكسير، التصوير الشعاعي للثدي.*