

Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons la géométrie du problème étudié et sa formulation mathématique. Dans cette dernière, les équations qui régissent le phénomène de la convection forcée en régime turbulent à l'intérieur d'une conduite cylindrique, et de la conduction thermique dans les solides seront présentées avec les différentes conditions aux limites.

Les équations de conservation sont :

- Equations de quantité de mouvement.
- Equation de continuité de Navier-Stokes.
- Equation de l'énergie cinétique de turbulence et de la dissipation.
- Equation de l'énergie.

Résoudre complètement un problème de stockage thermique d'un puits énergétique revient à déterminer en tout point du domaine d'étude les grandeurs caractéristiques du fluide et des solides étudiés (ici, l'eau, le béton et le sous-sol), soit:

- le champ de vitesse,
- la température.
- Les flux de chaleur.

III.1. Géométrie du problème étudié :

La géométrie étudiée est une tranche de 5 m d'un échangeur de chaleur enterré destiné au stockage de l'énergie solaire constitué d'un tube en U inséré dans un forage de 0.055m de diamètre, effectué dans la terre rempli ensuite de béton, dont les dimensions sont tirées des travaux de Eui-Jong Kim et al [24], publiés en mai 2010.

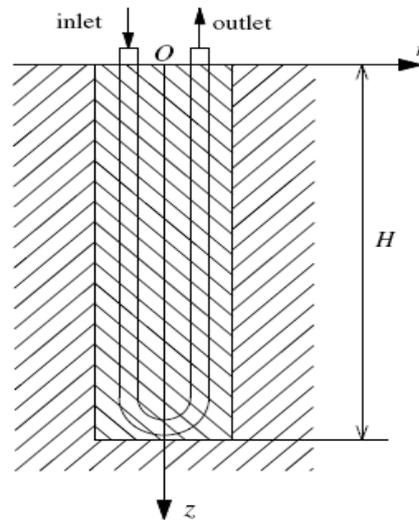


Figure III.1 : Coupe de l'échangeur vertical enterré suivant le plan (y, z).

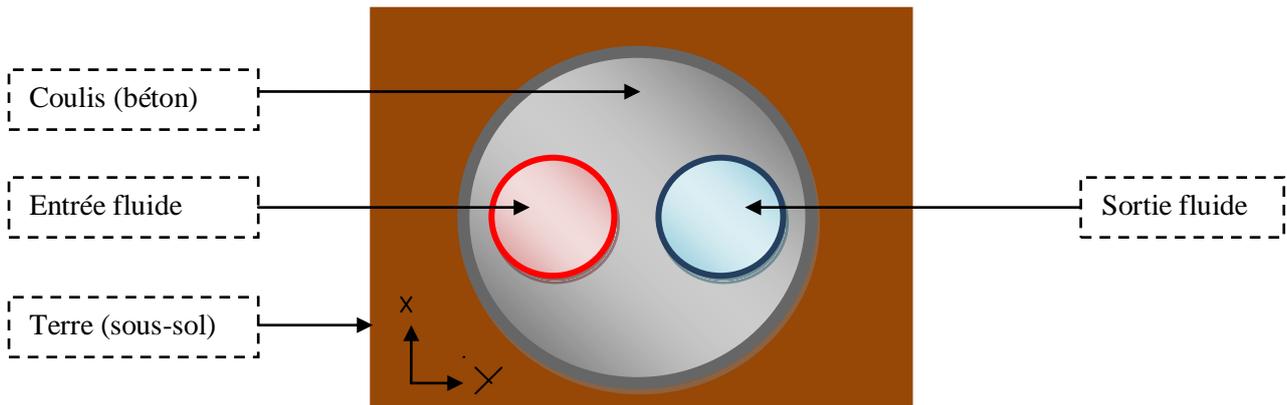


Figure III.2 : Coupe de l'échangeur vertical enterré suivant le plan (x, y).

III.2. Paramètres utilisés :

Pour les simulations que nous présentons dans ce mémoire ainsi que les investigations recherchées dans la construction du modèle numérique, les paramètres physiques et géométriques, les conditions initiales et aux limites tirés des travaux de Eui-Jong Kim et al. [24], sont définies dans les tableaux suivants :

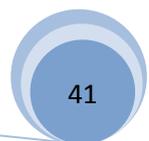
<i>Paramètres</i>	<i>unité</i>	<i>valeur</i>
Diamètre du forage	m	0.110
Diamètre extérieur des tuyaux U	m	0.032
Distance entre centre des tuyaux	m	0.060
Nombre de tuyaux dans un forage		2
Conductivité du sol	W/mK	3.5
Conductivité du coulis	W/mK	1.3
Diffusivité du sol	m ² /s	1.62x10 ⁻⁶
Diffusivité du coulis	m ² /s	3.33x10 ⁻⁷
Pas de temps	h	1

Tableau III. 1 : Paramètres utilisés dans la simulation.

Températures initiales du champ	°C	10
Températures en haut et en bas	°C	10
Densité de flux au deux pattes tuyau	W/m ²	300

Tableau III.2 : Conditions imposées sur le système étudié

On sait que pour certains cas d'écoulements simples une solution analytique exacte est possible. Pour le cas général des écoulements turbulents, le système d'équations de Navier-Stokes ne peut être résolu directement vu la non-linéarité des équations et l'apparition des contraintes de Reynolds de la turbulence comme nouvelles inconnues dans les équations de transport. Le système d'équations est fermé à l'aide des modèles de turbulence.



Dans un volume de contrôle de l'écoulement dans un tube en U de l'échangeur de chaleur étudié, les équations différentielles -développées dans ce chapitre- décrivent les principes de conservation de la masse, des quantités de mouvement et de l'énergie.

III.3. Hypothèses simplificatrices :

Pour construire des modèles suffisamment détaillés et précis, certaines hypothèses sont tenues en compte. Pour cela, on suppose :

- les propriétés thermo-physiques (C_p, μ, λ et ρ) du fluide et du solide sont constantes, et la température du fluide à l'entrée du tube est constante.
- Dans cette étude on prend une tranche de 5m d'épaisseur de l'échangeur vertical.

III.4. Système d'équations :

Les équations suivantes décrivent le phénomène de la convection forcée à l'intérieur de la conduite cylindrique et de la conduction thermique à l'intérieur des milieux solides. Dans le cas de l'écoulement in-stationnaire et tridimensionnel, la discrétisation des équations différentielles du système d'équations par la méthode des volumes finis est la plus approprié à notre étude. Les étapes et la description de cette discrétisation sont expliquées dans ce qui suit :

III.4.1. Forme générale des équations : [25]

Les équations différentielles de conservation décrivant les variations des différentes variables de l'écoulement (u, v, w, k, ε et T) peuvent être écrites sous la forme générale suivante :

-en notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \text{div}(\rho \cdot U \cdot \phi) = \text{div}(\Gamma_\phi \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\phi) + S_\phi \quad (\text{III.1})$$

-en notation tensorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot U \cdot \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (\text{III.2})$$

$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi)$: Taux de change ou accumulation.

$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot U \cdot \phi)$: Flux de convection.

$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)$: Flux de diffusion.

Où :

ϕ : est la variable dépendante générale qui peut être la vitesse. U , l'énergie cinétique de turbulence ; k , sa dissipation, ε , l'enthalpie h , ou la température, T .

$\Gamma \phi$: est le coefficient de diffusion de ϕ

$S\phi$: est le terme source.

Les termes de l'équation généralisée (III.2) sont regroupés dans le tableau (III.3) pour les différentes équations.

L'avantage d'écrire les équations différentielles décrivant l'écoulement turbulent sous la forme générale (III.2) est de construire une procédure numérique générale qui s'applique pour les différentes équations en considérant les conditions aux limites spécifiques. [25]

Avant de passer à la construction de cette procédure, l'équation (III.2) doit être discrétisée.

Equation	Variable ϕ	Coefficient de diffusion	Terme de source $S\phi$
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement	U_i	$\mu_{eff} = \mu + \mu_t$	$\beta_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{eff} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial P}{\partial x_i}$
Energie cinétique	k	$\frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$\mu_t \cdot C_1 = \rho \varepsilon$
Dissipation d'énergie	ε	$\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{\varepsilon}{k} (\mu_t \cdot C_1 \cdot G - C_2 \cdot \rho \cdot \varepsilon)$

Tableau III.3. Termes de l'équation généralisée (III.2)

III.4.1.1. Equations de quantités de mouvement : [25]

L'équation différentielle décrivant la conservation des quantités de mouvement pour un écoulement de fluide newtoniens s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \beta_i + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (III.3)$$

Considérons –par exemple- U comme étant la composante axiale de la vitesse ; l'équation des quantités de mouvement suivant la direction x , peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \text{div}(\rho \cdot U \cdot U) = \text{div}(\mu \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U) - \frac{\partial P}{\partial x} + B_x \quad (III.4)$$

Ou B_x : est la forme de volume dans la direction des x .

III.4.1.2. Equation de continuité de Navier-stokes: [25]

L'équation différentielle décrivant le principe de conservation de la masse est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot w) = 0 \quad (\text{III.5})$$

Où t représente le temps, u , v et w sont les composantes de la vitesse du fluide dans les directions x , y et z respectivement.

III.4.1.3. Equation de l'énergie cinétique : [25]

On choisit le modèle k - ε standard, dit à deux équations. Ce modèle est robuste, économique, relativement précis et c'est le plus simple des modèles complets. Il suppose que le régime de turbulence est pleinement établi dans tout le domaine et que les effets de la viscosité moléculaire sont négligeables par rapport à ceux de la viscosité turbulente loin de la paroi.

Deux équations de transport sont utilisées : une pour l'énergie cinétique de turbulence k (III.6) obtenue à partir d'une équation exacte et l'autre pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique ε (III.7) obtenue par résonance physique.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \cdot k \cdot U_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \cdot \varepsilon \cdot U_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon \quad (\text{III.7})$$

G_k : Représente la génération de l'énergie cinétique due au gradient de vitesse

G_b : La génération de k due au décollement et des forces de volume

Y_M : La contribution de la dilatation fluctuante dans la turbulence compressible pour (ε)

$C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, C_{3\varepsilon}$: Constante.

S_k, S_ε : Terme source.

$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$: Le nombre de Prandtl turbulent pour k et ε .

III.4.1.3.1. Modélisation de la viscosité turbulente :

La viscosité turbulente est donnée par :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{III.8})$$

III.4.1.3.2. Les constantes du modèle :

Les résultats de calcul dépendent fortement de la valeur des constantes empiriques, bien que les auteurs admettent le plus souvent les mêmes valeurs, Les valeurs utilisées par défaut dans le code Fluent sont :

$$C_{1\varepsilon} = 1.44 , C_{2\varepsilon} = 1.92 , C_{3\varepsilon} = 1 , \sigma_k = 1 , \sigma_\varepsilon = 1.3 , C_\mu = 0.09$$

III.4.1.4. Equation de l'énergie : [26]

L'équation de l'énergie contient un nombre important d'influente. On s'intéresse ici beaucoup plus à la forme de l'équation ou ρ et $\lambda =$ constante. D'après les hypothèses simplificatrices choisis dans l'élaboration de notre modèle numérique.

Pour un écoulement instationnaire ou la dissipation visqueuse est négligée l'équation s'écrit :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \nabla T \right) = \text{div}(\lambda \cdot \nabla T) + S_h \quad (\text{III.9})$$

Les conditions aux limites à l'interface sont imposées simultanément dans les domaines fluide et solide.

Où

C_p : est la chaleur spécifique à pression constante.

λ : est le coefficient de conductivité thermique ;

T : est la température ;

S_p : est le taux volumétrique de génération de chaleur.

Selon la loi de Fourier du transfert de chaleur par conduction, le terme

($\text{div}(\lambda \cdot \nabla T)$) représente l'influence de chaleur par conduction dans l'écoulement.

Pour des gaz parfaits et pour des solides et des liquides on peut calculer l'enthalpie spécifique par :

$$C \cdot \text{grad}T = \text{grad}h \quad (\text{III.10})$$

Où

h : est l'enthalpie spécifique ;

Dans notre cas où C_p est constante, la relation $h = f(t)$ est :

$$h = C_p T \quad (\text{III.11})$$

III.5. Discrétisation des équations différentielles: [27]

Après avoir sélectionné les équations différentielles à résoudre, il est nécessaire de transformer ces équations différentielles en équations algébriques ou les variations continues des variables de l'écoulement sont représentées par des valeurs à des ponts discrets dans le temps et dans l'espace.

Les locations discrètes dans l'espace sont représentées par des points nodaux (ou nœuds) choisis dans une grille numérique qui subdivise le domaine de l'écoulement selon la nature et la géométrie du domaine de calcul.

III.5.1.Méthodes de discrétisation :

La procédure de discrétisation fait des approximations aux dérivées dans le temps et dans l'espace des variables de l'écoulement présente dans l'équation (III.2), à chaque nœud de la grille, a en fonctions algébriques des variables dans le nœud considéré et les nœuds en son voisinage.

La discrétisation se fait en suivant l'une des quatre méthodes :

- Méthode des différences finies.
- Méthode des volumes finis
- Méthode des éléments finis
- Méthode des spectrales.

Dans ce qui suit on se limite à examiner uniquement la méthode des volumes finis dans le domaine de la dynamique et la thermique des écoulements de fluides.

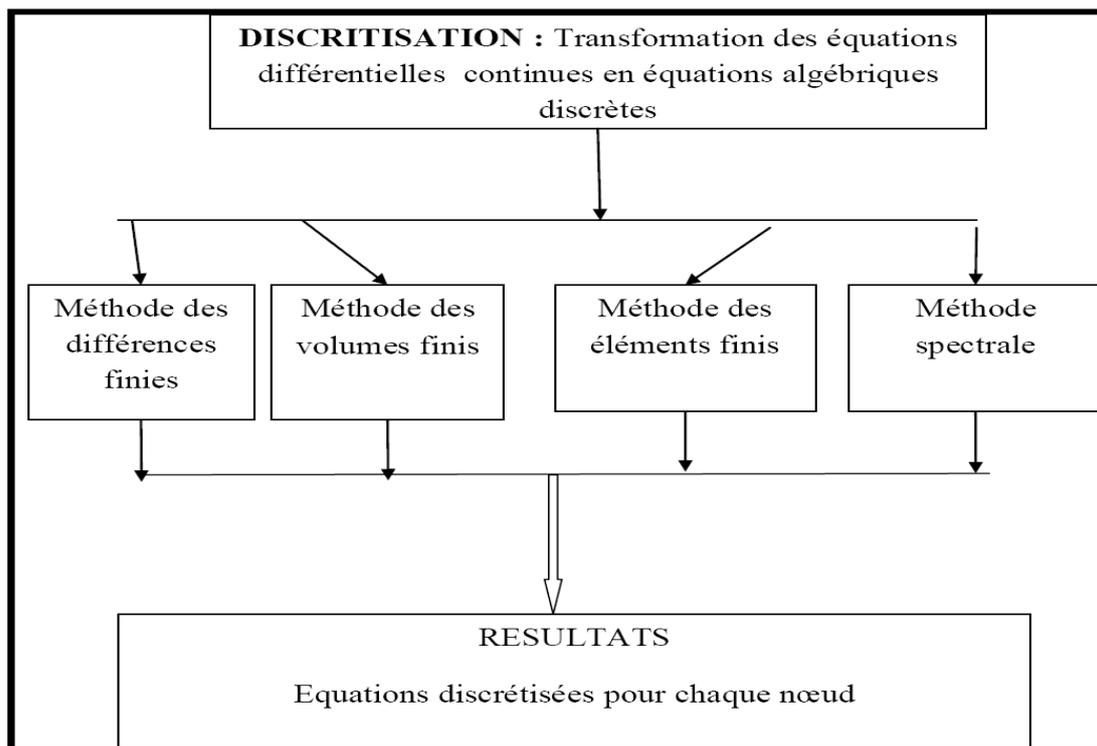


Figure III.3 : Méthode de discrétisation.

$$a_p \cdot \phi_p = \sum_j a_j \cdot \phi_j + b \quad (\text{III.12})$$

\sum_j Représente la sommation sur les nœuds en voisinage du nœud P ;

a_j : Coefficient de l'équation qui tient compte des effets combinés de l'accumulation, le transport par convection et diffusion et du terme source dans l'équation (III.2).

b : représente une part du terme source, $S\phi$.

La description de la discrétisation des équations différentielles par la méthode des volumes finis nécessite l'examen de la méthode numérique fondamentale qui constitue une base de travail pour cette méthode. Il s'agit de :

- la méthode des résidus.

Dans les sections qui suivent nous allons examiner en particulier la méthode des résidus et sa version spéciale la méthode des volumes finis Cette dernière méthode a été classée par la méthode utilisée dans la littérature pour la résolution des problèmes de la thermo et de la dynamique des fluides, elle est aussi la base de tous les codes généralistes en mécanique des fluides tel Fluent et CFX (ANSYS), StarCCM+ et ProStar (CD-Adapco), Fire (AVL)...

III.5.2.Méthode des résidus : [25]

La méthode des résidus est une méthode numérique très puissante et efficace qui permet la résolution des équations différentielles.
Soit une équation différentielle représentée par :

$$L(\phi) = 0 \quad (\text{III.13})$$

Supposant ϕ comme une solution approchée de l'équation (III.18) qui contient un nombre de paramètres (a_i) ; par exemple :

$$\phi = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (\text{III.14})$$

La substitution de (III.19) dans (III.18) donne un résidu tel que :

$$L(\bar{\phi}) = R \quad (\text{III.15})$$

L'objectif est de maintenir le résidu proche de zéro. Donc on considère une fonction de balance W telle que :

$$\int W \cdot R \cdot \partial x = 0 \quad (\text{III.16})$$

L'intégration se fait sur le domaine d'intérêt.

W étant une fonction de balance .En utilisant une succession de fonction, on peut générer plusieurs équations algébriques qui permettent d'évaluer les paramètres (a_i) et par la suite déterminer la solution de l'équation différentielle (III.13).Plusieurs méthodes ont été développées selon les différentes classes de fonction de balance W .

III.5.3.Méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis ou volume de contrôle est une version spéciale de la méthode des résidus.

Le domaine de calcul est subdivisée en sousdomaines ou à des volumes de contrôle finis ; Il suffit de poser la fonction de balance, W , égale à l'unité ($W=1$) dans un sousdomaines et égale

à zéro ($W = 0$) ailleurs. L'intégration de l'équation (III.16) donnant le résidu R doit être égal à zéro, dans un volume de contrôle.

Dans la littérature, la méthode des volumes finis a été qualifiée comme la plus utilisée parmi les méthodes de discrétisation. [26] Dans ce qui suit nous allons l'examiner à travers le traitement de l'équation différentielle généralisée (III.17) dans le cas d'un écoulement à une dimension ; Il est à noter ici que nous avons considéré une seule dimension pour raison de simplifier la procédure toutefois, La même procédure s'applique pour les autres dimensions.

III.5.3.1.Principe de méthode : [25]

L'équation à discrétiser est :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot U \cdot \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S_\phi \quad (III.17)$$

La méthode consiste à subdiviser le domaine de calcul (volume géométrique de l'écoulement) en petits volumes de contrôle tel que chaque nœud est entouré par un seul volume de contrôle. [27]

Considérons le cas d'un écoulement à une dimension :

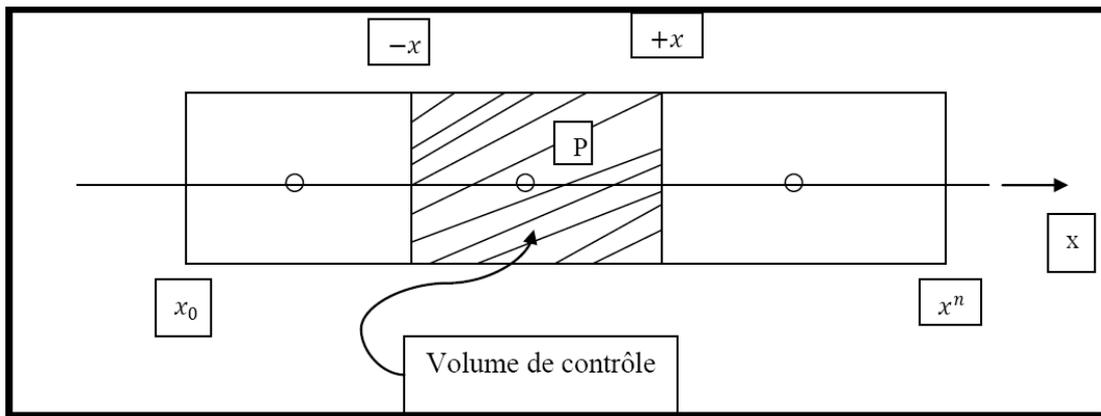


Figure III .4 : Arrangement des volumes de contrôle

La discrétisation de l'équation (III.17) ne s'obtient pas par substitution des expressions des différences dans l'équation différentielle (III.17). Par contre, cette équation est intégrée le long du volume de contrôle ; d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x^-}^{x^+} \rho\phi dx + [(\rho U\phi)_+ - (\rho U\phi)_-] = \left[\left(\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_+ - \left(\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_- \right] + \int_{x^-}^{x^+} S_\phi dx \quad (III.18)$$

L'équation (III.18) est une équation « intégral – différentielle » exacte qui exprime une balance entre les flux convectif et le flux diffusif.

La source et le taux d'accumulation en volume intégré. Ceci constitue une propriété importante de cette approche, qui est la conservation.

Pour $S_+ = 0$ et $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Il est clair que le flux sortant de la face d'un volume de contrôle représente le flux entrant dans le volume de contrôle voisinant. D'où le principe de la conservation tout le long du domaine de calcul.

Une généralisation du cas à une dimension considéré ici s'obtient comme suit :

Ecrivant l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla\vec{V}\phi - \nabla(\Gamma_{\phi}grad\phi) = S_{\phi}$$

L'intégration sur un volume de contrôle donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho\phi dv + \iiint \nabla(\vec{V}\phi - \Gamma_{\phi}grad\phi)dv = \iiint S_{\phi} dv \quad (III.19)$$

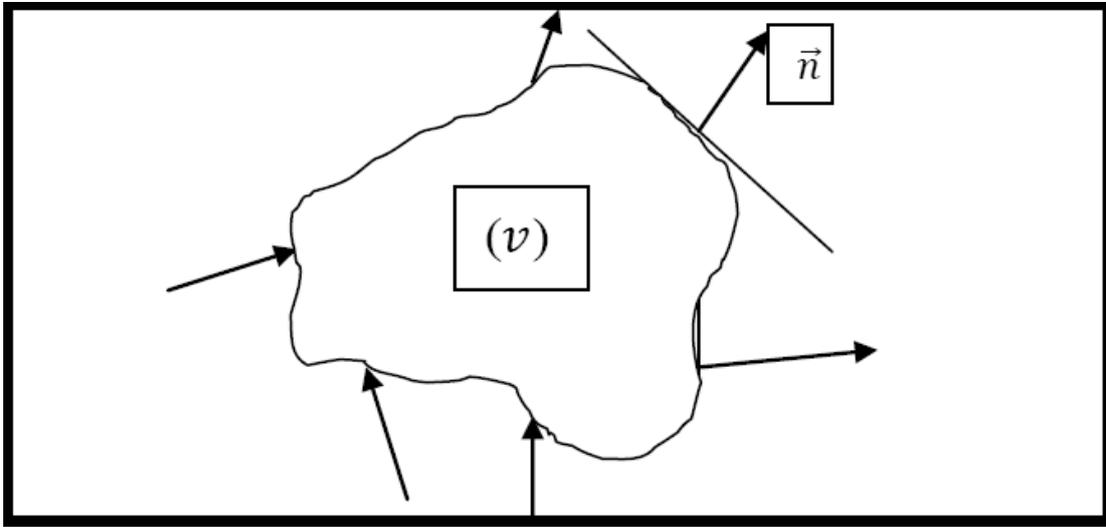


Figure III.5 : Volume de contrôle (V).

Le théorème de Gauss est utilisé pour transformer les intégrales de volume en intégrales de surface :

$$\iiint \nabla \vec{A} dv = \iint \vec{A} \vec{n} ds \quad (III.20)$$

L'équation (III.26) s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho\phi dv + \iint (\vec{V}\phi - \Gamma_{\phi} \overrightarrow{grad\phi}) \vec{n} ds = \iiint S_{\phi} dv \quad (III.21)$$

III.5.3.2. Définition des nœuds :

Du à la présence du flux de diffusion $(\Gamma_{\phi} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x})$ la valeur de la variable ϕ dans un nœud est influencée par les valeurs des nœuds voisinant.

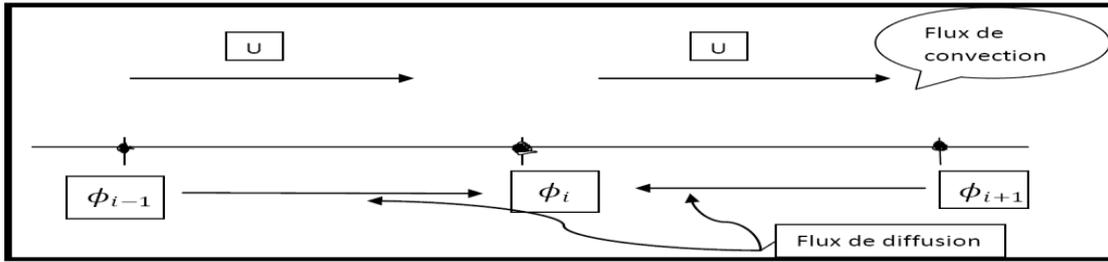


Figure III.6 : Convection et diffusion à un nœud.

Les nœuds sont placés au centre de chaque volume de contrôle

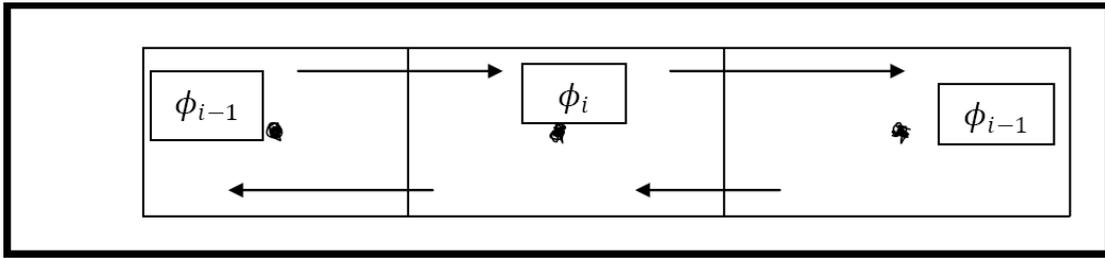


Figure III.7 : Position des nœuds dans les volumes de contrôle.

Cet arrangement permet de définir des flux dans les surfaces des volumes. Ces flux dépendent des valeurs nodales au centre des volumes diffusion est négligeable ou absente.

D'une façon générale la variation $\phi(x)$ est supposée de suivre l'une des trois distributions :

- uniforme ;
- linéaire ;
- polynomiale ;

Considérons comme exemple, une variation linéaire entre les nœuds :

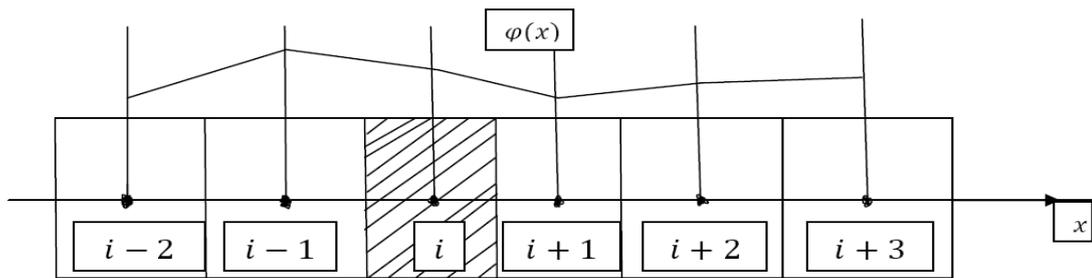


Figure III.8 : Variation linéaire de $\phi(x)$.

$$\phi(x) = \phi_i - \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) \quad \text{Si } x_i < x < x_{i+1}$$

$$\phi(x) = \phi_{i-1} + \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) \quad \text{Si } x_{i-1} < x < x_i$$

Les faces x^- et x^+ du volume de contrôle sont situées à mi-distance entre les nœuds x_{i+1} ; x_i et x_{i-1} .

III.5.3.3. Condition aux limites : [25]

La présence de la diffusion rend les coordonnées spatiales x , des coordonnées en double direction, et par la suite le problème est considéré comme un problème aux frontières.

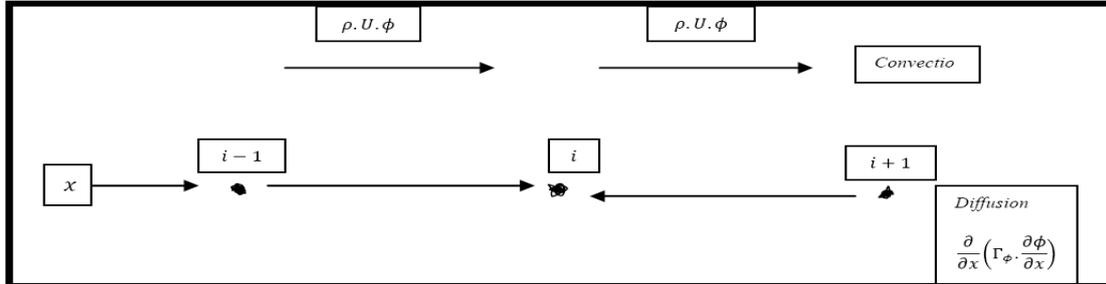


Figure III.9 : Coordonnées double direction (diffusion).

Donc les conditions aux limites doivent être prescrites. En général, les conditions aux limites se divisent en deux catégories :

- valeur prescrite aux frontières ϕ_F
- gradient prescrite $\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_F$ aux frontières qui représente les flux de diffusion.

L'indice F représente la frontière.

III.5.3.4. Valeur prescrite ϕ_F :

Réécrivant l'équation (III.25) qui représente l'équation différentielle intégrée dans le volume de contrôle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x^-}^{x^+} \rho \phi dx = -[(\rho U \phi)_+ - (\rho U \phi)_-] + \left[\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_+ - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_- \right] + \int_{x^-}^{x^+} S_\phi dx \quad (III.22)$$

La valeur de ϕ^- à x^- est prescrite à la frontière :

$$\phi^- = \phi_F \text{ donc : } \rho.U.\phi^- = \rho.U.-\phi_F$$

$1/2.\rho.U.-(\phi_1+\phi_0)$ Est remplacée par $(\rho.U.-\phi_F)$

Le gradient $(\partial \phi / \partial x)$ est exprimé comme : $\left. \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right|_- = \frac{\phi_1 - \phi_F}{\Delta x / 2}$

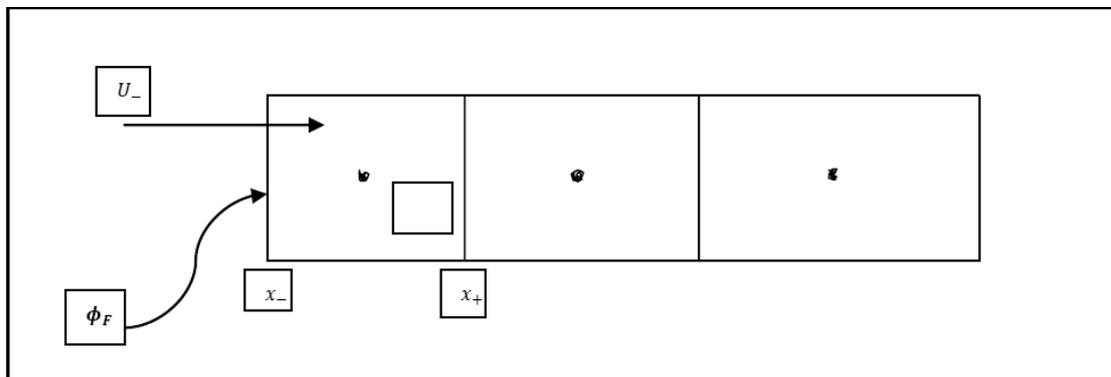


Figure III .10 : Conditions aux limites (valeurs prescrite).

III.5.3.5. Gradient prescrit :

Dans le cas où la frontière est une paroi, le gradient est prescrit ; plusieurs cas peuvent se présenter tel que :

- dans le cas de transfert de chaleur avec paroi adiabatique : $\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_F = 0$

- dans le cas de transfert de chaleur avec un flux de chaleur : $J_\phi = -\alpha(T_\infty - T_F)$

III.6. Conclusion :

Le modèle mathématique est alors constitué d'un système d'équations, complétées par des conditions aux limites. Il s'agit d'un système complexe formé par des équations qui sont issues de la thermodynamique et de la mécanique des fluides. Les équations de bilan sont donc connues.

- la résolution analytique de ces équations de bilan n'est pratiquement jamais réalisable,
- les non linéarités visibles dans les équations sont principalement à l'origine des difficultés pour obtenir une solution analytique.

Donc, l'utilisation des méthodes numériques s'avère indispensable pour la résolution des équations de bilan. Dans notre étude, on a utilisé les logiciels Gambit et Fluent basés sur la méthode des volumes finis pour résoudre les différentes équations. La procédure et les étapes suivies sont exposées dans le chapitre prochain ainsi que tous les détails de la simulation.