

Table des Matières

Introduction	4
1 Matrices aléatoires	6
1.1 L'ensemble unitaire gaussien	6
1.2 Matrices aléatoires de Jacobi et équation de Shrödinger à potentiel aléatoire	12
2 Spectre de matrices aléatoires de grande dimension	17
2.1 Introduction	17
2.2 Résultats auxiliaires	25
2.3 Conséquences	32
2.4 Preuve du théorème 1	38
2.5 Cas général	42
2.6 Ensemble de Wigner généralisé	44
2.6.1 Exemples	46
3 Equation de Shrödinger à potentiel aléatoire	54
3.1 Fonctions d'éléments propres de l'équation de Shrödinger à potentiel aléatoire	54
3.2 Equation de Shrödinger à potentiel gaussien	60
3.3 Equation de Shrödinger unidimensionnelle	61
4 Loi de Wigner	65
4.1 Introduction	65
4.1.1 Exemples.	65
4.2 La loi du demi-cercle (loi de Wigner)	67
4.3 Loi jointe et loi de λ_{\max}	75
4.3.1 Rappels	75

5	Spectre des matrices de covariances	82
5.1	Introduction	82
5.2	Equation de Marčhenko-Pastur	83
5.3	Algorithme et étude statistique	85
5.3.1	Discrétisation	86
5.4	Simulation	87
5.4.1	Cas $\Sigma_p = Id_p$	87
5.4.2	Cas $H_p = .5\delta_1 + .5\delta_2$	88
5.4.3	Le cas de matrices de covariance Toeplitz	89
	Conclusion	91
	Bibliographie	92

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur MOURID.T qui a dirigé ce travail, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude pour l'expérience et le savoir qu'il a bien voulu me partager.

A Monsieur DIB.H qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'honneur qu'il fait en présidant le jury de ce mémoire.

Mes plus vifs remerciements à Monsieur BOUKHARI.F ainsi que Monsieur ABDELLAOUL.B qui ont bien voulu me faire l'honneur de juger ce travail.

Introduction

Les matrices aléatoires ont d'abord été introduites en physique nucléaire par Wigner dans les années 50, pour décrire les résonances de neutrons lents sur les noyaux lourds. l'idée de base était que pour de grandes énergies d'excitation, lorsque le système contient beaucoup de nucléon, les niveaux d'énergies sont très dense. L'étude du spectre d'une certaine matrice aléatoire et la localisation de ses valeurs propres est liée à l'évaluation des niveaux d'energie des électrons dans un atome (voir [2] où nous pouvons trouver plusieurs applications).

Dans ce mémoire nous ferons essentiellement une étude spectrale des matrices aléatoires.

Nous développons les résultats des articles suivants :

1. Pastur.L.A. **Spectra of Random Self Adjoint Operators**. Russian Mathematical Surveys.N. p.1-62 1973.

2. Lejay Antoine, Pastur Leonid. **Matrices aléatoires: Statistique asymptotique des valeurs propres**. Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 36 (2002), p.135-164.

3. El Karoui Nouredine. **The Spectrum Estimation for Large Dimensional Covariance Matrices Using Random Matrix Theory**. Annals of statistics 2009, p.1-25.

Dans le chapitre 1, nous rappelons les principaux ensembles de matrices aléatoires: ensemble unitaire gaussien, ensemble orthogonal gaussien et l'ensemble symplectique gaussien. Nous introduisons la distribution spectrale

$$N_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\lambda_{i,n} < \lambda\}}$$

(où $\lambda_{i,n}$ sont les valeurs propres de la matrice aléatoire) et la densité conjointe des valeurs propres dans chaque cas. Nous étudions aussi la distribution spectrale associée aux matrices aléatoires de Jacobi et la distribution spectrale de l'équation de Shrodinger avec un potentiel aléatoire.

Dans le chapitre 2, nous développons l'article de L.A.Pastur (1973) [32]. L'étude porte sur le comportement asymptotique de la distribution spectrale de la suite d'opérateurs aléatoires hermitiens

définis par :

$$B_n(k) = A_n + \sum_{i=1}^k \Upsilon_i \langle \cdot, q^i \rangle q^i, \quad k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

où A_n est un opérateur auto-adjoint déterministe, Υ_i des v.a réelles i.i.d, q^i vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans un espace E_n et indépendants de Υ_i . En suite, nous abordons l'ensemble de matrices hermitiennes de l'ensemble de Wigner qui donne la loi du demi-cercle.

Dans le chapitre 3, nous développons des résultats de l'article de Pastur [32].

L'étude porte sur le comportement asymptotique de la distribution spectrale de l'équation de Shrödinger à potentiel aléatoire avec conditions aux limites :

$$-\frac{1}{2}\Delta\psi + q(x)\psi = \lambda\psi, \quad \psi|_S = 0 \quad (2)$$

où Δ est le Laplacien, $q(x)$ est le potentiel et V est un cube de \mathbb{R}^m de bord S . Ensuite, on termine par le cas d'une équation de Shrödinger avec un potentiel un processus de Markov ergodique.

Dans le chapitre 4, nous développons les résultats de l'article de Antoine Lejay, Leonid Pastur [3].

On s'intéresse à la distribution spectrale de matrices aléatoires symétriques réelles ou hermitiennes H_n de grande taille :

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{n}}Y_n, \quad Y_{jk} = Y_{kj} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad Y_n = \{Y_{jk}\}_{j,k=1}^n$$

$Y_{jk}, 1 \leq j < k \leq n$ des v.a gaussiennes indépendantes : $E_n[Y_{jk}] = 0, E_n[Y_{jk}^2] = (1 + \delta_{jk})\omega^2, 1 \leq j, k \leq n$

Dans cette partie on obtient pour $N_n(\lambda), n \rightarrow \infty$, la loi du demi-cercle de Wigner.

On termine par donner un résultat sur le comportement asymptotique de la plus grande valeur propre.

Dans le chapitre 5, nous étudions un algorithme dans l'article de Nouredine El Karoui [5]. Cet algorithme donne une estimation de la distribution spectrale de matrice de covariance en grande dimension basé sur une équation appelée **équation de Marčenko-Pastur**. Nous présentons des simulations numériques sur la détermination de la distribution spectrale limite dans trois cas correspondants à des covariances différentes.

Chapitre 1

Matrices aléatoires

1.1 L'ensemble unitaire gaussien

Nous notons par EUG l'ensemble unitaire gaussien, EOG l'ensemble orthogonal gaussien et par ESG l'ensemble symplectique gaussien.

Considérons une matrice hermitienne H d'ordre $n \times n$ d'entrées notées H_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) qui sont des v.a. indépendantes, en général à valeurs complexes et leur fonction de distribution conjointe admet la densité suivante :

$$C_n \exp(-\text{tr}H^2) \tag{1.1}$$

où C_n est la constante de normalisation. Nous nous intéressons à la distribution spectrale $N_n(\lambda)$ définie par le quotient du nombre de valeurs propres ordonnées de H inférieures ou égales à λ :

$$N_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\lambda_{i,n} < \lambda\}}$$

où $\lambda_{i,n}$ sont les valeurs propres de H classées par ordre décroissant: $\lambda_{1,n} < \lambda_{2,n} < \dots < \lambda_{n,n}$ et λ est un réel fixé. La fonction $N_n(\lambda)$ est une variable aléatoire et nous nous intéressons à son comportement asymptotique pour n assez grand.

Pour cela, nous déterminons la densité conjointe du vecteur des valeurs propres $\lambda_{i,n}$ ($i = 1, \dots, n$) que l'on peut déterminer par substitution des variables $H_{i,j}$ et \bar{H}_{ij} dans (1.1) par les $\lambda_{i,n}$ ($i = 1, \dots, n$). La densité (1.1) sera exprimée seulement en fonction des valeurs propres en remplaçant l'argument $-\text{tr}H^2$

de l'exponentielle par $\sum_{i=1}^n \lambda_{i,n}^2$. Le Jacobien de ce changement de variables est donné par [16] :

$$A \prod_{i < j} (\lambda_{i,n} - \lambda_{j,n})^2 \quad (1.2)$$

où la quantité A dépend seulement des composantes des vecteurs propres orthogonaux associés aux valeurs propres $\lambda_{i,n}$ ($i = 1, \dots, n$). Dans le cas du groupe orthogonal des matrices réelles symétriques, le jacobien a la forme

$$A' \prod_{i < j} (\lambda_{j,n} - \lambda_{i,n})$$

qui est facile à expliciter du fait que H est diagonalisable sous la forme $H = U\Lambda U^t$, où Λ est la matrice diagonale des valeurs propres, U la matrice des vecteurs propres associés. Dans ce cas le Jacobien est un polynôme homogène pour les variables $\lambda_{i,n}$ ($i = 1, \dots, n$), de degré $\frac{n(n-1)}{2}$. De plus, les valeurs propres étant distinctes deux à deux, le polynôme contient le facteur $\prod_{i < j} (\lambda_{j,n} - \lambda_{i,n})$. Pour les matrices hermitiennes, nous pouvons écrire la densité conjointe des valeurs propres des matrices de l'ensemble unitaire sous la forme suivante :

$$p_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = C'_n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right) \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (1.3)$$

où C'_n peut être déterminée par la condition

$$\int_{-\infty \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \infty} \dots \int p_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n = 1$$

Notons par $H_l(\lambda) = \sum_{k=0}^l h_{lk} \lambda^k$ le polynôme d'Hermite satisfaisant la condition d'orthonormalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda^2) H_l(\lambda) H_m(\lambda) d\lambda = \delta_{lm} \quad (1.4)$$

Nous considérons la matrice G d'ordre $n \times n$ d'éléments $G_{ik} = \sum_{j=1}^n h_{i-1,j-1} \lambda_k^{j-1}$ ($i, k = 1, \dots, n$). Il est facile de voir que G est le produit de deux matrices L et Γ d'éléments respectifs

$$l_{i,k} = \begin{cases} h_{i-1,k-1} & i \geq k \\ 0 & i < k \end{cases}, \quad \gamma_{ik} = \lambda_k^{i-1}$$

Le déterminant de L est $\prod_{l=0}^{n-1} h_{ll}$ et celui de Γ est le déterminant de Vandermonde donné par $\prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)$.

En remplaçant dans (1.3) $\prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$ par $(\det G)^2 \left(\prod_{l=0}^{n-1} h_{ll} \right)^{-2}$, il en résulte de (1.4) que :

$$C'_n = \left(\prod_{l=0}^{n-1} h_{ll} \right)^{-2}$$

Par suite

$$p_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right) (\det G)^2$$

On peut obtenir le résultat par une deuxième méthode. Nous avons (voir [3] **théorème 14 (p-149)**)

$$p_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Q_{n,\beta} n!} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right) \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)^\beta$$

où $Q_{n,2}$ est la constante de normalisation (dans le cas de l'ensemble EUG $\beta = 2$). On a

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\prod_{l=0}^{n-1} h_{ll}} \begin{vmatrix} H_0(\lambda_1) & H_0(\lambda_2) & \dots \\ \frac{1}{2}H_1(\lambda_1) & \frac{1}{2}H_1(\lambda_2) & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \frac{1}{2^{n-1}}H_n(\lambda_1) & \frac{1}{2^{n-1}}H_n(\lambda_2) & \dots \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\prod_{l=0}^{n-1} h_{ll}} \det [H_j(\lambda_k)]_{j=0, \dots, n-1, k=1, \dots, n} \end{aligned}$$

où h_{ll} sont les coefficients des termes du plus haut degré du polynôme d'Hermite H_l qui sont liés aux fonctions d'Hermite par la relation :

$$h_j(\lambda) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right) H_j(\lambda)$$

Nous aurons ainsi

$$p_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{n! Q_{n,2} \left(\prod_{l=0}^{n-1} h_{ll} \right)^2} [\det (h_j(\lambda_k))]_{j=0, \dots, n-1, k=1, \dots, n}^2$$

Pour calculer la constante de normalisation $Q_{n,2}$, nous allons utiliser le théorème de Gram découlant du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Nous avons le résultat suivant

Théorème de Gram [26]. Soient $\{f_l\}_{l=0}^n$ et $\{g_j\}_{l=0}^n$ deux ensembles de fonctions continues et intégrables sur \mathbb{R}^n . Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \det \{f_l(\lambda_m)\}_{l,m=1}^n \det \{g_l(\lambda_m)\}_{l,m=1}^n d\lambda_1 \dots d\lambda_n = n! \det \{(f_l, g_m)\}_{l,m=1}^n$$

Par application, en prenant $f_l = g_l = h_l$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} p_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n = 1 \\ & = \frac{1}{n! Q_{n,2} \left(\prod_{l=0}^{n-1} h_{ll} \right)^2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\det [h_j(\lambda_k)]_{j=0, \dots, n-1, k=1, \dots, n} \right)^2 d\lambda_1 \dots d\lambda_n \end{aligned}$$

D'où la constante sera

$$Q_{n,2} = \prod_{l=0}^{n-1} h_{ll}^{-2}$$

Le calcul de l'espérance mathématique de la variable aléatoire

$$N_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{]-\infty, \lambda]}(\lambda_i)$$

donne

$$\begin{aligned} E_n(N_n(\Delta)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(\mathbf{1}_{\Delta}(\lambda_k)) = E(\mathbf{1}_{\Delta}(\lambda_1)) \\ &= \int_{\Delta} d\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} p_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_2 \dots d\lambda_n \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\Delta} d\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\det [h_j(\lambda_i)]_{j=0, \dots, n-1, i=1, \dots, n} \right)^2 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \end{aligned}$$

où $\Delta =]-\infty, \lambda]$. Or

$$\det [h_j(\lambda_i)]_{j=0, \dots, n-1, i=1, \dots, n} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} h_j(\lambda_1) \det [h_k(\lambda_m)]_{k=0, \dots, n-1, m=2, \dots, n, m \neq k}$$

En utilisant encore le **théorème de Gram**, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{j_1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n) h_{j_2}(\lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_2 \dots d\lambda_n = \delta_{j_1, j_2} (n-1)!$$

où $h_j(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = \det [h_k(\lambda_m)]_{k=0, \dots, n-1, m=2, \dots, n, k \neq j}$. Nous aurons donc

$$\begin{aligned} E[N_n(\Delta)] &= \int_{\Delta} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} h_j^2(\lambda_1) \right) d\lambda_1 \\ &= \int_{\Delta} \exp(-\lambda_1^2) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} H_j^2(\lambda_1) \right) d\lambda_1 \end{aligned}$$

Le comportement asymptotique des fonctions d'Hermite [1] [15] est utilisé et après des développements on trouve que lorsque $n \rightarrow \infty$

$$E(N_n(\Delta)) \simeq \frac{1}{\pi n} \int_{-\infty}^{\lambda} \sqrt{2n - \mu^2} d\mu$$

Plus précisément nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(N_n(\Delta')) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\mu} \sqrt{2 - \xi^2} d\xi \quad (1.5)$$

où $\Delta' =] - \infty, \mu\sqrt{n}]$.

Le résultat (1.5) a été démontré par E.Wigner et est appelé le **loi du demi cercle** (voir détails chap. 4 avec une deuxième méthode).

Pour le calcul de la variance de cette variable, on utilise un résultat du chap. 4. Soit $T_n(\varphi)$ une statistique linéaire définie par :

$$T_n(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \varphi(\lambda_l) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) N_n(d\lambda)$$

(La mesure de comptage normalisée est un cas particulier).

D'après le **théorème 16 (iv)** (chapitre 4), la variance de cette statistique est :

$$Var(T_n(\varphi)) = \frac{1}{2n^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi(\lambda) - \varphi(\mu))^2 K_n^2(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$$

où $K_n(\lambda, \mu) = \sum_{l=0}^{n-1} h_l(\lambda) h_l(\mu)$, $h_l(\cdot)$ représentent les fonctions d'Hermite et $K_n(\cdot, \cdot)$ est le noyau de Darboux-Christoffel [1].

Par suite nous aurons

$$\begin{aligned}
Var(T_n(\varphi)) &\leq \frac{(2 \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|)^2}{2n^2} \int_{\mathbb{R}^2} K_n^2(\lambda, \mu) d\lambda d\mu \\
&= \frac{(2 \|\varphi\|_\infty)^2}{2n^2} \int_{\mathbb{R}^2} K_n^2(\lambda, \mu) d\lambda d\mu \\
&= \frac{2 \|\varphi\|_\infty^2}{n^2} \int_{\mathbb{R}} K_n(\lambda, \lambda) d\lambda \\
&= \frac{2 \|\varphi\|_\infty^2}{n} \cdot n = \frac{2 \|\varphi\|_\infty^2}{n} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

En particulier, si φ est lipschitzienne de constante C , de la formule de Darboux-Christoffel et de l'orthonormalité des fonctions d'Hermite $h_n(\cdot)$, nous aurons

$$\begin{aligned}
Var(T_n(\varphi)) &\leq \frac{C^2}{2n^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda - \mu)^2 K_n^2(\lambda, \mu) d\lambda d\mu \\
&= \frac{C^2 \alpha_{n-1}^2}{2n^2} \int_{\mathbb{R}^2} (h_n(\lambda) h_{n-1}(\mu) - h_{n-1}(\lambda) h_n(\mu))^2 d\lambda d\mu \\
&= \frac{C^2}{n^2} \alpha_{n-1}^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

α_{n-1} est le coefficient du polynôme H_{n-1} dans la relations des trois termes [1]-[3] donnée par

$$\lambda H_n(\lambda) = \alpha_n H_{n+1}(\lambda) + \beta_n H_n(\lambda) + \alpha_{n-1} H_{n-1}(\lambda)$$

Par la factorisation d'une matrice hermitienne H , la distribution de probabilité se factorise comme

$$P(H) dH = p(\lambda) \Delta^\beta(\Delta) d\lambda dG \quad (1.6)$$

où dG est la mesure de Haar sur le Groupe G ($G = EOG, EUG, ESG$) et $p(\lambda) \Delta^\beta(\lambda) d\lambda$ est la mesure sur les valeurs propres avec [16] :

$$\Delta(\lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j| \quad \text{et} \quad \beta = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \end{cases} \text{ resp pour les ensembles } \begin{cases} EOG \\ EUG \\ ESG \end{cases}$$

Ce résultat s'interprète par le phénomène de la répulsion des niveaux d'énergie $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. Le facteur $\Delta(\lambda)$ montre en effet que la probabilité que deux niveaux λ_i, λ_j soient très proches est très petite pour β croissant. Autrement dit, si on considère $S(\theta, \delta) d\theta_1 d\theta_2$ la probabilité qu'il y ait une valeur propre dans chacun des intervalles $[\theta, \theta + d\theta_1]$ et $[\theta + \delta, \theta + \delta + d\theta_2]$ et aucune dans l'intervalle $[\theta + d\theta_1, \theta + \delta]$,

est:

$$S(\theta, \delta) = o(\delta^2), \text{ pour } \theta \text{ fixé et } \delta \rightarrow 0$$

Ce résultat a été corroboré par les données expérimentales [2].

Nous donnons quelques indications permettant d'arriver à la relation (1.6) pour un élément de volume dH [14], [16]. Le Hamiltonien H se diagonalise par une transformation appartenant au groupe G

$$H = g\lambda\bar{g}', g \in G, \lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), g^* = \bar{g}'$$

Nous aurons [16]

$$dH = dg.\lambda.\bar{g}' + g.d\lambda.\bar{g}' + g.\lambda.d\bar{g}'$$

D'où

$$\bar{g}'dH.g = \delta g.\lambda + d\lambda - \lambda\delta g$$

En posant $\bar{g}'dH.g = \delta G$ et $\delta G = (\delta G_{jk})$, on a

$$\delta G_{jj} = d\lambda_j, \quad \delta G_{jk} = \delta g_{jk}(\lambda_k - \lambda_j), \quad j \neq k \quad (1.7)$$

En utilisant (1.7) on peut montrer que le jacobien de H à (λ, g) sera donné par $[\Delta(\lambda)]^\beta$ (voir [16] p.58-73). Dans le cas orthogonal, l'élément de volume est donné par

$$dH = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_i dH_{ii} \prod_{i < j} dH_{ij}, \quad \beta = 1$$

et pour le cas unitaire,

$$dH = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_i dH_{ii} \prod_{i < j} d(\text{Re } H_{ij}) d(\text{Im } H_{ij}), \quad \beta = 2$$

qui est l'élément de volume de la **mesure de Haar**.

1.2 Matrices aléatoires de Jacobi et équation de Shrödinger à potentiel aléatoire

En physique, on considère une chaîne linéaire de n particules (par exemples les nucléons) reliées par un lien élastique (en générale pour simplification ce lien est pris égale à 1 pour décrire l'interaction de deux particules qui se rapprochent très près l'une de l'autre et telles que l'on ait $m_n\lambda_n = m_{n-1}\lambda_{n-1} = \dots = K$,

$K = 1$, [2]) et les particules ont des masses aléatoires m_1, m_2, \dots, m_n i.i.d.. Notons par x_1, x_2, \dots, x_n les déplacements de ces particules. Ils sont décrits par le système suivant :

$$\begin{aligned} x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} &= m_k \ddot{x}_k \\ x_0 &= x_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Les fréquences λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) du système sont déterminées par la résolution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} &= -\lambda_k m_k u_k \\ u_0 &= u_{n+1} = 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

λ_k sont les racines du déterminant de la matrice de Jacobi [11]

$$\begin{pmatrix} 2 - m_1 \lambda & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 - m_2 \lambda & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 - m_3 \lambda & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 - m_n \lambda \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

On s'intéresse au comportement asymptotique de la distribution normalisée

$$N_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\lambda_{i,n} < \lambda\}}$$

On considère la fonction dite "caractéristique" définie par [2]-[23]:

$$\Omega_n(z) = \int_0^\infty \ln(z + \lambda) dN_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(z + \lambda_{in})$$

Elle admet la limite suivante quand $n \rightarrow \infty$ et pour $x > 0$ [23] :

$$\Omega(x) = C + E(\ln(R))$$

où la v.a R est la fraction continue de la forme suivante [11]

$$R = 2 + m_1 x - \frac{1}{2 + m_2 x - \frac{1}{2 + m_3 x - \dots}} \quad (1.10)$$

La fonction de répartition de R vérifie une équation intégrale et en utilisant le fait que les variables aléatoires m_i sont i.i.d et en résolvant cette équation on trouve la quantité $\Omega(x)$ et par la transformation inverse [2] on obtient N par :

$$N(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{Im} \Omega(-\lambda + i\varepsilon) \quad (1.11)$$

Plus précisément, on a :

$$\Omega_n(x) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln m_k + \frac{1}{n} \ln d_n(x)$$

où $d_n(x)$ est le déterminant de la matrice (1.9) avec $\lambda = -x$ et $d_{n-k}(x)$ est le déterminant de la même matrice qui a comme premier terme $2 - m_k \lambda$, $\lambda = -x$.

On a :

$$\begin{aligned} d_{n-k} &= (2 + m_{k+1}x) d_{n-k-1} - d_{n-k-2} \\ d_1 &= 2 + m_n x, \quad d_0 = 1 \end{aligned}$$

De plus

$$d_n = \frac{d_n}{d_{n-1}} \cdot \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} \dots \frac{d_1}{d_0} = \prod_{k=0}^{n-1} R_k^{(n)}$$

avec

$$R_k^{(n)} = 2 + m_{k+1}x - \frac{1}{2 + m_{k+2}x - \dots - \frac{1}{2 + m_n x}}$$

Donc

$$\Omega_n(x) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln m_k + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln R_k^{(n)}$$

On peut supposer maintenant que quand $n \rightarrow \infty$, on peut remplacer $R_n^{(k)}$ par la fraction continue infinie R_k de la forme (1.10) qui commence par $2 + m_{k+1}x$. Si les v.a m_k et R_k satisfont à la loi des grands nombres, il s'en suit alors que $\Omega_n(x)$ converge en probabilité vers la limite

$$\Omega(x) = -E(\ln m) + E(\ln R)$$

D'après la définition de R_k , on remarque que cette v.a est indépendante de m_k et que l'on peut écrire :

$$R = 2 + mx - \frac{1}{R'} \quad (1.12)$$

où R' est une v.a indépendante de R mais de même loi. En calculant la fonction de répartition de chaque membre de (1.12), on trouve l'équation intégrale vérifiée par F_R :

$$\begin{aligned} F_R(u) &= P(R \leq u) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(R \leq u | R' = r') dF_{R'}(r') = \int_{-\infty}^{+\infty} P(2 + mx - \frac{1}{R'} \leq u | R' = r') dF_{R'}(r') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(m \leq \left[\frac{1}{x} \cdot \left(u + \frac{1}{r'} - 2 \right) \right] | R' = r') dF_{R'}(r') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(m \leq \left[\frac{1}{x} \cdot \left(u + \frac{1}{r'} - 2 \right) \right]) dF_{R'}(r') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_m\left(\left[\frac{1}{x} \cdot \left(u + \frac{1}{r'} - 2 \right) \right]\right) dF_{R'}(r'), \quad \text{car } F_R = F_{R'} \end{aligned}$$

avec F_R et F_m sont les fonctions de répartition des v.a R et m . La résolution de cette équation intégrale permet d'obtenir F_R . De (1.11), on obtient la forme de $N(\lambda)$. Ainsi, $N_n(\lambda)$ converge en probabilité vers $N(\lambda)$ qui n'est plus aléatoire.

Une autre classe d'opérateurs est donnée par l'équation de Shrödinger unidimensionnelle à potentiel aléatoire [2] [23]. Les équations ont la forme suivante :

$$-y'' + \sum_{i=1}^k q_i \delta(x - x_i) y = \lambda y \quad (1.13)$$

$$y(0) = y(L) = 0 \quad (1.14)$$

où $\delta(x)$ est la mesure de Dirac en x et tel que le terme $q\delta(x - \xi)$ représente la condition de continuité $y(\xi - 0) = y(\xi + 0)$, $y'(\xi + 0) - y'(\xi - 0) = qy(\xi)$, et q_i, x_i sont, en général, des v.a.

L'équation de Shrödinger est une équation des ondes décrivant le mouvement d'électrons dans un champ de particules avec masses soumises à une force dérivant d'un potentiel. L'intérêt de l'équation fut immédiat quand à l'évaluation des niveaux d'énergie de l'électron dans l'atome d'hydrogène en permettant d'expliquer les raies d'émission de cette atome.

On définit une nouvelle fonction de distribution normalisée des valeurs propres par

$$N_n(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\lambda_i(L) < \lambda\}} \quad (1.15)$$

où $\lambda_i(L)$ sont les valeurs propres du système (1.13)-(1.14). Au lieu de prendre la limite quand $n \rightarrow \infty$,

on s'intéressera plutôt à la longueur L de l'intervalle qui doit tendre vers l'infini sous des conditions sur la proportion k/L (k , peut être aléatoire).

Deux cas sont considérés :

1. Les x_i sont des points fixés et équidistants (exemple $x_i = a \cdot i$, $a > 0$, période du treillis) et q_i des v.a.i.i.d.

2. Les q_i sont égales, non aléatoires et les x_i sont des v.a supposées uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, L]$ et indépendantes (sinon, en général, elles suivent la loi de Poisson).

Le premier cas est interprété comme modèle unidimensionnel d'un alliage en désordre représentant un crystal périodique. Le second modèle décrit les solides amorphiques : verre, fluide,...ect. Dans ces cas, la théorie des processus de Markov est utilisée.

Chapitre 2

Spectre de matrices aléatoires de grande dimension

Le chapitre contient deux parties. Dans la première, nous étudions le comportement asymptotique de la distribution des valeurs propres de deux familles d'opérateurs aléatoires hermitiens et ainsi d'un ensemble de matrices aléatoires unitaires de grande dimension. En suite, nous nous intéressons à un autre ensemble de matrices hermitiennes appelé ensemble de Wigner qui est une généralisation de l'ensemble unitaire gaussien et pour lequel la loi du demi-cercle sera introduite [32].

2.1 Introduction

Nous considérons des opérateurs auto-adjoints B_n définis sur un espace E_n de dimension n et de la forme suivante :

$$B_n(k) = A_n + \sum_{i=1}^k \Upsilon_i \langle \cdot, q^i \rangle q^i, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

où A_n est un opérateur auto-adjoint déterministe, Υ_i des v.a réelles i.i.d et q^i vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans E_n , et indépendants de Υ_i .

L'opérateur $\langle \cdot, q^i \rangle q^i$ est défini par $\langle \cdot, q^i \rangle q^i(x) = \langle x, q^i \rangle q^i$ où $\langle x, q^i \rangle$ représente le produit scalaire de E_n .

L'opérateur $B_n(k)$ est la somme d'un opérateur déterministe et d'opérateurs aléatoires indépendants de rang égale à 1. On note Ω_k l'espace de réalisations des opérateurs $B_n(k)$. Comme précédemment, on s'intéressera à la distribution spectrale $N(\lambda, B_n(k))$ qui est la proportion des valeurs propres de $B_n(k)$ plus petites que λ .

On suppose les conditions suivantes pour $n \rightarrow \infty$:

C1. $\lim_{n \rightarrow \infty} k/n = c$ existe et c est appelée la concentration.

C2. La suite des distributions spectrales $N(\lambda, A_n)$ des opérateurs A_n converge vers une fonction $N_0(\lambda)$ en tout point de continuité :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(\lambda, A_n) = N_0(\lambda) \quad (2.2)$$

Sous ces conditions, il s'agit de déterminer les propriétés probabilistes des opérateurs $B_n(k)$ assurant la convergence en probabilité des suites $N(\lambda, B_n(k))$ vers la limite $N(\lambda, c)$ qui est déterministe.

Pour certaines classes d'opérateurs aléatoires de la forme (2.1), il s'agit de résoudre les deux problèmes suivants :

- La convergence de la distribution spectrale d'une suite d'opérateurs aléatoires vers une limite déterministe.

- La détermination de cette limite.

En comparant (2.1) et (1.13), on remarque que l'ensemble des opérateurs aléatoires de la forme (2.1) est similaire à ceux de l'équation de Shrödinger avec potentiel donné par la somme des δ -fonctions concentrées aux points aléatoires x_i . Les δ -fonctions dans (1.13) peuvent être considérées comme des opérateurs de projection unidimensionnel. Cependant il existe une différence entre le comportement asymptotique de la distribution spectrale de l'opérateur de Shrödinger et les opérateurs $B_n(k)$. Dans (1.13), les v.a x_i où les δ -fonctions sont concentrées obéissent à une loi de Poisson, ainsi, elles sont indépendantes et choisies avec une probabilité égale dans l'intervalle $[0, L]$, quand $L \rightarrow \infty$. Pour faire le lien entre (1.13) et (2.1), les vecteurs aléatoires q^i doivent être indépendants choisis avec probabilité égale dans un certain ensemble orthonormal qui est un cas assez compliqué. Dans le cas opposé où le nombre de valeurs prises par les vecteurs q^i est beaucoup plus grand que la dimension de E_n , on introduit une base orthonormale et on écrit les vecteurs q^i dans cette base, Pour le vecteur $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, on impose les conditions suivantes :

C3. Les moments des vecteurs aléatoires $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ définis dans (2.1) vérifient

$$E(q_i \bar{q}_j) = n^{-1} \delta_{ij} + m_{ij}(n) \quad (2.3)$$

$$E(q_i \bar{q}_j q_l \bar{q}_m) = \frac{1}{n^2} (\delta_{ij} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{jl}) + \varphi_{il}(n) \varphi_{jl}(n) + d_{ijkl}(n) \quad (2.4)$$

où les quantités

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1(n) = \left(n \sum_{i,j} |m_{ij}(n)|^2 \right)^{1/2}, \quad \varepsilon_2(n) = \sum_{i,j} |\varphi_{ij}(n)|^2 \\ \varepsilon_3(n) = n \left[\sum_{i,j,l,m} |d_{ijlm}|^2 \right]^{1/2} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

tendent vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

C4. Les v.a Υ_i dans (2.1) sont i.i.d.

Nous donnons deux exemples d'ensembles de vecteurs satisfaisant la condition **C3**.

Exemple 1

On considère un ensemble de vecteurs réels de norme 1, de densité de probabilité $p(q_1, q_2, \dots, q_n)$ symétrique par rapport à ses variables et tel que l'on ait :

$$E(q_i q_j) = n^{-1} \delta_{ij}$$

et

$$E(q_i q_j q_l q_m) = a_1 (\delta_{ij} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jm}) + (a_2 - 3a_1) \delta_{ij} \delta_{lm} \delta_{il}$$

où $a_1 = E(q_1^2 q_2^2) = E(q_i^2 q_j^2)$, $i \neq j$, $a_2 = E(q_i^4)$ pour ($i = 1, 2, \dots, n$). avec $n(n-1)a_1 + na_2 = 1$ (qui vient de la normalisation des vecteurs de l'ensemble).

Donc, pour que la condition **C3** soit vérifiée, il suffit d'avoir quand $n \rightarrow \infty$,

$$a_1 = n^{-2} + o(n^{-5/2})$$

Par exemple, pour des vecteurs distribués uniformément sur la sphère unité, on a $a_1 = [n(n+2)]^{-1}$, ces vecteurs vérifient la condition **C3**.

Exemple 2.

Considérons un ensemble de vecteurs aléatoires définis par

$$q = n^{-1/2} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

où ξ_i sont des v.a i.i.d. de moment d'ordre 4 noté μ_4 fini. Dans ce cas $m_{ij}(n) = 0$, $\varphi_{il}(n) = n^{-1} \delta_{il}$ et parmi les nombres $d_{ijlm}(n)$, seulement $d_{iiii}(n) = \frac{1}{n^2} [|\mu_4 - 3|]$.

Il s'en suit que les vecteurs de cette forme vérifient aussi la condition **C3**.

Comme précédemment, il s'agit de déterminer la forme explicite de $N(\lambda, c) = \lim_n N(\lambda, B_n(k))$.

Pour cela nous rappelons la formule de la transformée de Stieltjes de $N(\lambda, c)$ donnée par :

$$m(z, c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dN(\lambda, c)}{\lambda - z} \quad (2.6)$$

Par la transformation inverse dite de Perro-Frobenius [25], on peut retrouver la fonction $N(\lambda, c)$ en tout point de continuité. On a aussi

$$N(\lambda_2, c) - N(\lambda_1, c) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \text{Im } m(x + i\varepsilon) dx \quad (2.7)$$

Notons par $m_0(z) = m(z, 0)$ la transformée de Stieltjes de $N_0(\lambda)$ définie par (2.2) (où l'existence est assurée par la condition **C2** dans le cas des opérateurs A_n). On a

$$m_0(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dN_0(\lambda)}{\lambda - z} \quad (2.8)$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1 [32]. *Supposons que les conditions **C1-C4** sont vérifiées. Alors*

1) *La suite des distributions spectrales $N(\lambda, B_n(k))$ converge en probabilité vers la limite $N(\lambda, c)$ vérifiant $N(-\infty, c) = N_0(-\infty)$, $N(+\infty, c) = N_0(+\infty)$, où $N_0(\lambda)$ est définie par (2.2).*

En tout point de continuité, la fonction $N(\lambda, c)$ s'exprime par sa transformée de Stieltjes $m(z, c)$:

$$N(\lambda, c) = N_0(-\infty) + \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\mu}^{\lambda} \text{Im } m(x + i\varepsilon, c) dx$$

2) *La fonction $m(z, c)$ est solution de l'équation suivante pour $t = 1$*

$$u(z, t) = m_0(z) - c \int_0^t \frac{\tau(\xi)}{1 + \tau(\xi)u(z, \xi)} \cdot \frac{\partial u(z, \xi)}{\partial z} d\xi \quad (2.9)$$

où τ est l'inverse de la fonction de distribution σ de la v.a Υ et est donnée par :

$$\tau(\xi) = \inf_u \{u, \sigma(u) \geq \xi\}$$

3) *La solution de l'équation (2.9) existe et unique et elle est équivalente à l'équation aux dérivées partielles d'ordre 1.*

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} + \frac{c\tau(t)}{1 + \tau(\xi)u(z, t)} \cdot \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = 0, \quad u(z, 0) = m_0(z) \quad (2.10)$$

de solution donnée implicitement par

$$u(z, t) = m_0 \left(z - c \int_0^t \frac{\tau(\xi)}{1 + \tau(\xi) u(z, t)} d\xi \right) \quad (2.11)$$

Remarque 2 On peut voir que $u(z, t)$ est analytique en z et continue en t , $t \in [0, 1]$ pour $\text{Im } z > 0$.

D'après la définition de $\tau(\xi)$, on peut avoir

$$\int_0^1 \frac{\tau(\xi)}{1 + \tau(\xi) u(z, 1)} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{1 + \tau u(z, 1)} d\sigma(\tau)$$

Puisque $m(z, c) = u(z, 1)$, on conclut que la transformée de Stieltjes $m(z, c)$ de $N(\lambda, c)$ satisfait l'équation

$$m(z, c) = m_0 \left(z - c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{1 + \tau m(z, c)} d\sigma(\tau) \right) \quad (2.12)$$

Avant de donner la démonstration du théorème 1, nous donnons deux exemples de calcul de $N(\lambda, c)$.

Exemple 3. Soit $B_n(k) = \tau \sum_{i=1}^k P_i$, une somme de projections aléatoires indépendantes et équiprobables où P_i est l'opérateur de projection sur l'espace engendré par les vecteurs q^i qui sont i.i.d. uniformément distribués sur la sphère unité et τ est un nombre non aléatoire [4].

On a vu précédemment que la condition **C3** est vérifiée. Puisque $A_n = 0$ et τ est déterministe, **C1** et **C4** sont aussi vérifiées. De plus,

$$m_0(z) = -z^{-1}, \quad d\sigma(\xi) = \delta(\xi - \tau) d\xi$$

D'où, si $k/n \rightarrow c$ quand $n \rightarrow \infty$, les conditions **C1-C4** sont vérifiées et $m(z, c)$ satisfait (2.12) et par suite

$$m(z, c) = - \left(z - \frac{c\tau}{1 + \tau m(z, c)} \right)^{-1}$$

En résolvant cette équation en $m(z, c)$, on trouve :

$$m(z, c) = -\frac{(1-c)}{2z} + \frac{-z + \sqrt{(z - c\tau + \tau)^2 - 4\tau z}}{2\tau z}$$

avec la condition $\text{Im } z > 0$ et $\text{Im } m(z, c) > 0$ lorsque la transformée de Stieltjes est celle d'une fonction non-décroissante qui est notre cas.

Par utilisation de la transformée inverse de Perron-Frobenius, le calcul donne [25]

$$N(\lambda, c) = N_1(\lambda, c) + N_2(\lambda, c)$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1(\lambda, c)}{\partial \lambda} &= (1-c)_+ \delta(\lambda) \\ \frac{\partial N_2(\lambda, c)}{\partial \lambda} &= \frac{1}{2\pi\lambda\tau} \left(\sqrt{4c\tau^2 - (\lambda - \tau - c\tau)^2} \right)_+ \end{aligned}$$

En particulier, d'après cette formule, il suit que pour $c > 1$, la distribution spectrale des opérateurs

$$C_n(k) = -\tau \left(1 + \frac{k}{n} \right) I + \tau \sum_{i=1}^k P_i$$

converge en probabilité quand $n \rightarrow \infty$ vers la fonction $N(\lambda, c)$ ayant pour dérivée

$$\frac{\partial N(\lambda, c)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi c\tau^2} \sqrt{4c\tau^2 - \lambda^2} \left(1 + \frac{\lambda + \tau}{\tau c} \right)^{-1}$$

Quand $c \rightarrow \infty$, cette densité tend vers la loi du demi-cercle de l'ensemble gaussien (1.5).

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi\omega^2} \left(\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2} \right)_+$$

D'autre part, puisque $C_n(k)$ peut s'écrire sous la forme

$$C_n(k) = \tau \sum_{i=1}^k \left[- \left(\frac{k+n}{nk} \right) I + P_i \right]$$

qui se présente comme une somme de matrices aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Par le **théorème central limite**, la distribution des matrices $C_n(k)$ est gaussienne pour $k \gg n$

$$\frac{C_n(k) - E(C_n(k))}{\sigma(C_n(k))} \Rightarrow N(0, I)$$

Exemple 4. Nous considérons une somme de projections aléatoires indépendantes et de même loi à coefficients aléatoires donnée par :

$$B_n(k) = \sum_{i=1}^k \Upsilon_i P_i$$

où Υ_i sont des v.a.i.i.d de fonction de répartition $d\sigma(\tau) = \frac{1}{\pi_+} (1 - \tau^2)^{-1/2} d\tau$. Les conditions **C1-C4**

sont vérifiées si $\lim_{n \rightarrow \infty} k/n = c$ existe par l'**Exemple 3**. De plus on a $A_n = 0$ et $m_0(z) = -z^{-1}$.

D'où

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{1 + \tau m} d\sigma(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\tau (1 - \tau^2)^{-1/2}}{1 + \tau m} \\ &= \frac{1}{m} \left[1 - (1 - m^2)^{-1/2} \right] \end{aligned}$$

L'équation (2.12) devient

$$m = -\left\{ z - \frac{c}{m} \left[1 - (1 - m^2)^{-1/2} \right] \right\}^{-1}$$

et par suite

$$z^2 m^4 + 2(1 - c) z m^3 + \left[(1 - c)^2 - z^2 \right] m^2 - 2(1 - c) z m - 1 + 2c = 0$$

En particulier, pour $c = 1$, on obtient une équation de degré quatre en m

$$z^2 m^4 - z^2 m^2 + 1 = 0$$

En utilisant le fait que $m(z, c) \rightarrow 0$ quand $\text{Im } z \rightarrow \infty$ et $\text{Im } m(z, c) > 0$ quand $\text{Im } z > 0$, le calcul donne $m(z, 1)$ et la formule (2.7) permet d'avoir :

$$\frac{\partial N(\lambda, 1)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{\frac{2 - |\lambda|}{4|\lambda|}} \right)_+$$

D'autre part, sur les intervalles de l'axe réel complémentaires du spectre, la fonction $m(x + i\theta, c)$ est continue et strictement croissante. Il existe donc une fonction inverse notée $v(x, c)$ strictement croissante prenant ses valeurs dans le complémentaire du spectre. La formule (2.12) donne

$$v(x, c) = v(x) + c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{1 + \tau x} d\sigma(\tau) \quad (2.13)$$

où $v(x)$ est l'inverse de $m_0(x)$.

Donc, nous avons la méthode suivante pour déterminer le spectre : on détermine les intervalles de l'axe réel où la fonction $v(\cdot, c)$ est strictement croissante puis on prend le complémentaire des valeurs de la fonction $v(\cdot, c)$ sur ces intervalles qui formera le spectre recherché.

D'où, si a est l'une des extrémités de ces intervalles où $v(\cdot, c)$ est croissante et pour $x = a$ on a

$$\lambda_a = v(a) + c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{1 + \tau a} d\sigma(\tau) \quad (2.14)$$

où λ_a est l'une des extrémités du spectre. On suppose que dans un voisinage de a le membre droit de (2.13) est analytique. Il y a un extrémum local en ce point (a est un maximum si a est l'extrémité droite de l'intervalle, a est un minimum si a est l'extrémité gauche de l'intervalle) et les dérivées d'ordre pair sont non nulles (dérivées d'ordre impair nulles). Un développement de Taylor de (2.13) donne (localement)

$$\begin{aligned} v(x, c) &= v(a, c) + (x - a)v'(a, c) + \frac{1}{2}(x - a)^2 v''(a, c) + \dots \\ &= \lambda_a + \sum_{k \geq 1} \frac{d_{2k}}{(2k)!} (x - a)^{2k} \end{aligned}$$

Donc au voisinage de λ_a et par inversion de cette formule à l'ordre 1 nous obtenons avec $m(z, c) = x$ et $v(x, c) = z$

$$m(z, c) - a = \sqrt[2k]{\frac{z - \lambda_a}{d_{2k}} (2k)!} [1 + o(1)]$$

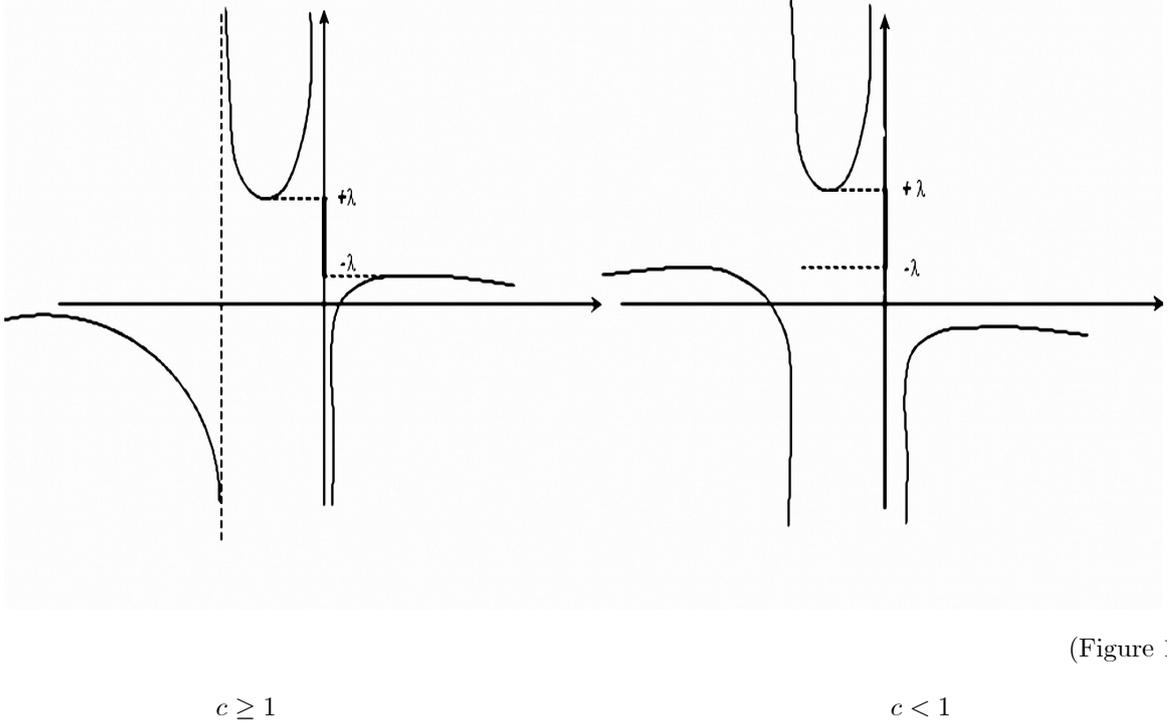
où la branche $\text{Im } m(z, c) > 0$ pour $\text{Im } z > 0$ et $m(z, c)$ est réelle dans un voisinage de λ_a ne contenant aucun point du spectre. Un calcul par la formule d'inversion de Perron-Frobenius et dans un voisinage de λ_a donne la fonction $N(\lambda, c)$ et puis sa dérivée, quand $\lambda \rightarrow \lambda_a$

$$\frac{dN(\lambda, c)}{d\lambda} = \sqrt[2k]{\frac{\lambda_a - \lambda}{d_{2k}} (2k)!} [1 + o(1)] \frac{\sin \frac{\pi}{2k}}{\pi} \quad (2.15)$$

Nous illustrons cette méthode pour **Exemple 3**. Ici $v(x) = z = -\frac{1}{x}$, $d\sigma(\xi) = \delta(\xi - \tau) d\xi$, avec τ non aléatoire. La formule (2.13) donne :

$$v(x, c) = -\frac{1}{x} + \frac{c\tau}{1 + \tau x} \quad (2.16)$$

et les graphes de $v(., c)$ pour $c \geq 1$ et $c < 1$ ont l'allure suivante :



(Figure 1)

D'après la Fig.1, le spectre est le complémentaire de l'ensemble des valeurs de $v(., c)$ sur les intervalles où elle est croissante. Ce qui donne comme spectre l'intervalle $[\lambda_-, \lambda_+] \cup \{0\}$ pour $c < 1$ et l'intervalle $[\lambda_-, \lambda_+]$ pour $c \geq 1$. De (2.16) on tire les extrémités $x_{\pm} = -1/\tau (1 \pm \sqrt{c})$, ce qui donnent par la formule (2.14) les extrémités du spectre $\lambda_{\pm} = \tau (1 \pm \sqrt{c})^2$.

La dérivée seconde du membre droit de (2.16) au point x_+ est

$$\begin{aligned} d_{\pm}^{(2)} &= v''(x_+, c) \\ &= \pm \frac{2\tau}{\sqrt{c}} \tau^2 (1 \pm \sqrt{c})^2 = \pm \frac{2\tau}{\sqrt{c}} \lambda_{\pm}^2 \end{aligned}$$

Par (2.15) on aura au voisinage des points λ_{\pm}

$$N'(\lambda, c) \approx \frac{\sqrt[4]{c}}{\pi \lambda_{\pm}} \sqrt{\frac{|\lambda - \lambda_{\pm}|}{\tau}}$$

2.2 Résultats auxiliaires

Pour montrer le théorème 1, nous avons besoin de lemmes auxiliaires.

On considère un opérateur linéaire A défini sur E_n . Notons par (A_{ik}) la matrice de A dans une base

orthonormale. On a le lemme suivant :

Lemme 1 . Si le vecteur aléatoire $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ satisfait la condition **C3**, alors

$$E \{ |\langle Aq, q \rangle - n^{-1} \text{tr} A| \} \leq \|A\| \cdot \varepsilon(n)$$

où $\varepsilon(n)$ ne dépend pas de A et tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

Preuve: On pose $\eta = \langle Aq, q \rangle = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} q_i \bar{q}_j$. Par (2.3), on aura

$$E(\eta) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} E(q_i \bar{q}_j) = n^{-1} \sum_{i=1}^n A_{ii} + \sum_{i,j} A_{ij} m_{ij}(n)$$

D'où

$$|E(\eta) - n^{-1} \text{tr} A| = \left| \sum_{i,j} A_{ij} m_{ij}(n) \right| \leq \left(\sum_{i,j} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j} |m_{ij}(n)|^2 \right)^{1/2}$$

Or

$$\sum_{i,j} |A_{ij}|^2 \leq n \|A\|^2 \quad (2.17)$$

Par suite de (2.5), on obtient

$$|E(\eta) - n^{-1} \text{tr} A| \leq \|A\| \left(n \sum_{i,j} |m_{ij}(n)|^2 \right)^{1/2} = \|A\| \varepsilon_1(n) \quad (2.18)$$

De même, d'après (2.4) on trouve :

$$E(\eta \bar{\eta}) = n^{-2} \left[|\text{tr} A|^2 + \sum_{i,j} A_{ij} \bar{A}_{ij} \right] + \sum_{i,j,l,m} A_{ij} \bar{A}_{lm} \varphi_{jl}(n) \bar{\varphi}_{im}(n) + \sum_{i,j,l,m} A_{ij} \bar{A}_{lm} d_{ijlm}(n)$$

De la formule précédente un calcul du second et du quatrième terme et en utilisant (2.17) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donne :

$$\begin{aligned}
n^{-2} \sum_{i,j} A_{ij} \bar{A}_{ij} &= n^{-2} \sum_{i,j} |A_{ij}|^2 \leq n^{-1} \|A\|^2 \\
\sum_{i,j,l,m} A_{ij} \bar{A}_{lm} d_{ijlm} &\leq \left(\sum_{i,j,l,m} |A_{ij}|^2 |A_{lm}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j,1/2l,m} |d_{ijlm}|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \|A\|^2 \left(\sum_{i,j,l,m} |d_{ijlm}|^2 \right)^{1/2} = \|A\|^2 \varepsilon_3(n)
\end{aligned}$$

Pour le troisième terme, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz , on a

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i,j,l,m} A_{ij} \bar{A}_{lm} \varphi_{jl}(n) \bar{\varphi}_{im}(n) \right| &\leq \left(\sum_{i,l} \left| \sum_j A_{ij} \varphi_{jl}(n) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,l} \left| \sum_m A_{lm} \varphi_{im}(n) \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_l \|A\|^2 \sum_j |\varphi_{jl}(n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_i \|A\|^2 \sum_m |\varphi_{im}(n)|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \|A\|^2 \sum_{j,l} |\varphi_{jl}(n)|^2 \\
&= \|A\|^2 \varepsilon_2(n)
\end{aligned}$$

Donc

$$\left| E(\eta \bar{\eta}) - n^{-2} |tr A|^2 \right| \leq \|A\|^2 [n^{-1} + \varepsilon_2(n) + \varepsilon_3(n)]. \quad (2.19)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
E |\eta - n^{-1} tr A| &\leq \left[E |\eta - n^{-1} tr A|^2 \right]^{1/2} \\
&= \left[E (\eta - n^{-1} tr A) (\bar{\eta} - n^{-1} tr \bar{A}) \right]^{1/2} \\
&= \left[E(\eta \bar{\eta} + n^{-2} |tr A|^2 - n^{-1} \bar{\eta} tr A - n^{-1} \eta tr \bar{A}) \right]^{1/2} \\
&= \left[E(\eta \bar{\eta} - n^{-2} |tr A|^2 - n^{-1} tr A \{ \bar{\eta} - n^{-1} tr \bar{A} \} - \right. \\
&\quad \left. - n^{-1} tr \bar{A} \{ \eta - n^{-1} tr A \}) \right]^{1/2} \\
&\leq \left[E \left| \eta - n^{-2} |tr A|^2 \right| + n^{-1} |tr A| E |\bar{\eta} - n^{-1} tr \bar{A}| + \right. \\
&\quad \left. + n^{-1} |tr A| E |\eta - n^{-1} tr A| \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Sachant que $|tr A| = |tr \tilde{A}| \leq n \|A\|$ et utilisant (2.18), (2.19) on en déduit que

$$E |\eta - n^{-1} tr A| \leq \|A\|^2 [n^{-1} + \varepsilon_2(n) + \varepsilon_3(n) + 2\varepsilon_1(n)]^{1/2}$$

Finalement, en posant $\varepsilon(n) = [n^{-1} + \varepsilon_2(n) + \varepsilon_3(n) + 2\varepsilon_1(n)]^{1/2}$, on trouve le résultat, avec $\varepsilon(n)$ ne dépend pas de A et tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ par la condition **C3**. ■

Lemme 2 . Soient \tilde{A} et A deux opérateurs hermitiens définis sur E_n tel que $\tilde{A} - A = \tau \langle \cdot, q \rangle$, où τ est un nombre réel et q un vecteur aléatoire satisfaisant **C3**. Alors la différence des traces des résolvantes associées $\tilde{R}_z = (\tilde{A} - zI)^{-1}$ et $R_z = (A - zI)^{-1}$ vérifie :

$$tr \tilde{R}_z - tr R_z = -\frac{\partial}{\partial z} \ln (1 + \tau n^{-1} tr R_z) + \delta(z, q, n)$$

où $\delta(z, q, n)$ est une v.a vérifiant l'inégalité

$$E \{|\delta(z, q, n)|\} \leq 2 \frac{\tau}{(1 + \tau n^{-1} tr R_z)^2} \varepsilon(n)$$

où $\varepsilon(n)$ ne dépend pas de A , z et τ et tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

Preuve: Puisque le déterminant d'une matrice d'un opérateur est égale au produit de ses valeurs propres, l'identité suivante

$$\tilde{R}_z = (\tilde{A} - zI)^{-1} = \left\{ (A - zI) + (\tilde{A} - A) \right\}^{-1} = \left\{ I + R_z (\tilde{A} - A) \right\}^{-1} R_z$$

donne en prenant les déterminants

$$\prod_{k=1}^n (\tilde{\lambda}_k - z)^{-1} = \prod_{k=1}^n (\lambda_k - z) \left(\det \left[I + R_z (\tilde{A} - A) \right] \right)^{-1}$$

où $\tilde{\lambda}_k$ et λ_k sont les valeurs propres de \tilde{A} et A respectivement.

En prenant le logarithme on a

$$\sum_k \ln (\tilde{\lambda}_k - z)^{-1} - \sum_k \ln (\lambda_k - z)^{-1} = -\ln \det \left[I + R_z (\tilde{A} - A) \right]$$

En dérivant par rapport à z on aboutit à

$$\sum_k \frac{1}{\tilde{\lambda}_k - z} - \sum_k \frac{1}{\lambda_k - z} = -\frac{\partial}{\partial z} \ln \det \left[I + R_z (\tilde{A} - A) \right]$$

D'où

$$tr \tilde{R}_z - tr R_z = -\frac{\partial}{\partial z} \ln \det \left[I + R_z (\tilde{A} - A) \right]$$

Par ailleurs, pour $\tilde{A} - A = \tau \langle \cdot, q \rangle q$, et de la formule

$$\det \left[I + R_z (\tilde{A} - A) \right] = 1 + \tau \langle R_z q, q \rangle$$

On en déduit que

$$tr \tilde{R}_z - tr R_z = -(\partial/\partial z) \ln [1 + \tau \langle R_z q, q \rangle]$$

Donc

$$tr \tilde{R}_z - tr R_z = -\frac{\tau \langle R_z^2 q, q \rangle}{1 + \tau \langle R_z q, q \rangle} \quad (2.20)$$

Pour évaluer le premier membre de cette équation, on note $E(\lambda)$ la résolution de l'unité associée à l'opérateur A ($A = \int \lambda E(d\lambda)$, $E(-\infty) = 0$, $E(+\infty) = I$) et on associe la fonction non-croissante $\alpha(\lambda) = \langle E(\lambda) q, q \rangle$.

Par la formule classique suivante [13], [24] :

$$\langle R_z^k q, q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha(\lambda)}{(\lambda - z)^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Pour $z = x + iy$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |1 + \tau \langle R_z q, q \rangle| &\geq |\tau \operatorname{Im} \langle R_z q, q \rangle| = |\tau y| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2} \\ |\tau \langle R_z^2 q, q \rangle| &\leq |\tau| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha(\lambda)}{|\lambda - z|^2} \leq |\tau| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2} \end{aligned}$$

D'où

$$\left| \frac{\tau \langle R_z^2 q, q \rangle}{1 + \tau \langle R_z q, q \rangle} \right| \leq |y|^{-1} \quad (2.21)$$

Pour compléter la preuve du lemme, écrivant (2.20) sous la forme :

$$tr \tilde{R}_z - tr R_z = -\frac{\tau n^{-1} tr R_z^2}{1 + \tau n^{-1} tr R_z} + \delta(z, q, n) \quad (2.22)$$

où

$$\delta(z, q, n) = \frac{\tau n^{-1} tr R_z^2}{1 + \tau n^{-1} tr R_z} - \frac{\tau \langle R_z^2 q, q \rangle}{1 + \tau \langle R_z q, q \rangle}$$

Par calcul de l'espérance de $|\delta(z, q, n)|$ on a

$$\delta(z, q, n) = \frac{\tau \langle R_z^2 q, q \rangle}{1 + \tau \langle R_z q, q \rangle} \cdot \frac{\{\langle R_z q, q \rangle - n^{-1} \text{tr} R_z\}}{1 + \tau n^{-1} \text{tr} R_z} - \frac{\tau}{1 + \tau n^{-1} \text{tr} R_z} \{\langle R_z^2 q, q \rangle - n^{-1} \text{tr} R_z^2\}$$

en utilisant (2.21), nous obtenons

$$|\delta(z, q, n)| \leq \left| \frac{\tau}{y(1 + \tau n^{-1} \text{tr} R_z)} \right| \{|\langle R_z q, q \rangle - n^{-1} \text{tr} R_z| + |y| \cdot |\langle R_z^2 q, q \rangle - n^{-1} \text{tr} R_z^2|\}$$

Comme le vecteur q satisfait **C3**, de cette inégalité et le lemme précédent, nous obtenons

$$E |\delta(z, q, n)| \leq \left| \frac{\tau}{y(1 + \tau n^{-1} \text{tr} R_z)} \right| (\|R_z\| + |y| \|R_z^2\|) \varepsilon(n)$$

Comme A est hermitien, on a $\|R_z\| \leq |y|^{-1}$ et $\|R_z^2\| \leq |y|^{-2}$.

Donc

$$E |\delta(z, q, n)| \leq 2 \left| \frac{\tau}{y^2(1 + \tau n^{-1} \text{tr} R_z)} \right| \varepsilon(n)$$

■

Considérons maintenant des v.a τ_i indépendantes et de même loi de distribution $\sigma(\tau)$. On note par T_k les réalisations de τ_k . Les v.a τ_i sont rangées en ordre croissant, $\tau_{(1)} \leq \tau_{(2)} \leq \dots \leq \tau_{(k)}$ et on construit la fonction de répartition empirique $\sigma(\tau, T_k)$ qui correspond aux réalisations T_k , donnée par :

$$\sigma(\tau, T_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \leq \tau_{(1)} \\ \frac{i}{k} & \text{si } \tau_{(i)} \leq \tau < \tau_{(i+1)} \\ 1 & \text{si } \tau_{(k)} < \tau \end{cases}$$

Par le théorème de **Glivenko-Cantelli** [29], la fonction de répartition $\sigma(\tau, T_k)$ converge presque sûrement vers $\sigma(\tau)$ uniformément quand $n \rightarrow \infty$. Les fonctions $\tau(\xi, T_k)$ et $\tau(\xi)$ fonctions inverses de $\sigma(\tau, T_k)$, $\sigma(\tau)$ respectivement, sont définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par les équations :

$$\begin{aligned} \tau(\xi) &= \inf_{\tau} \{\tau : \sigma(\tau) \geq \xi\} \\ \tau(\xi, T_k) &= \inf_{\tau} \{\tau : \sigma(\tau, T_k) \geq \xi\} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Par définition de $\sigma(\tau, T_k)$, on a

$$\tau(\xi, T_k) = \tau_{(i+1)} \text{ pour } \frac{i}{k} \leq \xi < \frac{i+1}{k} (i = 0, 1, \dots, k-1) \quad (2.24)$$

Nous avons le Lemme suivant :

Lemme 3 . Soit τ une v.a. de fonction de répartition σ admettant un moment absolu d'ordre un fini. Alors la suite de fonctions $\tau(\cdot, T_k)$ converge presque sûrement dans $L^1[0, 1]$ vers la fonction $\tau(\cdot)$:

$$\alpha_k = \int_0^1 |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ p.s.}$$

Preuve: Par hypothèse, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau| d\sigma(\tau) < \infty$. D'après la définition de τ il suit que $\int_0^1 |\tau(\xi)| d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau| d\sigma(\tau) < \infty$. Donc la fonction τ est sommable sur l'intervalle $[0, 1]$.

Par le théorème de **Glivenko-Cantelli**, la suite $\beta_k = \sup_{-\infty < \tau < \infty} |\sigma(\tau, T_k) - \sigma(\tau)|$ converge presque sûrement vers 0.

De $\beta_k = \sup_{-\infty < \tau < \infty} |\sigma(\tau, T_k) - \sigma(\tau)|$, il s'ensuit que si $\sigma(\tau, T_k) \geq \xi$ alors $\sigma(\tau) \geq \xi - \beta_k$ et si $\sigma(\tau) \geq \xi + \beta_k$ alors $\sigma(\tau, T_k) \geq \xi$.

Donc

$$\{\tau : \sigma(\tau) \geq \xi + \beta_k\} \subset \{\tau : \sigma(\tau, T_k) \geq \xi\} \subset \{\tau : \sigma(\tau) \geq \xi - \beta_k\}$$

D'où pour $\xi \in (\beta_k, 1 - \beta_k)$ et de la définition de $\tau(\xi, T_k)$ et $\tau(\xi)$, on obtient $\tau(\xi + \beta_k) \geq \tau(\xi, T_k) \geq \tau(\xi - \beta_k)$.

Comme $\tau(\xi)$ est croissante, cette inégalité implique que $|\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| \leq \tau(\xi + \beta_k) - \tau(\xi - \beta_k)$ si $\beta_k \leq \xi \leq 1 - \beta_k$.

D'où

$$\begin{aligned} \int_{\beta_k}^{1-\beta_k} |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi &\leq \int_{\beta_k}^{1-\beta_k} \{\tau(\xi + \beta_k) - \tau(\xi - \beta_k)\} d\xi \\ &= \int_{2\beta_k}^1 \tau(\xi) d\xi - \int_0^{1-2\beta_k} \tau(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Par suite par le théorème de **Glivenko-Cantelli** et la sommabilité de $\tau(\xi)$

$$\int_{\beta_k}^{1-\beta_k} |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ p.s.}$$

De plus on a

$$\int_0^{\beta_k} |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi \leq \int_0^{\beta_k} |\tau(\xi, T_k)| d\xi + \int_0^{\beta_k} |\tau(\xi)| d\xi$$

Pour A un nombre positif, on définit la v.a $\tilde{\tau}_{(i)}$ par

$$\tilde{\tau}_{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\tau_{(i)}| < A \\ |\tau_{(i)}| & \text{si } |\tau_{(i)}| \geq A \end{cases}. \quad (2.25)$$

D'après (2.24) nous obtenons

$$\int_0^{\beta_k} |\tau(\xi, T_k)| d\xi = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} |\tau_{(i+1)}| \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tilde{\tau}_{(i)} + \int_0^{\beta_k} A d\xi,$$

par conséquent

$$\int_0^{\beta_k} |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tilde{\tau}_{(i)} + \int_0^{\beta_k} [A + |\tau(\xi)|] d\xi. \quad (2.26)$$

Par la loi forte des grands nombres

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tilde{\tau}_{(i)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_{|\tau| \geq A} |\tau| d\sigma(\tau)$$

Par (2.24) et le théorème de **Glivenko-Cantelli** et de la sommabilité de τ , on en déduit que pour k assez grand

$$\int_0^{\beta_k} |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi \leq \int_{|\tau| \geq A} |\tau| d\sigma(\tau) + \frac{C}{A}$$

où C est une constante et $A > 0$.

En faisant tendre $A \rightarrow \infty$ on obtient

$$\int_0^{\beta_k} |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

De même, on montre que $\int_{1-\beta_k}^1 |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi$ tends vers 0 presque sûrement quand $k \rightarrow \infty$. ■

2.3 Conséquences

Dans un premier temps, on montre le théorème 1 pour le cas où les v.a τ_i sont bornées, i.e, il existe un nombre $T > 0$ tel que

$$|\tau_i| < T \quad (2.27)$$

Supposons que T_k, Q_k est une réalisation de τ et q définis dans (2.1). On note les v.a. $\tau_{(i)}, q^{(i)}$

classées en ordre croissant :

$$\tau_{(1)} \leq \tau_{(2)} \leq \dots \leq \tau_{(k)}, \quad q^{(1)} \leq q^{(2)} \leq \dots \leq q^{(k)}$$

Nous construisons une suite d'opérateurs $B_n(j)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) définis par :

$$B_n(j) = A_n + \sum_{i=1}^j \tau_{(i)} \langle \cdot, q^{(i)} \rangle q^{(i)} \quad (2.28)$$

On a $B_n(0) = A_n$ et les opérateurs $B_n(k)$ sont définis dans (2.1). Notons par $R_z(j)$ la résolvante des opérateurs $B_n(j)$. Pour chaque réalisation T_k, Q_k on associe la fonction $u(z, t, n, T_k, Q_k)$ définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $t \in [0, 1]$ par

$$\begin{aligned} u(z, t, n, T_k, Q_k) &= n^{-1} \text{tr} R_z(j) + kn^{-1} \text{tr} [R_z(j+1) - R_z(j)] \left(t - \frac{j}{k} \right) \\ t &\in \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k} \right], \quad j = 0, 1, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Notons que $u(z, 0, n, T_k, Q_k)$ et $u(z, 1, n, T_k, Q_k)$ sont les transformées de Stieltjes des fonctions spectrales normalisées des opérateurs A_n et B_n :

$$u(z, 0, n, T_k, Q_k) = n^{-1} \text{tr} R_z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dN(\lambda, A_n)}{\lambda - z} \quad (2.30)$$

$$u(z, 1, n, T_k, Q_k) = n^{-1} \text{tr} R_z(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dN(\lambda, B_n(k))}{\lambda - z} \quad (2.31)$$

Pour $t \in]0, 1[$, $u(z, t, n, T_k, Q_k)$ sont aussi les transformées de Stieltjes des fonctions non décroissantes

$$\begin{aligned} N(\lambda, t, B_n(k)) &= [1 - kt + j] N(\lambda, B_n(j)) + [kt - j] N(\lambda, B_n(j+1)) \\ t &\in \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k} \right], \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ainsi, $u(z, t, n, T_k, Q_k)$ est continue sur son domaine de définition, linéaire par morceaux en t , holomorphe en z pour $\text{Im } z \neq 0$ et $\text{Im } u(z, t, n, T_k, Q_k) > 0$ lorsque $\text{Im } z > 0$.

Nous remarquons que l'ensemble des fonctions $u(z, t, n, T_k, Q_k)$ et l'ensemble de ses dérivées $u'(z, t, n, T_k, Q_k)$ sont des compacts pour la topologie de la convergence uniforme en $t \in [0, 1]$ et $z \in G$, où G est un domaine arbitraire borné du demi-plan $\text{Im } z > 3T$. En effet, on a d'une part les inégalités suivantes (en posant $y = \text{Im } z$) :

$$\left| n^{-1} \text{tr} R_z \right| \leq |y|^{-1} \quad \text{et} \quad \left| n^{-1} \frac{d}{dz} \text{tr} R_z \right| \leq y^{-2} \quad (2.32)$$

puisque pour toute résolvante d'un opérateur auto-adjoint on a [13]

$$|tr R_z| = \sum_{i=1}^n |R_z(ii)| \leq \sum_{i=1}^n |\operatorname{Im} z|^{-1} = n |y|^{-1}$$

et puis en dérivant, on trouve la deuxième inégalité.

D'après (2.29), on a

$$|u(z, t, n, T_k, Q_k)| \leq |y|^{-1} \quad \text{et} \quad |u'(z, t, n, T_k, Q_k)| \leq y^{-2} \quad (2.33)$$

Comme les opérateurs $B_n(j+1)$ et $B_n(j)$ diffèrent seulement de l'opérateur unidimensionnel $\tau_{(j+1)} \langle \cdot, q^{(j+1)} \rangle q^{(j+1)}$, la formule (2.20) peut s'appliquer à leurs résolvantes $R_z(j+1)$ et $R_z(j)$ et par suite

$$tr [R_z(j+1) - R_z(j)] = -\frac{\tau_{(j+1)} \langle R_z^2(j) q^{(j+1)}, q^{(j+1)} \rangle}{1 + \tau_{(j+1)} \langle R_z(j) q^{(j+1)}, q^{(j+1)} \rangle}$$

d'où par (2.21)

$$|tr [R_z(j+1) - R_z(j)]| \leq |y|^{-1} \quad (2.34)$$

Par conséquent

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} u(z, t, n, T_k, Q_k) \right| \leq \frac{k}{n} |y|^{-1} \quad (2.35)$$

Puisque la fonction $\frac{\partial}{\partial t} u(z, t, n, T_k, Q_k) = \frac{k}{n} \{tr [R_z(j+1) - R_z(j)], \frac{j}{k} \leq t \leq \frac{j+1}{k}\}$, est holomorphe en z , en utilisant l'estimation de Cauchy pour la dérivée des fonctions holomorphes au centre d'un cercle en fonction du maximum de son module sur le contour, on trouve par (2.34)

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} u'(z, t, n, T_k, Q_k) \right| \leq \frac{4k}{ny^2} \quad (2.36)$$

Les inégalités (2.33), (2.35) et (2.36) et par les critères de compacité du **Théorème d'Ascoli-Arzelà** dans l'ensemble des fonctions continues on a la compacité des ensembles $\{u(z, t, n, T_k, Q_k)\}$ et $\{u'(z, t, n, T_k, Q_k)\}$.

Considérons maintenant la fonction $u(z, t, n, T_k, Q_k)$ pour z appartenant au demi-plan $\operatorname{Im} z > 3T$. Soit $\tau(\cdot)$ l'inverse de la f.d.r $\sigma(\cdot)$ des v.a τ définies dans (2.23), et soit G un ensemble arbitraire dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 3T$, $T > 0$ et $|\tau_i| < T$.

Lemme 4 . *Supposons que les conditions C1-C4 et (2.27) sont vérifiées. On définit la v.a*

$$\varphi_n = \sup_{\substack{t \in [0,1] \\ z \in G}} \left| u(z, t, n, T_k, Q_k) - m_0(z) + c \int_0^t \frac{\tau(\xi) u'(z, t, n, T_k, Q_k)}{1 + \tau(\xi) u(z, t, n, T_k, Q_k)} d\xi \right|$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\varphi_n) = 0$$

Preuve: D'après (2.29) et (2.34) on trouve que pour $t \in [\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}]$

$$|u(z, t, n, T_k, Q_k) - n^{-1} \text{tr} R_z(j)| \leq \frac{1}{n} |y|^{-1} \quad (2.37)$$

En utilisant cette inégalité et l'estimation de Cauchy pour les fonctions holomorphes, on obtient

$$|u'(z, t, n, T_k, Q_k) - n^{-1} \text{tr} R_z^2(j)| \leq \frac{4}{ny^2} \quad (2.38)$$

Les opérateurs $B_n(j+1)$ et $B_n(j)$ diffèrent de l'opérateur unidimensionnel $\tau_{(j+1)} \langle \cdot, q^{(j+1)} \rangle q^{(j+1)}$ et par conséquent, le lemme 2 s'applique pour leurs résolvantes $R_z(j+1)$ et $R_z(j)$ et donc (2.29) se transforme sous la forme

$$u(z, t, n, T_k, Q_k) = n^{-1} \text{tr} R_z(j) - \frac{k}{n} \frac{\tau_{(j+1)} n^{-1} \text{tr} R_z^2(j)}{1 + \tau_{(j+1)} n^{-1} \text{tr} R_z(j)} \left(t - \frac{j}{k} \right) + n^{-1} \theta_j(z) \delta_j(z, q^{(j+1)}, n) \quad (2.39)$$

où $0 \leq \theta_j = k \left(t - \frac{j}{k} \right) \leq 1$

$$E \left| \delta_j(z, q^{(j+1)}, n) \right| \leq 2 \left| \frac{\tau_{(j+1)}}{y^2 [1 + \tau_{(j+1)} n^{-1} \text{tr} R_z(j)]} \right| \varepsilon(n)$$

avec $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Pour $\text{Im } z \geq 3T$, les inégalités (2.32) et l'inégalité $|\tau_{(j+1)}| \leq T$ impliquent que

$$|1 + \tau_{(j+1)} n^{-1} \text{tr} R_z(j)| \geq 1 - |\tau_{(j+1)}| |y|^{-1} \geq 1 - T |y|^{-1} \geq 1 - \frac{|y|}{3} |y|^{-1} = \frac{2}{3} \quad (2.40)$$

et par suite

$$E \left| \delta_j(z, q^{(j+1)}, n) \right| \leq (3T)^{-1} \varepsilon(n) \quad (2.41)$$

Par la formule (2.24) et comme $\tau_{(j+1)} = \tau(\xi, T_k)$ pour $t \in [\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}]$, alors

$$\frac{k}{n} \frac{\tau_{(j+1)} n^{-1} \text{tr} R_z^2(j)}{1 + \tau_{(j+1)} n^{-1} \text{tr} R_z(j)} \left(t - \frac{j}{k} \right) = \frac{k}{n} \int_{\frac{j}{k}}^t \frac{\tau(\xi, T_k) n^{-1} \text{tr} R_z^2(j)}{1 + \tau(\xi, T_k) n^{-1} \text{tr} R_z(j)} d\xi$$

Dans le membre de droite en remplaçant $\tau(\xi, T_k)$ par $\tau(\xi)$, $n^{-1}trR_z(j)$ par $u(z, \xi, n, T_k, Q_k)$ et $n^{-1}trR_z^2(j)$ par $u'(z, \xi, n, T_k, Q_k)$ et en calculant l'erreur à l'aide de (2.37), (2.38) et (2.40), on trouve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{k}{n} \frac{\tau_{(j+1)} n^{-1} tr R_z^2(j)}{1 + \tau_{(j+1)} n^{-1} tr R_z(j)} \left(t - \frac{j}{k} \right) - \frac{k}{n} \int_{\frac{j}{k}}^t \frac{\tau(\xi) u'(z, \xi, n, T_k, Q_k)}{1 + \tau(\xi) u(z, \xi, n, T_k, Q_k)} d\xi \right| \\ & \leq \frac{k}{nT^2} \int_{\frac{j}{k}}^t |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi + \frac{3}{n^2 T} \end{aligned}$$

pour tout $t \in [\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}]$ et z dans le demi-plan $\text{Im } z > 0$. Puisque $u(z, \frac{j}{k}, n, T_k, Q_k) = n^{-1}trR_z(j)$, d'après cette inégalité et (2.39), on aura

$$\begin{aligned} & \left| u(z, t, n, T_k, Q_k) - u(z, \frac{j}{k}, n, T_k, Q_k) + \frac{k}{n} \int_{\frac{j}{k}}^t \frac{\tau(\xi) u'(z, \xi, n, T_k, Q_k)}{1 + \tau(\xi) u(z, \xi, n, T_k, Q_k)} d\xi \right| \\ & \leq \frac{k}{nT^2} \int_{\frac{j}{k}}^t |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi + \frac{3}{n^2 T} + \frac{1}{n} \delta_j \left(z, q^{(j+1)}, n \right) \end{aligned}$$

En combinant les inégalités précédentes, on trouve pour la fonction

$$\varphi(z, t, n, T_k, Q_k) = u(z, t, n, T_k, Q_k) - m_0(z) + c \int_0^t \frac{\tau(\xi) u'(z, \xi, n, T_k, Q_k)}{1 + \tau(\xi) u(z, \xi, n, T_k, Q_k)} d\xi \quad (2.42)$$

la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & |\varphi(z, t, n, T_k, Q_k)| \\ & \leq \frac{k}{nT^2} \int_0^1 |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi + |m_0(z) - u(z, 0, n, T_k, Q_k)| + \frac{3}{nT} + \frac{1}{T} \left| c - \frac{k}{n} \right| + \\ & \quad + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \left| \delta_j \left(z, q^{(j+1)}, n \right) \right| \end{aligned}$$

D'où, de (2.41)

$$\begin{aligned} & |\varphi(z, t, n, T_k, Q_k)| \\ & \leq \frac{k}{nT^2} \int_0^1 |\tau(\xi, T_k) - \tau(\xi)| d\xi + |m_0(z) - u(z, 0, n, T_k, Q_k)| + \frac{3}{nT} + \frac{1}{T} \left| c - \frac{k}{n} \right| + \frac{k}{n} \frac{1}{3T} \varepsilon(n) \end{aligned}$$

De cette inégalité, (2.30), conditions **C1**, **C2** et lemme 3 il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(z, t, n, T_k, Q_k)| = 0 \quad (2.43)$$

pour chaque z, t ($\text{Im } z \geq 3T, t \in [0, 1]$).

D'après (2.33), (2.34) et (2.36) il s'en suit que $u(z, t, n, T_k, Q_k)$, $u'(z, t, n, T_k, Q_k)$, et par conséquent, $\varphi(z, t, n, T_k, Q_k)$, sont uniformément bornées et par conséquent équicontinues.

Donc, sur l'ensemble $\{0 \leq t \leq 1; z \in G\}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des nombres $(t_1, z_1), \dots, (t_{m_\varepsilon}, z_{m_\varepsilon})$, tels que

$$\varphi_n = \sup_{\substack{t \in [0,1] \\ z \in G}} |\varphi(z, t, n, T_k, Q_k)| \leq \varepsilon + \max_{1 \leq i \leq m_\varepsilon} |\varphi(z_i, t_i, n, T_k, Q_k)|$$

et donc

$$E\varphi_n \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} E|\varphi(z_i, t_i, n, T_k, Q_k)|$$

Par suite (2.43) implique que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\varphi_n \leq \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} E\varphi_n = 0$. ■

Le lemme précédent montre en particulier, l'existence d'une réalisation T'_k, Q'_k telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t \in [0,1] \\ z \in G}} |\varphi(z, t, n, T'_k, Q'_k)| = 0 \quad \text{p.s} \quad (2.44)$$

Les ensembles des fonctions $u(z, t, n, T_k, Q_k)$ et $u'(z, t, n, T_k, Q_k)$ étant compactes, on peut extraire une sous suite de $u(z, t, n, T_k, Q_k)$ qui converge vers une fonction $u(z, t)$ uniformément en $t \in [0, 1]$ et $z \in F$ un ensemble fermé et borné dans le demi-plan complexe. D'après (2.44) il suit que pour $z \in G$ et $t \in [0, 1]$, la fonction $u(z, t)$ satisfait l'équation

$$u(z, t) = m_0(z) - c \int_0^t \frac{\tau(\xi) u'(z, \xi)}{1 + \tau(\xi) u(z, \xi)} d\xi \quad (2.45)$$

Puisque la fonction $u(z, t)$ est holomorphe dans le demi-plan $\text{Im } z > 0$, les deux membres de cette équation sont aussi holomorphes dans le demi-plan $\text{Im } z > 0$ et par conséquent, coïncident partout dans ce domaine. Ainsi, (2.45) a au moins une solution continue en t et z ($t \in [0, 1], \text{Im } z > 0$) et holomorphe en z pour tout t fixé ($\text{Im } z > 0$).

Soit $K(\tau, z_0, R)$ l'ensemble des fonctions $f(z, t)$ continues en z, t dans le cylindre $0 \leq t \leq 1, |z - z_0| \leq R$, holomorphes en z ($|z - z_0| \leq R$ pour tout $0 \leq t \leq 1$) et satisfaisant

$$\sup_{\substack{t \in [0,1] \\ |z - z_0| < R}} \left| \frac{\tau(t)}{1 + \tau(t) f(z, t)} \right| < \infty \quad (2.46)$$

On suppose que τ est monotone non nécessairement bornée. Remarquons que les fonctions $f(z, t)$ telles que $\text{Im } f(z, t) > 0$ appartiennent à $K(\tau, z_0, R)$. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 5 *L'équation (2.45) a au plus une solution dans l'ensemble $K(\tau, z_0, R)$.*

Preuve: [7] p.475. ■

2.4 Preuve du théorème 1

Dans cette partie on traite le cas où la v.a τ est bornée.

Dans la partie précédente, on a prouvé l'existence d'une suite (n') et une réalisation T'_k et Q'_k , telles que

$$\lim u(z, t, n', T'_k, Q'_k) = u(z, t)$$

où $u(z, t)$ est la solution de (2.45). On considère la suite des distributions spectrales $N(\lambda, t, B_{n'}(k))$, et par le **théorème de Helly** [29] on peut extraire une sous suite qui converge vers une fonction $N'(\lambda)$ en tout points de continuité, par (2.31) on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN'(\lambda)}{\lambda - z} = \lim_{n' \rightarrow \infty} u(z, 1, n, T'_k, Q'_k) = u(z, 1)$$

Par ailleurs $-i \lim_{y \rightarrow +\infty} y m_0(iy) = N_0(+\infty) - N_0(-\infty)$ [28]. Donc, pour $y = \text{Im } z \rightarrow +\infty$ on a $N'(+\infty) - N'(-\infty) = -i \lim_{y \rightarrow +\infty} y u(iy, 1)$. De (2.33), (2.45) et la définition de $m_0(z)$, on a

$$-i \lim_{y \rightarrow +\infty} y u(iy, 1) = -i \lim_{y \rightarrow +\infty} y m_0(iy) = N_0(+\infty) - N_0(-\infty)$$

Donc

$$N'(+\infty) - N'(-\infty) = N_0(+\infty) - N_0(-\infty) \quad (2.47)$$

Par la formule d'inversion de Frobenuis, il existe une distribution limite $N'(\lambda)$ qui correspond à $u(z, 1)$. On introduit la fonction $N(\lambda, c) = N'(\lambda) + N_0(-\infty)$ telles que $N'(\lambda)$ et $N(\lambda, c)$ ont la même transformée de Stieltjes $u(z, 1)$ et par (2.47), $N(\lambda, c)$ a les mêmes limites à $\pm\infty$ que $N_0(\lambda)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(\lambda, c)}{\lambda - z} = u(z, 1) \quad (2.48)$$

$$N(+\infty, c) = N_0(+\infty), \quad N(-\infty, c) = N_0(-\infty) \quad (2.49)$$

D'où par la formule d'inversion, en tout points de continuité, on a

$$N(\lambda, c) = N_0(-\infty) + \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \left\{ \lim_{y \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\lambda} \text{Im } u(x + iy, 1) dx \right\} \quad (2.50)$$

Pour démontrer les deux premiers points du théorème 1 on doit montrer que la suite $N(\lambda, B_n(k))$ converge en probabilité vers $N(\lambda, c)$ en tout point de continuité, quand $n \rightarrow \infty$. Il suffit de montrer que pour tout

$\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |N(\lambda_1, B_n(k)) - N(\lambda_0, B_n(k)) - N(\lambda_1, c) + N(\lambda, c)| < \varepsilon \} = 1 \quad (2.51)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ N_0(-\infty) - \varepsilon < N(\lambda, B_n(k)) < N_0(+\infty) + \varepsilon \} = 1 \quad (2.52)$$

où λ_1 et λ_0 sont deux points de continuité de la fonction $N(\lambda, c)$ et λ est un réel quelconque. Montrons (2.51).

On note

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, c) &= N(\lambda, c) - N(\lambda_0, c) \\ \Delta(\lambda, B_n(k)) &= N(\lambda, B_n(k)) - N(\lambda_0, B_n(k)) \end{aligned}$$

où λ_0 est un point de continuité de $N(\lambda, c)$. Supposons que (2.51) est fausse. Alors il existe un point λ_1 où $N(\lambda, c)$ est continue et tel que pour un $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim} P \{ |\Delta(\lambda_1, B_n(k)) - \Delta(\lambda, c)| \geq \varepsilon \} = \delta > 0$$

et par conséquent, il existe une suite (n_m) telle que

$$P \{ |\Delta(\lambda_1, B_{n_m}(k)) - \Delta(\lambda, c)| \geq \varepsilon \} > \frac{\delta}{2} \quad (2.53)$$

D'autre part, par le lemme 4, si on donne r , on peut trouver un nombre $n(r)$ tel que pour $n > n(r)$

$$\begin{aligned} &P \left(\sup_{\substack{t \in [0,1] \\ z \in G}} \left| u(z, t, n, T_k, Q_k) - m_0(z) + c \int_0^t \frac{\tau(\xi) u'(z, \xi, n, T_k, Q_k)}{1 + \tau(\xi) u(z, \xi, n, T_k, Q_k)} d\xi \right| < \frac{1}{r} \right) \\ &> 1 - \frac{\delta}{4} \end{aligned} \quad (2.54)$$

D'où, on peut extraire une sous-suite (n'_r) de la suite (n_k) telle que (2.53) et (2.54) sont vérifiées. Notons les évènements suivants :

$$A = \{ |\Delta(\lambda_1, B_{n_m}(k)) - \Delta(\lambda, c)| \geq \varepsilon \} \quad (2.55)$$

$$B = \left\{ \sup_{\substack{t \in [0,1] \\ z \in G}} \left| u(z, t, n, T_k, Q_k) - m_0(z) + c \int_0^t \frac{\tau(\xi) u'(z, \xi, n, T_k, Q_k)}{1 + \tau(\xi) u(z, \xi, n, T_k, Q_k)} d\xi \right| < \frac{1}{r} \right\} \quad (2.56)$$

De la formule $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$, on a la probabilité $P(A \cap B)$ de réaliser les évènements A et B est plus grande que $\frac{\delta}{2} + 1 - \frac{\delta}{4} - 1 = \frac{\delta}{4} > 0$. pour la sous-suite (n'_r)

Donc pour toute la sous suite (n'_r) , il existe T''_k, Q''_k vérifiant (2.55) et (2.56).

Par la compacité des ensembles $\{u(z, t, n, T_k, Q_k)\}$ et $\{u'(z, t, n, T_k, Q_k)\}$ et le **théorème de Helly**, on peut extraire une sous-suite (n_r'') de (n_r') telle que $\lim_{n_r'' \rightarrow \infty} u(z, t, n_r'', T_k'', Q_k'') = u_1(z, t)$ uniformément pour $t \in [0, 1]$, $z \in G$ et en tout point de continuité $\lim_{n_r'' \rightarrow \infty} N(\lambda, B_{n_r''}(k)) = \tilde{N}(\lambda, c)$. De plus, par (2.55)

$$\left| \tilde{N}(\lambda_1, c) - \tilde{N}(\lambda_0, c) - N(\lambda_1, c) + N(\lambda_0, c) \right| \geq \varepsilon \quad (2.57)$$

par (2.56), la fonction $u_1(z, t)$ satisfait (2.45), et par (2.31), on a $\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - z)^{-1} \tilde{N}(\lambda, c) = u_1(z, 1)$.

Puisque (2.45) a une seule solution (lemme 5), $u_1(z, 1) = u(z, 1)$, donc pour $t = 1$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{N}(\lambda, c)}{\lambda - z} \equiv u(z, 1) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dN(\lambda, c)}{\lambda - z}$$

ainsi $\tilde{N}(\lambda, c) = N(\lambda, c)$ ce qui contredit (2.57). Par conséquent (2.51) est vérifiée.

Montrons (2.52). Les perturbations aléatoires des opérateurs A_n et qui sont $B_n - A_n$ vérifient les inégalités (on écrit $A \leq B$ pour signifier que la matrice $B - A$ est positive) :

$$-D \leq \sum_{i=1}^k \tau_i \langle \cdot, q^{(i)} \rangle q^{(i)} \leq D \quad (2.58)$$

où $D = \sum_{i=1}^k |\tau_i| \langle \cdot, q^{(i)} \rangle q^{(i)}$.

Rappelons qu'à partir de la résolution de l'unité E_λ associée à l'opérateur non-négatif D , on peut poser pour tout $l > 0$, $D_1 = \int_0^l \lambda dE_\lambda$, $D_2 = \int_l^\infty \lambda dE_\lambda$ tels que $D = D_1 + D_2$ et on a $\|D_1\| \leq l$ et le nombre de valeurs propres de D_2 est égale à $n - \text{tr} E_l$. En remplaçant dans (2.58), $B_n(k)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$A_n - lI - D_2 \leq A_n - D \leq B_n(k) \leq A_n + D \leq A_n + lI + D_2$$

(les valeurs propres de $D_1 - lI$ sont non-négatives), donc

$$A_n - lI - D_2 \leq B_n(k) \leq A_n + lI + D_2 \quad (2.59)$$

la distribution spectrale des opérateurs $A_n + lI$ est $N(\lambda + lI, A_n)$, où $N(\lambda, A_n)$ est la distribution spectrale de l'opérateur A_n . La distribution spectrale du membre droit de (2.59) ne doit pas dépasser $N(\lambda + lI, A_n) + (n - \text{tr} E_l)/n$, et donc

$$N(\lambda - l, A_n) - [1 - n^{-1} \text{tr} E_l] \leq N(\lambda, B_n(k)) \leq N(\lambda + l, A_n) + [1 - n^{-1} \text{tr} E_l] \quad (2.60)$$

De plus

$$\begin{aligned} \text{tr}D &= \sum_{i=1}^k \langle Dq^{(i)}, q^{(i)} \rangle = \sum_{i=1}^k |\tau_i| \langle q^{(i)}, q^{(i)} \rangle = \int_0^\infty \lambda d(\text{tr}E_\lambda) \geq l \int_l^\infty d(\text{tr}E_\lambda) \\ &= l[n - \text{tr}E_l] \end{aligned}$$

Donc

$$1 - n^{-1}\text{tr}E_l \leq \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k |\tau_i| \langle q^{(i)}, q^{(i)} \rangle$$

Comme τ est borné, on a

$$1 - n^{-1}\text{tr}E_l \leq \frac{cT}{2l} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \langle q^{(i)}, q^{(i)} \rangle$$

D'après la condition **C3**, on déduit que l'espérance de $\langle q^{(i)}, q^{(i)} \rangle$ est plus petite que $[1 + \varepsilon_1(n)]^{-1}$ et son écart type est plus petit que $[2 + \varepsilon_2(n) + \varepsilon_3(n)]^{-1}$. Les v.a $\langle q^{(i)}, q^{(i)} \rangle$ étant indépendantes, par l'inégalité de Tchebychev, on a $P\{k^{-1} \sum_{i=1}^k \langle q^{(i)}, q^{(i)} \rangle > 2\} \leq 3/k$ et par conséquent $P\{1 - n^{-1}\text{tr}E_l \leq cT/l\} \geq 1 - 3/k$. Donc, par (2.60) on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ N(\lambda - l, A_n) - \frac{cT}{l} \leq N(\lambda, B_n(k)) \leq N(\lambda + l, A_n) + \frac{cT}{l} \right\} = 1$$

Par hypothèse, $N(\lambda, A_n) \rightarrow N_0(\lambda)$ quand $n \rightarrow \infty$ et $N_0(-\infty) \leq N_0(\lambda) \leq N_0(+\infty)$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ N_0(-\infty) - \frac{cT}{l} \leq N(\lambda, B_n(k)) \leq N_0(+\infty) + \frac{cT}{l} \right\} = 1$$

d'où, pour $l > 0$ arbitraire, on aura la formule (2.52).

Donc les deux premiers points du 1) du théorème sont démontrés.

Pour le point 2) du théorème qui concerne l'existence et l'unicité de la solution de (2.46) a été déjà démontré. L'équivalence de cette équation et l'équation aux dérivées partielles d'ordre 1 est évidente. Le théorème est donc démontré pour le cas où τ_i sont bornés. Pour le cas quelconque de τ_i arbitraires elle sera traitée dans le paragraphe suivant.

2.5 Cas général

Nous considérons des v.a τ_i indépendantes ayant la même loi de probabilité $\sigma(\tau)$. On considère la v.a τ^T définie par

$$\tau_T = \begin{cases} -T & \text{si } \tau < -T \\ \tau & \text{si } -T < \tau \leq T \\ T & \text{si } T < \tau \end{cases} \quad (2.61)$$

où T est un nombre arbitraire positif. La distribution de probabilité $\sigma^T(\tau)$ de la v.a τ^T et son inverse $\tau^T(\xi) = \inf_{\tau} \{\tau : \sigma^T(\tau) \geq \xi\}$ sont exprimées par $\sigma(\tau)$ et $\tau(\xi) = \inf_{\tau} \{\tau : \sigma(\tau) \geq \xi\}$ comme suit :

$$\sigma^T(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \leq -T \\ \sigma(\tau) & \text{si } -T < \tau \leq T \\ 1 & \text{si } T < \tau \end{cases}, \quad \tau^T(\xi) = \begin{cases} -T & \text{si } 0 < \xi < \sigma(-T) \\ \tau & \text{si } \sigma(-T) < \xi \leq \sigma(T) \\ T & \text{si } \sigma(T) < \xi \end{cases} \quad (2.62)$$

Comme précédemment, soient T_k, Q_k des réalisations des v.a τ_i (par conséquent de τ_i^T) et les vecteurs $q^{(i)}$. De la même manière que la section 2.3, on construit les opérateurs $B_n(i)$ et $B_n^T(i)$. Il est clair que les opérateurs $B_n^T(i)$ sont obtenus à partir des $B_n(i)$ en remplaçant τ_i par τ_i^T dans la formule (2.28). Donc

$$B_n(k) - B_n^T(k) = \sum_{m=1}^k (\tau_m - \tau_m^T) \langle \cdot, q^{(m)} \rangle q^{(m)}$$

le rang de $B_n(i) - B_n^T(i)$ est inférieur au nombre des τ_i tels que $|\tau_i| > T$, i.e les nombres $k \{\sigma(-T, T_k) + 1 - \sigma(T, T_k)\}$, où $\sigma(\tau, T_k)$ est la fonction de distribution empirique associée à la réalisation T_k des v.a τ_i . Les distributions spectrales $N(\lambda, B_n(i))$ et $N(\lambda, B_n^T(i))$ de $B_n(i)$ et $B_n^T(i)$ vérifient l'inégalité :

$$|N(\lambda, B_n(i)) - N(\lambda, B_n^T(i))| \leq \frac{k}{n} \{\sigma(-T, T_k) + 1 - \sigma(T, T_k)\} \quad (2.63)$$

De plus, soit $u(z, t, n, T_k, Q_k)$ et $u^T(z, t, n, T_k, Q_k)$ les fonctions construites à partir de (2.29) pour les opérateurs $B_n(i)$ et $B_n^T(i)$. De la définition et d'après (2.63), l'inégalité suivante a lieu uniformément en z et t (voir [7] p.480)

$$|u(z, t, n, T_k, Q_k) - u^T(z, t, n, T_k, Q_k)| \leq \frac{1}{\pi y} \cdot \frac{k}{n} \{\sigma(-T, T_k) + 1 - \sigma(T, T_k)\} \quad (2.64)$$

Comme les v.a τ_i^T sont bornées, on applique les résultats de la section précédente pour la fonction $u^T(z, t, n, T_k, Q_k)$, en particulier, quand $n \rightarrow \infty$, elle converge en probabilité vers $u^T(z, t)$ qui satisfait l'équation :

$$u^T(z, t) = m_0(z) - c \int_0^t \frac{\tau(\xi) u_z'^T(z, \xi)}{1 + \tau(\xi) u^T(z, \xi)} d\xi \quad (2.65)$$

Par le **théorème de Glivenko**, le membre droit de (2.64) converge quand $n \rightarrow \infty$ presque sûrement vers $(c/\pi y)\{\sigma(-T) + 1 - \sigma(T)\}$. En posant $u^{T_1}(z, t) = \lim_n u(z, t, n, T_k, Q_k)$ pour $T_1 > T$, on a :

$$|u^{T_1}(z, t) - u^T(z, t)| \leq \frac{c}{\pi y} \{\sigma(-T) - \sigma(-T_1) + \sigma(T_1) - \sigma(T)\}$$

Pour $T \rightarrow \infty$ la fonction $u^T(z, t)$ tend vers une certaine fonction $u(z, t)$ uniformément pour $t \in [0, 1]$ et z tel que $\text{Im } z > \delta$, où δ est un nombre positif.

Comme dans la preuve de (2.21), on peut montrer que

$$\left| \frac{\tau^T(\xi) u^{T'}(z, t)}{1 + \tau^T(\xi) u^T(z, t)} \right| \leq |y|^{-1} \quad (y = \text{Im } z)$$

Cette inégalité nous permet d'invertir les signes somme et limite dans la formule (2.65) quand $T \rightarrow \infty$. Comme $u^T(z, t) \rightarrow u(z, t)$ et $u_z^{T'}(z, t) \rightarrow u'_z(z, t)$ quand $T \rightarrow \infty$, en prenant la limite dans (2.65), on trouve que la fonction $u(z, t)$ satisfait l'équation :

$$u(z, t) = m_0(z) - c \int_0^t \frac{\tau(\xi) u'_z(z, \xi)}{1 + \tau(\xi) u(z, \xi)} d\xi \quad (2.66)$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} |u(z, t, n, T_k, Q_k) - u(z, t)| &\leq |u(z, t, n, T_k, Q_k) - u^T(z, t, n, T_k, Q_k)| \\ &\quad + |u^T(z, t, n, T_k, Q_k) - u^T(z, t)| + |u^T(z, t) - u(z, t)| \end{aligned}$$

Par (2.64) le premier terme converge en probabilité vers 0. Pour le deuxième terme, il converge en probabilité vers 0 par la démonstration de la section précédente car les v.a sont bornées. Donc, de ce qui précède, on conclut que lorsque $n \rightarrow \infty$ la fonction $u(z, t, n, T_k, Q_k)$ converge en probabilité vers $u(z, t)$. De (2.65), on a

$$- \lim_{y \rightarrow \infty} y \text{Im } u^T(z, t) = - \lim_{y \rightarrow \infty} y \text{Im } m_0(z) = N_0(+\infty) - N_0(-\infty).$$

Par (2.63), on a aussi

$$- \lim_{y \rightarrow \infty} y \text{Im } u(z, t) = N_0(+\infty) - N_0(-\infty) > 0.$$

Par conséquent, $\text{Im } u(z, t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et z tel que $\text{Im } z > 0$. D'où $u(z, t)$ vérifie (2.46).

On a donc quand $n \rightarrow \infty$, la suite des fonctions $u(z, t, n, T_k, Q_k)$ converge en probabilité vers l'unique

solution de l'équation (2.66) qui satisfait (2.46). Donc tout les résultats du paragraphe précédent sont généralisés pour le cas où la v.a τ est non bornée. Donc, on déduit que lorsue $n \rightarrow \infty$ la quantité $N(\lambda_1, B_n(k)) - N(\lambda_0, B_n(k))$ tend en probabilité vers

$$\lim_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \text{Im } u(\xi + i\eta, 1) d\xi$$

De(2.62) et les résultats de la section précédentes, on aura pour $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{N_0(-\infty) - \varepsilon \leq N(\lambda, B_n(k)) \leq N_0(+\infty) + \varepsilon\} = 1$$

Le théorème est donc démontré.

2.6 Ensemble de Wigner généralisé

Dans ce paragraphe, nous étudions l'article [7] sur le comportement asymptotique de la distribution spectrale de matrices aléatoires de grande dimension, appelé ensemble de Wigner. La loi limite est appelée loi du demi-cercle. L'étude en fait porte sur un cadre plus général et nous avons le théorème suivant :

Théorème 3 [2]. Soit $V_n = (v_{ik})$ des matrices symétriques réelles de dimension n d'entrées v_{ik} des v.a indépendantes de fonctions de répartition F_{ik} vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) F_{ik}(-x+0) = 1 - F_{ik}(x) \\ b) \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_{ik}(x) = v^2 > 0 \\ c) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2l} dF_{ik}(x) \leq B_l < \infty \\ \quad (l = 1, 2, \dots) \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Alors la distribution spectrale $N_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\lambda_{i,n} < \lambda\}}$ de la matrice $V_n n^{-1/2}$ converge, pour tout λ , en probabilité quand $n \rightarrow \infty$ vers une fonction absolument continue $N(\lambda)$ de densité

$$\frac{dN(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{2\pi v^2} \left(\sqrt{4v^2 - \lambda^2} \right)_+$$

Cette loi est appelée loi du demi-cercle.

La démonstration de ce théorème est reportée au chapitre 4.

Soit H_n une matrice aléatoire symétrique d'ordre n de la forme

$$H_n = h_n + \frac{V_n}{\sqrt{n}} \quad (2.68)$$

où h_n est une matrice diagonale d'éléments h_i ($i = 1, 2, \dots, n$) des v.a r identiquement distribuées de fonction de distribution σ , V_n est une matrice aléatoire d'éléments v_{ik} v.a réelles indépendantes pour $i \leq k$ et vérifiant des conditions du théorème ci dessous. Le but est l'étude du comportement asymptotique de la distribution spectrale $N(\lambda, H_n)$ des matrices H_n et leur convergence en probabilité vers une limite non aléatoire $N(\lambda)$. Il s'agit surtout de trouver des conditions qui assurent l'existence d'une fonction déterministe non-décroissante $N(\lambda)$ telle que en tout point de continuité on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|N(\lambda, H_n) - N(\lambda)| > \varepsilon\} = 0 \quad (2.69)$$

et identifier cette fonction limite. La distribution spectrale $N(\lambda, h_n)$ de la matrice diagonale h_n est par définition,

$$N(\lambda, h_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{h_i < \lambda\}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(\lambda - h_i) \quad (2.70)$$

Les v.a h_i étant indépendantes, par la loi des grands nombres on a pour tout λ et $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|N(\lambda, h_n) - \sigma(\lambda)| > \varepsilon\} = 0 \quad (2.71)$$

Donc, la distribution spectrale $N(\lambda, h_n)$ en (2.68) vérifie la propriété (2.69).

On impose les conditions suivantes sur les v.a v_{ik} , de la matrice perturbée V_n indépendantes pour $i \leq k$

- a) $E(v_{ik}) = 0$, $i, k = 1, 2, \dots, n$;
- b) $E(v_{ik}^2) = v^2$, $i, k = 1, 2, \dots, n$;
- c) pour $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{|x| > \tau \sqrt{k}} x^2 dF_{ik}(x) = 0 \quad (2.72)$$

où F_{ik} est la fonction de répartition des v.a v_{ik} .

La condition **c)** est la condition de Lindeberg dans le théorème central limite. Une condition suffisante est que les v.a v_{ik} ont un moment d'ordre $2 + \delta$, $\delta > 0$, borné uniformément en i et k , i.e ,

$$E|v_{ik}|^{2+\delta} \leq C$$

Dans le cas où les v.a v_{ik} ont la même loi, **c)** sera une conséquence de **b)**.

Le problème est de montrer l'existence de la limite $N(\lambda)$ définie par (2.69) en utilisant la transformée de Stieltjes

$$m(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dN(\lambda)}{\lambda - z} \quad (\text{Im } z \neq 0)$$

et par inversion, on obtient $N(\cdot)$. On a le théorème suivant.

Théorème 4 [32]. Soit H_n une matrice aléatoire de la forme (2.68) et qui satisfait la condition (2.72).

Alors

1) La suite des distributions spectrales $N(\lambda, H_n)$ des matrices H_n converge en probabilité, lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une fonction non-décroissante déterministe $N(\lambda)$ en tout point de continuité et

$$N(\pm\infty) = \sigma(\pm\infty)$$

où $\sigma(h)$ est la distribution spectrale des v.a. h_i de la matrice h_n définie en (2.68)

2) La transformée de Stieltjes $m(z)$ de $N(\lambda)$ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$m(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z - v^2 m(z)} \quad (2.73)$$

dans la classe des fonctions analytiques en z pour $\text{Im } z \neq 0$ et tel que $\text{Im } m \times \text{Im } z > 0$ pour $\text{Im } z \neq 0$. La solution de cette équation existe dans cette classe et est unique et peut être trouvée par la méthode des approximations successives.

Si $h_n = hI$, où h est un nombre déterministe, alors 1) et 2) sont vérifiées dès que les v_{ik} satisfont les conditions a), b) et c). Comme la distribution limite de h_n est $\sigma(\lambda)$ alors (2.73) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$m(z) = m_0(z + v^2 m(z)) \quad (2.74)$$

où

$$m_0(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}$$

est la transformée de Stieltjes de la distribution spectrale limite de la matrice h_n . La transformée de Stieltjes $m(z)$ de l'opérateur "perturbé" H_n est obtenue de $m_0(z)$ qui correspond à h_n par un shift de ses argument par la quantité $v^2 m(z)$.

Avant de donner la preuve du théorème, on donne quelques exemples.

2.6.1 Exemples

Exemple 1. Si $h_n \equiv 0$ alors $\sigma(\lambda) = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\lambda)$ et l'équation (2.73) devient

$$m(z) = -\frac{1}{z + v^2 m(z)}$$

On résoud l'équation en $m(z)$ on obtient pour $\text{Im } z > 0$ et $\text{Im } m > 0$

$$m(z) = \frac{-z + \sqrt{z^2 - 4v^2}}{2v^2} \quad (2.75)$$

Par la formule d'inversion [25], on aura :

$$\frac{dN(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi v^2} \sqrt{4v^2 - \lambda^2}, & \lambda^2 \leq 4v^2 \\ 0 & , \lambda^2 \geq 4v^2 \end{cases} \quad (2.76)$$

qui porte le nom de la loi du demi-cercle. Remarquons que cette loi a été trouvée (voir [2] p.75-78) pour des v.a. v_{ik} indépendantes pour $i \leq k$ et vérifiant :

- a) $E v_{ik}^{2l+1} = 0$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, $l = 0, 1, \dots$;
- b) $E v_{ik}^2 = v^2$, $i, k = 1, 2, \dots, n$;
- c) uniformément en i et k

$$E v_{ik}^{2l} \leq C_l, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.77)$$

Donc, comme corollaire du théorème est que la loi du demi-cercle (2.76) est obtenue pour la matrice aléatoire symétrique V_n/\sqrt{n} d'éléments indépendants pour $i \leq k$ sous les conditions (2.72) car (2.72) implique les conditions (2.77).

Exemple2. Les v.a h_i ont la même fonction de répartition $\sigma(\lambda)$ de la forme :

$$\frac{d\sigma(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a^2} \sqrt{4a^2 - \lambda^2}, & \lambda^2 \leq 4a^2 \\ 0 & , \lambda^2 \geq 4a^2 \end{cases} \quad (2.78)$$

Dans ce cas $m_0(z)$ a la forme (2.75) avec a^2 au lieu de v^2 . En substituant $z + v^2 m$ à z conformément à (2.74) dans (2.75), on a la densité $dN(\lambda)/d\lambda$ aussi sous la forme (2.76) avec v^2 remplacé par $v^2 + a^2$.

Pour démontrer le théorème 4, nous avons besoin du lemme suivant que nous admettons pour le moment.

Lemme 6 .Supposons que $x_k \in E_n$ de la forme $n^{-1/2} \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0\}$, $k \leq n$ où les v.a ξ_i sont indépendantes vérifiant les conditions (2.72). Soit R un opérateur dans E_n de matrice (R_{ik}) . Alors

$$E \left| \langle R x_k, x_k \rangle - \frac{v^2}{k} \sum_{i=1}^k R_{ii} \right| \leq \|R\| \cdot \varepsilon(k)$$

où $\|R\|$ est la norme de R , $\varepsilon(k)$ ne dépend pas de R et vérifiant $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$.

Preuve: [Preuve du théorème 4]

La démonstration du théorème suit les mêmes étapes que celles du théorème 1.

On considère une suite de matrices $H_n(k)$ de la forme (2.81) ci dessous telles que $H_n(0) = 0$, $H_n(n) = H_n$ et une fonction $u(t, z, H_n)$, qui est pour tout z une ligne polygonale en $t \in [0, 1]$ de sommets d'abscisses $t = k/n$ et $t = n^{-1}trR_z(k)$, où $R_z(k) = (H_n(k) - zI)^{-1}$. On montre ci dessous que $u(t, z, H_n)$ converge quand $n \rightarrow \infty$ vers une limite satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre en z et t (voir (2.88)). Cette équation se résoud pour trouver $u(t, z)$ implicitement en tenant compte que $u(1, z)$ n'est autre que la transformée de Stieltjes de la fonction spectrale de H_n .

A cet effet nous posons

$$H_n = \tilde{H}_n + D_n$$

où D_n une matrice diagonale d'éléments v_{ii}/\sqrt{n} sur la diagonale. Alors

$$R_n - \tilde{R}_n = -R_n D_n \tilde{R}_n \quad (2.79)$$

avec $R_n = (H_n - zI)^{-1}$ et $\tilde{R}_n = (\tilde{H}_n - zI)^{-1}$, $\text{Im } z \neq 0$. De (2.79) et (2.72) il suit par la loi forte des grands nombres que, avec une probabilité égale à 1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}tr(R_n - \tilde{R}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}tr(-R_n D_n \tilde{R}_n) \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{v_{ii}}{\sqrt{n}} = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent les fonctions de distributions spectrales limites de H_n et \tilde{H}_n sont identiques (en utilisant les formules $m_A(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}tr(R_A(z))$ [4].et $tr(A) - tr(B) = tr(A - B)$). Ainsi on peut considérer seulement des matrices V_n avec des zéros sur la diagonale ($H_n = h_n + \frac{V_n}{\sqrt{n}}$ et $H_n = \tilde{H}_n + D_n$ à la limite, les éléments diagonaux v_{ii}/\sqrt{n} de D_n sont nuls et donc prendre v_{ii} nuls)

On suppose que les v.a h_i sont bornées

$$|h_i| \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.80)$$

Soit E_n un espace de dimension n muni d'une base orthonormale e_1, e_2, \dots, e_n . Alors les matrices définies en (2.68) correspondent à des opérateurs linéaires auto-adjoints dans E_n .

Soit $L(a, b)$, ($a, b \in E_n$) un opérateur dans E_n définis par

$$L(a, b)x = \langle x, a \rangle b$$

où $\langle x, a \rangle$ est le produit scalaire définis dans E_n . La matrice de cet opérateur est $b_i a_k$.

On considère maintenant des réalisations de la matrice aléatoire (2.68), on permute simultanément les lignes et les colonnes de telle façon que h_i seront classées par ordre croissant: $h_1 \leq h_2 \leq \dots$. On introduit une suite d'opérateurs auto-adjoints $H_n(k)$ en posant $H_n(0) = 0$ et pour $k = 1, 2, \dots, n$

$$H_n(k) = H_n(k-1) + L(v_{k-1}, e_k) + L(e_k, v_{k-1}) + h_k L(e_k, e_k) \quad (2.81)$$

et

$$v_{k-1} = n^{-1/2} \{v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{k-1,k}, 0, \dots, 0\}$$

La matrice $H_n(k)$ est obtenue à partir de H_n en complétant par des zéros les éléments dont au moins l'un des indices dépassent k .

Soit $R_z(k)$ la résolvante de l'opérateur $H_n(k)$. Si P_k est la projection orthogonale sur les k premiers vecteurs unité, i.e, $P_k = \sum_{i=1}^k L(e_i, e_i)$, on a

$$R_z(k) = P_k R_z(k) P_k - \frac{1}{z} Q_k \quad (2.82)$$

où $Q_k = I - P_k$ est la projection sur les derniers $n - k$ vecteurs unité.

Pour chaque H_n , on associe la fonction $u(z, t, H_n)$ définie pour z et $t \in [0, 1]$ par l'équation

$$u(z, t, H_n) = n^{-1} \text{tr} R_z(k) + \text{tr} \{R_z(k+1) - R_z(k)\} \left(t - \frac{k}{n} \right) \quad (2.83)$$

pour $t \in [k/n, (k+1)/n]$, $k = 0, \dots, n-1$.

Noton que $u(z, 0, H_n) = -z^{-1}$, et $u(z, 1, H_n)$ est la transformée de Stieltjes de la distribution spectrale de H_n :

$$u(z, 1, H_n) = n^{-1} \text{tr} R_z(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dN(\lambda, H_n)}{\lambda - z} \quad (2.84)$$

De plus, $u(z, t, H_n)$ est continue en z et t pour $\text{Im } z > 0$, $t \in [0, 1]$ et est analytique en z , linéaire par morceaux en t . On utilise le lemme 3 pour la différence des traces des résolvantes R_z et \tilde{R}_z des opérateurs aut-adjoints A et \tilde{A} dans E_n

$$\text{tr} \tilde{R}_z - \text{tr} R_z = -\frac{\partial}{\partial z} \ln \det \left[I + R_z (\tilde{A} - A) \right]$$

On remplace \tilde{A} et A par $H_n(k)$ et $H_n(k-1)$ et en tenant compte de (2.81) et (2.83), on aura [7]

$$\begin{aligned}
u\left(z, \frac{k}{n}, H_n\right) - u\left(z, \frac{k-1}{n}, H_n\right) &= n^{-1} \operatorname{tr} R_z(k) + \operatorname{tr} \{R_z(k+1) - R_z(k)\} \left(\frac{k}{n} - \frac{k}{n}\right) - \\
&\quad - (n^{-1} \operatorname{tr} R_z(k-1) + \operatorname{tr} \{R_z(k) - R_z(k-1)\}) \left(\frac{k-1}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \\
&= n^{-1} (\operatorname{tr} R_z(k) - \operatorname{tr} R_z(k-1)) \\
&= -\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial z} \ln \Delta_n(k, z)
\end{aligned} \tag{2.85}$$

où

$$\Delta_n(k, z) = 1 - \frac{h_n}{z} + \frac{r_n}{z}, \quad r_n = \frac{1}{n} \sum_{i,m=1}^k R_{im}(k-1) v_{i,k-1} v_{m,k-1}$$

ou encore [7]

$$\begin{aligned}
u\left(z, \frac{k}{n}, H_n\right) - u\left(z, \frac{k-1}{n}, H_n\right) &= -\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left\{ 1 - \frac{h_n}{z} + \frac{v^2}{z} n^{-1} \operatorname{tr} R_z(k-1) + \frac{1}{z} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{n} \delta_n(k, z)
\end{aligned} \tag{2.86}$$

où $E[\delta_n(k, z)] \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et $\operatorname{Im} z \geq y_0 > 0$. Cette représentation peut être prouvée de la même façon que lemme 3 section 2.2.

En utilisant (2.86) et la démonstration du lemme 4, on peut montrer que pour

$$\varphi_n = \sup_{\substack{t \in [0,1] \\ z \in G}} \left| u(z, t, H_n) + \frac{1}{z} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial z} \ln \left\{ 1 - \frac{h(\tau)}{z} + \frac{v^2}{z} \left[u(\tau, z, H_n) + \frac{1-\tau}{z} \right] \right\} d\tau \right| \tag{2.87}$$

on a $\lim_{n \rightarrow \infty} E\varphi_n = 0$.

Soit G un ensemble borné dans le plan complexe ne contenant pas l'axe réel et h la fonction inverse de σ qui est la fonction de répartition des v.a h_i et qui vérifie (Lemme 3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t |h(t) - h_n(t)| dt = 0, \quad p.s$$

avec $h_n(t) = h_{i+1}$ pour $t \in [i/n, (i+1)/n]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, et les nombres $h_1 \leq h_2 \leq \dots$ forment une réalisation des v.a h_i indexées dans l'ordre croissant.

De (2.87) et du fait que les ensembles $\{u(t, z, H_n)\}$ et $\{\frac{\partial}{\partial z} u(t, z, H_n)\}$ sont compacts, il suit que la famille $\{u(t, z, H_n)\}$ contient une sous-suite convergente uniformément en $z \in G$ et $t \in [0, 1]$ quand $n \rightarrow \infty$ vers une fonction $u(t, z)$ qui satisfait l'équation :

$$u(t, z) = -\frac{1}{z} - \int_0^t \frac{\partial}{\partial z} \ln \omega(\tau, z) d\tau \tag{2.88}$$

$$\omega(t, z) = 1 - \frac{h(t)}{z} + \frac{v^2}{z} \left[u(t, z) + \frac{1-t}{z} \right]$$

ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \ln \omega = 0, \quad u|_{t=0} = -\frac{1}{z} \quad (2.89)$$

Dans les équations aux dérivées partielles, on montre Par la **méthode de Haar [26]** que cette équation admet une solution unique dans la classe des fonctions continues en (t, z) , $t \in [0, 1]$ et $\text{Im } z > 0$ et analytique en z ($\text{Im } z > 0$) pour t fixé. De la même manière que les paragraphes précédents, on montre la première assertion du théorème pour h_i bornées. Montrons le cas où les h_i sont quelconques. On introduit la fonction $g(t, z)$:

$$g(t, z) = 1 + \frac{v^2}{z} \left[u(t, z) + \frac{1-t}{z} \right] \quad (2.90)$$

On peut vérifier que la solution générale de l'équation (2.88) est obtenue en prenant

$$g(t, z) = \frac{v^2}{z} F \left(z + v^2 \int_0^t \frac{d\tau}{h(\tau) - z g(\tau, z)} \right) \quad (2.91)$$

où $F(z)$ est une fonction arbitraire. De même comme pour la solution du problème de Cauchy (2.88)-(2.89), on obtient par le théorème d'unicité mentioné dessus $g|_{t=0} = 1$ en prenant $F(z) = v^{-2}z$. Puisque, d'après (2.84) et (2.90), la transformé de Stieltjes $m(z)$ de la fonction de distribution spectrale limite $N(\lambda)$ est liée à $g(z, 1)$ par l'équation

$$g(1, z) = 1 + \frac{v^2}{z} m(z)$$

il suit d'après (2.91) avec $F = v^{-2}z$ que

$$\begin{aligned} g(1, z) &= (v^2/z) \cdot v^{-2} \left(z + v^2 \int_0^1 \frac{d\tau}{h(\tau) - z - v^2 m(z)} \right) \\ &= 1 + (v^2/z) \int_0^1 \frac{d\tau}{h(\tau) - z - v^2 m(z)} \end{aligned}$$

Donc

$$m(z) = \int_0^1 \frac{d\tau}{h(\tau) - z - v^2 m(z)}$$

Cette équation , par la définition de la fonction h , peut s'écrire sous la forme (2.73), i.e

$$m(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z - v^2 m(z)} \quad (2.92)$$

l'équation (2.92) se résoud en général par la méthode des approximations successives. Pour cela , on

introduit une distance dans l'ensemble \mathfrak{M} des fonctions analytiques dans le demi-plan positif : $\text{Im } z > 0$ par

$$\varrho(m_1, m_2) = \sup_{y \geq y_0 > 0} |m_1(iy) - m_2(iy)|$$

L'ensemble \mathfrak{M} est un espace métrique complet et pour $y_0 > v$, le membre droit de l'équation (2.92) représente un opérateur de contraction dans \mathfrak{M} et c'est encore vrai même sans la condition (2.80) (pour le calcul de la norme de l'opérateur, on utilise seulement l'inégalité $\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) < 1$)

Cette remarque nous permet de montrer le théorème dans un cadre plus général, (i.e, sans la condition (2.80)), les arguments utilisés sont pratiquement les mêmes. ■

Preuve: [Preuve du lemme 6]

Posant r la quantité

$$r = \langle Rx_k, x_k \rangle = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^k R_{ij} \xi_i \xi_j$$

On a

$$E(r) = \frac{v^2}{k} \sum_{i=1}^k R_{ii}$$

On introduit maintenant les variables η_i et ζ_i indépendantes définies par

$$\eta_i = \begin{cases} \xi_i, & |\xi_i| \leq a \\ 0, & |\xi_i| > a \end{cases} \quad \zeta_i = \xi_i - \eta_i$$

En écrivant r sous la forme

$$r = r_1 + r_2 + r_3$$

où

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_{ii} \zeta_i^2, \quad r_2 = \frac{1}{k} \sum_{i \neq j} R_{ij} \xi_i \xi_j \\ r_3 &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_{ii} \eta_i^2 \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$\begin{aligned} E \left| \langle Rx_k, x_k \rangle - \frac{v^2}{n} \sum_{i=1}^k R_{ii} \right| &= E |r - E(r)| \\ &= E |r_1 + r_2 + r_3 - E(r)| \\ &\leq E |r_1| + \sqrt{E r_2^2} + \sqrt{E |r_3 - E(r)|^2} \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
E\eta_i^4 &= E\xi_i^4 \leq a^2v^2 \\
\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E\zeta_i^2 &= \varphi(k, a), \quad R_{ii} \leq \|R\| \\
\sum_{i=1}^k |R_{ij}|^2 &\leq k \|R\|^2, \quad \varphi(k, a) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \int_{|x|>a} x^2 dF_i(x)
\end{aligned}$$

On trouve que

$$\begin{aligned}
E|r - E(r)| &\leq \|R\| \varphi(k, a) + \frac{2\sqrt{k}\|R\|}{k} E\xi_i^2 + \left[E \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_{ii}\eta_i^2 - \frac{v^2}{k} \sum_{i=1}^k R_{ii} \right|^2 \right]^{1/2} \\
&\leq \|R\| \left\{ \varphi(k, a) + \frac{2v^2}{\sqrt{k}} + \left[\frac{v^4}{k} + 2\frac{v^2}{k} \varphi(k, a) + \varphi^2(k, a) + \frac{v^2 a^2}{k} \right]^{1/2} \right\}
\end{aligned}$$

Posant $a = \tau\sqrt{k}$ dans cette inégalité, on a le résultat du lemme en utilisant (2.72). ■

Chapitre 3

Equation de Shrödinger à potentiel aléatoire

Dans ce chapitre, nous étudions les articles de Pastur [23]-[32]. Dans la première partie, on étudie la convergence de la distribution spectrale des valeurs propres de l'équation de Shrödinger à potentiel aléatoire avec conditions aux limites déterministes. Nous donnerons une forme asymptotique de la distribution spectrale associée à l'équation de Shrödinger m -dimensionnelle admettant un potentiel un champ aléatoire unidimensionnel et de fonctions de corrélations décroissantes vers zéro à l'infini avec une certaine vitesse. Dans la deuxième partie, on donne une méthode pour calculer la fonction de distribution spectrale de l'équation de Shrödinger avec un potentiel est processus de Markov ergodique.

3.1 Fonctions d'éléments propres de l'équation de Shrödinger à potentiel aléatoire

On considère l'équation de Shrödinger suivante [23] :

$$-\frac{1}{2}\Delta\psi + q(x)\psi = \lambda\psi \quad (3.1)$$

où Δ est le Laplacien , $q(x)$ est le potentiel et V est un cube de \mathbb{R}^m avec les conditions au bord S de V :

$$\psi|_S = 0 \quad (3.2)$$

Supposons que le potentiel $q(x)$ est un champ aléatoire pour $x \in \mathbb{R}^m$. Pour chaque réalisation du

champ on définit la distribution spectrale :

$$N_V(\lambda) = \frac{1}{|V|} \sum \mathbf{1}_{\{\lambda_i < \lambda\}} \quad (3.3)$$

où λ_i ($i = 1, 2, \dots$) sont les valeurs propres du problème (3.1)-(3.2) et $|V|$ est le volume de V . En physique, on utilise les formules :

$$A_V(\lambda, k) = \frac{1}{|V|} \sum_{\lambda_i < \lambda} \left| \int_V \psi_i(x) e^{ikx} dx \right|^2 \quad (3.4)$$

et

$$S_V^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) = \frac{1}{|V|} \sum_{\substack{\lambda_i < \lambda \\ \mu_j < \mu}} p_{ij}^\alpha p_{ji}^\beta \quad (3.5)$$

où k est un vecteur dans \mathbb{R}^m , $\psi_i(x)$ est la fonction propre du problème (3.1)-(3.2) correspondante à la valeur propre λ_i et $p_{ij}^\alpha = \int_V \overline{\psi_j(x)} \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x^\alpha} dx$ et x^α est la α -ième composante du vecteur x . Le problème est de montrer la convergence presque sûre vers une limite non -aléatoire des quantités (3.3)-(3.5).

On suppose que le potentiel $q(x)$ en (3.1) est un champ aléatoire à valeurs réelles mesurable homogène métriquement transitif [23] de lois de dimensions finies :

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, q_1, q_2, \dots, q_n) &= \\ &= P(q(x_1) \leq q_1, q(x_2) \leq q_2, \dots, q(x_n) \leq q_n) \end{aligned}$$

Sous les conditions de compatibilité, les lois de dimension finie engendrent une mesure de probabilité sur l'espace des trajectoires Ω . Le champ $q(x)$ est dit homogène [23], si toute ses lois de dimension finie sont invariantes par les translations $x_i \rightarrow x_i + a$, ($i = 1, 2, \dots, n$), $a \in \mathbb{R}^m$. L'opérateur de translation T_a sur l'espace de réalisation Ω , donné par

$$q(x, T_a \omega) = q(x + a, \omega)$$

préserve P . Si cet opérateur a des événements T -invariants de mesures 0 ou 1, alors le champ homogène invariant est dit métriquement transitif [23]. Le théorème ergodique s'applique dans ce cas, et on a pour tout champ aléatoire $f(x, \omega)$ de la forme $f(x, \omega) = f(T_x \omega)$, où $f(\omega)$ est une fonction mesurable et P -intégrable, la relation suivante (**Birkhoff-Khintchine ergodic Theorem [Gihmann and Skorohod]**) [23]

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \int_V f(x, \omega) dx = E_P(f) \quad P - \text{preque partout} \quad (3.6)$$

où $\lim_{V \rightarrow \infty}$ signifie la limite à travers une suite de cubes ayant un centre commun fixe, et recouvrant \mathbb{R}^m . Pour éviter les difficultés de l'interprétation de (3.1), on supposera que presque toutes les réalisations de

q sont continuellement différentiables au moins pour $m > 1$. Nous imposons une condition principale sur le potentiel $q(x)$: presque toutes les réalisations de $q(x)$ sont des fonctions bornées. Les résultats des théorèmes ci-dessous sont valables même si on remplace cette condition par une condition plus faible [23], pour $t > 0$

$$E \left[e^{-tq(0)} \right] < \infty \quad (3.7)$$

Dans la preuve de la convergence des distributions spectrales, on remplace les quantités (3.3) et (3.5) par leurs transformées de Laplace et qui s'expriment par la fonction de Green $K_V(t, x, y)$ [26] vérifiant l'équation parabolique

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_V}{\partial t} &= \frac{1}{2} \Delta K_V - q(x) K_V \\ K|_{Vt=0} &= \delta(x - y) \\ K|_{VS} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

On a aussi pour le noyau $K_V(t, x, y)$ la représentation de Feynman-Kac utilisant l'intégrale de Wiener [23], [30]. Cette représentation contient explicitement le potentiel $q(x)$ et après calcul dans les cas (3.3) et (3.4) leurs transformations se réduisent à cette représentation de Feynman-Kac. Enfin la preuve de la convergence des distributions spectrales sera complétée en appliquant le théorème ergodique (3.6).

Définition 5 . Une fonction $F(\lambda)$, $\lambda \geq \lambda_0 > -\infty$ est une B-fonction si:

- a) elle est à variation bornée sur un intervalle fini;
- b) pour un λ suffisamment grand on a: $\text{Var}_{\lambda_0 \leq \mu \leq \lambda} F(\mu) \leq C\lambda^p$.

On peut vérifier que pour telles fonctions la transformée de Laplace $\tilde{F}(t) = \int_{\lambda_0}^{\infty} e^{-\lambda t} dF(\lambda)$ existe pour tout $t > 0$ [31]

Considérons maintenant une famille de fonctions $F_n(\lambda, \omega)$ avec $\omega \in \Omega$ dont les éléments sont des B-fonctions uniformément en n et ω et on associe sa transformée de Laplace $\tilde{F}_n(t, \omega)$.

Lemme 7 [27]. Supposons que pour n et $t > 0$ fixés, les transformées de Laplace $\tilde{F}_n(t, \omega)$, comme fonction de ω , sont mesurables et convergent p.s. vers une limite définie et non aléatoire $\tilde{F}(t)$. Alors

1. pour tout n fixé et λ , $F_n(\lambda, \omega)$ est mesurable en ω .
2. Il existe une B-fonction non-aléatoire $F(\lambda)$ telle que quand $n \rightarrow \infty$, $F_n(\lambda, \omega)$ converge p.s vers $F(\lambda)$ en tout point de continuité λ de cette fonction.
- 3.

$$\tilde{F}(t) = \int_{\lambda_0}^{\infty} e^{-\lambda t} dF(\lambda)$$

Théorème 6 [32]. *Supposons que le potentiel $q(x)$ est un champs aléatoire homogène métriquement transitif à réalisations bornées et continuellement différentiables. Alors il existe une fonction non-aléatoire non décroissante N telle que en tout point de continuité*

$$\lim_{V \rightarrow \infty} N_V(\lambda) = N(\lambda) \text{ p.s.}$$

Preuve: Puisque $q(x)$ est métriquement transitif, la quantité $q_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^m} q(x)$ est un évènement invariant, donc p.s. constant ainsi il est non aléatoire. Par translation de λ si nécessaire on peut donc prendre $q_0 \equiv 0$ (en effet $q(x)\psi = \frac{1}{2}\Delta\psi + \lambda\psi$.et $\inf_x \frac{1}{2}\Delta\psi + \lambda\psi > q_0 \inf_x \psi \geq 0$ avec λ valeur propre de Δ on a $q_0 = 0$). On peut supposer donc que toutes les réalisations du potentiel sont positives. On a , $\lambda_i > \mu_i$, où μ_i est la ième valeur propre du problème (3.1)-(3.2) avec $q \equiv 0$.

On obtient donc de la distribution spectrale du Laplacien $N_0(\lambda) = C\lambda^{m/2}$:

$$N_V(\lambda) \leq C\lambda^{m/2} \tag{3.9}$$

La monotonie de $N_V(\lambda)$ et l'inégalité (3.9) donnent que N_V est une B-fonction. Par le lemme7, pour montrer le théorème,il suffit de vérifier que la fonction [Feller 1966]

$$\tilde{N}_V(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dN_V(\lambda)$$

pour chaque $t > 0$ et quand $V \rightarrow \infty$, tend p.s. vers une limite non-aléatoire

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \tilde{N}_V(t) = \tilde{N}(t) \tag{3.10}$$

Par [23] (p.100)

$$\tilde{N}_V(t) = \frac{1}{|V|} \sum_{i=1}^\infty e^{-\lambda_i t} = \frac{1}{|V|} \int_V K_V(t, x, x) dx \tag{3.11}$$

où $K_V(t, x, x)$ est la fonction de Green (3.8). Par la représentation de Feynman-Kac suivante [24], [30]

$$\begin{aligned} K_V(t, x, y) &= k(t, x - y) W \left\{ \exp \left(- \int_0^t q(x(s) + x) ds \right) \cdot \chi_{V,t} [x(\cdot) + s] | x(t) = y - x \right\} \\ &= k(t, x - y) \int_C \exp \left(- \int_0^t q(x(s) + x) ds \right) \cdot \chi_{V,t} [x(\cdot) + s] dW(x | x(t) = y - x) \end{aligned} \tag{3.12}$$

où C est l'espace des trajectoires et $W \{...|x(\cdot) = x\}$ représente la mesure de Wiener conditionnelle et

telle que $x(0) = 0$, $x(t) = x$ et

$$k(t, x) = (2\pi t)^{-m/2} \exp\left[-\frac{x^2}{2t}\right] \text{ et } \chi_{V,t}[x(s)] = \begin{cases} 1 & \text{si } x(s) \in V \text{ pour tout } s \in [0, t] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En substituant (3.12) en (3.11), nous obtenons

$$\tilde{N}_V(t) = (2\pi t)^{-m/2} \frac{1}{|V|} \int_V dx W \left\{ \exp\left(-\int_0^t q(x(s) + x) ds\right) \cdot \chi_{V,t}[x(\cdot) + x] |x(t) = 0 \right\} \quad (3.13)$$

On considère la fonction

$$R(x, \omega) = W \left\{ \exp\left(-\int_0^t q(x(s) + x, \omega) ds\right) |x(t) = 0 \right\}$$

On voit bien que $R(x, \omega)$ est le résultat en appliquant l'opérateur de translation T_x à la fonction

$$R(x) = W \left\{ \exp\left(-\int_0^t q(x(s), \omega) ds\right) |x(t) = 0 \right\}$$

qui est un champ métriquement transitif. D'où en (3.13), s'il n'y avait pas la fonctionnelle $\chi_{V,t}[x(s) + s]$ sous le signe intégrale $W \{...|x(t) = x\}$, la convergence p.s. vers une limite quand $V \rightarrow \infty$ découle par le théorème ergodique pour le champ aléatoire (3.6). La preuve du théorème découle en montrant que p.s. [23] (p.100)

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \int_V dx W \left\{ \exp\left(-\int_0^t q(x(s) + x) ds\right) \cdot (1 - \chi_{V,t}[x(\cdot) + x]) |x(t) = 0 \right\} = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} \tilde{N}_V(t) &= (2\pi t)^{-m/2} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \int_V dx W \left(\exp\left(-\int_0^t q(x(s) + x) ds\right) |x(t) = 0 \right) = (2\pi t)^{-m/2} E(R(0)) \\ &= (2\pi t)^{-m/2} W \left\{ E \left\{ \exp\left(-\int_0^t q(x(s)) ds\right) \right\} |x(t) = 0 \right\} \text{ p.s} \end{aligned}$$

Donc les transformées de Laplace $\tilde{N}_V(t)$ converge vers une fonction qu'on notera $\tilde{N}(t)$ qui est aussi une transformée de Laplace et par inversion on en déduit l'existence de $N(\lambda)$ du théorème. ■

Remarque 7 . On note par H_V l'opérateur correspondant à (3.1)-(3.2) ($H_V = -\Delta + q$) et $E_V(\lambda, x, y)$ est le noyau de la résolution de l'unité correspondante. Puisque $N_V(\lambda) = |V|^{-1} \text{tr} E_V(\lambda)$ ([23] p-61)

le théorème précédent peut s'écrire

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \text{tr} E_V(\lambda) = N(\lambda) = E(E_V(\lambda, 0, 0)) \text{ p.s.}$$

On a aussi ([23] p 61, on a $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) N_V(d\lambda) = \frac{1}{|V|} \text{tr}(f(H_V)) = \frac{1}{|V|} \int_V f(H_V)(x, x) dx$ ($f \equiv \exp$))

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} \tilde{N}_V(t) &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \text{tr} \exp(-tH_V) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \int_V K_V(t, x, x) = \tilde{N}(t) \text{ p.s.} \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} E(E_V(d\lambda, 0, 0)) \end{aligned}$$

Corollaire [23]. On suppose que la fonction f est continue sur \mathbb{R}^+ et satisfait à la condition

$$\int_0^\infty |f(\lambda)| \lambda^{\frac{m-1}{2}} d\lambda < \infty \quad (3.14)$$

alors $\frac{1}{|V|} \text{tr} f(H_V)$ convergence vers une limite non-aléatoire: $\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \text{tr} f(H_V) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \sum_{i=1}^\infty f(\lambda_i) = E(f(\lambda)(0, 0))$

Preuve: De la relation $\frac{1}{|V|} \text{tr} f(H_V) = \frac{1}{|V|} \sum_{i=1}^\infty f(\lambda_i) = \int_0^\infty f(\lambda) dN_V(\lambda)$. Par le théorème précédent, pour presque tout $\omega \in \Omega$ (autrement dit, pour presque toutes les réalisations du potentiel) $N_V(\lambda) \rightarrow N(\lambda)$ quand $V \rightarrow \infty$ en tout point de continuité de $N(\lambda)$. D'où, on peut seulement justifier pour presque tout ω le passage à la limite sous signe intégrale tout simplement en utilisant et le **théorème de Helly**. ■

Pour l'étude des deux autres quantités $A_V(\lambda, k)$ et $S_V(\lambda, \mu)$ définies par

$$A_V(\lambda, k) = \frac{1}{|V|} \sum_{\lambda_i < \lambda} \left| \int_V \psi_i(x) e^{ikx} dx \right|^2 \text{ et } S_V^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) = \frac{1}{|V|} \sum_{\substack{\lambda_i < \lambda \\ \mu_j < \mu}} p_{ij}^\alpha p_{ji}^\beta \quad (3.15)$$

Les auteurs [23] utilisent les mêmes techniques et nous énonçons les résultats suivants

Théorème 8 [23]. Sous les mêmes conditions du théorème précédent, il existe une fonction aléatoire non-décroissante et bornée $A(\lambda, k)$, $k \in \mathbb{R}^m$, et tout point de continuité λ on a :

$$\lim_{V \rightarrow \infty} A_V(\lambda, k) = A(\lambda, k) \text{ p.s.}$$

De même, si de plus, $E\{q^2(x)\} < \infty$ alors il existe une B-fonction non-aléatoire $S^{\alpha\beta}(\lambda, \mu)$ tel que en tout point de continuité (λ, μ) , on a :

$$\lim_{V \rightarrow \infty} S_V^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) = S^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) \text{ p.s.}$$

3.2 Equation de Shrödinger à potentiel gaussien

Nous présentons la distribution spectrale limite N qui existe d'après le théorèmes 8 dans le cas d'un potentiel gaussien. Dans le premier résultat, nous donnons le comportement de la distribution spectrale pour des équations de Shrödinger associée à un champ aléatoire arbitraire satisfaisant (3.7), ensuite pour le cas d'un champ gaussien. La preuve des deux théorèmes est basée sur la représentation de la transformé de Laplace $\tilde{N}(t)$ de la limite de la fonction de distribution normalisée en utilisant l'intégrale de Wiener, obtenue dans la section précédente. On a

$$\begin{aligned}\tilde{N}(t) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} dN(\lambda) = \\ &= (2\pi t)^{-m/2} W \left\{ E \left\{ \exp \left(- \int_0^t q(x(s)) ds \right) \right\} \middle| x(t) = 0 \right\}\end{aligned}\quad (3.16)$$

Nous énonçons les résultats suivants sur le comportement asymptotique de $N(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Théorème 9 [32][Figotin 1983]. *Soit $q(x)$ un champ aléatoire homogène métriquement transitif satisfaisant (3.7). Alors*

$$N(\lambda) = C_m \lambda^{m/2} (1 + o(1)), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (3.17)$$

où $C_m = ((2\pi)^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2} + 1))^{-1}$.

La preuve du théorème est dans [23] (p109). On remarque que le premier terme du développement asymptotique de $N(\lambda)$ est simplement la limite de la fonction spectrale normalisée de l'opérateur (3.1)-(3.2) avec $q \equiv 0$, d'où (3.17) montre que lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, le terme qui comporte $q(x)$ dans (3.1) assure la condition (3.7).

De (3.16) et (3.7), on montre que quand $t \rightarrow 0^+$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} dN(\lambda) \sim \tilde{N}(t) (2\pi t)^{m/2} \sim 1$$

Théorème 10 [32](Pastur 1972, 1977). *Soit $q(x)$ un champ gaussien homogène de fonction de corrélation $B(x)$ deux fois continuellement différentiable et satisfaisant*

$$|B(x)| \leq C |x|^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad |x| \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \left| \tilde{B}(0) - \tilde{B}(x) \right| \leq C |\ln |x||^{-\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad |x| \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

où $\tilde{B}(x) = -\Delta B(x)$. Alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \lambda^{-2} \ln N(\lambda) = -(2B)^{-1}, \quad B = B(0) \quad (3.19)$$

La preuve du théorème se trouve dans [23] p-204, [32] p-53.

Remarque 11 . On peut reformuler le premier théorème comme suit: pour un champ aléatoire gaussien homogène satisfaisant (3.18), quand $\lambda \rightarrow -\infty$

$$N(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2B} (1 + o(1)) \right\}$$

L'intérêt de cette formule asymptotique est qu'elle ne dépend pas de la dimension de l'espace. En général, il est difficile d'obtenir une analyse similaire pour d'autres types de potentiels aléatoires et la forme asymptotique (3.17) dépend fortement de la forme spécifique du champ aléatoire $q(x)$. Une autre difficulté est que la forme de la fonctionnelle $E \left\{ \exp \left(-\int_0^t q(x(s)) ds \right) \right\}$ de (3.16) ne peut être obtenue pour $m > 1$ que dans peu de cas

En conclusion, on donne un exemple [32] de champ aléatoires dont la fonctionnelle

$E \left\{ \exp \left(-\int_0^t q(x(s)) ds \right) \right\}$ peut être calculée.

1. $q(x)$ est un champ aléatoire qui est le carré d'un champ gaussien $q_1^2(x) = q(x)$ et $E \{q_1(x)\} = 0$, et $E \{q_1(x)q_1(0)\} = B(x)$.

$$E \left\{ \exp \left(-\int_0^t q(x(s)) ds \right) \right\} = \{D_t [x(\cdot)]\}^{1/2}$$

où $\{D_t [x(\cdot)]\}$ est le déterminant de Fredholm de l'équation intégrale

$$\varphi(s) + 2 \int_0^t B(x(s) - x(u)) \varphi(u) du = f(s), \quad 0 \leq s \leq t$$

3.3 Equation de Shrödinger unidimensionnelle

Dans cette section on considère la distribution spectrale des valeurs propres de l'équation de Shrödinger à potentiel aléatoire pour $m = 1$. Dans ce cas, il existe une relation très remarquable entre le spectre de l'équation et ses solutions, ce qui aide au calcul de $N(\lambda)$, surtout, dans le cas où le potentiel $q(x)$ est un processus de Markov. On donne un théorème général, et ensuite on considère un exemple, où l'expression de $N(\lambda)$ contient seulement des intégrales de fonctions élémentaires.

On considère l'équation de Shrödinger

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \tag{3.20}$$

$$y(0) \cos(\alpha) - y'(0) \sin(\alpha) = 0, \quad y(L) \cos(\beta) - y'(L) \sin(\beta) = 0 \tag{3.21}$$

où le potentiel $q(x)$ est un processus stationnaire au sens faible et satisfaisant la condition

$$E(|q(x)|) < \infty \quad (3.22)$$

Presque toute les réalisations sont sommables sur n'importe quel intervalle fini [36]. Pour de tels potentiels, le spectre de l'opérateur (3.20)-(3.21) est borné inférieurement et discret [37]-[23]. La distribution spectrale normalisée $N_L(\lambda)$ de cet opérateur est bien défini. De plus, pour $q(x)$ sommable (i.e $E(|q(x)|) < \infty$), il existe une solution unique $\xi(x)$ de (3.20) vérifiant les conditions $\xi(0) = \sin(\alpha)$, $\xi'(0) = \cos(\alpha)$ [37]. D'après le théorème d'oscillation de Sturm [37]-[23] le nombre de valeurs propres de l'opérateur (3.20)-(3.21) coïncide avec le nombre de changement de signe de la solution $\xi(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$. D'où, en introduisant la phase $\theta(x)$ par la relation $\coth \theta(x) = \xi'(x)/\xi(x)$, $\theta(0) = \alpha$, on trouve que ([37]-[23] **Hartman 1964**) :

$$N_L(\lambda) = \frac{1}{L} \left[\frac{\theta(L) - \beta}{\pi} \right] \quad (3.23)$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière de x . Ici, la phase $\theta(x)$ satisfait l'équation :

$$\theta' = \Phi(q, \theta), \quad \theta(0) = \alpha \quad \text{où} \quad \Phi(q, \theta) = \cos^2 \theta + (q - \lambda) \sin^2 \theta$$

De l'équation, il suit immédiatement que

$$\int_0^x \theta'(t) dt = \int_0^x \Phi(q, t) dt$$

i.e

$$|\theta(x)| \leq \alpha + \int_0^x |\cos^2 t| dt + \int_0^x |q - \lambda| |\sin^2 t| dt$$

D'où

$$|\theta(x)| \leq \alpha + x + \int_0^x |q - \lambda| dt \quad (3.24)$$

De (3.23) et (3.24) nous avons

$$E\{N_L(\lambda)\} \leq C(\lambda) < \infty \quad (3.25)$$

Ensuite, en utilisant (3.23) on montre que les fonctions de distributions spectrales des opérateurs correspondants aux problèmes de Dirichlet et Neumann (c'est dans les cas où (α, β) dans (3.21) sont égales à $(\pi/2, \pi/2)$ et $(0, 0)$, respectivement), et qui sont notées par $N_L^{(1)}(\lambda)$ et $N_L^{(2)}(\lambda)$, satisfont à l'inégalité (voir **théorème ergodique de sous-additivité** et **Benderskii and Pastur 1970** [23])

$$0 \leq N_L^{(1)}(\lambda) - N_L^{(2)}(\lambda) \leq 2/L \quad (3.26)$$

Les inégalités (3.25) et (3.26) avec le théorème III.4 [32] p-49 conduisent au théorème suivant

Théorème 12 [32][Benderskii and Pastur 1970]. Soit $q(x)$ un processus métriquement transitif, faiblement stationnaire et vérifiant (3.22). Alors :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} N_L(\lambda) = N(\lambda) \quad p.s.$$

Cette limite est déterministe et ne dépend pas de la forme des conditions au bord.

De plus, si on pose

$$\begin{aligned} F(x, \Gamma_1, \Gamma_2) &= P(q(x) \in \Gamma_1, \varphi(x) \in \Gamma_2) \\ F_L(\Gamma_1, \Gamma_2) &= \frac{1}{L} \int_0^L F(x, \Gamma_1, \Gamma_2) dx \end{aligned}$$

où $\varphi = \theta - \pi \left[\frac{\theta}{\pi} \right]$ et Γ_1, Γ_2 sont des ensembles Boréliens sur \mathbb{R} et le cercle C_π de circonférence π , alors

$$N(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_E \Phi(q, \varphi) F(dq, d\varphi) \quad (3.27)$$

où $E = \mathbb{R} \times C_\pi$ et $F(\Gamma_1, \Gamma_2)$ est la limite d'une sous-suite faiblement convergente de la famille de probabilités $(F_L(\Gamma_1, \Gamma_2))$ sur E et la limite est une probabilité et $\Phi(q, \theta) = \cos^2 \theta - (q - \lambda) \sin^2 \theta$.

Remarque 13 . La formule (3.27) réduit le calcul de $N(\lambda)$ à la recherche de loi conjointe des v.a (q, φ) . Sans aucune condition supplémentaire sur $q(x)$, il sera difficile de trouver la distribution limite. D'où, on assume en plus que $q(x)$ est un processus de Markov. Aussi on peut voir que le couple (q, φ) est un processus de Markov homogène (voir lemme p-151, [23] et Dynkin 1965) si $q(x)$ l'est aussi. Par suite la distribution spectrale limite $N(\lambda)$ est une mesure invariante de ce processus et satisfait une certaine équation intégrale [23] . Pour une classe large de processus de Markov, cette équation est équivalente à une équation différentielle et calculer $N(\lambda)$ se réduit à la résolution de cette équation.

Exemple ([23] p. 172). Soit $q(x)$ un processus de Markov homogène à valeurs 0 et 1, avec les probabilités de transitions

$$p_{01} = n_0 x + o(x), \quad p_{10} = n_1 x + o(x), \quad x \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sum_{r, r'} p_{rr'} = 1, \quad r, r' = 0, 1$$

Ce processus a une unique mesure invariante $p(r) = n_{1-r}(n_0 + n_1)^{-1}$ et est ergodique (l'unicité de la distribution invariante est équivalente à l'ergodicité). Le générateur infinitésimal de $q(x)$ est donné par

$(A_q f)(r) = (-1)^r n_r [f(0) + f(1)]$. L'espace E dans ce cas est un ensemble qui consiste à deux cercles de circonférence π . Il est convenable d'écrire une fonction sur E comme $f(r, \varphi)$, où $f(r, \varphi)$ est périodique en φ pour $r = 0$ ou 1 où le calcul donne

$$N(\lambda) = \frac{n_1 \sqrt{\lambda}}{n_0 + n_1} F^{-1}, \quad k^2 = \lambda \quad (3.28)$$

où pour $\lambda \geq 1$

$$F = \pi - \frac{4n_0}{\sinh f(\frac{\pi}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh \left[f(\frac{\pi}{2}) - f(\varphi) \right] d\varphi \int_0^\varphi \cosh f(t) dt, \quad f(t) = n_0 t - \frac{n_1}{\sqrt{1-\gamma}} \arctan \frac{\tan t}{\sqrt{1-\gamma}}, \quad \gamma = \frac{1}{\lambda}$$

et pour $0 \leq \lambda \leq 1$

$$F = \pi - n_0 \int_{-\pi+\alpha}^{-\alpha} d\varphi \int_\varphi^\alpha R(\varphi, t) dt + n_0 \int_{-\alpha}^\alpha d\varphi \int_{-\alpha}^\varphi R(\varphi, t) dt, \quad R(\varphi, t) = e^{n_0(\varphi-t)} \left| \frac{\sin(\varphi - \alpha) \sin(t + \alpha)}{\sin(\varphi + \alpha) \sin(t - \alpha)} \right|^{\frac{n_1}{2\sqrt{1-\gamma}}}$$

et α est la racine de l'équation $\lambda - \cos^2 \varphi = 0$ dans le premier quadrant. On note le comportement asymptotique de $N(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow 0^+$:

$$N(\lambda) = \frac{n_0 n_1}{n_0 + n_1} H^{-2}(n_0, n_1) e^{-\frac{\pi n_0}{\sqrt{\lambda}}} (1 + o(1)), \quad H(x, y) = e^{-x} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{t+2x} \right)^{y/2} dt$$

Chapitre 4

Loi de Wigner

4.1 Introduction

Dans cette partie nous nous intéressons à la distribution spectrale de matrices aléatoires symétriques réelles ou hermitiennes de grande taille. On considère les quantités de la forme suivante

$$\int_{\mathcal{E}_n} F_n(M) P_n(dM) \quad (4.1)$$

où \mathcal{E}_n est un ensemble de matrices $n \times n$. Par exemple $\mathcal{E}_n = \mathcal{S}_n$ ensemble des matrices réelles, symétriques, $\mathcal{E}_n = \mathcal{H}_n$ ensemble des matrices hermitiennes ou $\mathcal{E}_n = \mathcal{U}_n$ ensemble des matrices unitaires, etc.. La fonction F_n est une application de \mathcal{E}_n dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , qui est généralement prise orthogonalement invariante, par exemple, dans le cas de \mathcal{S}_n

$$F_n(OMO^T) = F_n(M), \quad \forall O \in \mathcal{O}_n, \quad \mathcal{O}_n = EOG$$

P_n est une mesure de probabilité sur \mathcal{E}_n . On s'intéresse aux problèmes asymptotiques des v.a $F_n(M)$ définies sur l'espace de probabilité (\mathcal{E}_n, P_n) et possédant la propriété d'invariance ci-dessus.

4.1.1 Exemples.

Exemple 1. Sur l'ensemble \mathcal{S}_n (voir chap1, $\beta = 1$), on considère la mesure de référence

$$d_1 M = \prod_{j=1}^n dM_{jj} \prod_{j < k \leq n} dM_{jk} \quad (4.2)$$

et on définit la loi gaussienne comme :

$$P_{n,1}(d_1M) = \frac{1}{Z_{n,1}} \exp\left(-\frac{n}{4\omega^2} \text{tr}M^2\right) d_1M \quad (4.3)$$

où $Z_{n,1}$ est une constante de normalisation, $\omega^2 = E[M_{jk}]$ pour $j < k$. Soit la mesure de comptage aléatoire N_n associée à la matrice M définie par

$$N_n(\Delta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\lambda_i \in \Delta\}} \quad (4.4)$$

où λ_i sont les valeurs propres de M et Δ un borélien de \mathbb{R} . On a vu précédemment que la mesure de comptage d'une matrice aléatoire M est un cas particulier de la statistique linéaire $T_n(\varphi)$ des v.a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ définie pour une fonction mesurable bornée φ à support compact par :

$$T_n(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \varphi(\lambda_l) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) N_n(d\lambda) \quad (4.5)$$

Nous nous intéressons aux cas suivants :

(i) la moyenne

$$\bar{N}_n(\Delta) = E_n[N_n(\Delta)]$$

(ii) la covariance

$$\mathbf{Cov}[N_n(\Delta_1), N_n(\Delta_2)] = E[N_n(\Delta_1)N_n(\Delta_2)] - E[N_n(\Delta_1)]E[N_n(\Delta_2)]$$

pour des intervalles Δ_1 et Δ_2 de \mathbb{R} , en particulier, la variance

$$\mathbf{Var}[N_n(\Delta)] = \mathbf{Cov}[N_n(\Delta), N_n(\Delta)]$$

(iii) la loi de $N_n(\Delta)$, i.e.

$$P_n[N_n(\Delta) = k/n] \text{ pour } k = 0, 1, \dots, n$$

En particulier, la probabilité

$$E_n(\Delta) = P_n[N_n(\Delta) = 0] \quad (4.6)$$

est appelée la *probabilité de trou spectral* [2].

Il s'agit de l'étude de la convergence de la suite N_n . Typiquement, N_n converge étroitement en probabilité ou presque sûrement vers une mesure non aléatoire N .

Exemple2. Soit $\{q_j\}_{j \geq 1}$ une suite de v.a i.i.d, de loi F . Posons

$$M_n = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_n \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Alors

$$N_n(\Delta) = n^{-1} \sum_{l=\Delta}^n \mathbf{1}_{\Delta}(q_l) \quad \text{et} \quad \bar{N}(\Delta) = E[N_n(\Delta)] = F(\Delta)$$

De plus

$$\mathbf{Var}[N_n(\Delta)] = \frac{F(\Delta)(1-F(\Delta))}{n}$$

D'où, $\mathbf{Var}[N_n(\Delta)] = o(1/n)$ quand n est grand et donc $N_n(\Delta)$ converge en probabilité vers $F(\Delta)$ pour tout intervalle $\Delta \subset \mathbb{R}$ fixé.

Considérons maintenant la probabilité de trou spectral (4.6) pour (4.7). On a

$$E_n(\Delta) = P[N_n(\Delta) = 0] = (1 - F(\Delta))^n \quad (4.8)$$

Ainsi, si l'intervalle Δ est chargé par la loi F , $E_n(\Delta)$ décroît vers 0.

4.2 La loi du demi-cercle (loi de Wigner)

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la limite des distributions spectrales de matrices aléatoires symétriques réelles d'éléments gaussiens. Il s'agit de montrer que les valeurs propres suivent asymptotiquement une loi appelée la loi du *demi-cercle*.

L'ensemble des matrices est défini par (4.2) et (4.3) : les matrices de cet ensemble sont telles que pour tout n il existe une matrice $Y_n = \{Y_{jk}\}_{j,k=1}^n$ telle que

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_n, \quad \text{avec} \quad Y_{jk} = Y_{kj} \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

et que Y_{jk} , $1 \leq j < k \leq n$ de la partie triangulaire supérieure sont des v.a gaussiennes indépendantes centrées et de variance ω^2 quand $1 \leq j < k$ et $2\omega^2$ quand $j = k$:

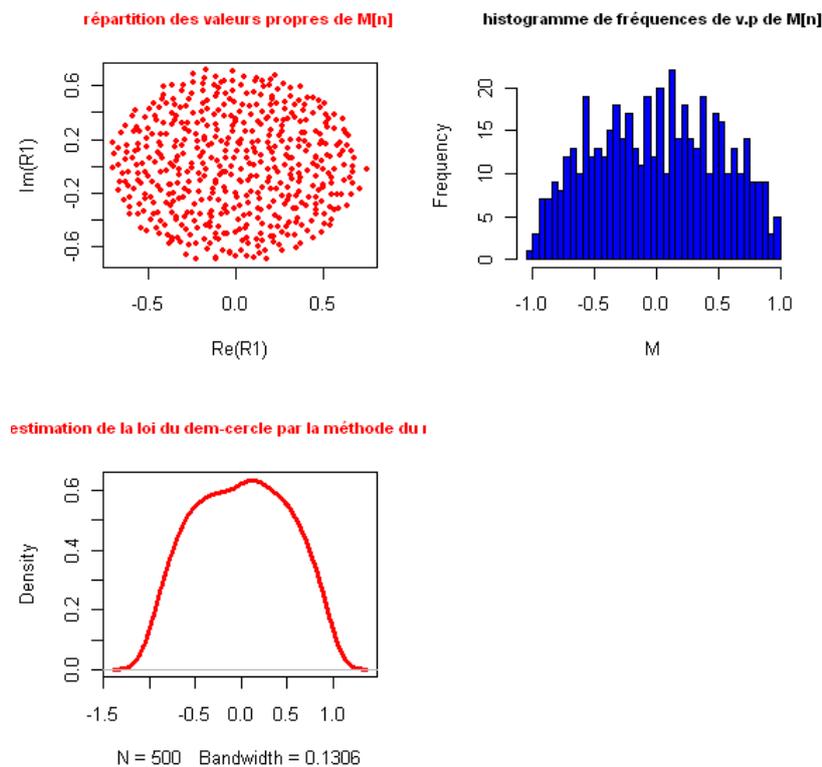
$$E_n[Y_{jk}] = 0, \quad E_n[Y_{jk}^2] = (1 + \delta_{jk})\omega^2, \quad 1 \leq j, k \leq n$$

Dans ce cas les matrices aléatoires M_n peuvent être définies sur le même espace de probabilité (Ω, P) ,

avec $\Omega = \mathbb{R}^\infty$ et

$$P = \prod_{1 \leq j \leq k \leq \infty} P_{j,k} \text{ où } P_{j,k}(dY) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{j,k}^2}} e^{-\frac{Y^2}{2\sigma_{j,k}^2}} dY \text{ et } \sigma_{j,k}^2 = \frac{(1 + \delta_{jk})\omega^2}{n} \quad (4.10)$$

Dans la Fig.2, le graphe en haut à gauche représente la répartition des valeurs propres λ_i de la matrice $M_n = 1/\sqrt{n}Y_n$ (où Y_n est une matrice 500×500 , (Y_{jk}) sont des v.a. complexes gaussiennes standard), le deuxième graphe en haut à droite représente l'histogramme des fréquences des observations des valeurs propres et le dernier représente l'estimateur à noyau de la densité de la loi du demi cercle (avec le noyau d'Epashnikov, pas=0.104)



(Figure2)

Théorème 14 [3] (la loi du demi-cercle). Soit \mathcal{E}_n l'ensemble EGO défini ci-dessus et soit N_n la distribution spectrale (4.4). Alors il existe une mesure de probabilité N telle que

$$N_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{étroite}} N, \text{ p.s.} \quad (4.11)$$

avec

$$N(\Delta) = \int_{\Delta} \rho^{(1)}(\lambda) d\lambda \quad (4.12)$$

de densité

$$\rho^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\omega^2} \begin{cases} \sqrt{4\omega^2 - \lambda^2} & \text{si } |\lambda| \leq 2\omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.13)$$

Pour démontrer le théorème nous avons besoin d'introduire quelques résultats.

Lemme 8 . Soit \mathcal{E}_n l'ensemble EGO et Φ une application de classe \mathbf{C}^1 sur l'espace des matrices symétriques réelles \mathcal{S}_n dans \mathbb{C} de dérivée bornée. Alors

$$E[\Phi'(M) \cdot X] = -\frac{n}{2\omega^2} E[\Phi(M) \operatorname{tr}(MX)], \quad \forall X \in \mathcal{S}_n \quad (4.14)$$

Preuve: voir [3] p.140. ■

Lemme 9 . Soit \mathcal{E}_n l'ensemble EGO. Posons

$$g_n(z) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} G(z) \text{ pour } \operatorname{Im} z \neq 0$$

où $G(z) = (M - zI)^{-1}$ est la résolvante de la matrice $M \in \mathbb{S}_n$. Alors nous avons les égalités suivantes :

(i) si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$E[g_n(z)] = -\frac{1}{z} - \frac{\omega^2}{z} E[g_n^2(z)] - \frac{\omega^2}{zn^2} E[\operatorname{tr} G^2(z)] \quad (4.15)$$

(ii) si $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E[g_n(z_1)g_n(z_2)] &= -\frac{1}{z_1} E[g_n(z_2)] - \frac{\omega^2}{z_1} E[g_n^2(z_1)g_n(z_2)] \\ &\quad - \frac{\omega^2}{n^2 z_1} E[\operatorname{tr} G^2(z_1)g_n(z_2)] - \frac{2\omega^2}{n^3 z_1} E[\operatorname{tr} G^2(z_1)G(z_2)] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Preuve: Soient j, k deux indices compris entre 1 et n . On applique la proposition précédente à la fonction $\Phi(M) = (M - zI)_{j,k}^{-1} = G_{j,k}(M)$ en utilisant le fait que $G' \cdot A = -GAG$ (pour toute matrice A et G' la dérivée de G par rapport à M à z fixé), ceci implique que

$$E\left[(GXG)_{j,k}\right] + \frac{n}{2\omega^2} E[G_{j,k} \operatorname{tr} MX] = 0, \quad \forall X \in \mathbb{S}_n \quad (4.17)$$

Soient p et q deux indices compris entre 1 et n , et soit $X^{(p,q)}$ la matrice symétrique définie par :

$$X_{j,k}^{(p,q)} = \delta_{j,p} \delta_{k,q} + \delta_{j,q} \delta_{k,p}$$

Alors, pour ce choix de $X^{(p,q)}$, on obtient de (4.17)

$$E [G_{j,p}G_{q,k} + G_{j,q}G_{p,k}] + \frac{n}{\omega^2} E [G_{j,k}M_{p,q}] = 0 \quad (4.18)$$

En choisissant $j = p$, $k = q$, en sommant (4.18) sur tous les indices j, k de 1 à n et en divisant par n^2 , nous obtenons (par $g_n(z) = \frac{1}{n} \text{tr} G(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n G_{j,j}$ et $g_n^2(z) = \frac{1}{n^2} \sum_{j,q=1}^n G_{j,j}G_{q,q}$)

$$E [g_n^2(z)] + \frac{1}{n^2} E [\text{tr} G^2(z)] + \frac{1}{n\omega^2} E [\text{tr} (G(z)M)] = 0$$

Il ne reste plus qu'à utiliser l'identité $G(z)M = G(z) [(M - zI) + zI] = I + zG(z)$ pour obtenir (4.15), en effet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} E [\text{tr} (G(z)M)] &= \frac{1}{n} E [\text{tr} (I + zG(z))] = \frac{1}{n} E [n + z \text{tr} (G(z))] = \frac{1}{z} + E[g_n(z)] \\ &= -\omega^2 E [g_n^2(z)] - \frac{\omega^2}{n^2} E [\text{tr} G^2(z)] \end{aligned}$$

Pour le point (ii), il suffit d'appliquer le même raisonnement à $G_{j_1,k_1}G_{j_2,k_2}$. ■

Lemme 10 . Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|\text{Im } z| \geq 2\omega$, alors

$$\mathbf{Var} [g_n(z)] = E [|g_n(z) - E[g_n(z)]|^2] \leq \frac{3}{n^2 |\text{Im } z|^2} \quad (4.19)$$

Preuve: Notons

$$f_n(z) = E[g_n(z)], \quad h_n(z) = g_n(z) - f_n(z) \quad (4.20)$$

Soient z_1 et z_2 deux points de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. L'identité (4.15) appliquée à $z = z_1$ multipliée par $f_n(z_2)$, et à laquelle on a ensuite soustrait l'identité (4.16) conduit à

$$\begin{aligned} E [g_n(z_1)g_n(z_2)] - E [g_n(z_1)]E[g_n(z_2)] &= \overbrace{-\frac{\omega^2}{z_1} E [g_n^2(z_1)f_n(z_2)]}^{T_1} \\ &\quad - \underbrace{\frac{\omega^2}{z_1 n^2} E [\text{tr} G^2(z_1)h_n(z_2)]}_{T_2} - \underbrace{\frac{2\omega^2}{z_1 n^3} E [\text{tr} G^2(z_1)G(z_2)]}_{T_3} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Pour le terme T_1 , comme $g_n(z_1) = h_n(z_1) + f_n(z_1)$, on a

$$\begin{aligned} E [g_n^2(z_1)h_n(z_2)] &= E [g_n(z_1)(h_n(z_1) + f_n(z_1))(h_n(z_2))] \\ &= E [g_n(z_1)h_n(z_1)h_n(z_2)] + f_n(z_1)E [g_n(z_1)h_n(z_2)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z_1 = z$, $z_2 = \bar{z}$ et $\eta = |\operatorname{Im} z|$.

De plus on constate que $E[g_n(z_1)h_n(z_2)] = E[h_n(z_1)h_n(z_2)]$. En effet

$$\begin{aligned} E[g_n(z_1)h_n(z_2)] &= E[h_n(z_1)h_n(z_2)] + E[f_n(z_1)h_n(z_2)] \\ &= E[h_n(z_1)h_n(z_2)] + E(g_n(z_1))E(h_n(z_2)) \\ &= E[h_n(z_1)h_n(z_2)] + E(g_n(z_1))(E(g_n(z_2)) - E(f_n(z_2))) \end{aligned}$$

avec $E(f_n(z_2)) = E(g_n(z_2))$.

Comme $\|G(z)\| \leq 1/|z| \leq |\operatorname{Im} z|^{-1} = 1/\eta$, et que $|g_n(z)| \leq \frac{1}{n} \times n \|G(z)\|$ (car $|\operatorname{tr} G(z)| \leq n \|G(z)\|$), alors $|g_n(z)| \leq 1/\eta$. De plus, comme $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$, nous déduisons de (4.22) que

$$|E[g_n^2(z)h_n(\bar{z})]| = E[g_n(z)h_n(z)h_n(\bar{z})] + f_n(z)E[g_n(z)h_n(\bar{z})] \leq \frac{2}{\eta} E[|h_n(z)|^2]$$

Donc $|T_1| \leq 2\omega^2 \mathbf{Var}[g_n(z)]/\eta^2$.

Pour le terme T_2 , des techniques similaires et l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le fait que $\|G(z)\|^k \leq |\operatorname{Im} z|^{-k}$, permettent de prouver que

$$\begin{aligned} |T_2| &= \frac{\omega^2}{zn^2} E[\operatorname{tr} G^2(z)h_n(\bar{z})] \leq \frac{\omega^2}{\eta n^2} \times E[\|G(z)\|^2 h_n(\bar{z})] \\ &\leq \frac{\omega^2}{\eta n^2} \frac{n}{\eta^2} E[|h_n(z)|^2]^{1/2} \leq \frac{\omega^2}{\eta^3 n} E[|h_n(z)|^2]^{1/2} \\ &\leq \frac{\omega^2}{\eta^3 n} \sqrt{\mathbf{Var}[g_n(z)]} \end{aligned}$$

De même, on a $|T_3| \leq 2\omega^2/\eta^4 n^2$.

Lorsque $z_1 = z$, $z_2 = \bar{z}$ et $\eta = |\operatorname{Im} z|$, alors le terme de gauche de l'égalité (4.21) est égale à $E|g_n(z)|^2 - |E[g_n(z)]|^2 = \mathbf{Var}[g_n(z)]$. Posons $v^2 = \mathbf{Var}[g_n(z)]$. Alors les estimations précédentes conduisent à

$$\mathbf{Var}[g_n(z)] \leq |T_1| + |T_2| + |T_3| \leq 2\omega^2 \mathbf{Var}[g_n(z)]/\eta^2 + \frac{\omega^2}{\eta^3 n} \sqrt{\mathbf{Var}[g_n(z)]} + 2\omega^2/\eta^4 n^2 \quad (4.23)$$

donc

$$v^2 \left(1 - \frac{2\omega^2}{\eta^2}\right) \leq \frac{\omega^2}{\eta^3 n} v + \frac{2\omega^2}{\eta^4 n^2}$$

Comme $\eta = |\operatorname{Im} z| \geq 2\omega$, alors $1 - \frac{2\omega^2}{\eta^2} \geq 2$, on arrive donc à l'inégalité quadratique

$$v^2 - \frac{\omega^2}{2\eta^3 n} v - \frac{\omega^2}{\eta^4 n^2} \leq 0$$

ou bien, en majorant par $\omega \leq \eta/2$, on obtient

$$v^2 - \frac{1}{8\eta n}v - \frac{1}{4\eta^2 n^2} \leq 0$$

Après études de cette équation du second degré elle sera négative pour

$$v^2 \leq 3/n^2\eta^2$$

■

Démonstration du théorème 14

On a grâce au théorème spectral sur les matrices symétriques

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{N_n(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \frac{1}{\lambda_l - z} = \frac{1}{n} \text{tr}G(z) \quad (4.24)$$

où $\{\lambda_l\}_{l=1}^n$ est le spectre de $G(z)$. Donc $g_n(z) = n^{-1}\text{tr}G(z)$ est la transformée de Stieltjes de la mesure de comptage N_n . Ainsi, l'identité (4.15) (avec $E(g_n(z)) = f_n(z)$) vérifie

$$f_n(z) + \frac{1}{z} + \frac{\omega^2}{z} f_n^2(z) = -\frac{\omega^2}{z} E \left[(g_n(z) - E[g_n(z)])^2 \right] - \frac{\omega^2}{zn^2} E [\text{tr}G^2(z)] \quad (4.25)$$

Soit z un nombre complexe tel que $\eta = |\text{Im } z| \geq 2\omega$. D'après le lemme précédent,

$$\left| \frac{\omega^2}{z} \text{Var}(g_n(z)) \right| \leq \frac{3}{n^2\eta^2} \frac{\omega^2}{\eta} \leq \frac{1}{n^2\eta}$$

D'une part, $|\text{tr}G^2(z)| \leq n \|G^2\| \leq n |\text{Im } z|^{-2} = n/\eta^2$, et donc

$$\left| \frac{\omega^2}{zn^2} E [\text{tr}G^2(z)] \right| \leq \frac{\omega^2}{n\eta^3} \leq \frac{1}{4n\eta}$$

Ces estimations et l'équation (4.25) impliquent l'inégalité :

$$\left| f_n(z) + \frac{1}{z} + \frac{\omega^2}{z} f_n^2(z) \right| \leq \frac{C(\eta)}{n} \quad (4.26)$$

où $C(\eta)$ ne dépend pas de n . De plus $|f_n(z)| \leq 1/\eta \leq 1/2\omega$. Donc la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est uniformément bornée en n sur $\mathbb{C}^{2\omega} = \{z \in \mathbb{C}; |\text{Im } z| > 2\omega\}$, et elle est analytique sur cet ensemble. D'après le **théorème de Montel** (théorème 12.8a [38], p.563), il existe une fonction f et une sous-suite $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ qui converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^{2\omega}$. De plus, f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En utilisant

les propriétés de la transformée de Stieltjes f_n , on a $\lim_{y \rightarrow +\infty} y |f_n(iy)| = 1$, $\text{Im } f_n(z) \cdot \text{Im } z \geq 0$, quand $\text{Im } z \neq 0$, et par suite en passant à la limite dans $\text{Im } f_{n_j}(z) \cdot \text{Im } z$ on a $\lim_j \text{Im } f_{n_j}(z) \cdot \text{Im } z = \text{Im } f(z) \cdot \text{Im } z \geq 0$.

En passant à la limite sur l'inégalité (4.26), nous obtenons pour tout $z \in \mathbb{C}^{2\omega}$,

$$\omega^2 f^2(z) + z f(z) + 1 = 0 \quad (4.27)$$

Par résolution, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\omega^2} \left(-z \pm \sqrt{z^2 - 4\omega^2} \right), \quad \forall z \in \mathbb{C}^{2\omega}$$

D'autre part, la fonction f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, donc elle est égale à une constante près à $z \mapsto -z \pm R(z)$, dont $R(z)$ est une détermination de $\sqrt{z^2 - 4\omega^2}$. Or par un passage à la limite dans $|f_n(z)| \leq 1/\eta \leq 1/2\omega$, nous avons

$$\forall \eta \geq 2\omega, |f(i\eta)| \leq \frac{1}{\eta} \text{ et donc } f(i\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} 0$$

donc $f(i\eta) = K(-i\eta \pm R(i\eta)) \xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} 0$ (K constante), on choisit donc la détermination $R(z)$ telle que $R(z) = z + o(1)$ quand $z \rightarrow +\infty$. La fonction f est donc égale à $f(z) = (2\omega^2)^{-1} (-z + R(z))$ pour cette détermination de R .

Nous venons donc d'identifier la limite d'une sous-suite de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ qui ne dépend pas du choix de la sous-suite. Ainsi $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^{2\omega}$ vers la fonction f ainsi construite.

D'après l'inégalité de Tchebychev et le lemme 9, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P[|f_n(z) - g_n(z)| > \varepsilon] \leq \frac{\text{Var}[g_n(z)]}{\varepsilon^2} \leq \frac{3}{\varepsilon^2 \eta^2 n^2}$$

Ainsi la série $\sum_{n=1}^\infty P[|f_n(z) - g_n(z)| > \varepsilon]$ est convergente. Le lemme de **Borel-Cantelli** implique donc que pour tout $z \in \mathbb{C}^{2\omega}$,

$$f_n(z) - g_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \mathbf{P} - p.s.$$

Comme $|g_n(z) - f(z)| \leq |g_n(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f(z)|$, donc

$$g_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(z), \quad \mathbf{P} - p.s.$$

En utilisant la formule de Frobenius-Perron, on conclut qu'il existe une mesure de probabilité N telle que f soit sa transformée de Stieltjes. Comme g_n sont les transformées de Stieltjes des mesures N_n , ainsi

si g_n converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^{2\omega}$, alors la formule de Frobenius-Perron permet d'affirmer que

$$N_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{étroite}} N, \quad \mathbf{P} - p.s.$$

Pour la convergence uniforme de g_n vers f , soit z_0 un point de $\mathbb{C}^{2\omega}$. Alors il existe un ensemble $\Omega(z_0)$ de mesure $\mathbf{P}(\Omega(z_0)) = 1$ tel que $g_n(z_0)(\omega)$ converge vers $f(z_0)(\omega)$ pour tout point $\omega \in \Omega(z_0)$. On continue le procédé pour des points z_1, z_2, \dots de $\mathbb{C}^{2\omega}$ tels que $\{z_j\}_{j=0}^\infty$ ait au moins un point d'accumulation dans $\mathbb{C}^{2\omega}$. Parallèlement à cela, il existe une suite de sous-ensembles $(\Omega(z_j))_{j=0,1,\dots}$ de probabilité 1 tels que $g_n(z_j)(\omega)$ converge vers $f(z_j)(\omega)$ pour tout point de $\Omega(z_j)$. Le **théorème de Vitali** [33]-[38] (p.565) permet d'affirmer que g_n converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^{2\omega}$ pour toute réalisation appartenant à $\Omega^* = \bigcap_{j \geq 0} \Omega(z_j)$, qui est de probabilité 1, d'où la convergence étroite découlera.

Maintenant, il reste à identifier la mesure N . D'après la formule de Frobenius-Perron, pour tout intervalle Δ

$$N(\Delta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \text{Im} f(\lambda + i\varepsilon) d\lambda$$

Or $\text{Im} f(\lambda + i\varepsilon)$ converge vers $(2\omega^2)^{-1} (4\omega^2 - \lambda^2)_+^{1/2}$ uniformément en λ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, dont x_+ désigne $\max(x, 0)$. Ainsi,

$$N(\Delta) = \frac{1}{2\pi\omega^2} \int_{\Delta \cap [-2\omega, 2\omega]} (4\omega^2 - \lambda^2)_+^{1/2} d\lambda$$

qui est bien la loi du demi-cercle pour l'ensemble EGO.

Remarque 15 *En utilisant la même méthode, on montre les assertions suivantes:*

1. la loi du demi-cercle pour l'ensemble EGU est de densité $\rho^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{8\pi\omega^2} (8\omega^2 - \lambda)_+^{1/2}$
2. Les formes asymptotiques de la covariance de $g_n(z_1)$ et $g_n(z_2)$ pour $\text{Im} z_1$ et $\text{Im} z_2$ supérieures à 2ω sont

$$\mathbf{Cov}[g_n(z_1), g_n(z_2)] = -\frac{1}{\beta n^2 (z_1 - z_2)^2} \times \left(1 - \frac{z_1 z_2 - a_\beta^2}{\sqrt{(z_1^2 - a_\beta^2)(z_2^2 - a_\beta^2)}} \right) + o(n^{-4}), \quad n \rightarrow \infty$$

où $a_\beta^2 = 4\beta\omega^2$ et $\beta = 1, 2$ (les cas des ensembles EGO et EGU respectivement).

4.3 Loi jointe et loi de λ_{\max}

4.3.1 Rappels

Polynômes orthogonaux

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments sur les polynômes orthogonaux.

Soit $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive appelée *poids* telle que son moment d'ordre k est fini : $\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^k w(\lambda) d\lambda < \infty$, $k = 0, 1, 2, \dots$ et on associe le produit scalaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)w(x)dx$ [15]. Le procédé d'orthogonalisation de **Gram-Schmidt** sur l'espace $L^2(\mathbb{R}, w(x)dx)$ des fonctions $\lambda \mapsto \lambda^k$, $k = 1, 2, \dots$ donne une famille de polynômes $\{P_l(\lambda)\}_{l=0}^{\infty}$ tels que

$$(i) P_l(\lambda) = \alpha_l \lambda^l + \dots \text{ avec } \alpha_l > 0$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}} P_l(\lambda) P_k(\lambda) w(\lambda) d\lambda = \delta_{l,k} \text{ pour } l, k = 0, 1, 2, \dots$$

Ces polynômes orthonormés vérifient la relation des *trois termes* [1]

$$\lambda P_l(\lambda) = r_l P_{l+1}(\lambda) + s_l P_l(\lambda) + r_{l-1} P_{l-1}(\lambda) \quad (4.28)$$

où $l = 0, 1, \dots$ et $r_{-1} = 0$. Posons $\psi_l(\lambda) = \sqrt{w(\lambda)} P_l(\lambda)$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}} \psi_l(\lambda) \psi_k(\lambda) d\lambda = \delta_{l,k}$.

La fonction

$$K_n(\lambda, \mu) = \sum_{l=0}^{n-1} \psi_l(\lambda) \psi_l(\mu) \quad (4.29)$$

s'appelle le *le noyau reproduisant* du système $\{\psi_l\}_{l=0}^{\infty}$ et qui vérifie les relations

$$(i) \int_{\mathbb{R}} K_n(\lambda, \lambda) d\lambda = n,$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}} K_n(\lambda, \mu) K_n(\mu, \nu) d\lambda = K_n(\lambda, \nu) \text{ pour tout } \lambda, \nu \in \mathbb{R},$$

$$(iii) \text{ pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq \mu,$$

$$K_n(\lambda, \mu) = r_{n-1} \frac{\psi_n(\lambda) \psi_{n-1}(\mu) - \psi_n(\mu) \psi_{n-1}(\lambda)}{\lambda - \mu} \quad (4.30)$$

Cette formule est la formule de *Darboux-Christoffel* [1] [3].

Déterminant de Fredholm

Définition 16 . Soit Q un opérateur intégral de noyau continu q défini sur $D \times D$, i.e., $Qf(\lambda) = \int_D q(\lambda, \mu)f(\mu)d\mu$, où D est un compact de \mathbb{R} . Alors le déterminant de Fredholm de Q est défini par

$$\det(I - Q) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_{D^m} \begin{vmatrix} q(\lambda_1, \lambda_1) & \dots & q(\lambda_1, \lambda_n) \\ \vdots & & \vdots \\ q(\lambda_n, \lambda_1) & \dots & q(\lambda_n, \lambda_n) \end{vmatrix} d\lambda_1 \dots d\lambda_m \quad (4.31)$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 17 [3]. Soit \mathcal{H}_n l'ensemble unitairement invariant défini par un polynôme V de degré pair, i.e. les lois de probabilité $P_{n,2}$ des matrices de \mathcal{H}_n ayant pour densité

$$q_{n,2}(M) = \frac{1}{Z_{n,2}} \exp(-\text{tr}V(M)) = \frac{1}{Z_{n,2}} \exp\left(-n \sum_{l=1}^n V(\lambda_l)\right) \quad (4.32)$$

et $\left\{P_l^{(n)}\right\}_{l=0}^{\infty}$ le système de polynômes orthogonaux définis par rapport au poids $w_n(\lambda) = \exp(-nV(\lambda))$.

Alors

(i) La densité $p_n^{(2)}$ de la loi jointe des valeurs propres restreinte aux fonctions symétriques de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est

$$p_n^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{n!} \left(\det \left\{ \psi_{j-1}^{(n)}(\lambda_k) \right\}_{j,k=1}^n \right)^2$$

où

$$\psi_l^{(n)}(\lambda) = \exp\left(-\frac{n}{2}V(\lambda)\right) P_l^{(n)}(\lambda) \quad (4.33)$$

i.e., si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction symétrique sur \mathbb{R}^n , alors

$$E_n[f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) p_n^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n$$

(ii) Si N_n est la mesure de comptage normalisée, alors

$$\bar{N}_n(\Delta) = E(N_n(\Delta)) = \int_{\Delta} \rho_n(\lambda) d\lambda \quad (4.34)$$

où

$$\rho_n(\lambda) = \frac{1}{n} K_n(\lambda, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\psi_l^{(n)}(\lambda) \right)^2 \quad (4.35)$$

$$= \frac{r_{n-1}^{(n)}}{n} \left[\psi_n^{(n)}(\lambda)' \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda) - \psi_l^{(n)}(\lambda) \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda)' \right] \quad (4.36)$$

avec $r_{n-1}^{(n)}$ est le coefficient du polynôme $P_{n-1}^{(n)}$ dans la relation de récurrence

$$P_l^{(n)}(\lambda) = r_l^{(n)}(\lambda) P_{l+1}^{(n)}(\lambda) + s_l^{(n)} P_l^{(n)}(\lambda) + r_{l-1}^{(n)}(\lambda) P_{l-1}^{(n)}(\lambda) \quad (4.37)$$

pour $l = n$, (cf (4.29)).

(iii) Soit l un entier compris entre 1 et n . Notons la loi marginale de $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ par

$$p_{n,l}(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = \int_{\mathbb{R}^{n-l}} p_n^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n) d\lambda_{l+1} \dots d\lambda_n \quad (4.38)$$

et posons

$$R_{n,l} = \frac{n!}{(n-l)!} p_{n,l}(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \quad (4.39)$$

appelée **fonction de corrélation** [2]. Alors

$$R_{n,l}(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = \det \{ K_n(\lambda_j, \lambda_k) \}_{j,k=1}^l \quad (4.40)$$

(iv) La variance d'une statistique linéaire définie par (4.5) vérifie

$$\mathbf{Var} [T_n(\varphi)] = \frac{1}{2n^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi(\lambda) - \varphi(\mu))^2 K_n(\lambda, \mu) d\lambda d\mu \quad (4.41)$$

Théorème 18 . Soit $E_n^{(2)}(\Delta) = P_n [N_n(\Delta) = 0]$ la probabilité du trou pour l'ensemble (4.31) avec $\beta = 2$. Alors

$$E_n^{(2)}(\Delta) = \det(I - K_n(\Delta)) \quad (4.42)$$

où $K_n(\Delta)$ est l'opérateur intégrale sur Δ défini par le noyau $K_n(\lambda, \mu)$, i.e.,

$$F(K_n(\Delta)f)(\lambda) = \int_{\Delta} K_n(\lambda, \mu) f(\mu) d\mu, \quad \lambda \in \Delta$$

Démonstration du théorème 16

On a vu (voir chap1) que

$$p_n^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Q_{n,2} n!} \exp\left(-n \sum_{l=1}^n V(\lambda_l)\right) \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda_j - \lambda_k)^2$$

Or

$$\prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda_k - \lambda_j) = \frac{1}{n-1} \det \left\{ P_{j-1}^{(n)}(\lambda_k) \right\}_{j,k=1}^n \prod_{l=0}^{n-1} \gamma_l$$

où $\gamma_l^{(n)}$ est le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme $P_l^{(n)}$. Ainsi

$$p_n^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{n! Q_{n,2} \prod_{l=0}^{n-1} \gamma_l^2} \det \left(\left\{ \psi_{j-1}^{(n)}(\lambda_k) \right\}_{j,k=1}^n \right)^2$$

Ce qui donne que

$$Q_{n,2} = \left(\prod_{l=0}^{n-1} \gamma_l \right)^{-2}$$

et le point **(i)** en découle.

Pour **(ii)**, on a déjà fait le calcul de $E_n [T_n(\Delta)]$ (voir chapitre1). La démonstration de (4.35) est basée sur la formule de Darboux-Christoffel et la forme (4.34).

Pour démontrer **(iii)** pour $l > 1$, on utilise la même idée et le théorème de Laplace [2].

Pour **(iv)**, on remarque d'abord que

$$E_n(N_n(\varphi)) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda_1) K_n(\lambda_1, \lambda_1) d\lambda_1$$

(cf (4.33) et (4.34)) et que, d'après (4.37) et (4.39), on a

$$\begin{aligned} E_n [T_n^2(\varphi)] &= \frac{1}{n} E_n [\varphi^2(\lambda_1)] + \frac{n(n-1)}{n^2} E_n [\varphi(\lambda_1) \varphi(\lambda_2)] \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(\lambda_1) K_n(\lambda_1, \lambda_1) d\lambda_1 + \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\lambda_1) \varphi(\lambda_2) K_n^2(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned}$$

avec $p_{n,2}(\lambda_1, \lambda_2) = 1/n(n-1) \times R_{n,2}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Comme $\text{Var} [T_n(\varphi)] = E_n [T_n^2(\varphi)] - E_n [T_n(\varphi)]^2$, la formule (4.40) est démontrée.

Démonstration du théorème 18

Utilisons le point **(iii)** du théorème 16 :

$$\begin{aligned}
E_n^{(2)}(\Delta) &= P_n[\lambda_l \notin \Delta \text{ pour } l = 1, 2, \dots, n] = E \left[\prod_{l=1}^n (1 - \mathbf{1}_\Delta(\lambda_l)) \right] \\
&\stackrel{\text{par symétrie}}{=} \sum_{l=0}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} \\
&\quad \times \int_{\Delta^l} d\lambda_1 \dots d\lambda_l \int_{\mathbb{R}^{n-l}} p_{n,2}(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n) d\lambda_{l+1} \dots d\lambda_n \\
&= \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l!} \int_{\Delta^l} R_{n,l}(\lambda_1, \dots, \lambda_l) d\lambda_1 \dots d\lambda_l \\
&= \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l!} \int_{\Delta^l} \det \{K_n(\lambda_j, \lambda_k)\}_{j,k=1}^l d\lambda_1 \dots d\lambda_l
\end{aligned}$$

D'après (4.41) c'est le déterminant de Fredholm de $(I - K_n(\Delta))$. D'où le résultat.

Nous énonçons la proposition suivante qui sera utile dans la preuve du theoreme ci dessous.

Lemme 11 [3]. Si \mathcal{E}_n est l'ensemble EGU, alors les polynômes orthogonaux $P_l^{(n)}$ se déduisent des polynômes d'Hermite $\{h_l\}_{l=1}^\infty$ (qui forment une base orthonormale pour le produit scalaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$) par la relation

$$P_l^{(n)}(\lambda) = \frac{n^{-1/4}}{\sqrt{2\omega}} h_l \left(\frac{\sqrt{n}}{2\omega} \lambda \right) \quad (4.43)$$

En particulier, le coefficient du polynôme $P_{l-1}^{(n)}$ dans la relation de récurrence (15.10) est

$$r_{l-1}^{(n)} = \omega \sqrt{2l/n} \quad (4.44)$$

Le théorème suivant donne le comportement asymptotique de la plus grande valeur propre pour l'ensemble \mathcal{H}_n

Théorème 19 [3]. Soit $M_n \in \mathcal{H}_n$ l'ensemble EGU et $\lambda_{\max}^{(n)} = \|M_n\|$. Alors

$$\lambda_{\max}^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 2\sqrt{2\omega}$$

Preuve: Comme $N_n(\Delta)$ converge presque sûrement vers

$$N(\Delta) = \frac{1}{4\pi\omega^2} \int_{\Delta \cap [-2\sqrt{2\omega}, 2\sqrt{2\omega}]} \sqrt{8\omega^2 - \lambda^2} d\lambda$$

qui est strictement positif sur tout intervalle Δ non vide contenu dans $[-2\sqrt{2}\omega, 2\sqrt{2}\omega]$, on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\max} \geq 2\sqrt{2}\omega$. Pour montrer que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\max} \leq 2\sqrt{2}\omega$, il suffit d'établir que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left[\lambda_{\max} \geq 2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon \right] < \infty \quad (4.45)$$

puis appliquer le lemme de **Borel-cantelli**.

En utilisant l'inégalité de Markov on obtient

$$\begin{aligned} P \left[\lambda_{\max} \geq 2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon \right] &= P \left[nN_n \left(\left(2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon, \infty \right) \right) \geq 1 \right] \\ &\leq E \left[nN_n \left(\left(2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon, \infty \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

D'après (4.35) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} E \left[nN_n \left(\left(2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon, \infty \right) \right) \right] &= n \int_{2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon}^{\infty} \rho_n(\lambda) d\lambda \\ &= n \frac{r_{n-1}^{(n)}}{n} \int_{2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon}^{\infty} \left[\psi_n^{(n)}(\lambda)' \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda) - \psi_n^{(n)}(\lambda) \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda)' \right] d\lambda \\ &= r_{n-1}^{(n)} \left[\psi_n^{(n)}(\lambda) \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda) \Big|_{2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon}^{\infty} - 2 \int_{2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon}^{\infty} \psi_n^{(n)}(\lambda) \left(\frac{d}{d\lambda} \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda) \right) \right] \\ &\leq 2r_{n-1}^{(n)} \int_{2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon}^{\infty} \left(\frac{d}{d\lambda} \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda) \right) \psi_n^{(n)}(\lambda) d\lambda \\ &\leq 2r_{n-1}^{(n)} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{d\lambda} \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda) \right)^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_{2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon}^{\infty} \left(\psi_n^{(n)}(\lambda) \right)^2 d\lambda \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.47)$$

On remplace $\psi_l^{(n)}(\lambda)$ pour $l = n-1, n$ par $\psi_l^{(n)}(x)$, $l = n-1, n$ ($x = \pm\sqrt{2l+1} \cosh \theta$, $0 < \varepsilon \leq \theta \leq 1/\varepsilon$) en utilisant la **proposition 18** [3] et le fait que $-\psi_l''(x) + x^2\psi_l(x) = (2l+1)\psi_l(x)$ [15], [1], on trouve en faisant une intégration par partie que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{d\lambda} \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda) \right)^2 d\lambda &= \frac{n}{4\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \psi_{n-1}^{(n)}(x) \right)^2 dx \\ &\leq \frac{n}{4\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{d^2}{dx^2} \psi_{n-1}^{(n)}(x) + x^2 \psi_{n-1}^{(n)}(x) \right) \psi_{n-1}^{(n)}(x) dx = \frac{(2n-1)n}{4\omega^2} \end{aligned} \quad (4.48)$$

De plus, la **proposition 21** (ii) [3] (**formules asymptotiques de Plancherel- Rotah**), implique

pour $n \rightarrow \infty$ avec $x = \frac{\sqrt{n}}{2\omega} \lambda$ que

$$\begin{aligned}
\int_{2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon}^{\infty} \left(\psi_n^{(n)}(\lambda) \right)^2 d\lambda &= \int_{\sqrt{2n} + \sqrt{n/2}\varepsilon}^{\infty} \psi_n^2(x) dx & (4.49) \\
&= O \left(n^{-1/4} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \exp \left\{ -(2n-1) \int_0^\theta \sinh^2 t dt \right\} \frac{d\theta}{\sinh \theta} \right) \\
&= O \left(n^{-1/4} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \exp \left\{ -(2n-1)\theta^3/3 \right\} \frac{d\theta}{\theta} \right) \\
&= O \left(n^{7/4} \varepsilon^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{2n}{3} \varepsilon^{3/2} \right\} \right)
\end{aligned}$$

D'après le lemme précédente, $r_{n-1}^{(n)} = \sqrt{2}\omega$ et on obtient de (4.46)-(4.49) que

$$P \left[\lambda_{\max} \geq 2\sqrt{2}\omega + \sqrt{2}\omega\varepsilon \right] = O \left(n^{7/4} \varepsilon^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{2n}{3} \varepsilon^{3/2} \right\} \right), \quad n \rightarrow \infty \quad (4.50)$$

Par le **Lemme de Borel - Cantelli** on en deduit le resultat. ■

Chapitre 5

Spectre des matrices de covariances

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier un algorithme qui permet de donner une estimation de la distribution spectrale de matrice de covariance en dimension très grande proposé et développé dans l'article [5]. L'étude porte sur une équation appelée **équation de Marčenko-Pastur**.

Soient X_1, \dots, X_n des vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^p i.i.d de matrice de covariance Σ_p . On appelle X la matrices dont les lignes sont les X_i . On appelle matrice de covariance empirique la matrice

$$S_p = (X - \bar{X})' (X - \bar{X}) / (n - 1)$$

Dans le cas où p est fixé et n tend vers l'infini, un résultat fondamental [20] montre que les valeurs propres de la matrice de covariance S_p sont des bons estimateurs des valeurs propres de Σ_p . Plus précisément, si $l_1 \geq l_2 \geq \dots$ sont les valeurs propres ordonnées de S_p et $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ les valeurs propres ordonnées de Σ_p alors [20]

$$\sqrt{n}(l_i - \lambda_i) \implies \mathcal{N}(0, 2\lambda_i^2), \quad i = 1, 2, \dots$$

pour X_i de loi normale et λ_i distinctes.

Considérons le cas où $\Sigma_p = Id_p$, les valeurs propres sont 1. Un résultat de [19] montre que si X_i sont i.i.d ayant le moment d'ordre quatre fini, et si $p/n \rightarrow \gamma$, alors

$$l_1 \longrightarrow (1 + \sqrt{\gamma})^2 \text{ p.s}$$

En particulier, l_1 n'est pas un estimateur convergeant de λ_1 .

Dans la suite nous énonçons un résultat fondamental : le théorème de Marčenko-Pastur. Il précise le comportement asymptotique des valeurs propres l_1, l_2, \dots et les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ par leurs distributions spectrales sous des conditions assez faibles (existence du moment d'ordre quatre).

5.2 Equation de Marčenko-Pastur

Pour les valeurs propres λ_i de la matrice de covariance Σ_p on associe la mesure spectrale H_p définie par :

$$dH_p(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \delta_{\lambda_i}(x)$$

Lorsque $\Sigma_p = Id_p$, on a $\lambda_i = 1$ et $dH_p = \delta_1$.

De même, on associe F_p la mesure spectrale des valeurs propres l_i de la matrice de covariance empirique S_p :

$$dF_p(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \delta_{l_i}(x)$$

Le but étant de déterminer le comportement asymptotique de la mesure spectrale H_p en lien avec celui de F_p .

Par exemple si on prend $dH_p = (1 - 1/p)\delta_1 + 1/p\delta_2$, cela signifie que la matrice de covariance Σ_p a une valeur propre égale à 2 et $(p - 1)$ égales à 1. Si $p \rightarrow \infty$, H_p converge faiblement vers H_∞ , avec $dH_\infty = \delta_1$, et donc à la limite, il y a une perte d'information sur la plus grande valeur propre 2 qui est bien présente dans H_p , pour tout p .

Plus précisément, le résultat confirme l'existence de la limite F_∞ de F_p qui est non aléatoire et fournit une relation entre F_∞ et H_∞ , la limite de H_p . Théoriquement, cette relation permet par résolution, si H_∞ est donnée, de calculer F_∞ cependant sa résolution est très compliquée. En statistique, à partir des observations, on construit la distribution spectrale empirique F_p et le but étant d'estimer H_∞ . La méthode utilise l'équation de Marčenko-Pastur entre F_∞ et H_∞ en construisant un estimateur \hat{H}_p de H_p ainsi que la transformé de Stieltjes.

Dans ce qui suit, comme les v.a. sont centrées nous prenons comme matrice de covariance empirique $S_p = X^*X/n$ où la matrice X est d'ordre $n \times p$. La transformé de Stieltjes m_{F_p} de la distribution spectrale F_p de S_p est définie par

$$m_{F_p}(z) = \int \frac{dF_p(u)}{u - z}$$

et on associe la transformé de Stieltjes v_{F_p} de $S_p^* = XX^*/n$:

$$v_{F_p}(z) = -\frac{1}{z} \left(1 - \frac{p}{n}\right) + \frac{p}{n} m_{F_p}(z)$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.1 *Théorème 20 [4][7].* Supposons que la matrice X s'écrit comme $X = Y\Sigma_p^{1/2}$, où Σ_p est une matrice $p \times p$ définie positive et Y est une matrice $n \times p$ d'entrées i.i.d (réelles ou complexes), avec $E(Y_{ij}) = 0$, $E(|Y_{ij}|^2) = 1$ et $E(|Y_{ij}|^4) < \infty$.

Soit H_p la distribution spectrale de la matrice de covariance Σ_p . Supposons que H_p converge faiblement vers une limite notée H_∞ . (et on note $H_p \Rightarrow H_\infty$). Alors, quand $p, n \rightarrow \infty$, et $p/n \rightarrow \gamma$, $\gamma \in (0, \infty)$, on a

1. $v_{F_p}(z) \rightarrow v_\infty(z)$ p.s, où $v_\infty(z)$ est une fonction déterministe.

2. $v_\infty(z)$ satisfait l'équation de Marčhenko-Pastur :

$$-\frac{1}{v_\infty(z)} = z - \gamma \int \frac{\lambda dH_\infty(\lambda)}{1 + \lambda v_\infty(\lambda)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^+, \quad \mathbb{C}^+ \triangleq \mathbb{C} \cap \{z : \text{Im } z > 0\} \quad (\text{M-P})$$

3. L'équation précédente admet une solution unique qui est la transformé de Stieltjes d'une certaine mesure.

Pour la résolution de l'équation de Marčhenko-Pastur, l'auteur [5] discrétise le problème pour avoir un algorithme plus précis pour l'estimation de H_p , à partir de l'échantillon des valeurs propres. L'approche est non paramétrique puisque aucune hypothèse n'est mise à priori sur la structure de la population des valeurs propres. Comme résultat de cet algorithme est d'obtenir une méthode graphique efficace sur la structure de la population des valeurs propres. Un deuxième résultat est celui d'avoir une estimation de la population des valeurs propres individuelles λ_i après une estimation de la mesure qui décrit la population des valeurs propres. Un dernier résultat est la représentation d'un rétrécissement non linéaire de l'échantillon des valeurs propres pour l'estimation de celles de la population.

Dans cette partie nous présentons un algorithme pour l'estimation de H_p , ainsi que les valeurs propres λ_i . Enfin nous donnons des résultats de quelques simulations.

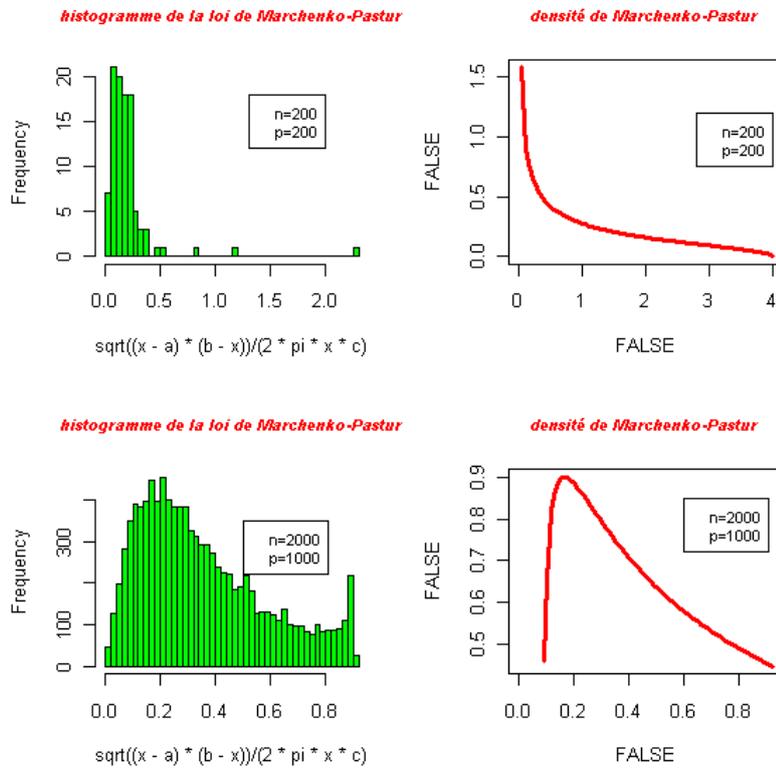
Dans la suite, on va considérer p comme une fonction de n avec la propriété que $p(n)/n \rightarrow \gamma$ et $\gamma \in (0, \infty)$. Pour simplifier on écrit tout simplement p au lieu de $p(n)$.

Marčhenko et Pastur (1967) ont montré que la distribution spectrale empirique, F_p , converge p.s vers une loi appelée *loi de Marčhenko-Pastur*, ayant pour densité ($\gamma \leq 1$)

$$f_\gamma(x) = \sqrt{(b-x)(x-a)} / (2\pi x \gamma) \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$$

Dans la Fig.3, on donne pour deux valeurs différentes de γ les graphes de la densité $f_\gamma(x)$. Le premier graphe donne l'histogramme des fréquences des valeurs propres pour $\gamma = p/n = 1$ ainsi que leur

densité de la loi de M-P et de même pour le deuxième graphe où $\gamma = p/n = 0.5$, avec $a = (1 - \gamma^{1/2})^2$, $b = (1 + \gamma^{1/2})^2$.



(Figure3)

Pour le cas où $\gamma > 1$, voir [34] [35] [8] (voir [4] pour l'ensemble de **Wishart** généralisé).

5.3 Algorithme et étude statistique

Il s'agit de déterminer la distribution spectrale H_∞ à partir de l'équation M-P :

$$-\frac{1}{v_\infty(z)} = z - \gamma \int \frac{\lambda dH_\infty(\lambda)}{1 + \lambda v_\infty(\lambda)}$$

On a $v_{F_p}(z) \rightarrow v_\infty(z)$. Par remplacement de $v_\infty(z)$ par $v_{F_p}(z)$ dans l'équation on obtient ainsi un écart entre les deux membres de l'équation M-P et le choix d'un "candidat" pour H_∞ c'est celui qui réalise le plus petit écart pour un ensemble de points $\{z_j\}_{j=1}^{J_n}$.

Plus précisément, la solution du problème est de déterminer $\hat{H}_p = \hat{H}_\infty$:

$$\hat{H}_p = \hat{H}_\infty := \arg \min_H L \left(\left\{ \frac{1}{v_{F_p}(z_j)} + z_j - \frac{p}{n} \int \frac{\lambda dH(\lambda)}{1 + \lambda v_{F_p}(z_j)} \right\}_{j=1}^{J_n} \right)$$

où L est une fonction de perte et $\gamma = \frac{p}{n}$ et avec un choix des points $\{z_j\}_{j=1}^{J_n}$ ([5] Annexe).

5.3.1 Discrétisation

Dans le problème de minimisation précédent nous allons remplacer l'intégrale par une somme.

Tout d'abord on a :

$$dH(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \delta_{\lambda_i}(x) \simeq \sum_{k=1}^K w_k \delta_{t_k}(x) \quad (5.1)$$

où $\{t_k\}_{k=1}^K$ des points qu'on choisit et w_k des poids vérifiant $\sum_{k=1}^K w_k = 1$ et $w_k \geq 0$

Le problème d'optimisation précédent se transforme comme suit : trouver H revient à la recherche des poids w_k . Après discrétisation de l'intégrale dans l'équation (M-P), on aura :

$$\int \frac{\lambda dH(\lambda)}{1 + \lambda v} \simeq \sum_{k=1}^K w_k \frac{t_k}{1 + t_k v}$$

Par suite trouver la mesure H qui satisfait approximativement (M-P) est équivalent à trouver un ensemble de poids $\{w_k\}_{k=1}^K$ vérifiant :

$$-\frac{1}{v_\infty(z_j)} \simeq z_j - \frac{p}{n} \sum_{k=1}^K w_k \frac{t_k}{1 + t_k v_\infty(z_j)}, \quad \forall j$$

Par remplacement de v_∞ par v_{F_p} cela revient à trouver $\{w_k\}_{k=1}^K$ tel que :

$$-\frac{1}{v_{F_p}(z_j)} \simeq z_j - \frac{p}{n} \sum_{k=1}^K w_k \frac{t_k}{1 + t_k v_{F_p}(z_j)}, \quad \forall j$$

C'est un problème linéaire en w_k .

Posons e_j les erreurs suivantes :

$$e_j = \frac{1}{v_{F_p}(z_j)} + z_j - \frac{p}{n} \sum_{k=1}^K w_k \frac{t_k}{1 + v_{F_p}(z_j) t_k}$$

Il y a deux sources d'erreurs : la première vient de la discrétisation de l'intégrale qui comporte H_∞ , la deuxième vient de la substitution de v_∞ une quantité non aléatoire asymptotique, par v_{F_p} . La quantité

aléatoire e_j est en général complexe.

Nous prenons l'erreur " L_∞ " qui consiste à trouver les poids w_k tels que :

$$\text{Minimiser } \max_{j=1,\dots,J_n} \max \{ |\text{Re}(e_j)|, |\text{Im}(e_j)| \}$$

Ce qui revient au problème de l'optimisation convexe suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{(w_1, \dots, w_k, u)} u \\ \forall j, -u & \leq \text{Re}(e_j) \leq u \\ \forall j, -u & \leq \text{Im}(e_j) \leq u \end{aligned}$$

On a donc un problème linéaire dont les inconnues sont (w_1, \dots, w_k) et u . Nous présentons des simulations au paragraphe suivant pour illustrer cet algorithme.

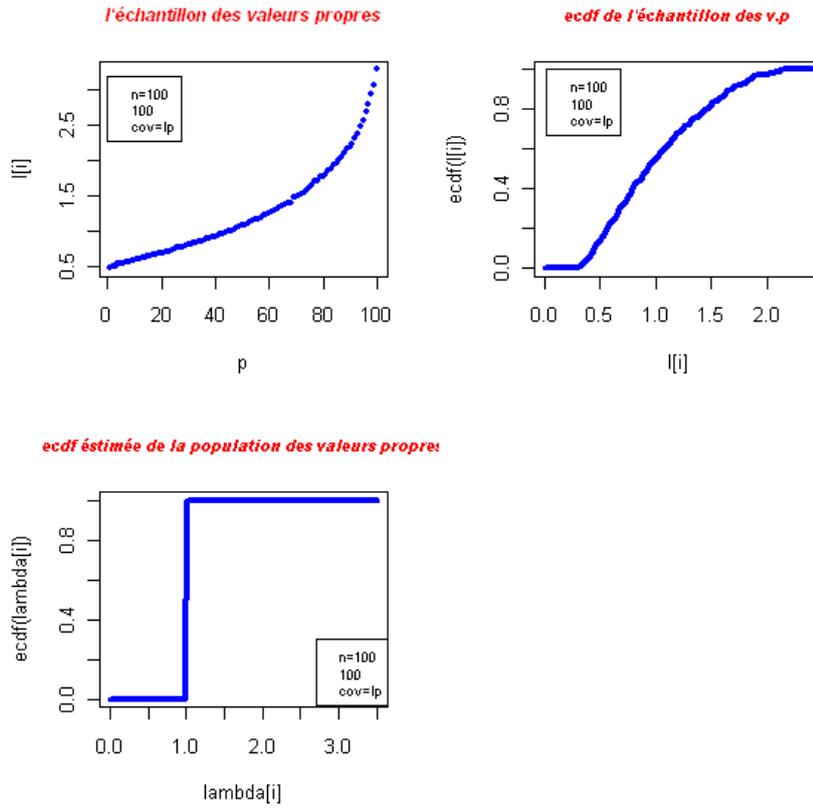
5.4 Simulation

Nous présentons la méthode sur trois cas de matrices de covariance différentes. Le premier cas est $\Sigma_p = Id_p$. Le second cas où Σ_p a la moitié de ses valeurs propres égales à 1 et l'autre moitié égales à 2. Le dernier cas, la matrice Σ_p est une matrice Toeplitz [21].

Nous avons pu réaliser les graphes suivant en utilisant le logiciel R.

5.4.1 Cas $\Sigma_p = Id_p$

Dans ce cas, la loi de Marčenko-Pastur prévoit que les valeurs propres l_i sont distribuées sur l'intervalle $\left[\left(1 - \sqrt{p/n}\right)^2, \left(1 + \sqrt{p/n}\right)^2 \right]$ au lieu d'être concentré en 1. Dans Fig.4, l'algorithme donne le graphe de \hat{H}_p (en bas à gauche) qui est très proche de H_p la distribution spectrale de $\Sigma_p = Id_p$. Ainsi il fournit une très bonne approximation de H_p . Ici, les matrices de covariances $\Sigma_p = I_{100}$ et les matrices X sont de taille 500×100 d'entrée i.i.d réelles de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Nous remarquons ici que l'estimateur distribution spectrale empirique (graphe en haut à droite) donne des résultats moins satisfaisants que l'approximation par \hat{H}_p



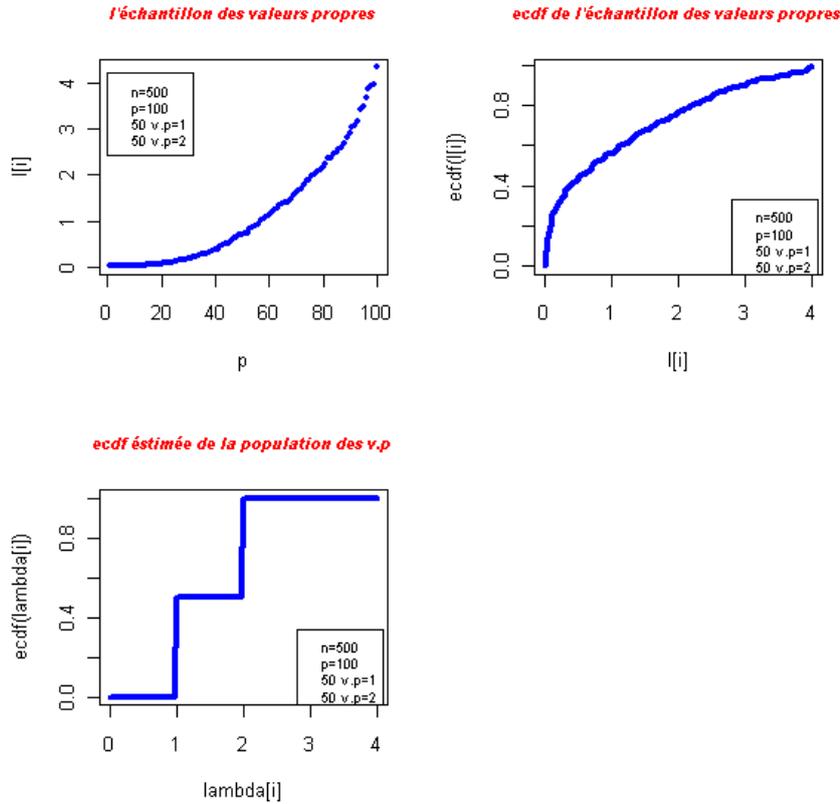
(Figure4)

5.4.2 Cas $H_p = .5\delta_1 + .5\delta_2$

Le second cas, la moitié des valeurs propres de Σ_p égales à 1 et l'autre moitié égales à 2.

La loi de Marčenko-Pastur prévoit que les valeurs propres l_i sont distribuées sur l'intervalle $\left[\left(1 - \sqrt{p/n}\right)^2, \left(1 + \sqrt{p/n}\right)^2 \right]$ (Fig.5) au lieu d'être concentré en 1 et 2. L'algorithme donne le graphe de \hat{H}_p (en bas à gauche) qui est très proche de H_p la distribution spectrale de Σ_p de taille 100×100 diagonales. Ainsi il fournit une très bonne approximation de H_p . Les matrices Y sont de taille 500×100 d'entrées i.i.d suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Nous remarquons que l'estimateur distribution spectrale empirique

(graphe en haut à droite) donne des résultats moins satisfaisants que l'approximation par \hat{H}_p .



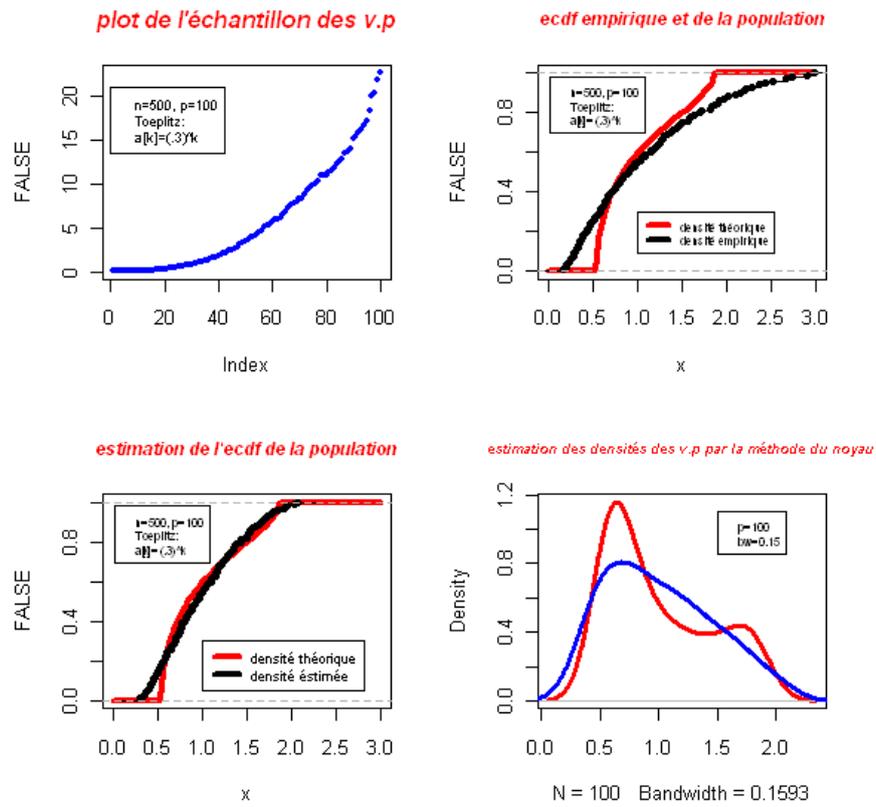
(Figure5)

5.4.3 Le cas de matrices de covariance Toeplitz

On rappelle qu'une matrice Toeplitz T [21] est une matrice telle que ses éléments $T_{ij} = t(i - j)$ où t est une fonction réelle. On prend dans ce cas des matrices Toeplitz d'entrées $T_{ij} = (0.3)^{|i-j|}$. Les simulations portent sur des matrices de covariance Σ_p de taille 100×100 . Les matrices Y sont de taille 500×100 d'entrées i.i.d réelles de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

L'algorithme donne le graphe de \hat{H}_p (Fig6 en bas à gauche) qui est très proche de H_p la distribution spectrale de Σ_p . Ainsi il fournit une très bonne approximation de H_p . Ici nous remarquons que l'estimateur distribution spectrale empirique (graphe en haut à droite) donne des résultats aussi bons que l'approximation par \hat{H}_p (calcul d'erreur). On donne aussi une estimaton de la densité théorique par

la méthode du noyau (Le noyau d'Epashnikov, pas=0.1593)



(Figure6)

Conclusion

Nous avons fait une étude spectrale sur des ensembles de matrices aléatoires de grande dimension: ensemble unitaire gaussien, ensemble orthogonal gaussien et l'ensemble symplectique gaussien. L'étude porte sur le comportement asymptotique de la distribution spectrale $N_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\lambda_{i,n} < \lambda\}}$ où $\lambda_{i,n}$ sont les valeurs propres de ces matrices

pour des ensembles de matrices aléatoires et aussi en liaison avec l'équation de Shrodinger.

La détermination de la distribution spectrale limite est obtenue grâce à un algorithme développée par El-Karoui. Nous illustrons cet algorithme par des simulations numériques et les résultats sont très probants.

Bibliographie

- [1] Faraut J. **Introduction à L'analyse des Matrices Aléatoires**. Octobre 2001.
- [2] Mehta M.L. **Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels**, Academic Press, New York-London (1967).
- [3] Antoine L, Pastur L. **Matrices aléatoires: Statistique asymptotique des valeurs propres**. Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 36 (2002), p.135-164.
- [4] Rao R. **The mathematics of infinite random matrices. The Stieltjes Transform Based Approach**. Handout # 4, September 2004. 18.338.J/16.394.J.
- [5] El Karoui Nouredine . **The Spectrum Estimation for Large Dimensional Covariance Matrices Using Random Matrix Theory**. Department of Statistics, University of California, Berkeley, February 2008.
- [6] Øyvind Ryan. **The Statistics of Eigenvalues Distributions in Large Random Matrices**, Octobre 2009.
- [7] Pastur.L.A. **On the Spectrum of Random Matrices**. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Vol.10, p.102-112, January, 1972.
- [8] Marčenko.V.A and Pastur.L. **Distribution of Eigenvalues for Set of Random Matrices**. Mat. Sbornik., Tome 72, 114 (1967), No.4.
- [9] Pécché Sandrine. **The Largest Eigenvalue of Hermitian Random Matrices: a Moment Approach**. 03/25-30/2007, UC Berkley. Workshop on Free Probability and large N limit.
- [10] Baik.Jinho. **Eigenvalue of Large Sample covariance Matrices**; Lecture 1. University of Michigan, Ann Arbor, February 2006.
- [11] Deift Percy. **Orthogonal Polynomials and Random Matrices: a Riemann Hilbert Approach**. Courant Institute of Mathematical sciences, New York university, c1999.

- [12] Erdős László, Schlein Benjamin and Horng -Tzer Yau. **Local Semicircle Law and Complete Delocalisation for Wigner Random Matrices**. Institute of Mathematics, University of Munich, Theresienstr. 39, D-80333, Munic, Germany, March,2008.
- [13] Dunford.N and Schwartz.J.T. **Linear Operator**. VolIII. Intescience, New York 1971.
- [14] Kunz Hervé. **Matrices Aléatoires en Physique**. Presses Techniques et Universitaires Romandes. CH-1015 Lausanne. 1998.
- [15] Pólya.G, Szegő.G. **Problems and Theorems in Analysis**. Vol 1. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1979.
- [16] Hua.L.K. **Harmonic Analysis of Functions of several Complex Variables in the Classical Domains**. American Mathematical Society Providence, Rhose Island, 1963.
- [17] W.Silverstein Jack and Choi Sang. **Analysis of the Limiting Spectral Distribution of Large Dimensional Random Matrices**. Department of Mathematics, North Carolina State University, 1995.
- [18] Baik.J and Silverstein.J.W. **Eigenvalues of Large Sample Covariance Matrices of Spicked Population Models**. July 15, 2005.
- [19] Geman.S. **A Limit Theorem for the Norm of Random Matrices**. Ann. Probab.,8(2):p-252-261, 1980.
- [20] Anderson, T.W. (1963). **Asymptotic Theory for Principal Component Analysis**. Ann. Math. Statist. 34, p-122-148.
- [21] Böttcher.A and Silbermann.B. **Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices**. Univer-sitext. Springer-Verlag, New York. 1999.
- [22] Boyd.S and Vandenberghe.V. **Convex Optimization**. Cambridge University Press, Cambridge. 2004.
- [23] Pasur.L and Figotin.A. **Spectra of Random and Almost-Periodic Operators**.p.90-200. ISBN 3-540-50622-5 Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1992.
- [24] Reed.M, Simon.B (1972-1979). **Methods of Modern Mathematical Physics**.
- [25] Akhiezer.N.I. **The Classical Moment Problem and some Related Questions in Analysis**. New York, 1965, Translated by N. Kemmer.

- [26] Courant.R et Hilbert.D. **Methods of Mathematical Physics**. Voll.Interscience 1953
- [27] M.Loève. **Probability Theory 1**. 4th edition. Springer Verlag, 1963.
- [28] Geronimo.J.S and Hill.T.P. (2003). **Necessary and Sufficient Condition that the Limit of Stieltjes Transform is a Stieltjes Transform**. J. Approx. Theory **121**, p:252-261.
- [29] Durrett.R. **Probability Theory and Examples**. 2nd Edition. 1996.
- [30] Garbaczewski.P. **v Schrödinger's Interpolation Problem Through Feynmann-Kac Kernels**. University of Borna 9,50-204, Wroclaw, Poland. November 22, 1995.
- [31] Stone. **Methods of Mathematical Physics 1**. 2001-2002.
- [32] Pastur.L.A. **Spectra of Random Self Adjoint Operators**. Russian Mathematical Surveys. 1973.
- [33] Rakotoson.J.E, Rakotoson.J.M. **Analyse Fonctionnelle Appliquée aux Equations aux Dérivées Partielles**. Presses Universitaires de France, 1999.
- [34] Bai.Z.D. (1999). **Methodologies in Spectral Analysis of Large-Dimensional Random Matrices**, p-611-677.
- [35] Johnstone.I. (2001). **On the Distribution of the Largest Eigenvalue in Principal Component Analysis**. p-295-327.
- [36] Doob.J.L. **Stochastic Processes**. John Wiley and Sons. New York-London 1963.
- [37] Coddington.E.A and Levinson.N. **Theory of Ordinary Differential Equation**. McGraw-Hill, New York 1955.
- [38] Henrici.P. **Applied and Computational Complex Analysis**, vol.2. Wiley, 1977.