Table des Matières

Introduction

La théorie de Ginzburg-Landau fournit un modèle très utilisé dans l'étude des phénomènes de transition de phase qui apparaissent dans les supraconducteurs et les superfluides.

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à décrire des résultats mathématiques sur le modèle bidimensionnel de Ginzburg-Landau dont voici l'énoncé:
Soient G un domaine borné, régulier et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, u une fonction de G à valeur dans $\mathbb{C}$ et pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère l'énergie du type Ginzburg-Landau suivante:

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_G \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(p^2 - |u|^2)^2\right),$$

où $p \in L^\infty(G)$ une fonction non nécessairement régulière et telle que

$$0 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < \infty, \text{ p.p } x \in G,$$

avec α et β sont des constantes positives.
Ce type de problème a été proposé par J. Rubinstein [14] comme un modèle de Ginzburg-Landau avec un problème de l'ancrage (pinning) des vortex, étudié par N. André et al. dans [1].

Nous présentons ici l'étude de L. Lassoued et P. Mironescu [11], ils ont étudié le problème de minimisation de l'énergie de Ginzburg-Landau sous la contrainte

$$H_g^1 = \left\{u \in H^1(G, \mathbb{C});\ u|_{\partial G} = g\right\},$$

avec $g : \partial G \to S^1$ une fonction régulière de classe C^1.
Ce modèle est une généralisation d'un problème traité par F. Béthuel et al. ([3], [4]), dans lequel p est identiquement égal à 1 et G est un domaine étoilé.

Pour p assez régulière, N. André et I. Shafrir [2] ont proposé la substitution $u = pv$. L'étude deviendra intéressante lorsque p n'est pas régulière, d'où l'intérêt de ce mémoire.

La principale difficulté en réitérant l'approche faite dans [4], résulte du fait que l'estimation
$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_G \left(p^2 - |u_\varepsilon|^2\right)^2 \leq C;\ \ 0 < \varepsilon < 1,$$
ne soit pas valable lorsque p est différent de 1. En revanche, on obtiendra l'inégalité inverse
$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_G \left(p^2 - |u_\varepsilon|^2\right)^2 \geq \frac{C}{\varepsilon};\ \ 0 < \varepsilon < 1,$$
pour les minimiseurs de E_ε dans H_g^1.

Ainsi, la construction de mauvais disques n'est plus évidente. Pour surmonter cette difficulté, L. Lassoued et P. Mironescu [11] ont remplacé la substitution $u = pv$ par $v_\varepsilon = u_\varepsilon \backslash U_\varepsilon$ où U_ε est un minimiseur de E_ε dans H_1^1. Cette substitution nous conduit à l'étude d'une énergie classique (qui correspond à $p = 1$). En fait, on obtiendra les résultats de convergence pour u_ε par l'étude de U_ε et v_ε séparément.

On s'intéresse au comportement asymptotique des minimiseurs qui dépend fortement du degré topologique de la fonction g par rapport à ∂G, que l'on notera par d. On étudiera cette analyse asymptotique selon le cas $d = 0$ ou $d \neq 0$.

Ce mémoire est constitué quatre chapitres organisés comme suit:

Le chapitre 1 est consacré aux rappels de quelques notions. En premier lieu, nous rappelons quelques définitions et propriétés sur le degré topologique qui joue un rôle primordial dans l'étude asymptotique des minimiseurs. Ensuite, on présente l'essentiel des résultats sur les espaces de Sobolev, l'énoncé de quelques théorèmes qui seront utiles dans notre travail. Pour plus, de détails le lecteur est renvoyé aux références [12], [10] et [7].

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau E_ε, en l'occurrence, l'existence des minimiseurs de E_ε dans H_g^1 ainsi que quelques unes de leurs propriétés de ces minimiseurs. Cette étude nous aidera également à prouver la convergence de ces minimiseurs lorsque $\varepsilon \to 0$.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du comportement asymptotique des minimiseurs selon les valeurs du degré de la donnée au bord.

Dans le dernier chapitre, on traite un problème auxiliaire, on y étudie le comportement asymptotique et on montre que les singularités, à savoir les vortex (en physique, on dit des tourbillons) obtenues dans le chapitre précédent qui minimisent une énergie dite énergie renormalisée.

Notations

Par soucis de lisibilité, il est utile de définir dès à présent les termes et notations qui seront utilisés par la suite. En premier lieu, on introduit les notations suivantes:

G: un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$, ∂G: frontière de G, $\overline{G} = G \cup \partial G$.

$|A|$: mesure (de Lebesgue) de l'ensemble A.

p.p: presque partout.

$|x|= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$B_R(x_0) := \{x; |x - x_0| < R\}$: boule ouverte, centrée en x_0 de rayon R.

On note par $\operatorname{dist}(X, Y)$, la distance entre X et Y (qui peuvent être des points ou des ensembles).

∇u: désigne le gradient de la fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T$.

$\operatorname{div}\underline{u}$: désigne la divergence d'un vecteur $\underline{u}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\operatorname{div}\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

Δu: désigne le laplacien de la fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$; $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

$g_\tau := \frac{\partial g}{\partial \tau}$: la dérivée de la fonction g par rapport à la tangente τ.

Soient a, $b \in \mathbb{R}^2$ avec $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, on définit le produit extérieur par

$$a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Espaces fonctionnels:

$C(G)$: l'espace des fonctions continues sur G.

$C_c(G)$: l'espace des fonctions continues à support compact dans G.

$C^k(G)$: l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur G ($k \in \mathbb{N}$).

$C^k\left(\overline{G}\right)$: l'espace des fonctions u de $C^k(G)$ telles que pour chaque multi-indice α; $|\alpha|\leq k$, l'application $x \in G \mapsto D^\alpha u(x)$ se prolonge continûment sur $\overline{G}$.

$C^\infty(G) = \underset{k\geq 0}{\cap} C^k(G)$.

$C_c^\infty(G) = C^\infty(G) \cap C_c(G) = \mathcal{D}(G)$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$: l'espace des distributions.

$C^{0,\alpha}(G) = \left\{ u \in C^0(G);\ \sup\limits_{x,y\in G} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$ avec $0<\alpha<1$.

$C^{k,\alpha}(G) = \left\{ u \in C^k(G);\ D^\beta u \in C^{0,\alpha}(G),\ \forall\beta;\ |\beta| \leq k \right\}$.

$C_{loc}^{0,\alpha}(G) = \left\{ u;\ \sup\limits_{x,y\in K} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty, \text{ pour tout compact } K\ \subset G \right\}$.

$C_{loc}^{k,\alpha}(G) = \left\{ u;\ D^\beta u \in C_{loc}^{0,\alpha}(G),\ \forall\beta;\ |\beta| \leq k \right\}$.

Par la suite, on notera:

$L^1(G) = \left\{ u : G \to \mathbb{R} \text{ intégrable telle que} \int\limits_G |u(x)|\, dx < +\infty \right\}$.

$L_{loc}^1(G)$: l'espace des fonctions localement intégrables sur G.

$L^p(G) = \left\{ u : G \to \mathbb{R}_+;\ u \text{ mesurable et } |u|^p \in L^1(G) \right\}$, $1<p<\infty$, muni de la norme:

$$\|u\|_{L^p(G)} = \left[\int\limits_G |u(x)|^p\, dx \right]^{1/p}.$$

$L^\infty(G) = \{u : G \to \mathbb{R}_+ \text{ mesurable et il existe } C \text{ tel que } |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } G\}$, dont la norme est: $\|u\|_{L^\infty(G)} = \inf\{c;\ |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } G\}$.

On désigne les espaces de Sobolev par:

$$W^{1,p}(G) = \left\{ u \in L^p(G) \left| \begin{array}{c} \exists\ g_1, ..., g_n \in L^p(G); \\ \int\limits_G u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int\limits_G \boldsymbol{g}_i\varphi \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(G) \quad \forall i = 1,2 \end{array} \right. \right\}.$$

On note: $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$; $i = \overline{1,n}$ (la dérivation est au sens des distributions).

$H^1(G) = W^{1,2}(G) := \left\{ u \in L^2(G); \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(G),\ \forall i = \overline{1,n} \right\}$, muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(G)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{H^1(G)}} = \left[\int\limits_G \left(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2\right) dx \right]^{1/2}.$$

Cette norme est issue d'un produit scalaire noté $(.,.)_{H^1}$ et défini par:

$(u,v)_{H^1} := \int\limits_G \nabla u(x).\nabla v(x)\ dx + \int\limits_G u(x).v(x)\ dx.$

$H^1_{loc}(\Omega) := \left\{\ u \in H^1\left(K\right); \text{ pour tout compact } K \subset G\right\}.$

$H^m\left(G\right) := \left\{u \in L^2(G);\ D^\alpha u \in L^2(G);\ \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m\right\}$ où m est un entier strictement positif. On le munit de la norme: $\|u\|_{H^m(G)} = \left(\sum\limits_{|\alpha|\leq m} \int\limits_G |D^\alpha u|^2 dx\right)^{1/2}.$

Soient $m \geq 2$ un entier et soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit par récurrence:

$W^{m,p}(G) := \left\{u \in W^{m-1,p}(G);\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(G),\ \forall i = \overline{1,n}\right\}.$

Il revient au même d'introduire:

$W^{m,p}(G) := \{u \in L^p(G);\ D^\alpha u \in L^p(G),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m\}$, que l'on munit de la norme:

$$\|u\|_{W^{m,p}(G)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int\limits_G |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p}.$$

On pose: $H^m\left(G\right) := W^{m,2}(G).$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note L^p, H^1, H^2, $W^{1,2}$ au lieu de $L^p(G)$, $H^1(G)$, $H^2(G)$, $W^{1,2}(G)$.

Dans la suite, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ seront constamment identifiés et C désigne toujours une constante strictement positive, dont la valeur peut changer suivant les énoncés.

Chapitre 1

Préliminaire

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des définitions et résultats utilisés tout au long de ce travail.

Dans ce qui suit nous allons étudier le relèvement dans certains espaces de Sobolev qui sera nécessaire dans la définition du degré topologique et la résolution de l'équation de Ginzburg-Landau qui figure au chapitre 3.

1.1 Relèvement des fonctions à valeurs sur le cercle $\mathbf{S}^1$

Soient $G \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u : G \to S^1$ une fonction mesurable. Un relèvement de u est une fonction mesurable $\varphi : G \to \mathbb{R}$ telle que $u(x) = e^{i\varphi(x)}$, pour presque tout $x \in G$.
Une question naturelle est de savoir s'il existe un relèvement φ qui préserve la régularité de la fonction u. Par exemple, si G est simplement connexe et u est continue (resp. dans $C^k(G, \mathbb{R})$).

Lemme 1.1 *Soit G un ouvert borné, régulier et simplement connexe, alors*
Si $u \in C(\overline{G}, S^1)$, il existe $\varphi \in C(\overline{G}, \mathbb{R})$ tel que $u = e^{i\varphi}$, avec unicité modulo 2π.

Même question dans les espaces de Sobolev.

Théorème 1.1 (Béthuel et Zheng) *Soit $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un ouvert borné, régulier et simplement connexe, alors*
i) Si $p \geq 2$, pour tout $u \in W^{1,p}(G, S^1)$, il existe un relèvement $\varphi \in W^{1,p}(G, \mathbb{R})$ tel que $u = e^{i\varphi}$.

De plus, la fonction φ est unique, modulo 2π.

ii) Si $1 \leq p < 2$, alors il existe $u \in W^{1,p}(G, S^1)$ qui n'admet pas de relèvement dans $W^{1,p}(G, \mathbb{R})$.

1.2 Degré topologique

1.2.1 Définitions

• Si g est une fonction continue, le degré topologique de g: est le nombre de rotations que l'image de g fait autour de 0 quand on parcourt ∂G une fois, tout en laissant G à gauche du sens du parcours. On compte avec +/- les rotations en sens direct/horaire.

• Soit $G \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, régulier et simplement connexe. Pour fixer les idées, supposons $G = B_1$. Soit $g : S^1 \to S^1$ une fonction continue. On considère l'application $\tilde{g} : \mathbb{R} \to S^1$ définie par $\tilde{g}(t) = g(e^{it})$. Donc $\tilde{g}$ est continue. Il existe une fonction continue $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{g} = e^{i\Psi}$. On observe ensuite que

$$\begin{aligned} e^{i\Psi(t+2\pi)} &= g(e^{i(t+2\pi)}) = g(e^{it}) \\ &= e^{i\Psi(t)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

alors, on a

$$\Psi(t+2\pi) - \Psi(t) \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme Ψ est continue, il existe un unique entier k tel que, pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(t+2\pi) - \Psi(t) = 2k\pi.$$

On pose par définition,

$$\deg(g, S^1) = k.$$

Il est claire que le degré ne dépende pas du choix de Ψ puisque deux relèvements différent par une constante.

1.2.2 Exemples

1) Si g est une fonction constante, alors $\deg(g, \partial G) = 0$.

(l'image de g ne bouge pas quand on parcourt ∂G)

2) Si $G = B_1$ et $g(x) = x$, alors $\deg(g, \partial G) = 1$.

3) Si $G = B_1$ et $g(z) = z^2$, alors $\deg(g, \partial G) = 2$.

1.2.3 Quelques propriétés du degré topologique

On commence par les propositions suivantes, qui nous utiles par la suite

Proposition 1 *Si* g*,* $h \in C(\partial G, S^1)$*, alors*

$$\deg(gh) = \deg g + \deg h,$$
$$\deg(g/h) = \deg g - \deg h.$$

Preuve: On va faire la démonstration dans le cas $G = B_1$.

On a

$$g(e^{it}) = e^{i\Psi(t)} \quad \text{et} \quad h(e^{it}) = e^{i\zeta(t)}.$$

Soit $k = \deg g$ et $l = \deg h$, alors, par la définition du degré, on a

$$\Psi(t + 2\pi) - \Psi(t) = 2k\pi$$
$$\zeta(t + 2\pi) - \zeta(t) = 2l\pi,$$

donc

$$(\Psi + \zeta)(t + 2\pi) - (\Psi + \zeta)(t) = 2(k + l)\pi,$$

et

$$(gh)(e^{it}) = e^{i(\Psi+\zeta)(t)}.$$

Il en résulte que

$$\deg(gh) = k + l = \deg g + \deg h.$$

L'autre égalité se montre de la même façon. Dans ce cas il suffit de montrer que

$$\deg(1/h) = -\deg h. \quad \blacksquare$$

Proposition 2 *Si* $g \in C^1(\partial G, S^1)$*, alors*

$$\deg g = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial G} g \wedge g_\tau. \tag{1.1}$$

Preuve: Soit $G = B_1$, en paramétrant g par rapport à l'angle $\theta \in (0, 2\pi)$, alors, on obtient

$$\tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial G} g \wedge g_\tau = \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\theta) \wedge \tfrac{dg}{d\theta}(\theta) d\theta = \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i\Psi(\theta)} \wedge \tfrac{d}{d\theta}[e^{i\Psi(\theta)}] d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi'(\theta) d\theta = \tfrac{\Psi(2\pi)-\Psi(0)}{2\pi} = \deg(g, S^1). \quad \blacksquare$$

On a utilisé le fait que

$$\begin{aligned}
e^{i\Psi(\theta)} \wedge \frac{d}{d\theta}[e^{i\Psi(\theta)}] &= (\cos\Psi(\theta), \sin\Psi(\theta)) \wedge (-\Psi'(\theta)\sin\Psi(\theta), \Psi'(\theta)\cos\Psi(\theta)) \\
&= \Psi'(\theta)(\cos^2\Psi, \sin^2\Psi) = \Psi'(\theta).
\end{aligned}$$

La formule (1.1) du degré coincide avec celle de l'indice utilisée en analyse complexe pour une fonction $g \in C^1(S^1, \mathbb{C}\backslash\{0\})$:

$$\mathrm{ind}(g) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S^1}\frac{g'}{g} = \frac{1}{2i\pi}\int_{S^1}\frac{g_\tau}{g}.$$

En effet, il suffit d'écrire g sous la forme polaire

$$g(\theta) = \rho(\theta)e^{i\psi(\theta)};\ \rho(\theta) \neq 0.$$

Donc

$$g'(\theta) = (\rho' + i\varphi'\rho)e^{i\psi(\theta)}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{S^1}\frac{g'}{g} &= \frac{1}{2i\pi}\left[\int_{S^1}\frac{\rho'}{\rho} + i\int_{S^1}\varphi'\right] \\
&= \frac{1}{2i\pi}\left[\log\rho(2\pi) - \log\rho(0)\right] + \frac{1}{2\pi}\left[\varphi(2\pi) - \varphi(0)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\varphi(2\pi) - \varphi(0)\right] = \deg(g, S^1).
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $|g|= 1$, la formule précédente revient à

$$\mathrm{ind}(g) = \deg(g, \partial G) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S^1}\overline{g}g_\tau.$$

Le résultat suivant donne une autre formule pour calculer le degré.

Lemme 1.2 *Soient G un domaine borné, régulier, $g : \partial G \to S^1$ une application de classe C^2 et $u \in C^2(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$ telle que $u = g$ sur ∂G. Alors*

$$\deg g = \frac{1}{\pi}\int_G u_x \wedge u_y dxdy. \tag{1.2}$$

Preuve: Pour fixer les idées, supposons $G = B_1$. La preuve se fait en deux étapes

1$^{\text{ère}}$étape: L'intégrale ne dépend pas de u

Plus précisément, si v, $w \in H^1(G, \mathbb{R}^2)$ et $v = w = g$ sur ∂G, alors
$$\int\limits_G v_x \wedge v_y dxdy = \int\limits_G w_x \wedge w_y dxdy.$$
En effet, soit $f \equiv v - w \in H_0^1(G, \mathbb{R}^2)$, alors, on a

$$\begin{aligned}\int\limits_G v_x \wedge v_y &= \int\limits_G (f_x + w_x) \wedge (f_y + w_y) \\ &= \int\limits_G f_x \wedge f_y + \int\limits_G w_x \wedge w_y + \int\limits_G (f_x \wedge w_y + w_x \wedge f_y).\end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que
$$\int\limits_G (f_x \wedge w_y + w_x \wedge f_y) = 0. \qquad (*)$$
En effet, en prenant dans cette intégrale $w = f$, on obtient
$$\int\limits_G (f_x \wedge f_y) = 0,$$
d'où il résulte que
$$\int\limits_G v_x \wedge v_y = \int\limits_G w_x \wedge w_y.$$
Par densité, il suffit de vérifier $(*)$ pour $f \in C_c^\infty(G, \mathbb{R}^2)$ et $w \in C^\infty(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$. Dans ce cas, en utilisant le fait que le produit extérieur soit anticommutatif et en appliquant la formule de Green, on obtient
$$\begin{aligned}\int\limits_G (f_x \wedge w_y + w_x \wedge f_y) &= \int\limits_G [(f \wedge w_y)_x + (w_x \wedge f)_y] \\ &= \int\limits_{\partial G} (f \wedge w_y)\nu_x + \int\limits_{\partial G} (w_x \wedge f)\nu_y = 0,\end{aligned}$$
puisque $f = 0$ sur ∂G.

2$^{\text{ème}}$étape: Démonstration de l'identité (1.2) lorsque $u \in C^\infty(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$.

En utilisant le résultat de l'étape précédente, on peut supposer que $u \in C^\infty(\overline{G})$ et d'aprés la formule de Green, on obtient
$$\int\limits_G u_x \wedge u_y dxdy = \tfrac{1}{2}\int\limits_G [(u \wedge u_y)_x + (u_x \wedge u)_y]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{\partial G} [(u\wedge u_y)\nu_x + (u_x \wedge u)\nu_y] \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial G} u\wedge (u_y\nu_x - u_x\nu_y) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial G} u\wedge (u_x\tau_x + u_y\tau_y) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial G} u\wedge u_\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial G} g\wedge g_\tau = \pi \deg g.
\end{aligned}
$$

On a utilisé ci-dessus les observations suivantes:

(i) $u = g$ sur ∂G, donc $u_\tau = u_\tau$ sur ∂G;

(ii) $\tau_x = -\nu_y$ et $\tau_y = \nu_x$ sur ∂G. ∎

Proposition 3 *On a* $\deg(g, \partial G) = 0$*, si et seulement si, il existe* $\eta \in H^{1/2}(\partial G, \mathbb{R})$ *telle que* $g = e^{i\eta}$.

Preuve: Soit $G = B_1$. Supposons d'abord que $\deg(g, \partial G) = 0$. Par définition, $\Psi(t + 2\pi) \equiv \Psi(t)$ p.p sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que la fonction $\eta(e^{it}) = \Psi(t)$ et satisfait $g = e^{i\eta}$. De plus, η ne dépend pas du choix de t et $\eta \in H^{1/2}(\partial G, \mathbb{R})$.

Réciproquement, soit $\eta \in H^{1/2}(\partial G, \mathbb{R})$ telle que $g(e^{it}) = e^{i\eta(e^{it})}$, alors

$$\Psi(t) = \eta(e^{it}) \in H^{1/2}$$

et

$$\Psi(t + 2\pi) = \Psi(t) \quad \text{p.p sur } \mathbb{R}.$$

Il en résulte que $\deg(g, \partial G) = 0$. ∎

Le théorème suivant va formuler un résultat important du degré topologique

Théorème 1.2 *Soit* $G \subset \mathbb{R}^2$ *un domaine borné, régulier et simplement connexe et* $g \in H^{1/2}(\partial G, S^1)$*, alors*

$$H^1_g(G, S^1) \neq \varnothing \Leftrightarrow \deg(g, \partial G) = 0.$$

Preuve: Si $\deg(g, \partial G) = 0$, alors d'aprés la proposition précédente, il existe $\eta \in H^{1/2}(\partial G, \mathbb{R})$ telle que $g = e^{i\eta}$. Soit $\varphi \in H^1(G, \mathbb{R})$ telle que $tr\varphi = \eta$, donc $u = e^{i\varphi} \in H^1_g(G, S^1)$.

Réciproquement, on suppose que $H^1_g(G,S^1) \neq \varnothing$ et $u \in H^1(G,S^1)$ telle que $u = g$ sur ∂G. Comme G est simplement connexe, alors, il existe $\varphi \in H^1(G,\mathbb{R})$ telle que $u = e^{i\varphi}$. Ce qui implique que $g = e^{i\psi}$ où $\psi = tr\varphi$ et $\psi \in H^{1/2}(\partial G,\mathbb{R})$. Donc d'aprés la proposition précédente le degré de g est nul. ■

1.3 Inégalité du type Gagliardo-Nirenberg

Les résultats suivant illustrent l'inégalités du type Gagliardo-Nirenberg qui interviendra dans nos estimations

Théorème 1.3 *Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et régulier. Soient $f : G \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\overline{G})$ et $1 \leq p,q \leq +\infty$. Alors*

$$\|\nabla f\|_{L^r} \leq C_G.\, \|f\|^{1/2}_{L^p} \,.\, \|\Delta f\|^{1/2}_{W^{2,q}},$$

où $\frac{1}{r} = \frac{1}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$.
De plus, si $f = 0$ sur ∂G et $1 < q \leq +\infty$, alors

$$\|\nabla f\|_{L^r} \leq C_G.\, \|f\|^{1/2}_{L^p} \,.\, \|\Delta f\|^{1/2}_{L^q}.$$

Preuve: On va supposer par simplicité que $f = 0$ sur ∂G et $r < \infty$.
Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int_G |\nabla f|^r &= \int_G |\nabla f|^{r-2}.\nabla f.\nabla f \\
&= -\int_G \nabla(|\nabla f|^{r-2}).\nabla f.f - \int_G |\nabla f|^{r-2}.\Delta f.f \\
&= -(r-2)\int_G |\nabla f|^{r-3} \\
&\leq C_r \int_G |\nabla f|^{r-2}.|D^2 f|.|f|.
\end{aligned}$$

On applique ensuite l'inégalité de Hölder pour trois fonctions f_1, f_2 et f_3 appartiennent respectivement aux espaces L^{p_1}, L^{p_2} et L^{p_3} où $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=1$

$$\int_G |f_1.f_2.f_3| \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}} \|f_3\|_{L^{p_3}}$$

avec $\begin{cases} f_1 = & |\nabla f|^{r-2} \\ f_2 = & |D^2 f| \\ f_3 = & |f| \end{cases}$ et $\begin{cases} p_1 = \frac{r}{r-2} \\ p_2 = q \\ p_3 = p. \end{cases}$

On observe que

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=1 \text{ si et seulement si } \frac{1}{r}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right),$$

alors, on a

$$\|\nabla f\|_{L^r}^r \leq C_r \|\nabla f\|_{L^r}^{r-2} . \left\|D^2 f\right\|_{L^q} . \|f\|_{L^p} .$$

En divisant les deux membres de l'inégalité par $\|\nabla f\|_{L^r}^{r-2}$, on obtient

$$\|\nabla f\|_{L^r}^2 \leq C_r \left\|D^2 f\right\|_{L^q} . \|f\|_{L^p} .$$

• Dans le cas $q=+\infty$: soit $f \in W^{2,p}(G) \cap L^\infty(G)$ telle que $f=0$ sur ∂G. Alors, par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_G |Df|^{2p} &= \int_G |Df|^{2p-1}|Df| \\
&= -\int_G D(|Df|^{2p-1}).f \\
&= -(2p-1)\int_G |Df|^{2p-2}.(D^2 f).f \\
&\leq (2p-1)\|f\|_{L^\infty} \int_G |Df|^{2p-2}.|D^2 f| \\
&\leq (2p-1)\|f\|_{L^\infty} . \left\|D^2 f\right\|_{L^p} . \|Df\|_{L^{2p}}^{2p-2}.
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'inégalité par $\|Df\|_{L^{2p}}^{2p-2}$, on obtient

$$\|Df\|_{L^{2p}}^2 \leq C \left\|D^2 f\right\|_{L^p} . \|f\|_{L^\infty}$$

■

Soit maintenant, le lemme d'interpolation, qui est une variante de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg.

Lemme 1.3 *Soient $G \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, borné et régulier et $v \in C^2(\overline{G})$ telle que $v = 0$ sur ∂G. Alors*

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C_G \|v\|_{L^\infty}^{1/2} . \|\Delta v\|_{L^\infty}^{1/2} .$$

Rappelons les résultats de Rellich-Kondrachov.

Théorème 1.4 (Rellich-Kondrachov) *On suppose $G \subset \mathbb{R}^n$ borné et de classe C^1. On a*

1. *Si $n < 2$ alors $H^1(G) \underset{compacte}{\hookrightarrow\hookrightarrow} C(\overline{G})$.*
2. *Si $n = 2$ alors $H^1(G) \underset{compacte}{\hookrightarrow\hookrightarrow} L^p(G)$, $\forall p \in [1, +\infty[$.*
3. *Si $n > 2$ alors $H^1(G) \underset{compacte}{\hookrightarrow\hookrightarrow} L^p(G)$, $\forall p \in [1, \frac{2n}{n-2}[$.*

Théorème 1.5 (Injections de Sobolev) *Soit $0 \leq s \leq n/2$, alors*

1. *Si $s = n/2$ alors $H^s(\mathbb{R}^n) \underset{continue}{\hookrightarrow} L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall q \in [2, +\infty[$.*
2. *Si $0 \leq s < n/2$ alors $H^s(\mathbb{R}^n) \underset{continue}{\hookrightarrow} L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall q \in [2, \frac{2n}{n-2s}[$.*

On peut étendre les résultats du théorème précédent au cas où G est un ouvert assez régulier.

Corollaire 1.1 *Lorsque G est un ouvert de classe C^α ($\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 1$) avec $\Gamma = \partial G$ borné ou lorsque $G = \mathbb{R}_+^n$, on a les injections suivantes*

1. *Si $m > n/2 + k$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq k$ alors $H^m(G) \underset{continue}{\hookrightarrow} C^k(\overline{G})$.*
2. *Si $m = n/2$ alors $H^m(G) \underset{continue}{\hookrightarrow} L^q(G)$, $\forall q \in [2, +\infty[$.*
3. *Si $0 \leq m < n/2$ alors $H^m(G) \underset{continue}{\hookrightarrow} L^q(G)$, $\forall q \in [2, \frac{2n}{n-2m}[$.*

On va appliquer plusieurs fois dans la suite le résultat suivant

Lemme 1.4 *Soit* $\Psi \in H^{1/2}(\partial G, \mathbb{Z})$*, alors* Ψ *est constante p.p.*

(Pour démontrer le lemme, on va utiliser plusieurs notions auxiliaires (voir [6]).

Lemme 1.5 *(Quand on a une boule pas trop grande, centrée dans un fermé régulier, on a une proportion minimale de la boule dans le fermé)*

$\exists C > 0$, $r_0 > 0$ *fonctions de* G *tel que,* $\forall r \in]0; r_0[$, $x \in \overline{G}$, $|B_r(x) \cap G| \geq Cr^2$.

Chapitre 2

Energie du type Ginzburg-Landau avec un terme de chevillage

2.1 Présentation du problème

Soient $G \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, régulier et simplement connexe et $g : \partial G \to \mathbb{C}$ une application régulière. Pour $\varepsilon > 0$ fixé et $u \in H^1(G, \mathbb{C})$, on considère l'énergie du type Ginzburg-Landau définie par

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_G \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} (p^2 - |u|^2)^2 \right), \tag{2.1}$$

où $p \in L^\infty(G)$.

E_ε est bien définie pour l'application $u \in H^1(G, \mathbb{C})$. En effet, $u \in H^1(G, \mathbb{C})$ alors, par les injections de Sobolev $u \in L^4(G, \mathbb{C})$ et donc E_ε est bien définie.

On note par u_ε le minimiseur du problème suivant

$$\min_{u \in H^1_g} E_\varepsilon(u), \tag{2.2}$$

avec $H^1_g = \left\{ u \in H^1(G, \mathbb{C});\ u = g \ \text{ sur } \partial G \right\}$.

On commence par montrer l'existence des minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau sur H^1_g.

Lemme 2.1 *Pour chaque $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, E_ε a au moins, un minimiseur u_ε dans H^1_g.*

Preuve: Soit $(u_n)_n \subset H^1_g$ une suite minimisante i.e.

$$E_\varepsilon(u_n) \underset{n\to\infty}{\to} \inf_{u\in H^1_g} E_\varepsilon(u) = m_\varepsilon.$$

Alors, $(u_n)_n$ est bornée dans H^1. D'aprés le théorème de compacité de Rellich-Kondrachov, on a l'inclusion compacte $H^1 \subset L^4$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_\varepsilon \text{ dans } H^1, \\ u_n &\to u_\varepsilon \text{ dans } L^4 \text{ et } p.p. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de l'opérateur de trace de $H^1(G)$ dans $H^{1/2}(\partial G)$, il résulte que

$$u_{n|\partial G} \rightharpoonup u_{\varepsilon|\partial G} \text{ dans } H^{1/2}(\partial G).$$

Or, $u_n = g$ sur ∂G, pour chaque n. Donc $u_\varepsilon = g$ sur ∂G.
Ensuite, en utilisant

$$\int_G (|u_n|^2 - p^2)^2 \to \int_G (|u_\varepsilon|^2 - p^2)^2, \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Par la semi continuité inférieure de la norme dans H^1, par rapport à la topologie faible

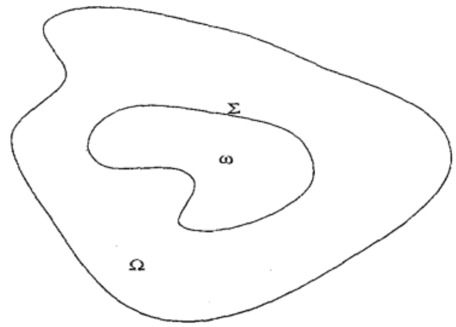
$$m_\varepsilon \leq E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} E_\varepsilon(u_n) = m_\varepsilon,$$

il en résulte que u_ε est solution du problème (2.2). ■

De plus, chaque solution u_ε de (2.2) vérifie l'équation d'Euler-Lagrange

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{\varepsilon^2} u(p^2 - |u|^2) & \text{dans } G, \\ u = g & \text{sur } \partial G. \end{cases} \tag{2.3}$$

En effet, pour $v \in C^\infty_c(G, \mathbb{R}^2)$, une fonction test et $t \in \mathbb{R}$, on définit $\varphi(t) = E_\varepsilon(u_\varepsilon + tv)$.



Alors $\varphi(0) \leq \varphi(t)$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, donc $\varphi'(0) = 0$. Par contre, si $t \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} &= \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{|\nabla(u_\varepsilon + tv)|^2}{t} + \frac{1}{2\varepsilon^2}\frac{(|u_\varepsilon + tv|^2 - p^2)^2}{t} \right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_G \left(\frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{t} + \frac{1}{2\varepsilon^2}\frac{(|u_\varepsilon|^2 - p^2)^2}{t} \right) \\ &= \int_G \nabla u_\varepsilon . \nabla v + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_G (|u_\varepsilon|^2 - p^2) u_\varepsilon . v + O(t) \quad \text{si } t \to 0. \end{aligned}$$

La condition $\varphi'(0) = 0$ implique

$$\int_G \nabla u_\varepsilon . \nabla v = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_G u_\varepsilon (|u_\varepsilon|^2 - p^2) v, \ \ \forall v \in C_c^\infty(G, \mathbb{R}^2),$$

ce qui est la forme faible de l'équation (2.3).

Soit maintenant, Σ une courbe régulière, à l'intérieure de G et ω, Ω sont comme dans la figure ci-dessous

Figure-1

On considère

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ p_0 & \text{si } x \in \omega \end{cases}$$

avec $0 < p_0 < 1$.

Pour simplifier, on suppose

$$|g(x)| = 1, \ \ \forall x \in \partial G$$

où le degré $d = \deg(g, \partial G)$ est bien défini.

2.2 Cas où la donnée au bord est égale à un

Proposition 4 *Il existe un minimiseur U_ε de E_ε dans H_1^1 tel que $p_0 \leq U_\varepsilon \leq 1$.*

Preuve: Soit u un minimiseur de E_ε dans H_1^1, alors $|u| \in H_1^1$ et $E_\varepsilon(|u|) = E_\varepsilon(u)$. On a ainsi trouvé un minimiseur non négatif $v = |u|$. Soit

$$U_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(x) > 1 \\ v(x) & \text{si } p_0 \leq v(x) \leq 1 \\ p_0 & \text{si } 0 \leq v(x) \leq p_0 \end{cases}$$

La fonction $U_\varepsilon \in H_1^1$ et $E_\varepsilon(U_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(v)$. Donc U_ε est un minimiseur de E_ε dans H_1^1. ■

Soit le lemme de substitution suivant

Lemme 2.2 (de substitution) *Soit $u \in H^1(G, \mathbb{C})$ telle que $|u| = 1$ sur ∂G, alors si $v = u/U_\varepsilon$, on a*

$$E_\varepsilon(u) = E_\varepsilon(U_\varepsilon) + \frac{1}{2}\int\limits_G U_\varepsilon^2 |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_G U_\varepsilon^4 (1 - |v|^2)^2. \tag{2.4}$$

Preuve: La fonction $v \in H^1$ car $p_0 \leq U_\varepsilon \leq 1$. On remplace u par vU_ε, on obtient

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u) &= \frac{1}{2}\int\limits_G U_\varepsilon^2 |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_G |v|^2 \, |\nabla U_\varepsilon|^{\,2} + \int\limits_G U_\varepsilon . \nabla U_\varepsilon . v . \nabla v + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_G (p^2 - |v|^2 {U_\varepsilon}^2)^2 \\ &= E_\varepsilon(U_\varepsilon) + \frac{1}{2}\int\limits_G U_\varepsilon^2 |\nabla v|^2 - \frac{1}{2}\int\limits_G (1 - |v|^2) \, |\nabla U_\varepsilon|^{\,2} + \frac{1}{2}\int\limits_G U_\varepsilon . \nabla U_\varepsilon . \nabla |v|^2 \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_G [(p^2 - |v|^2 U_\varepsilon^2)^2 - (p^2 - U_\varepsilon^2)^2]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u) &= E_\varepsilon(U_\varepsilon) + \frac{1}{2}\int_G U_\varepsilon^2 |\nabla v|^2 - \frac{1}{2}\int_G (1-|v|^2)\,|\nabla U_\varepsilon|^{\,2} + \frac{1}{2}\int_G U_\varepsilon.\nabla U_\varepsilon.\nabla |v|^2 \qquad \text{(A)} \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G (1-|v|^2) U_\varepsilon^2 (2p^2 - U_\varepsilon^2 - |v|^2 U_\varepsilon^2). \end{aligned}$$

U_ε vérifie l'équation

$$-\Delta U_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} U_\varepsilon (p^2 - U_\varepsilon^2) \quad \text{dans } G.$$

On multiplie cette équation par $(1-|v|^2)U_\varepsilon \in H_0^1$, on obtient

$$-\int_G \Delta U_\varepsilon (1-|v|^2) U_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_G U_\varepsilon^2 (1-|v|^2)(p^2 - U_\varepsilon^2).$$

Par intégration par partie, on obtient

$$\int_G |\nabla U_\varepsilon|^2 (1-|v|^2) - \int_G U_\varepsilon.\nabla U_\varepsilon.\nabla |v|^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_G U_\varepsilon^2 (1-|v|^2)(p^2 - U_\varepsilon^2).$$

Si on remplace le côté gauche de cette égalité dans l'expression (A), on aura

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &= E_\varepsilon(U_\varepsilon) + \frac{1}{2}\int_G U_\varepsilon^2 |\nabla v|^2 - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_G U_\varepsilon^2 (1-|v|^2)(p^2 - U_\varepsilon^2) \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G (1-|v|^2) U_\varepsilon^2 [2(p^2 - U_\varepsilon^2) + U_\varepsilon^2 (1-|v|^2)] \\ &= E_\varepsilon(U_\varepsilon) + \frac{1}{2}\int_G U_\varepsilon^2 |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G U_\varepsilon^4 (1-|v|^2), \end{aligned}$$

d'où le lemme de substitution. ■

Corollaire 2.1 *Le minimiseur U_ε de E_ε dans H_1^1 est unique et vérifie $p_0 \le U_\varepsilon \le 1$.*

Preuve: Soit u un minimiseur de E_ε dans H_1^1. Alors

$$E_\varepsilon(u) = E_\varepsilon(U_\varepsilon).$$

Posons $u = U_\varepsilon v$ telle que $|u| = 1$ sur ∂G. D'aprés le lemme de substitution et l'égalité précédente, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_G U_\varepsilon^2 |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G U_\varepsilon^4 (1-|v|^2)^2 = 0,$$

implique

$$\int_G |\nabla v|^2 = 0.$$

Alors

$$v = C \ \text{ p.p } \ \text{dans } G,$$

et le fait que $v = 1$ sur ∂G implique $v = 1$ dans G. Alors $U_\varepsilon = u$, donc le minimiseur est unique.

■

Théorème 2.1 *On a, lorsque ε tend vers 0*

(a) $U_\varepsilon \to p$ p.p dans G.

(b) $U_\varepsilon \to p$ dans $C^{1,\alpha}_{loc}(\overline{G}\backslash\Sigma)$, $0 < \alpha < 1$.

(c) $\|p - U_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} \leq C_K \varepsilon^2$; K compact dans $\overline{G}\backslash\Sigma$.

(d) $\|\nabla U_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} \leq C_K \varepsilon$; K compact dans $\overline{G}\backslash\Sigma$.

Preuve: La démonstration est décomposée en deux étapes.

1$^{\text{ère}}$étape: On a $E_\varepsilon(U_\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, où C est une constante indépendante de ε.

Pour $\delta > 0$ assez petit, la fonction

$$\begin{array}{rcl} \overline{d} : \{x \in G;\ \mathrm{dist}(x,\Sigma) \leq \delta\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \overline{d}(x) = \begin{cases} \mathrm{dist}(x,\Sigma) & \text{si } x \in \Omega \\ -\mathrm{dist}(x,\Sigma) & \text{si } x \in \omega \cup \Sigma \end{cases} \end{array}$$

est régulière.

Pour $0 < \varepsilon < \delta$, on considère la fonction test

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega,\ \mathrm{dist}(x,\Sigma) \geq \varepsilon \\ \frac{1-p_0}{2\varepsilon}\overline{d}(x) + \frac{1+p_0}{2} & \text{si } \mathrm{dist}(x,\Sigma) < \varepsilon \\ p_0 & \text{si } x \in \omega,\ \mathrm{dist}(x,\Sigma) \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Puisque $\widetilde{u} \in H_1^1$, alors

$$E_\varepsilon(U_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(\widetilde{u}).$$

De plus $E_\varepsilon(\widetilde{u}) \leq \frac{C}{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < \delta$.

En effet, soient

$\Omega_0 = \{x \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x, \Sigma) \geq \varepsilon\}$,

$\Omega_1 = \{x;\ \operatorname{dist}(x, \Sigma) < \varepsilon\}$,

$\Omega_2 = \{x \in \omega;\ \operatorname{dist}(x, \Sigma) \geq \varepsilon\}$,

alors

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(\widetilde{u}) &= \frac{1}{2}\int_G |\nabla\widetilde{u}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G (p^2 - |\widetilde{u}|^2)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Omega_1} |\nabla\widetilde{u}|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{\Omega_1} (p^2 - |\widetilde{u}|^2)^2\right) \\
&\leq \int_{\Omega_1} \frac{C}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega_1} C \\
&= \frac{C}{\varepsilon^2}\,|\Omega_1| \\
&= \frac{C}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

(car $|\Omega_1| \Leftrightarrow 2\varepsilon$).

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G (p^2 - {U_\varepsilon}^2)^2 \quad &\leq \quad E_\varepsilon(U_\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon} \\
&\Longrightarrow \int_G (p^2 - {U_\varepsilon}^2)^2 \leq C\varepsilon \to 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0 \\
&\Longrightarrow U_\varepsilon \to p \ \text{ p.p dans } G.
\end{aligned}$$

2$^{\text{ème}}$étape: Soit K un compact fixé, voisinage de Σ dans G, alors

$$E_\varepsilon(U_\varepsilon, G\backslash K) \leq C_K, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{2.5}$$

On doit prouver, par exemple que

$$E_\varepsilon(U_\varepsilon, \omega\backslash K) \le C_K.$$

Soit $\delta > 0$ tel que

$$K \supset \{x;\ \mathrm{dist}(x,\Sigma) \le \delta\} := V_\delta$$

et tel que $\overline{d}$ est une fonction régulière dans V_δ.

On utilise la formule de la co-aire, il s'en suit que pour une constante C_1 appropriée,

$$\int_0^{\frac{\delta}{2}} \left(\int\limits_{\Sigma_\lambda} \left\{ |\nabla U_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(p^2 - {U_\varepsilon}^2)^2 \right\} ds \right) d\lambda \le C_1 E_\varepsilon(U_\varepsilon, V_\delta), \tag{2.6}$$

où $\Sigma_\lambda = \big\{x;\ \overline{d}(x) = -\lambda\big\}$.

Par le théorème de Fubini, pour $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$, il existe $\lambda = \lambda_\varepsilon \in (0, \frac{\delta}{2})$ tel que

$$\int\limits_{\Sigma_\lambda} \left\{ |\nabla U_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(p_0^2 - {U_\varepsilon}^2)^2 \right\} ds \le \frac{C}{\varepsilon}. \tag{2.7}$$

Soit $v_\varepsilon = U_\varepsilon|_{\Sigma_\lambda}$. On considère la fonction u définie par

$$u(x) = \begin{cases} U_\varepsilon(x) & \text{si } x \in \Omega \ \text{ ou } \ \overline{d}(x) \geqslant -\lambda \\ p_0 & \text{si } \overline{d}(x) < -\lambda - \varepsilon \\ \frac{\varepsilon - |x - \mathrm{Pr}(x)|}{\varepsilon} v_\varepsilon(\mathrm{Pr}(x)) + \frac{|x - \mathrm{Pr}(x)|}{\varepsilon} p_0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

$\mathrm{Pr}(x)$ désigne la projection sur Σ_λ. Elle est bien définie et uniformément régulière.

Si δ est assez petit, alors

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(U_\varepsilon) &= E_\varepsilon(U_\varepsilon, \mathrm{int}\ \Sigma_\lambda) + E_\varepsilon(U_\varepsilon, \mathrm{ext}\ \Sigma_\lambda) \\ &\le E_\varepsilon(u, \mathrm{int}\ \Sigma_\lambda) + E_\varepsilon(u,\ \mathrm{ext}\ \Sigma_\lambda). \end{aligned}$$

Puisque

$$E_\varepsilon(U_\varepsilon, \mathrm{ext}\ \Sigma_\lambda) = E_\varepsilon(u, \mathrm{ext}\ \Sigma_\lambda),$$

alors, on trouve que

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(U_\varepsilon, \omega\backslash K) &\le E_\varepsilon(U_\varepsilon, \mathrm{int}\ \Sigma_\lambda) \\ &\le E_\varepsilon(u, \mathrm{int}\ \Sigma_\lambda) \le C. \end{aligned}$$

En effet, on utilise (2.7) et on pose $\Omega_\lambda = \{x; \overline{d}(x) \geqslant -\lambda\}$, alors

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u, \operatorname{int} \Sigma_\lambda) &\leq E_\varepsilon(u, \Omega_\lambda) = \int_{I_\lambda} \left(\int\limits_{\Sigma_\lambda} \left\{ |\nabla U_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(p^2 - {U_\varepsilon}^2)^2 \right\} ds \right) d\lambda \\ &\leq \int_{I_\lambda} \frac{C}{\varepsilon} d\lambda = C. \end{aligned}$$

On a choisi $\lambda = \lambda_\varepsilon = \varepsilon$. $I_\lambda = \{y; \mathrm{Pr}_\lambda(x) = y\}$, où Pr_λ:désigne la projection de x sur Σ et C une constante indépendante de ε.

On fait le même raisonement pour montrer que

$$E_\varepsilon(U_\varepsilon, \Omega \backslash K) \leq C_K.$$

Soit K_1 un compact dans $\overline{G} \backslash \Sigma$. Alors

$$E_\varepsilon(U_\varepsilon, K_1) \leq E_\varepsilon(U_\varepsilon, G \backslash K) \leq C_K, \ 0 < \varepsilon < 1$$

implique

$$\frac{1}{2\varepsilon^2} \int\limits_{K_1} (p^2 - {U_\varepsilon}^2)^2 \leq C_K.$$

Les assertions (b),(c) et (d) découle de l'inégalité (2.5) et à des résultats de [4], concernant le cas où la donnée au bord dépent de ε. ■

2.3 Quelques estimations générales

Cette fois, g n'est pas nécessairement égale à 1, mais elle sera fixée et régulière. Soit $u_\varepsilon = v_\varepsilon U_\varepsilon$, une solution de (2.3), alors v_ε satisfait

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(U_\varepsilon^2 . \nabla v_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} U_\varepsilon^4 . v_\varepsilon (1 - |v_\varepsilon|^2) & \text{dans } G \\ v_\varepsilon = g & \text{sur } \partial G \end{cases} \tag{2.8}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(U_\varepsilon^2.\nabla v_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_\varepsilon^2.\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial U_\varepsilon^2}{\partial x_i}.\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} + U_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial {x_i}^2} \\ &= 2U_\varepsilon.\nabla U_\varepsilon.\nabla v_\varepsilon + U_\varepsilon^2.\Delta v_\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.9}$$

et on a

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon &= -\Delta(v_\varepsilon U_\varepsilon) \\ &= -(\Delta v_\varepsilon.U_\varepsilon + 2\nabla v_\varepsilon \nabla U_\varepsilon + v_\varepsilon.\Delta U_\varepsilon) \\ &= \tfrac{1}{\varepsilon^2} v_\varepsilon.U_\varepsilon(p^2 - |v_\varepsilon|^2.{U_\varepsilon}^2). \end{aligned}$$

On multiplie par U_ε, on obtient

$$-(\Delta v_\varepsilon U_\varepsilon^2 + 2U_\varepsilon.\nabla U_\varepsilon.\nabla v_\varepsilon + U_\varepsilon v_\varepsilon.\Delta U_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} v_\varepsilon.U_\varepsilon^2(p^2 - |v_\varepsilon|^2.{U_\varepsilon}^2).$$

En vertu de l'égalité (2.9), on obtient

$$-\operatorname{div}(U_\varepsilon^2.\nabla v_\varepsilon) = \tfrac{1}{\varepsilon^2} v_\varepsilon U_\varepsilon^2(p^2 - |v_\varepsilon|^2 U_\varepsilon^2) + U_\varepsilon v_\varepsilon.\Delta U_\varepsilon.$$

Puisque U_ε est solution de l'équation (2.3), alors

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(U_\varepsilon^2.\nabla v_\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^2} v_\varepsilon U_\varepsilon^2(p^2 - |v_\varepsilon|^2 U_\varepsilon^2) - \frac{1}{\varepsilon^2} v_\varepsilon.U_\varepsilon^2(p^2 - {U_\varepsilon}^2) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} v_\varepsilon U_\varepsilon^4(1 - |v_\varepsilon|^2) \end{aligned}$$

lorsque $u_\varepsilon = g$ sur ∂G et $U_\varepsilon = 1$ sur ∂G, donc $v_\varepsilon = g$ sur ∂G, d'où l'équation (2.8).

Proposition 5 *Si u_ε est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange (2.3), alors*

$$|u_\varepsilon| \leq U_\varepsilon \tag{2.10}$$

Preuve: On a $1 - |v_\varepsilon|^2$ satisfait l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\operatorname{div}(U_\varepsilon^2.\nabla(1 - |v_\varepsilon|^2)) + \frac{2}{\varepsilon^2} U_\varepsilon^4.|v_\varepsilon|^2(1 - |v_\varepsilon|^2) = & 2U_\varepsilon^2|\nabla v_\varepsilon|^2 & \text{dans } G, \\ 1 - |v_\varepsilon|^2 = & 0 & \text{sur } \partial G. \end{array} \right. \tag{2.11}$$

En effet, on a $v_\varepsilon = g$ sur ∂G et $|g| = 1$ sur ∂G, donc $1 - |v_\varepsilon|^2 = 0$ sur ∂G.

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(U_\varepsilon^2.\nabla(1-|v_\varepsilon|^2)) &= -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_\varepsilon^2.\frac{\partial(1-|v_\varepsilon|^2)}{\partial x_i}\right) \\
&= 2\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_\varepsilon^2.\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}|v_\varepsilon|\right) \\
&= 2\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_\varepsilon^2.\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right).|v_\varepsilon| + U_\varepsilon^2 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}.\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right) \\
&= 2|v_\varepsilon| \operatorname{div}\left(U_\varepsilon^2.\nabla v_\varepsilon\right) + 2U_\varepsilon^2.|\nabla v_\varepsilon|^2.
\end{aligned}$$

Par (2.8), on obtient

$$-\operatorname{div}(U_\varepsilon^2.\nabla(1-|v_\varepsilon|^2)) = -\frac{2}{\varepsilon^2}U_\varepsilon^4.|v_\varepsilon|^2(1-|v_\varepsilon|^2) + 2U_\varepsilon^2.|\nabla v_\varepsilon|^2$$

Comme dans [4] (proposition 2), via le principe du maximum, il résulte que

$$|v_\varepsilon(x)| \le 1, \text{ pour tout } x \in G. \tag{2.12}$$

- $u_\varepsilon = v_\varepsilon U_\varepsilon$ implique $|u_\varepsilon| = |v_\varepsilon| U_\varepsilon \le U_\varepsilon$.

Preuve de (2.12): On a $(1 - |v_\varepsilon|^2)$ satisfait l'équation **(**2.11**),** alors

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(U_\varepsilon^2.\nabla(1-|v_\varepsilon|^2)) + a(x)(1-|v_\varepsilon|^2) & \ge 0, \quad \text{dans } G \\ 1-|v_\varepsilon|^2 & = 0, \quad \text{sur } \partial G \end{cases}$$

avec $a(x) = \frac{2}{\varepsilon^2}U_\varepsilon^4.|v_\varepsilon|^2 \ge 0$ dans G. Donc par le principe du maximum, on conclut que $1 - |v_\varepsilon|^2 \ge 0$ dans G, ce qui implique que $|v_\varepsilon(x)| \le 1$, $\forall\, x \in G$. ■

Proposition 6 *Si u_ε est une solution de (2.3), alors*

$$|\nabla u_\varepsilon| \le \frac{C}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1 \tag{2.13}$$

Preuve: On écrit $u_\varepsilon = X_\varepsilon + w$, où X_ε est solution de

$$\begin{cases} -\Delta X_\varepsilon = & \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (p^2 - |u_\varepsilon|^2) & \text{dans } G \\ X_\varepsilon = & 0 & \text{sur } \partial G \end{cases}$$

et w est solution de

$$\begin{cases} -\Delta w = & 0 & \text{dans } G, \\ w = & g & \text{sur } \partial G. \end{cases}$$

D'aprés le lemme d'interpolation (lemme 1.3), on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla X_\varepsilon\|_{L^\infty} &\leq C_G \|X_\varepsilon\|_{L^\infty}^{1/2} \|\Delta X_\varepsilon\|_{L^\infty}^{1/2} \\ &\leq C_G \|X_\varepsilon\|_{L^\infty}^{1/2} \left\| \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (p^2 - |u_\varepsilon|^2) \right\|_{L^\infty}^{1/2} \\ &\leq \frac{C_G}{\varepsilon} \|X_\varepsilon\|_{L^\infty}^{1/2} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty}^{1/2} \left\|p^2 - |u_\varepsilon|^2\right\|_{L^\infty}^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} (\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} + \|w\|_{L^\infty})^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon}\,, \qquad \text{si } 0 < \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

C est une constante indépendante de ε. Alors

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty} &= \|\nabla X_\varepsilon + \nabla w\|_{L^\infty} \\ &\leq \tfrac{C}{\varepsilon} + C \\ &\leq \tfrac{C}{\varepsilon}, \quad \text{si } \ 0 < \varepsilon < 1. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire 2.2 *Soit $u_\varepsilon = v_\varepsilon U_\varepsilon$ solution de (2.3), alors*

$$|\nabla v_\varepsilon| \leq \frac{C}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{2.14}$$

Preuve: On a $u_\varepsilon = v_\varepsilon U_\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} \nabla v_\varepsilon &= \frac{1}{U_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon - v_\varepsilon \nabla U_\varepsilon) \\ &\leq \frac{1}{p_0} (\nabla u_\varepsilon - v_\varepsilon \nabla U_\varepsilon). \end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned}|\nabla v_\varepsilon| &\leq \frac{1}{p_0}(|\nabla u_\varepsilon| + |v_\varepsilon||\nabla U_\varepsilon|) \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon}, \qquad \text{si } 0 < \varepsilon < 1,\end{aligned}$$

car $|v_\varepsilon| \leq 1$ et $|\nabla U_\varepsilon| \leq \frac{C}{\varepsilon}$.

En effet, Soit $w_\varepsilon = U_\varepsilon - 1$, alors

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon = & \frac{1}{\varepsilon^2}(w_\varepsilon + 1)(p^2 - {U_\varepsilon}^2) & \text{dans } G, \\ w_\varepsilon = & 0 & \text{sur } \partial G. \end{cases}$$

D'aprés l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on obtient

$$\begin{aligned}\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^\infty} &\leq C_G \|w_\varepsilon\|_{L^\infty}^{1/2} \|\Delta w_\varepsilon\|_{L^\infty}^{1/2} \\ &\leq \frac{C_G}{\varepsilon} \|U_\varepsilon - 1\|_{L^\infty}^{1/2} \|U_\varepsilon\|_{L^\infty}^{1/2} \left\|p^2 - U_\varepsilon^2\right\|_{L^\infty}^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Donc $\|\nabla U_\varepsilon\|_{L^\infty} = \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\varepsilon}$. ■

Remarque 2.1 *Comme conséquence de (2.13), on peut obtenir l'estimation suivante*

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_G (p^2 - |u|^2)^2 \geq \frac{C}{\varepsilon}, \; 0 < \varepsilon < 1 \tag{2.15}$$

En effet, pour $x \in \Sigma$ et ε assez petit. Soit I_x le segment $\{y;\; dist(y, \Sigma) \leq \varepsilon,\; \mathrm{Pr}(x) = x\}$, avec Pr *la projection de x sur Σ. Alors, pour certaine constante c'>0*

$$\int_\Sigma \left(\int_{I_x} \frac{1}{\varepsilon^2}(p^2 - |u_\varepsilon|^2)^2 dy\right) d\sigma(x) \leq \frac{c'}{\varepsilon^2}\int_G (p^2 - |u|^2)^2. \tag{2.16}$$

Pour $x \in \Sigma$ fixé, on a ou bien

$$||u_\varepsilon(x)| - 1| \geq \frac{1 - p_0}{2}$$

ou bien

$$||u_\varepsilon(x)| - p_0| \geq \frac{1-p_0}{2}.$$

Si on pose par exemple $||u_\varepsilon(x)| - 1| \geq \frac{1-p_0}{2}$, *alors* $||u_\varepsilon(y)| - 1| \geq \frac{1-p_0}{4}$, *pour* $y \in ext\omega$, $y \in I_x$ *et*

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq \tfrac{1-p_0}{4}.$$

Donc, il suffit de voir que

$$|x-y| \leq \left(\tfrac{1-p_0}{4}\right)\tfrac{\varepsilon}{C}.$$

Car

$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| &\leq |x-y| \sup |\nabla u_\varepsilon| \\ &\leq |x-y| \frac{C}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Ce qui imlique que $||u_\varepsilon(y)| - 1| \geq \frac{1-p_0}{4}$ *sur un morceau de* I_x *de taille* ε.

Dans les deux cas, on trouve

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{I_x} (p^2 - |u_\varepsilon|^2)^2 \geq \frac{c''}{\varepsilon},$$

où c'' *est une constante indépendente de* ε. *D'aprés (2.16),*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_G (p^2 - |u_\varepsilon|^2)^2 &\geq \frac{1}{c'}\left(\int_\Sigma \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{I_x} (p^2 - |u_\varepsilon|^2)^2 dy\right) d\sigma(x)\right) \\ &\geq \frac{c''}{c'}|\Sigma|\frac{1}{\varepsilon} = \frac{C}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Une autre conséquence de (2.13) est donnée par le lemme suivant:

Lemme 2.3 *Pour* $\lambda > 0$, $\exists\ \mu = \mu(a,\lambda)$ *tel que* *si* $0 < \varepsilon < 1$ *et* $\displaystyle\int_{B_{2\lambda_\varepsilon(x)} \cap G} (1 - |v_\varepsilon|^2)^2 \leq \mu$, *alors* $|v_\varepsilon| \geq \frac{1}{2}$ *dans* $B_{\lambda_\varepsilon(x)} \cap G$.

Preuve: La preuve se fait par l'absurde avec une contradiction **ad hoc** de λ et μ. Supposons qu'il existe $x_0 \in B_{\lambda_\varepsilon(x)} \cap G$ tel que $|v_\varepsilon(x_0)| < \frac{1}{2}$. On constate qu'avec l'estimation (2.14) et le théorème des accroissements finis, on obtient

$$|v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)| \leq \frac{C}{\varepsilon}|x-y|, \qquad C = C(G,g).$$

Ainsi, pour tout $x \in G \cap B_\rho(x_0)$ (ρ à déterminer),

$$(1-|v_\varepsilon|^2)^2 \geq (1-|v_\varepsilon|)^2 \geq (\frac{1}{2} - \frac{C}{\varepsilon}\rho)^2,$$

désque $\rho < \frac{\varepsilon}{C} < 1$. Donc, en prenant $\rho = \frac{\varepsilon}{4C}$, on obtient $(1-|v_\varepsilon(x)|^2)^2 \geq \frac{1}{16}$.

Par suite,

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{G\cap B_\rho(x)} (1-|v_\varepsilon|^2)^2 \geq \frac{\alpha}{(16C)^2},$$

avec $\alpha = \alpha(G)$ tel que $|G \cap B_\rho(x)| \geq \alpha\rho^2 \ \forall\ x \in G$.

On a $\left(\frac{\varepsilon}{4C}\right) \leq 1$. On note que $B_\rho(x_0) \subset B_{2\lambda\varepsilon}(x)$, puisque $x_0 \in B_{\lambda\varepsilon}$.

Si on choisi $\lambda = \frac{a(1-a)}{C}$ et $\mu < \frac{\alpha}{(16C)^2}$, on va ramener à une contradiction. ■

2.4 Lien avec l'étude de Béthuel-Brézis-Hélein

F. Béthuel et al. ont étudié une énergie simplifiée

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_G \left(|\nabla u|^2 + V_\varepsilon(u)\right),$$

correspondant à $p \equiv 1$ et $V_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon^2}(1-|u|^2)^2$.

Leur but en réalité, était de traiter le problème de minimisation

$$\min_{u \in H^1_g(G,S^1)} \int_G |\nabla u|^2, \tag{P$_0$}$$

où

$$H^1_g(G,S^1) = \{u \in H^1(G,\mathbb{C});\ |u| = 1 \text{ p.p dans } G \text{ et } u = g \text{ sur } \partial G\}.$$

• Si on écrit $u = e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in H^1$, alors le problème (P$_0$) deviendrait

$$\min\{\int_G |\nabla\varphi|^2;\ \varphi \in H^1(G,\mathbb{R}) \text{ tel que } g = e^{i\varphi} \text{ sur } \partial G\}$$

qui est un problème de Dirichlet classique pour lequel on sait qu'il y a unicité de la solution.

Pour que le problème (P_0) ait bien un sens, il faut d'abord s'assurer que $H^1_g(G,S^1) \neq \varnothing$. Ici interviennent des obstructions topologiques. Plus précisément, on verra que le degré topologique de la donnée au bord joue un rôle fondamental dans cette étude (cet invariant topologique est lié à des effets de vorticités comparables à ceux observés dans les supraconducteurs). La stratégie est d'étudier le problème approché suivant

$$\min_{u\in H^1_g(G,\mathbb{C})} J_\varepsilon(u),$$

et d'analyser le comportement limite des minimiseurs u_ε lorsque $\varepsilon \to 0$. Les auteurs se sont alors, rendu compte que le comportement de ces minimiseurs dépendait fortement du degré d de la fonction g. Dans le cas où ce degré est nul, ils ont obtenu les résultats suivants

Théorème 2.2 *Soit u_ε un minimiseur de J_ε dans H^1_g. Alors*

$$u_\varepsilon \to u_* \qquad \text{dans } H^1(G,\mathbb{C}),$$

$$u_\varepsilon \to u_* \qquad \text{dans } C^{1,\alpha}(\overline{G}),\ \forall \alpha < 1,$$

$$\|u_\varepsilon - u_*\|_{L^\infty} \leq C\varepsilon^2,$$

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla u_*\|_{L^\infty} \leq C\varepsilon.$$

Pour chaque ensemble compact $K \subset G$ et chaque entier $k \geq 1$ on a

$$\|u_\varepsilon - u_*\|_{C^k(K)} \leq C_{k,K}\ \varepsilon^2,$$

$$\left\| \frac{1-|u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} - |\nabla u_*|^2 \right\|_{C^k(K)} \leq C_{k,K}\ \varepsilon^2.$$

Où u_* une application harmonique de G dans S^1 qui vaut g sur ∂G.

Le cas d'une donnée au bord dépendante de ε

A des fins techniques pour la suite de cette étude, on va s'intéresser à ce que devient le théorème précédent lorsque la donnée au bord n'est plus fixée et dépendant de ε. On se voit forcé de ne pas considérer n'importe quelle famille $(g_\varepsilon)_\varepsilon$, ainsi on impose quatre hypothèses fondamentales

$$\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(\partial G)} \leq 1, \tag{H.1}$$

$$\|g_\varepsilon\|_{H^1(\partial G)} \leq C, \tag{H.2}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial G}\left(1-|g_\varepsilon|^2\right)^2 \leq C, \tag{H.3}$$

$$\exists g : G \to \mathbb{C} \text{ régulière telle que } g_\varepsilon \to g \text{ sur } \partial G \text{ et } \deg(g, \partial G) = 0. \tag{H.4}$$

Dans ce cas, F. Bethuel et al. ont trouvé les résultats suivants

Théorème 2.3 *Soit u_ε un minimiseur de J_ε dans $H^1_{g_\varepsilon}$, alors*

$$u_\varepsilon \to u_* \qquad dans\ H^1(G, \mathbb{C}),$$

$$u_\varepsilon \to u_* \qquad dans\ L^\infty(\overline{G}),$$

$$u_\varepsilon \to u_* \qquad dans\ C^k_{loc}(G),\ \forall k,$$

$$\frac{1-|u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \to |\nabla u_*|^2 \qquad dans\ C^k_{loc}(G),\ \forall k.$$

Dans le cas où le degré d est non nul, le comportement asymptotique des minimiseurs u_ε est radicalement différent, à cause de son degré $d > 0$, u_ε doit s'annuler d fois (avec multiplicité) dans G, où les zéros x_i de u_ε sont des centres de mauvais disques.

- $B_{\lambda\varepsilon}$ est appelé un mauvais disque si $\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B_{\lambda\varepsilon}}(|u_\varepsilon|-1)^2 \geq \mu_0$. Dans le cas contraire, on parle de bon disque.

Ainsi, ils ont forcé artificiellement la présence de d vortex $a_1, a_2, ..., a_d$ pour lesquels l'application u_* a des singularités d'énergie infinie. Ce comportement provient du fait que l'espace $H^1_g(G, S^1)$ soit vide lorsque le degré de g est non nul.

(les vortex de taille $\delta > 0$ d'une fonction u sont, lorsqu'ils sont bien définis, des points a_i affectés des degrés d_i, tels que u ait un zéro dans $B(a_i, \varepsilon), |u| \geq \frac{1}{2}$ dans $G \setminus \cup_i B(a_i, \delta)$, et $d_i = \deg(u, \partial B(a_i, \delta))$. δ est de l'ordre de ε ou de ε^μ, avec $0 < \mu < 1$).

On peut, par ailleurs, préciser la convergence des minimiseurs vers u_* et le comportement de cette fonction

Théorème 2.4 *Ils existent une sous suite* $\varepsilon_n \to 0$ *et un nombre fini de points distincts* $a_1, ..., a_d \in G$ *tels que*

$$u_\varepsilon \to u_* \qquad \text{dans } C^k(K),$$

pour chaque entier $k \geq 1$ *et pour chaque compact* $K \subset G \setminus \{a_1, ..., a_d\}$*. De plus,*

$$u_*(z) = \prod_{i=1}^{d} \frac{z - a_i}{|z - a_i|} \exp(i\varphi)$$

où φ *est l'unique solution (modulo* 2π*) du problème*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{sur } G, \\ u_* = g & \text{sur } \partial G. \end{cases}$$

En particulier,

$$\deg\ (u_*, a_i) \equiv \deg(u_*, \partial B_r(a_i)),$$

pour r *assez petit, et est égal à* $+1$*.*

Dans notre travail, on traite un véritable modèle physique, la principale différence est que les vortex sont concentrer à l'intérieure de ω. Cependant, comme on l'explique dans la suite, la substitution $v_\varepsilon = u_\varepsilon \backslash U_\varepsilon$ nous amène à l'étude d'une énergie F_ε très semblable à l'énergie « classique » J_ε, ce qui nous a conduit à faire grand usage de l'analyse développée dans [3], et poursuivie dans [4].

Chapitre 3

Analyse asymptotique des minimiseurs

Dans le cas des applications qui ont de l'intérêt pour la physique, le paramètre ε (qui dépend du matériau et de la température) est extrêmement petit. Il est donc naturel de faire une analyse des phénomènes qui interviennent lorsque $\varepsilon \to 0$. On s'intéresse alors, au comportement asymptotique des minimiseurs: les points de vorticité, leur nombre et leur emplacement, l'influence de la forme de G etc...

3.1 Etude des minimiseurs dans le cas où le degré de la donnée au bord est nul

Soit $g : \partial G \to \mathbb{C}$, $|g| = 1$ est telle que $d = \deg(g, \partial G) = 0$, alors g peut s'écrit comme $g = e^{i\varphi_0}$ où $\varphi_0 : \partial G \to \mathbb{R}$ une fonction régulière.
Soit φ_* une solution de:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_* = 0 & \text{dans } G\backslash\Sigma \\ p_0^2 \frac{\partial\varphi_*}{\partial v_+} = \frac{\partial\varphi_*}{\partial v_-} & \text{dans } \Sigma \\ \varphi_* = \varphi_0 & \text{sur } \partial G, \end{cases}$$

où v_+ et v_- sont des vecteurs normales extérieur et intérieur de ω.
Soient $u_* = pe^{i\varphi_*}$ et $v_* = e^{i\varphi_*}$.

Théorème 3.1 *Si $u_\varepsilon = v_\varepsilon U_\varepsilon$ est le minimiseur de E_ε dans H^1_g, alors lorsque $\varepsilon \to 0$*

(a) $u_\varepsilon \to u_*$ p.p dans G;

(b) $u_\varepsilon \to u_*$ dans $C^{1,\alpha}_{loc}(\overline{G}\backslash\Sigma)$;

(c) $\|p - |u_\varepsilon|\|_{L^\infty(K)} \leq C_K \varepsilon^2$, K compact dans $\overline{G}\backslash\Sigma$;

(d) $v_\varepsilon \to v_*$, dans $C(\overline{G})$;

(e) $E_\varepsilon(u_\varepsilon) = f(\varepsilon) + \frac{1}{2}\int\limits_G p^2 \left|\nabla\varphi_*\right|^2 + o(1)$; où

$$\begin{aligned}
f(\varepsilon) &= E_\varepsilon(U_\varepsilon),\\
F_\varepsilon(v) &= E_\varepsilon(vU_\varepsilon) - f(\varepsilon)\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_G U_\varepsilon^2 \left|\nabla v\right|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_G U_\varepsilon^4 (1 - \left|v\right|^2)^2.
\end{aligned}$$

Preuve: La preuve se fait en deux étapes.

1$^{\text{ère}}$étape: On a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
F_\varepsilon(v_\varepsilon) &\leq F_\varepsilon(v_*) \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_G U_\varepsilon^2 \left|\nabla v_*\right|^2 \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_G p^2 \left|\nabla\varphi_*\right|^2 + o(1),\ \varepsilon \to 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

En effet, on a

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(u_*) \quad \text{car } u_* \in H^1_g(G, \mathbb{C}),$$

alors

$$E_\varepsilon(v_\varepsilon U_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(v_* U_\varepsilon),$$

ce qui implique que

$$F_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(v_*).$$

Comme $v_* = e^{i\varphi_*}$, alors $|v_*| = 1$ et $F_\varepsilon(v_*) = \frac{1}{2}\int\limits_G U_\varepsilon^2 \left|\nabla v_*\right|^2$.

On a $\nabla v_* = i\ \nabla\varphi_* e^{i\varphi_*}$, alors $|\nabla v_*| = |\nabla\varphi_*|$.

Alors

$$\frac{1}{2}\int\limits_G U_\varepsilon^2 \left|\nabla v_*\right|^2 = \frac{1}{2}\int\limits_G p^2 \left|\nabla \varphi_*\right|^2 + o(1), \ \varepsilon \to 0.$$

Cette dernière assertion découle du fait que $p_0 \le U_\varepsilon \le 1$ et $U_\varepsilon \to p$ p.p quand $\varepsilon \to 0$.

Suivant à la stratégie de [3], proposition.1 et étape A.2, on conclut que

$$v_\varepsilon \to v_* \text{ dans } H^1(G) \text{ quand } \varepsilon \to 0, \tag{3.2}$$

$$|v_\varepsilon| \to 1 \text{ uniformément dans } \overline{G}, \text{ quand } \varepsilon \to 0. \tag{3.3}$$

- **Preuve de 3.2**

D'aprés (3.1), on obtient

$$\tfrac{1}{2}\int\limits_G U_\varepsilon^2 \left|\nabla v_\varepsilon\right|^2 \le \tfrac{1}{2}\int\limits_G p^2 \left|\nabla \varphi_*\right|^2 + o(1), \ \varepsilon \to 0.$$

Puisque $p_0 \le U_\varepsilon \le 1$, donc

$$\tfrac{p_0^2}{2}\int\limits_G \left|\nabla v_\varepsilon\right|^2 \le \tfrac{1}{2}\int\limits_G p^2 \left|\nabla \varphi_*\right|^2 + o(1),$$

ce qui implique que, v_ε est bornée dans $H_g^1(G,\mathbb{C})$. Il existe donc, $v \in H^1(G,\mathbb{C})$ et $\varepsilon_n \to 0$ tels que $v_{\varepsilon_n} \rightharpoonup v$ faiblement dans $H^1(G,\mathbb{C})$.

Comme

$$\frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_G U_\varepsilon^4 (1-\left|v_{\varepsilon_n}\right|^2)^2 \le \frac{1}{2}\int\limits_G p^2 \left|\nabla \varphi_*\right|^2 + o(1), \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

et $p_0 \le U_\varepsilon \le 1$, alors

$$p_0^4 \int\limits_G (1-\left|v_\varepsilon\right|^2)^2 \le 2\varepsilon^2 \left(\int\limits_G p^2 \left|\nabla \varphi_*\right|^2 + o(1)\right), \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_G (1-\left|v_\varepsilon\right|^2)^2 = 0.$$

Or, on a l'injection compacte $H^1(G) \hookrightarrow\hookrightarrow L^4(G)$, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_G (1-\left|v_\varepsilon\right|^2)^2 = (1-\left|v\right|^2)^2 = 0,$$

donc, $|v| = 1$ p.p dans G, ce qui implique que, $v \in H^1(G, S^1)$. De plus l'opérateur de trace étant linéaire et continu, alors

$$g = v_{\varepsilon_n|\partial G} \rightharpoonup v_{|\partial G} \text{ dans } H^{1/2}(\partial G),$$

donc $v \in H^1_g(G, S^1)$. Passant à la semi continuité inférieure dans (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_G p^2 \left|\nabla v\right|^2 &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{2}\int_G U_\varepsilon^2 \left|\nabla v_\varepsilon\right|^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_G p^2 \left|\nabla v_*\right|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, il vient

$$\int_G \left|\nabla v\right|^2 \leq \int_G \left|\nabla v_*\right|^2$$

Par l'unicité de la solution du problème

$$\min_{v \in H^1_g(G,S^1)} \int_G \left|\nabla v\right|^2,$$

on déduit que, $v = v_*$. De plus, la convergence faible $v_\varepsilon \rightharpoonup v_*$ dans H^1 a lieu pour toute la suite (en utilisant l'unicité de la limite) et pour la topologie forte dans H^1. On a aussi la convergence $v_\varepsilon \to v_*$ dans $H^1(G)$.

En effet,

$$\begin{aligned} \int_G \left|\nabla v_*\right|^2 &\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_G \left|\nabla v_\varepsilon\right|^2 \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_G \left|\nabla v_\varepsilon\right|^2 \leq \int_G \left|\nabla v_*\right|^2, \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_G \left|\nabla v_\varepsilon\right|^2 = \int_G \left|\nabla v_*\right|^2. \tag{A}$$

Or, on sait que $v_\varepsilon \to v_*$ dans $L^2(G)$ car $H^1 \hookrightarrow\hookrightarrow L^2$ avec injection compacte, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_G |v_\varepsilon|^2 = \int_G |v_*|^2. \tag{B}$$

De (A) et (B), on conclut que

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1} \to \|v_*\|_{H^1}, \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Et la convergence faible de v_ε vers v_* dans H^1 implique $v_\varepsilon \to v_*$ dans H^1 (car H^1 est un espace de Hilbert).

- **Preuve de (3.3)**

De (3.1), on a

$$\frac{1}{2}\int_G U_\varepsilon^2 |\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G U_\varepsilon^4 (1-|v_\varepsilon|^2)^2 \leq \frac{1}{2}\int_G p^2 |\nabla v_*|^2$$

et le fait que $v_\varepsilon \to v_*$ dans H^1, entraine

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_G (1-|v_\varepsilon|^2)^2 \to 0 \tag{C}$$

Soit $x_0 \in \overline{G}$ et $\alpha = |v_\varepsilon(x_0)|$. D'aprés le corollaire 2.2 et le théorème des accroissements finis, on a

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x_0)| &\leq \tfrac{C}{\varepsilon} |x - x_0| \\ &\leq \tfrac{C}{\varepsilon}\rho \quad \forall x \in B_\rho(x_0) \cap G, \end{aligned}$$

alors

$$1 - |v_\varepsilon(x)| \geq 1 - \alpha - \tfrac{C}{\varepsilon}\rho \quad \text{dans } B_\rho(x_0) \cap G$$

et

$$(1 - |v_\varepsilon(x)|)^2 \geq \left(1 - \alpha - \tfrac{c}{\varepsilon}\rho\right)^2 \text{ car } \tfrac{c}{\varepsilon}\rho \leq 1 - \alpha \;\; (1 - \alpha - \tfrac{c}{\varepsilon}\rho \geq 0).$$

Puisque

$$\left(1 - |v_\varepsilon(x)|^2\right)^2 \geq (1 - |v_\varepsilon(x)|)^2,$$

on obtient (par (C))

$$\int_G (|v_\varepsilon|^2 - 1)^2 = \varepsilon^2 o(1).$$

Par suite

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} \left(1-|v_\varepsilon|^2\right)^2 \geq \int\limits_{B_\rho(x_0)} \left(1-\alpha-\frac{c}{\varepsilon}\rho\right)^2 dx = \pi\rho^2\left(1-\alpha-\frac{c}{\varepsilon}\rho\right)^2.$$

On choisi $\rho = \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{2c} < \delta$, pour ε petit

$$\varepsilon^2 o(1) \geq \pi\left(\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{2c}\right)^2\left[1-\alpha-\frac{c}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{2c}\right)\right]^2 = \frac{\pi\varepsilon^2(1-\alpha)^4}{16c^2},$$

donc

$$(1-\alpha)^4 \leq o(1) \;\text{ i.e }\; \left(1-|v_\varepsilon(x_0)|^2\right)^4 \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_G (|v_\varepsilon(x)|^2-1)^2,$$

alors

$$|v_\varepsilon| \to 1 \;\text{ uniformément dans } \overline{G}$$

et (d) s'en déduit.

Dans cette démonstration, on a utilisé l'inégalité

$$(1-|v_\varepsilon(x)|)^4 \leq \frac{C}{\varepsilon^2}\int\limits_G \left(1-|v_\varepsilon|^2\right)^2 \quad \forall x \in \overline{G}$$

Il s'en suit que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, v_ε peut s'écrire sous la forme

$$v_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon} \tag{3.4}$$

où $1 \geq \rho_\varepsilon = |v_\varepsilon| \geq \frac{1}{2}$ sur $\overline{G}$, car la fonction $\frac{v_\varepsilon}{|v_\varepsilon|}$ est régulière pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il en résulte que $\frac{v_\varepsilon}{|v_\varepsilon|}$ peut être relevée par une fonction régulière φ_ε telle que

$$\frac{v_\varepsilon}{|v_\varepsilon|} = e^{i\varphi_\varepsilon} \;\text{ dans } G \text{ (car } G \text{ est simplement connexe).}$$

Alors

$$\frac{v_\varepsilon}{|v_\varepsilon|} = e^{i\varphi_\varepsilon} \Longrightarrow v_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon} \;\text{ avec } \rho_\varepsilon = |v_\varepsilon|$$

et le fait que $|v_\varepsilon| \to 1$ uniformément dans G, quand $\varepsilon \to 0$, c'est à dire

$$\forall\delta \in (0,1),\; \exists\varepsilon_0 \;/\; |v_\varepsilon| \geq 1-\delta \quad \text{si} \;\; \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Choisissons $\delta = \frac{1}{2}$ donc $\rho_\varepsilon = |v_\varepsilon| \geq \frac{1}{2}$.

Puisque v_ε vérifie

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(U_\varepsilon^2 \nabla(1 - |v_\varepsilon|^2)\right) + \frac{2}{\varepsilon^2} U_\varepsilon^4 |v_\varepsilon|^2 (1 - |v_\varepsilon|^2) = 2U_\varepsilon^2 |\nabla v_\varepsilon|^2, & \text{dans } G \\ 1 - |v_\varepsilon|^2 = 0, & \text{sur } \partial G \end{cases}$$

alors la fonction φ_ε satisfait, immédiatement

$$\begin{cases} \operatorname{div}(U_\varepsilon^2 \rho_\varepsilon^2 \nabla \varphi_\varepsilon) = 0, & \text{dans } G \\ \varphi_\varepsilon = \varphi_0, & \text{sur } \partial G. \end{cases} \tag{3.5}$$

En effet, on a v_ε satisfait (2.8) et $v_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon}$, alors $v_\varepsilon = g = e^{i\varphi_0}$ sur ∂G et

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon = \varphi_0, & \text{sur } \partial G \\ \rho_\varepsilon = 1, & \text{sur } \partial G. \end{cases}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(U_\varepsilon^2 \nabla v_\varepsilon\right) &= -\operatorname{div}(U_\varepsilon^2 \nabla(\rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon})) \\ &= -\operatorname{div}\left[\left(U_\varepsilon^2 \nabla \rho_\varepsilon + i\rho_\varepsilon U_\varepsilon^2 \nabla \varphi_\varepsilon\right) e^{i\varphi_\varepsilon}\right] \\ &= \left[-\operatorname{div}\left(U_\varepsilon^2 \nabla \rho_\varepsilon\right) - i \operatorname{div}\left(U_\varepsilon^2 \rho_\varepsilon \nabla \varphi_\varepsilon\right) - iU_\varepsilon^2 \nabla \rho_\varepsilon \nabla \varphi_\varepsilon + \rho_\varepsilon U_\varepsilon^2 (\nabla \varphi_\varepsilon)^2\right] e^{i\varphi_\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} U_\varepsilon^4 \rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon} (1 - \rho_\varepsilon^2). \end{aligned}$$

On divise cette dernière égalité par $e^{i\varphi_\varepsilon}$, puis on identifie les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\operatorname{div}\left(U_\varepsilon^2 \rho_\varepsilon \nabla \varphi_\varepsilon\right) + U_\varepsilon^2 \nabla \rho_\varepsilon \nabla \varphi_\varepsilon = 0.$$

En multipliant cette équation par ρ_ε, on aura

$$\operatorname{div}\left(U_\varepsilon^2 \rho_\varepsilon \nabla \varphi_\varepsilon\right) \rho_\varepsilon + U_\varepsilon^2 \rho_\varepsilon \nabla \rho_\varepsilon \nabla \varphi_\varepsilon = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_\varepsilon^2\rho_\varepsilon.\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)\right]\rho_\varepsilon+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}U_\varepsilon^2.\frac{\partial\rho_\varepsilon^2}{\partial x_i}.\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}=0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{2}\rho_\varepsilon\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial x_i}\left(U_\varepsilon^2\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{2}\rho_\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_\varepsilon^2\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}U_\varepsilon^2.\frac{\partial\rho_\varepsilon^2}{\partial x_i}.\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}=0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\rho_\varepsilon^2}{\partial x_i}\left(U_\varepsilon^2\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{2}\rho_\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_\varepsilon^2\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)=0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_\varepsilon^2\rho_\varepsilon^2.\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)=\operatorname{div}(U_\varepsilon^2\rho_\varepsilon^2\nabla\varphi_\varepsilon)=0,$$

d'où (3.5) est vérifié.

2$^{\text{ème}}$étape: $\varphi_\varepsilon \to \varphi_*$ dans $H^1(G)$ et $C(\overline{G})$, quand $\varepsilon \to 0$

Soient ψ une extension régulière de φ_0 dans $\overline{G}$ et $\psi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon - \psi \in H_0^1(G)$.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(U_\varepsilon^2\rho_\varepsilon^2\nabla\psi_\varepsilon\right) = -\operatorname{div}\left(U_\varepsilon^2\rho_\varepsilon^2\nabla\psi\right), & \text{dans } G \\ \psi_\varepsilon = 0, & \text{sur } \partial G \end{cases} \tag{3.6}$$

le côté droit de (3.6) est de la forme

$$\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \quad \text{avec} \quad \|f_1\|_{L^3(G)} + \|f_2\|_{L^3(G)} \le C \tag{3.7}$$

où C est une constante indépendant de ε, $f_1 = U_\varepsilon^2\rho_\varepsilon^2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$ et $f_2 = U_\varepsilon^2\rho_\varepsilon^2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}$.

Alors

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{L^3(G)} + \|f_2\|_{L^3(G)} &= \left(\int_G \left|U_\varepsilon^2\rho_\varepsilon^2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|^3\right)^{1/3} + \left(\int_G \left|U_\varepsilon^2\rho_\varepsilon^2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|^3\right)^{1/3} \\ &\le \left(\int_G \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|^3\right)^{1/3} + \left(\int_G \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|^3\right)^{1/3} \\ &\le C, \end{aligned}$$

car $U_\varepsilon \le 1$ et $\rho_\varepsilon \le 1$.

Puisque $\frac{1}{4}p_0^2 \le U_\varepsilon^2\rho_\varepsilon^2 \le 1$ pour ε petit (car $p_0 \le U_\varepsilon \le 1$ et $\frac{1}{2} \le |v_\varepsilon| = \rho_\varepsilon \le 1$), il découle du théorème **De Giorgi** (voir[10])que, pour un certain $\alpha \in (0,1)$ indépendant de ε, la famille $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $C^{0,\alpha}(\overline{G})$.

Par conséquent, la famille$(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ est aussi bornée $(\psi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon - \psi)$, de sorte qu'elle soit relativement compacte dans $C^0(\overline{G})$, d'après le théorème de **Arzela-Ascoli**.

Soit φ telle que, pour une certaine suite $\varepsilon_n \to 0$, $\varphi_{\varepsilon_n} \to \varphi$. (car $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ est relativement compacte dans $C^0(\overline{G})$. On peut extraire une sous-suite φ_{ε_n} convergente vers une limite que l'on note par φ). Alors $v_{\varepsilon_n} \to e^{i\varphi}$ uniformément dans $\overline{G}$.

Puisque $v_{\varepsilon_n} \to e^{i\varphi_*}$ dans $H^1(G)$ (d'aprés l'étape 1), on a

$$e^{i\varphi} = e^{i\varphi_*} \text{ (par l'unicité de la limite).}$$

Par continuité, $\varphi - \varphi_* = const = 0$, $\varphi = \varphi_* = \varphi_0$ dans ∂G alors

$$\varphi_\varepsilon \to \varphi_* \text{ uniformément dans } \overline{G}, \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

On a encore

$$v_\varepsilon e^{-i\varphi_*} = \rho_\varepsilon e^{i(\varphi_\varepsilon - \varphi_*)} \to 1 \text{ dans } H^1(G),$$

alors

$$\left\|\rho_\varepsilon \nabla(\varphi_\varepsilon - \varphi_*)\right\|_{L^2(G)} \leq \left\|\nabla(v_\varepsilon e^{-i\varphi_*})\right\|_{L^2(G)} \to 0, \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

Il en résulte que

$$\left\|\nabla(\varphi_\varepsilon - \varphi_*)\right\|_{L^2(G)} \to 0, \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Puisque $\varphi_\varepsilon - \varphi_* = 0$ sur ∂G, on obtient

$$\varphi_\varepsilon \to \varphi_* \text{ dans } H^1(G), \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

L'assertion (a), découle de (d) et le théorème 2.1 (b), car $u_\varepsilon = v_\varepsilon U_\varepsilon$ et $u_* = pv_*$. Il reste à prouver (b) et (c). Si par exemple K un compact dans Ω, alors

$$\begin{aligned} &\int_K |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_K (1 - |u_\varepsilon|^2)^2 \qquad (3.8) \\ = &\int_K |\nabla v_\varepsilon|^2 U_\varepsilon^2 + 2\int_K U_\varepsilon \nabla U_\varepsilon . v_\varepsilon \nabla v_\varepsilon + \int_K |v_\varepsilon|^2 |\nabla U_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_K (1 - |v_\varepsilon|^2 U_\varepsilon^2)^2. \end{aligned}$$

En utilisant (2.5) et (3.1), on trouve

$$\int_K |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_K (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leq \text{const} + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_K (1-|v_\varepsilon|^2 U_\varepsilon^2)^2. \tag{3.9}$$

Puisque, pour $0 \leq x,y \leq 1$, l'inégalité

$$|1-xy| \leq 2|x-1| + |y-1| \tag{3.10}$$

est vraie, alors

$$(1-|v_\varepsilon|^2 U_\varepsilon^2)^2 \leq 8(1-|v_\varepsilon|^2)^2 + 2(1-U_\varepsilon^2)^2. \tag{3.11}$$

De (3.9) et (3.11), on obtient

$$\int_K |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_K (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leq C. \tag{3.12}$$

Et le fait que u_ε satisfasse dans Ω, l'équation de Ginzburg-Landau classique

$$-\Delta u = \frac{1}{\varepsilon^2} u(1-|u|^2),$$

nous permettra d'utiliser les méthodes décrites dans [4] pour obtenir (b) et (c).

Un calcul similaire a lieu si K est un compact de ω. ■

3.2 Analyse asymptotique des minimiseurs lorsque le degré de la donnée au bord est non nul

Soient G un ouvert régulier, simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ et $g : \partial G \to \mathbb{R}^2$; $|g| = 1$, une fonction régulière de degré topologique $d = \deg(g, \partial G) \neq 0$.

Pour les mêmes raisons que précédemment (le cas $d = 0$), un minimiseur u_ε de E_ε est bien défini et vérifie l'équation d'Euler associée à la fonctionnelle E_ε.

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{\varepsilon^2} u(p^2 - |u|^2), & \text{dans } G \\ u = g & \text{sur } \partial G. \end{cases}$$

Avec le principe du maximum l'estimation (2.10), i.e, $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(G)} \leq U_\varepsilon$, est encore vraie. De même, le raisonnement fait pour obtenir (2.13) reste valable, alors $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(G)} \leq \frac{C}{\varepsilon}$ et $\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty(G)} \leq \frac{C}{\varepsilon}$.

Dès maintenant, on va supposer $d > 0$. Le cas $d < 0$ s'obtient en passant à la fonction conjuguée, i.e, en considérant $\overline{g}$ qui vérifie, $\deg(g, \partial G) = -\deg(\overline{g}, \partial G)$, et en utilisant $H^1_{\overline{g}}(G, \mathbb{C}) = \overline{H^1_g(G, \mathbb{C})}$ et $E_\varepsilon(\overline{u}) = E_\varepsilon(u)$.

Pour $0 < \rho < \min\{|a_i - a_j|, i \neq j; \text{dist}(a_i, \Sigma)\}$, on suppose

$$\begin{aligned} B_\rho(x) &= \{y;\ |y-x| < \rho\}, \\ C_\rho(x) &= \{y;\ |y-x| = \rho\}, \\ A_{\rho',\rho}(x) &= \{y;\ \rho' < |y-x| < \rho\}, \end{aligned}$$

$$\widetilde{\omega} = \{(a_1, a_2, ..., a_d) \in \omega^d;\ a_i \neq a_j\ \forall i \neq j\}.$$

Si $x = 0$, ces ensembles seront désignés par B_ρ, C_ρ, $A_{\rho',\rho}$.

Le but de cette partie sera obtenir d'avantage d'informations sur les types de convergences et sur la limite. On fixe toujours la suite $(\varepsilon_n)_n$ décroissante vers 0. Dans un premier temps, on a le théorème suivant.

Théorème 3.2 *Soient $\varepsilon_n \to 0$ et $u_{\varepsilon_n} = U_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}$ le minimiseur de E_{ε_n}, alors il existe une sous-suite (ε_{n_k}) et $(a_1, a_2, ..., a_d) \in \widetilde{\omega}$ tels que*
(a) $(u_{\varepsilon_{n_k}})$ converge p.p vers $u_* = pv_*$;
(b) $v_* \in H^1_{loc}(G \backslash \{a_1, a_2, ..., a_d\}, S^1)$;
(c) $v_{\varepsilon_{n_k}} \to v_*$ dans $H^1_{loc}(G \backslash \{a_1, a_2, ..., a_d\})$ et $C^0_{loc}(\overline{G} \backslash \{a_1, a_2, ..., a_d\})$;
(d) $v_* = (\prod_{j=1}^{d} \frac{x-a_j}{|x-a_j|}) e^{i\Psi}$, où $\Psi : \overline{G} \to \mathbb{R}$ est une solution de

$$\begin{cases} \text{div}(p^2 \nabla(\theta + \Psi)) = 0 & \textit{dans } G \\ v_* = g & \textit{sur } \partial G \end{cases} \tag{3.13}$$

et $\theta(x) = \sum_{j=1}^{d} \arg(x - a_j)$, $x \neq a_j$, alors que $\nabla\theta$ est bien définie.

Avant de montrer ce théorème on va présenter quelques estimations globales de l'énergie F_ε.

Estimation de l'énergie F_ε

Théorème 3.3 *Sous les hypothèse précédentes, on a*

$$F_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \pi d p_0^2 \log \frac{1}{\varepsilon} + C, \quad 0 < \varepsilon < 1 \tag{3.14}$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_G (1 - |v_\varepsilon|^2)^2 \leq C, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{3.15}$$

où $C = C(G, g)$.

Preuve: • **Preuve de (**3.14**)**

Pour montrer l'estimation (3.14), on procède comme [4]. L'idée est de construire une fonction test $v \in H_g^1(G, \mathbb{R}^2)$ telle que $F_\varepsilon(v) \leq \pi d p_0^2 \log \frac{1}{\varepsilon} + C$. La construction se fait en trois étapes:

Étape 1: On fait des trous dans ω et on définit une nouvelle donnée au bord.
Soient $b_1, b_2,...,b_d$ d points fixés dans ω et $0 < \rho_0 < \min\{|b_i - b_j|, i \neq j; \operatorname{dist}(b_i, \Sigma)\}$. On pose $\Omega_* = G \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{d} B_{\rho_0}(b_j)$ tel que $\overline{B_{\rho_0}(b_j)} \subset G$ et $\overline{B_{\rho_0}(b_i)} \cap \overline{B_{\rho_0}(b_j)} = \varnothing \quad \forall i \neq j$.
On considère l'application $\widetilde{g} : \partial\Omega_* \to S^1$ définie par

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{sur } \partial G \\ \frac{x - b_j}{|x - b_j|} & \text{sur } \partial B_{\rho_0}(b_j) = C_{\rho_0}(b_j). \end{cases}$$

Étape 2: Par le fait que le degré topologique d'un produit soit égal à la somme des degrés

$$\deg(\widetilde{g}, \partial\Omega_*) = \deg(g, \partial G) - \sum_{j=1}^{d} \deg(\widetilde{g}, C_{\rho_0}(b_j)) = 0,$$

on a étendu ici la notion du degré topologique à un ouvert Ω_*, non simplement connexe grâce à la formule

$$\deg(\widetilde{g}, \partial\Omega_*) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega_*} \widetilde{g} \wedge \widetilde{g}_\tau.$$

Alors, il existe une application $\widetilde{v} : \overline{\Omega}_* \to S^1$ telle que $\widetilde{v} = \widetilde{g}$ sur $\partial\Omega_*$.

Étape 3: On construit alors, pour $0 < \varepsilon < \rho_0$,

$$v(x) = \begin{cases} \widetilde{v}(x) & \text{si } x \in \Omega_* \\ \frac{x-b_j}{|x-b_j|} & \text{si } x \in A_{\varepsilon,\rho_0}(b_j) \\ \frac{x-b_j}{\varepsilon} & \text{si } x \in B_\varepsilon(b_j). \end{cases}$$

On observe que $v \in H^1_g(G, \mathbb{C})$, alors

$$F_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(v).$$

Soit pour $\varepsilon > 0$ et $\rho_0 > 0$,

$$I(\varepsilon, \rho_0) := \min_{v \in H^1_h(B_{\rho_0})} \left\{ \frac{1}{2} \int_{B_{\rho_0}} U_\varepsilon^2 |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{B_{\rho_0}} U_\varepsilon^4 (1 - |v|^2)^2 \right\} = F_\varepsilon(v_\varepsilon),$$

où $h(x) = \frac{x}{|x-b_j|}$ sur B_{ρ_0}. Ainsi, par un changement de variable, on a

$$I(\varepsilon, \rho_0) = I(\frac{\varepsilon}{\rho_0}, 1) = I(1, \frac{\rho_0}{\varepsilon}),$$

pour chaque $t > 0$, soit $I(t) = I(t, 1)$, donc $I(t) = I(1, 1/t) \quad \forall t > 0$.

Afin de prouver l'égalité $I(\varepsilon, \rho_0) = I(1, \frac{\rho_0}{\varepsilon})$, on va montrer que si $v \in H^1_{\frac{z}{|z|}}(B_{\rho_0}, \mathbb{C})$, $F_\varepsilon(v) = F_1(v(\varepsilon.))$, avec la première énergie prise sur B_{ρ_0} et la deuxième sur $B_{\rho_0/\varepsilon}$.

$$\begin{aligned} F_1(v(\varepsilon.)) &= \frac{1}{2} \int_{B_{\rho_0/\varepsilon}} U_\varepsilon^2(\varepsilon x) |\nabla v(\varepsilon x)|^2 + \frac{1}{4} \int_{B_{\rho_0/\varepsilon}} U_\varepsilon^4(\varepsilon x)(1 - |v(\varepsilon x)|^2)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{|x|<\frac{\rho_0}{\varepsilon}} \varepsilon^2 U_\varepsilon^2(\varepsilon x) |(\nabla v)(\varepsilon x)|^2 + \frac{1}{4} \int_{|x|<\frac{\rho_0}{\varepsilon}} U_\varepsilon^4(\varepsilon x)(1 - |v(\varepsilon x)|^2)^2 \\ &\overset{\varepsilon x = y}{=} \frac{1}{2} \int_{|y|<\rho_0} U_\varepsilon^2(y) |\nabla v(y)|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{|y|<\rho_0} U_\varepsilon^4(y)(1 - |v(y)|^2)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_{\rho_0}} U_\varepsilon^2 |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{B_{\rho_0}} U_\varepsilon^4 (1 - |v|^2)^2 \\ &= F_\varepsilon(v). \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\left\{v(\varepsilon.); v \in H^1_{\frac{z}{|z|}}(B_{\rho_0}, \mathbb{C})\right\} = \left\{v; v \in H^1_{\frac{z}{|z|}}(B_{\rho_0/\varepsilon}, \mathbb{C})\right\},$$

il suffit de passer au " min " pour obtenir le résultat $I(\varepsilon, \rho_0) = I(1, \frac{\rho_0}{\varepsilon})$. En fait, on utilise le changement $y = \frac{\varepsilon}{\rho_0}x$ pour obtenir l'égalité $I(1, \frac{\rho_0}{\varepsilon}) = I(\frac{\varepsilon}{\rho_0}, 1)$. ∎

Soit le lemme suivant

Lemme 3.1 *L'application* $t \mapsto I(t) + \pi p_0^2 \log t$ *est croissante sur* $(0, \infty)$, *c'est-à-dire,* $\forall t_1 < t_2$

$$I(t_1) \leq \pi p_0^2 \log(t_2/t_1) + I(t_2)$$

En particulier,

$$I(t) \leq \pi p_0^2 \log(1/t) + I(1), \quad \forall t \in (0, 1].$$

Preuve: Soit v_2 un minimiseur de $I(t_2)$ et v_1 tel que

$$v_1(x) = \begin{cases} v_2(x) & \text{si } |x| < 1/t_2 \\ \frac{x}{|x|} & \text{si } 1/t_2 < |x| < 1/t_1, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
I(t_1) = I(1, 1/t_1) &= \min\left\{\frac{1}{2}\int_{B_{1/t_1}} U_\varepsilon^2|\nabla v_1|^2 + \frac{1}{4}\int_{B_{1/t_1}} U_\varepsilon^4(1-|v_1|^2)^2\right\} \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{B_{1/t_1}} U_\varepsilon^2|\nabla v_1|^2 + \frac{1}{4}\int_{B_{1/t_1}} U_\varepsilon^4(1-|v_1|^2)^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_{B_{1/t_2}} U_\varepsilon^2|\nabla v_2|^2 + \frac{1}{4}\int_{B_{1/t_2}} U_\varepsilon^4(1-|v_2|^2)^2 + \frac{1}{2}\int_{1/t_2<|x|<1/t_1} U_\varepsilon^2\left|\nabla\left(\frac{z}{|z|}\right)\right|^2 \\
&\leq I(t_2) + \frac{1}{2}\int_{1/t_2<|x|<1/t_1} p_0^2\left|\nabla\left(\frac{z}{|z|}\right)\right|^2 \\
&\leq I(t_2) + \frac{1}{2}p_0^2\int_{1/t_2}^{1/t_1}\frac{dr}{r}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= I(t_2) + p_0^2\pi\log(t_2/t_1).
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat. ∎

Ce lemme se généralise facilement par translation à un disque de centre quelconque.

Finalement, en l'appliquant à notre situation, avec $t_1 = \frac{\varepsilon}{\rho_0} < t_2 = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(v_\varepsilon) &\leq F_\varepsilon(v) \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega_*} U_\varepsilon^2 |\nabla \widetilde{v}|^2 + \sum_{i=1}^{d} I(\varepsilon, \rho_0) \\ &\leq \pi d p_0^2 \log \frac{1}{\varepsilon} + C, \end{aligned}$$

où $C = \frac{1}{2}\int_{\Omega_*} |\nabla \widetilde{v}|^2 + dI(1) + d\pi p_0^2 \log \rho_0$.$\blacksquare$

Preuve: •**Preuve de (3.15)**

D'une part, on a

$$\begin{aligned} p_0^2 \left\{ \frac{1}{2}\int_G |\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G (1-|v_\varepsilon|^2)^2 \right\} &\leq F_\varepsilon(v_\varepsilon) \quad (3.16) \\ &\leq \pi d p_0^2 \log \frac{1}{\varepsilon} + C. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la limite inférieure donnée par le théorème V.2 [4], on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_G |\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{8\varepsilon^2}\int_G (1-|v_\varepsilon|^2)^2 &\geq \inf_{u \in H_g^1} \left\{ \frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 + \frac{1}{8\varepsilon^2}\int_G (1-|u|^2)^2 \right\} \quad (3.17) \\ &\geq \pi d \log \frac{1}{\varepsilon} - C, \end{aligned}$$

l'inégalité (3.17) implique

$$\frac{1}{2}\int_G |\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G (1-|v_\varepsilon|^2)^2 \geq \frac{1}{8\varepsilon^2}\int_G (1-|v_\varepsilon|^2)^2 + \pi d \log \frac{1}{\varepsilon} - C. \quad (3.18)$$

On combine (3.16) et (3.18), on obtient (3.15). $\blacksquare$

Construction des mauvais disques

Maintenant, on veut construire comme [4], chapitre IV, les mauvais disques. Puisque les ingrédients de la construction ont déjà été mis en place (à savoir (2.14), (3.15), et le lemme 2.3), les résultats finaux sont

Il existe une sous-suite (ε_{n_k}) et λ_0, μ_0 et il existe y_1^k, y_2^k, ...,y_d^k dans G qui vérifient

$$|v_\varepsilon| \geq \frac{1}{2} \quad \text{dans } \overline{G} \backslash \bigcup_{j=1}^{d} B_{\lambda_0 \varepsilon_{n_k}}(y_j^k); \tag{3.19}$$

$$|y_j^k - y_l^k| \geq 8\lambda_0 \varepsilon_{n_k}, \;\; j \neq l; \tag{3.20}$$

pour $a_i \in G$, $i = 1, 2, ..., d$;

$$y_j^k \xrightarrow{\;k\;} a_i \qquad \text{si } j = 1, ..., d; \tag{3.21}$$

$$\deg(v_\varepsilon, C_{\lambda_0 \varepsilon_{n_k}}(y_j^k)) = 1, \text{ pour } j = 1, 2, ..., d; \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{n_k}^2} \int_{B_{\lambda_0 \varepsilon_{n_k}}(y_j^k) \cap G} (1 - |v_\varepsilon|^2)^2 \geq \mu_0 \; > 0, \;\; j = 1, 2, ..., d. \tag{3.23}$$

on suppose que les mauvais disques sont centrés aux zéros $x_1^k, x_2^k, ..., x_d^k$ de v_ε, tels que

$$x_i^k \rightarrow a_i, \quad i = 1, 2, ..., d.$$

Soit maintenant, la démonstration du théorème 3.2.

Preuve: [du théorème 3.2] **Étape 1.** On a

Si $0 < \eta < \eta_0 = \min\{|a_i - a_j|, \, i \neq j; \, \mathrm{dist}(a_i, \partial G)\}$, alors

$$F_{\varepsilon_{n_k}}(v_{\varepsilon_{n_k}}, A_{\eta,\eta_0}(a_i)) \leq \pi p_0^2 \log \frac{1}{\eta} + C \quad \text{et} \quad F_{\varepsilon_{n_k}}(v_{\varepsilon_{n_k}}, G \backslash \bigcup_i B_{\eta_0}(a_i)) \leq C. \tag{3.24}$$

On va suivre la stratégie de [4], chapitre V. Les ingrédients sont (3.15), le théorème 3.1, et l'estimation de la borne inférieure.

Étape 2.

Soit une sous-suites (ε_{n_k}), alors $(v_{\varepsilon_{n_k}})$ converge dans $H^1_{loc}(G\backslash\{a_1,a_2,...,a_d\})$ et $C^0_{loc}(\overline{G}\backslash\{a_1,a_2,...,a_d\})$ vers une certain $v_* \in H^1_{loc}(G\backslash\{a_1,a_2,...,a_d\},S^1)$.

Comme dans [4], chapitre VI, on utilise (3.24), on obtient (b) et (c).

Étape 3. $a_i \notin \Omega$, $i=1,2,...,d$.

On raisonne par l'absurde. Si, par exemple, $a_1 \in \Omega$, soit

$$\eta_1 = \min\{\eta_0, dist(a_1,\Sigma)\},$$

pour $0<\eta<\eta_1$, on a

$$\begin{aligned} & \liminf_{k\to\infty} F_{\varepsilon_{n_k}}(v_{\varepsilon_{n_k}}, A_{\eta,\eta_1}(a_1)) && (3.25)\\ = \ & \liminf_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a_1)} U^2_{\varepsilon_{n_k}}|\nabla v_{\varepsilon_{n_k}}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2_{n_k}}\int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a_1)} U^4_{\varepsilon_{n_k}}(1-|v_{\varepsilon_{n_k}}|^2)^2\right\}\\ \geq \ & \liminf_{k\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a_1)}|\nabla v_{\varepsilon_{n_k}}|^2\\ = \ & \frac{1}{2}\int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a_1)}|\nabla v_*|^2\\ \geq \ & \frac{1}{2}\int_{\eta}^{\eta_1}\left(\int\limits_{C_\rho(a_1)}\left|\frac{\partial v_*}{\partial \tau}\right|^2 ds\right)d\rho\\ \geq \ & \pi\log\frac{\eta_1}{\eta}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et du fait que $\eta<\rho<\eta_1$,

$$1 = \deg(v_*, C_\rho(a_1)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_\rho(a_1)}(v_*\wedge\frac{\partial v_*}{\partial\tau})ds$$

Maintenant, (3.25) contredit (3.24) pour η assez petit.

Étape 4. $a_i\notin\Sigma$, $i=1,2,...,d$.

On suppose, par exemple, $a_1=a\in\Sigma$. Il existe $\theta_0>0$ telle que, si $\eta>0$ assez petit, $B_\eta(a)\cap\Omega$ contient un secteur S_η de l'angle θ_0, centré en a et de rayon η; voir figure 2

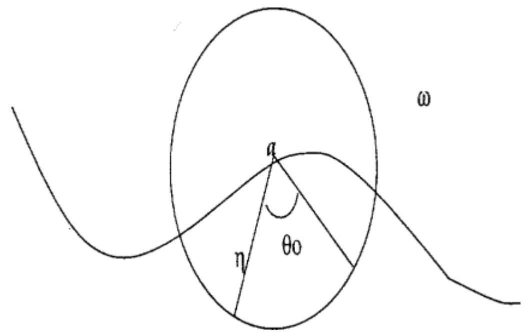


Figure 2

L'idée est la même que l'étape précédente. On fixe η_1 assez petit, alors, pour $0 < \eta < \eta_1$, on a

$$\liminf_{k\to\infty} F_{\varepsilon_{n_k}}(v_{\varepsilon_{n_k}}, A_{\eta,\eta_1}(a)) \geq \frac{1}{2} \int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a)} p^2|\nabla v_*|^2. \tag{3.26}$$

Maintenant, si on écrit

$$v_* = \frac{x-a}{|x-a|}e^{i\Psi} \quad , \quad \text{où } \Psi \in H^1_{loc}(B_{\eta_1}(a)\backslash\{a\}, \mathbb{R}),$$

alors, si $\theta = \arg(x-a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a)} p^2|\nabla v_*|^2 &= \int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a)} p^2|\nabla(\theta+\Psi)|^2 \qquad (3.27)\\
&= \int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a)} p^2\left(|\nabla\theta|^2 + |\nabla\Psi|^2 + 2\nabla\theta.\nabla\Psi\right)\\
&= \int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a)} \left(p^2|\nabla\theta|^2 + p^2|\nabla\Psi|^2 + 2(p^2-p_0^2)\nabla\theta.\nabla\Psi\right)\\
&= \int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a)} \left(\left|p\nabla\Psi + \frac{p^2-p_0^2}{p}\nabla\theta\right|^2 + \left(p^2 - \left(\frac{p^2-p_0^2}{p}\right)^2\right)|\nabla\theta|^2\right)\\
&\geq \int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a)\backslash S_{\eta_1}} p_0^2(2-p_0^2)|\nabla\theta|^2 + \int\limits_{A_{\eta,\eta_1}(a)\cap S_\eta} p_0^2|\nabla\theta|^2\\
&\geq C\log(\eta_1/\eta),
\end{aligned}$$

pour $C > 2\pi p_0^2$, une fois de plus. Cela contredit (3.24) si η est assez petit.

De l'étape 1,3 et 4, on conclut que les point $a_i \in \omega$, $i = 1, 2, ..., d$.

Étape 5.

Si

$$v_* = (\prod_j^d \frac{x - a_j}{|x - a_j|})e^{i\Psi}, \text{ où } \Psi \in H^1_{loc}(G \backslash \{a_1, a_2, ..., a_d\}),$$

alors Ψ est harmonique dans ω et

$$\nabla \left(v_* \frac{|x - a_j|}{x - a_j} \right)(a_j) = 0.$$

On rappelle que, pour λ assez petit, on a $\Sigma_\lambda = \{x; \overline{d}(x) = -\lambda\}$. Pour $\lambda_0 > 0$ fixé et petit, par le théorème de Fubini et (3.24), on trouve que pour chaque k, il y a $\lambda_k \in (0, \lambda_0/2)$ tel que

$$\int_{\Sigma_{\lambda_k}} \left\{ (|\nabla v_{\varepsilon_{n_k}}|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{n_k}^2}(1 - |v_{\varepsilon_{n_k}}|^2)^2) \right\} \leq C, \tag{3.28}$$

où C est indépendante de k. Maintenant, si h_k est la restriction de $p_0^{-1} u_{\varepsilon_{n_k}}$ à ω_k l'intérieur de Σ_{λ_k}, alors h_k est un minimiseur de l'énergie "classique"

$$\int_{\omega_k} |\nabla u|^2 + \frac{p_0^2}{2\varepsilon^2} \int_{\omega_k} (1 - |u|^2)^2 \quad \text{dans } H^1_{v_{\varepsilon_{n_k}}|_{\Sigma_{\lambda_k}}}(\omega_k, \mathbb{R}^2). \tag{3.29}$$

On peut employer (3.29), comme [4], et dans ce cas, on a la convergence $C^{1,\alpha}_{loc}(\omega \backslash \{a_1, a_2, ..., a_d\})$ de $u_{\varepsilon_{n_k}}$(ou $v_{\varepsilon_{n_k}}$) et on obtient

$$\int_{\Sigma_{\lambda_0}} \left(|\nabla v_{\varepsilon_{n_k}}|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{n_k}^2}(1 - |v_{\varepsilon_{n_k}}|^2)^2 \right) \leq C. \tag{3.30}$$

On peut maintenant, appliquer à l'intérieur de Σ_{λ_0} une variante du théorème principal dans [1], où les données au bord ne sont plus fixées mais satisfont à (3.30), afin d'obtenir les propriétés désirées de Ψ. Par conséquent, on a comme dans [4], théorème IX.1.

Étape 6.

Ψ vérifie, sur le compact dans $\overline{G}\backslash\{a_1, a_2, ..., a_d\}$,

$$\operatorname{div}(p^2\nabla(\theta + \Psi)) = 0. \tag{3.31}$$

En effet, si $\rho_0 > 0$ est assez petit fixé, puis pour de grandes valeurs de k, on peut écrire

$$v_{\varepsilon_{n_k}} = \rho_k e^{i(\theta+\Psi_k)} \quad \text{dans } \overline{G}\backslash\bigcup_i B_{\rho_0}(a_i), \tag{3.32}$$

et Ψ_k est une solution de

$$\operatorname{div}(\rho_k^2 U_{\varepsilon_{n_k}}^2 \nabla(\theta + \Psi_k)) = 0 \quad \text{dans } \overline{G}\backslash\bigcup_i B_{\rho_0}(a_i). \tag{3.33}$$

Puisque $v_{\varepsilon_{n_k}} \to v_*$ dans $H^1_{loc}(G\backslash\{a_1, a_2, ..., a_d\})$, on peut également supposer que $\Psi_k \to \Psi$ dans H^1_{loc}. Puisque $\rho_k \to 1$ p.p, (3.31) est une conséquence de (3.33). $\blacksquare$

Chapitre 4

Une autre approche du problème

L'approche qu'on va présenter s'applique au problème

$$\min_{u \in H^1_g(G,\mathbb{C})} \left\{ \frac{1}{2} \int_G |\nabla u|^{\,2} + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G (1-|u|^2)^2 \right\}, \tag{4.1}$$

où $g : \partial G \to \mathbb{C}$ est la donnée au bord (pas nécessairement à valeur dans S^1) satisfaisant $|g| > 0$ sur ∂G.

La quantité qui remplace $f(\varepsilon)$ est

$$\widetilde{f}(\varepsilon) = \min_{\substack{u \in H^1(G,\mathbb{C}) \\ u=|g| \text{ sur } \partial G}} \left\{ \frac{1}{2} \int_G |\nabla u|^{\,2} + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G (1-|u|^2)^2 \right\} \tag{4.2}$$

Soit $\widetilde{U}_\varepsilon$ est une solution de (4.1). On note que $u \in H^1_g(G,\mathbb{C})$ est une solution de (4.2) si et seulement si $v = u/\widetilde{U}_\varepsilon$ est une solution de

$$\min_{v \in H^1_{g_0}(G,\mathbb{C})} J_\varepsilon(v),$$

où

$$g_0 = \frac{g}{|g|} \quad \text{et } J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \int_G \widetilde{U}_\varepsilon^2 \, |\nabla v|^{\,2} + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G \widetilde{U}_\varepsilon^4 (1-|v|^2)^2.$$

4.1 Etude d'un problème auxiliaire

Soient

$$0 < \rho < \frac{1}{2} \min\{\min_{i \neq j} |a_i - a_j|; \min_j \operatorname{dist}(a_j, \Sigma)\},$$

où Σ est une courbe régulière à l'intérieure de G et $\Omega_\rho = G \backslash \bigcup_{j=1}^{d} B_\rho(a_j)$. Pour ρ comme ci-dessus, soit u_ρ le minimiseur de

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} p^2 |\nabla u|^2, \tag{4.3}$$

dans $\xi_\rho = \{u \in H^1(\Omega_\rho, S^1); u = g \text{ sur } \partial G, \deg(u, C_\rho(a_j)) = 1, \, j = 1, ..., d\}$.

Comme dans [4], le théorème I.1, on peut prouver que le minimiseur de I est réalisé dans ξ_ρ. De plus,

$$I(u_\rho) = \pi d p_0^2 \log \frac{1}{\rho} + W(a) + O(\rho^2), \text{ lorsque } \rho \to 0. \tag{4.4}$$

Les résultats suivants sont dans l'esprit de [4], chapitre I.

Proposition 7 *Soient* $I(\rho) = \inf_{u \in \xi} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} p^2 |\nabla u|^2$, *où* $\Omega_\rho = G \backslash \bigcup_{j}^{d} \overline{B_\rho(a_j)}$ *et*

$$\xi = \left\{ u \in H^1(\Omega_\rho; S^1);\ u = g \ \textit{sur} \ \partial G, \ \deg(u, C_\rho(a_j)) = 1, \ j = 1, 2, ..., d \right\}.$$

Alors

$$I(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} p^2 |\nabla \left(\theta + \widetilde{\psi}_0 \right)|^2 + O(\rho |\log \rho|^{\frac{1}{2}}), \ \textit{quand} \ \rho \to 0. \tag{4.5}$$

Preuve: Pour tout $u \in \xi$, soit

$$v = u \prod_{j}^{d} \left(\frac{|z - a_j|}{z - a_j} \right),$$

alors $v \in H^1(\Omega_\rho, S^1)$, $v = g_0$ sur ∂G et $\deg(v, C_\rho(a_j)) = 0$, $j = 1, 2, ..., d$. Il s'en suit que v peut être écrit comme

$$v = e^{i\lambda}, \tag{4.6}$$

pour un certain $\lambda \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{R})$ tel que $\lambda = \psi_0$ sur ∂G.

Réciproquement, pour un tel λ on a

$$u = v \prod_{j}^{d} \left(\frac{z - a_j}{|z - a_j|} \right) \in \xi.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} I\left(\rho\right) &= \frac{1}{2} \inf_{\substack{\lambda \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{R}) \\ \lambda = \psi_0 \text{ sur } \partial G}} \int_{\Omega_\rho} p^2 |\nabla \left(e^{i(\theta + \lambda)} \right)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \inf_{\substack{\lambda \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{R}) \\ \lambda = \psi_0 \text{ sur } \partial G}} \int_{\Omega_\rho} p^2 |\nabla \left(\theta + \lambda\right)|^2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

De sorte que, les arguments standards de $I(\rho)$ soient réalisés par une certaine fonction ψ, qui satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div}(p^2 \nabla \left(\theta + \psi\right)) = 0 & \text{dans } \Omega_\rho, \\ \psi = \psi_0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \partial\psi / \partial\nu = 0 & \text{sur } C_\rho(a_j),\ j = 1, 2, ..., d. \end{cases} \tag{4.8}$$

Soit maintenant $\eta = \widetilde{\psi}_0 - \psi$. On a

$$\begin{aligned} I\left(\rho\right) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} p^2 |\nabla \left(\theta + \psi\right)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} p^2 |\nabla \left(\theta + \widetilde{\psi}_0\right)|^2 - \int_{\Omega_\rho} p^2 \nabla \left(\theta + \widetilde{\psi}_0\right).\nabla\eta + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} p^2 |\nabla\eta|^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

La deuxième quantité peut être estimée par

$$\left| \int_{\Omega_\rho} p^2 \nabla \left(\theta + \widetilde{\psi}_0\right).\nabla\eta \right| \leq \left(\int_{\Omega_\rho} |\nabla \left(\theta + \widetilde{\psi}_0\right)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_\rho} |\nabla\eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.10}$$

Puisque,

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla \left(\theta + \widetilde{\psi}_0\right)|^2 = O(|\log\rho|),\ \ \rho \to 0, \tag{4.11}$$

on trouve que

$$I\left(\rho\right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} p^2 |\nabla \left(\theta + \widetilde{\psi}_0\right)|^2 + O(|\log\rho|^{\frac{1}{2}}) \left(\int_{\Omega_\rho} |\nabla\eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} p^2 |\nabla\eta|^2. \tag{4.12}$$

Maintenant, η satisfait

$$\left\{\begin{array}{rcll} \operatorname{div}(p^2\nabla\eta) & = & 0 & \text{dans } \Omega_\rho, \\ \eta & = & 0 & \text{sur } \partial G, \\ \partial\eta/\partial\nu & = & \partial\widetilde{\psi}_0/\partial\nu & \text{sur } C_\rho(a_j),\ j=1,2,...,d. \end{array}\right. \tag{4.13}$$

Il s'ensuit que η réalise

$$m = \inf_{\substack{\lambda\in H^1(\Omega_\rho)\\ \lambda=0 \text{ sur } \partial G}} \left\{ \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla\lambda|^2 - \sum_j^d \int_{C_\rho(a_j)} \frac{\partial\widetilde{\psi}_0}{\partial\nu}\lambda \right\}. \tag{4.14}$$

Il est claire que, $m \leq 0$ (choisissons $\lambda = 0$). Puisque $\widetilde{\psi}_0$est une fonction harmonique dans ω, on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla\eta|^2 - \sum_j^d \int_{C_\rho(a_j)} \frac{\partial\widetilde{\psi}_0}{\partial\nu}\eta &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla\eta|^2 \\ &\quad - \sum_j^d \int_{C_\rho(a_j)} \frac{\partial\widetilde{\psi}_0}{\partial\nu}\left(\eta - \oint_{C_\rho(a_j)} \eta\right) \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Puisque $\partial\widetilde{\psi}_0/\partial\nu$ est uniformément bornée sur $C_\rho(a_j)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla\eta|^2 &\leq C\max_j \int_{C_\rho(a_j)} |\eta \oint_{C_\rho(a_j)} \eta| \\ &\leq \text{const.}\rho.\max_j \left(\int_{A_{\rho,2\rho}(a_j)} |\nabla\eta|^2\right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

La dernière estimation découle de l'inégalité de Poincaré. On obtient

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla\eta|^2 = O(\rho^2),\ \ \rho\to 0. \tag{4.17}$$

Si on substitut (4.17) dans (4.12), on conclut la preuve de la proposition 7. ■

Proposition 8 *Soit* $J(\rho) = \inf_{u\in F} \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla u|^2$*, où*

$$F = \left\{ u\in H^1(\Omega_\rho;S^1);\ u = g \textit{ sur } \partial G,\ \exists\alpha_j\in\mathbb{C},\ |\alpha_j| = 1,\ u(z) = \alpha_j\frac{z-a_j}{|z-a_j|} \textit{ sur } C_\rho(a_j) \right\}.$$

Alors
$$J(\rho)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla\left(\theta+\widetilde{\psi}_0\right)|^2+O(\rho|\log\rho|),\ \textit{quand } \rho\to 0. \tag{4.18}$$

Preuve: Comme précédemment, $J(\rho)$ est réalisée par $u=e^{i(\theta+\psi)}$, où ψ satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div}(p^2\nabla(\theta+\psi)) = 0 & \text{dans } \Omega_\rho, \\ \psi = \psi_0 & \text{sur } \partial G, \\ \psi_j = c_j-\sum\limits_{k\neq j}^{d}\theta_k & \text{sur } C_\rho(a_j),\ j=1,2,...,d, \\ \int_{C_\rho(a_j)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sum\limits_{k\neq j}^{d}\theta_k+\psi_j\right) = 0 & j=1,2,...,d. \end{cases} \tag{4.19}$$

Ici, les c_j sont des constantes inconnues qui font partie du problème. Soit $\eta=\widetilde{\psi}_0-\psi$, alors η satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div}(p^2\nabla\eta) = 0 & \text{dans } \Omega_\rho, \\ \eta = 0 & \text{sur } \partial G, \\ \eta = \widetilde{\psi}_0-c_j+\sum\limits_{k\neq j}\theta_k & \text{sur } C_\rho(a_j),\ j=1,2,...,d, \\ \int_{C_\rho(a_j)}\frac{\partial\eta}{\partial\nu} = 0 & j=1,2,...,d. \end{cases} \tag{4.20}$$

Une modification évidente du lemme I.3 dans [4] rapporte

$$\begin{aligned} \max_{\Omega_\rho}\eta-\min_{\Omega_\rho}\eta &\leq \sum_{j}^{d}\left(\max_{C_\rho(a_j)}\eta-\max_{C_\rho(a_j)}\eta\right) \\ &= O(1),\ \text{quand } \rho\to 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Maintenant, η réalise
$$\inf_{\substack{\lambda\in H^1(\Omega_\rho)\\ \lambda=\eta\ \text{sur}\partial\Omega_\rho}}\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho}p^2|\nabla\lambda|^2. \tag{4.22}$$

On considère la fonction test

$$\lambda(x)=\begin{cases} \left(2-\frac{|x-a_j|}{\rho}\right)\eta\left(\rho\frac{x-a_j}{|x-a_j|}\right) & x\in A_{\rho,2\rho}(a_j) \text{ pour un certain } j, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Puisque $\eta=O(\rho)$ et $\partial\eta/\partial\tau=O(1)$ sur $C_\rho(a_j)$, on trouve que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla\eta|^2 \leq \int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla\lambda|^2 = O(\rho^2). \tag{4.23}$$

On réutilisant (4.12), on trouvera une expansion appropriée pour $\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla(\theta+\widetilde{\psi}_0)|^2$.

Soit

$$r_j(z) = |z-a_j|,\ \phi = \sum_j \log r_j.$$

Puisque ϕ et θ sont des conjugués harmoniques, alors on a

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla(\theta+\widetilde{\psi}_0)|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla\widetilde{\psi}_0|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2\nabla\theta.\nabla\widetilde{\psi}_0. \tag{4.24}$$

La dernière intégrale est

$$\begin{aligned} p_0^2\int_{\omega\cap\Omega_\rho}\nabla\theta.\nabla\widetilde{\psi}_0 + \int_{\Omega}\nabla\theta.\nabla\widetilde{\psi}_0 \quad &= \quad p_0^2\int_\Sigma \frac{\partial\theta}{\partial\nu}\widetilde{\psi}_0 - p_0^2\sum_J\int_{C_\rho(a_j)}\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\widetilde{\psi}_0 \\ &\quad + \int_{\partial G}\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\widetilde{\psi}_0 - \int_\Sigma\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\widetilde{\psi}_0 \\ &= \quad (1-p_0^2)\int_\Sigma(\sum_j\frac{\partial}{\partial\tau}\log r_j)\widetilde{\psi}_0 \\ &\quad + \int_{\partial G}(\sum_j\frac{\partial}{\partial\tau}\log r_j)\psi_0 + O(\rho^2), \\ \text{quand } \rho \quad &\to \quad 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

On a également

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla\phi|^2 \quad &= \quad \frac{p_0^2}{2}\int_{\omega\cap\Omega_\rho}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\phi|^2 \\ &= \quad \frac{1}{2}\int_{\partial G}\sum_{j,k}\frac{\partial}{\partial\nu}\log r_j\log r_k - \frac{1}{2}\int_\Sigma\sum_{j,k}\frac{\partial}{\partial\nu}\log r_j\log r_k \\ &\quad + \frac{p_0^2}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial}{\partial\nu}\log r_j\log r_k - \frac{p_0^2}{2}\sum_l\int_{C_\rho(a_l)}\sum_{j,k}\frac{\partial}{\partial\nu}\log r_j\log r_k. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Puisque

$$\int_{C_\rho(a_l)}\frac{\partial}{\partial\nu}\log r_j\log r_k = \begin{cases} O(\rho^2), & \text{si } l\neq j \text{ et } l\neq k, \\ 2\pi\log\rho, & \text{si } l=j=k, \\ 2\pi\log|a_l-a_k| + O(\rho^2), & \text{si } l=j\neq k, \end{cases} \tag{4.27}$$

on trouve que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} p^2|\nabla(\theta+\widetilde{\psi}_0)|^2 &= \frac{1}{2}\int_G p^2|\nabla\widetilde{\psi}_0|^2-(1-p_0^2)\int_\Sigma(\sum_j\frac{\partial}{\partial\tau}\log r_j)\widetilde{\psi}_0 \\
&+\int_{\partial G}(\sum_j\frac{\partial}{\partial\tau}\log r_j)\psi_0+\frac{1}{2}\int_{\partial G}\sum_{j,k}\frac{\partial}{\partial\nu}\log r_j\log r_k \\
&-\frac{1-p_0^2}{2}\int_\Sigma\sum_{j,k}\frac{\partial}{\partial\nu}\log r_j\log r_k+\pi dp_0^2\log\frac{1}{\rho} \\
&-p_0^2\pi\sum_{j\neq k}\log|a_j-a_k|+O(\rho^2) \\
&= \pi dp_0^2\log\frac{1}{\rho}+W(a)+O(\rho^2).
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

■

4.2 L'énergie renormalisée

La configuration $\{a_1,a_2,...,a_d\}$ n'est pas arbitraire, mais minimise une énergie renormalisée $W_g(a_1,a_2,...,a_d)$ définie sur ω^d,où l'expression exacte de W est donnée dans (4.28).

Suivant les arguments de [4], le théorème I.10, on conclut que le minimum de W est atteint dans $\widetilde{\omega}=\{(a_1,a_2,...,a_d)\in\omega^d; a_i\neq a_j, i\neq j\}$.
En effet, soit $g\in C^\infty(\partial G,S^1)$ une fonction fixée et régulière telle que $d=\deg(g,\partial G)>0$. On considère d points distincts et fixés $a_1,a_2,...,a_d\in\omega$. Pour $z\neq a_j$, soit

$$\theta_j(z)=\arg(z-a_j),\quad j=1,2,...,d.$$

Les θ_j sont considérés en tant que fonctions analytiques à valeurs multiples. Localement θ_j peut être défini comme fonction régulière à valeur simple, et

$$e^{i\theta_j}=\frac{z-a_j}{|z-a_j|}.$$

Soit encore $\theta=\theta_1+\theta_2+...+\theta_d$. On note que $e^{i\theta_j}$, $\nabla\theta_j$ sont à valeurs simples. Soit maintenant,

$$g_0=ge^{-i\theta}=g\prod_j\left(\frac{|z-a_j|}{z-a_j}\right),$$

de sorte que $g_0 \in C^\infty(\partial G, S^1)$ et $\deg(g_0, \partial G) = 0$. Il suit qu'il y a une certaine $\psi_0 \in C^\infty(\partial G, \mathbb{R})$ telle que $g_0 = g e^{i\psi_0}$. On note par $\widetilde{\psi}_0$ la solution de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(p^2 \nabla(\theta + \psi)) & = 0 \quad \text{dans } G, \\ \psi & = \widetilde{\psi}_0 \quad \text{sur } \partial G. \end{cases} \tag{4.29}$$

La définition est significative, puisque p est, à une constante prés, proche de a_j, de sorte que dans ω, on ait l'équation $\Delta\psi = 0$. En fait, $\Delta\psi = -\operatorname{div}(p^2\nabla\theta) = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$ avec $f_1,\ f_2\ \in L^\infty$, alors que $\psi \in C^{0,\alpha}(\overline{G})$, $0 < \alpha < 1$.

Soit

$$I(\varepsilon, \rho) = \min_{u \in H^1_g(B_\rho)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{B_\rho} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{B_\rho} (1 - |u|^2)^2 \right\},$$

où $g(x) = x/|x|$ dans ∂B_ρ. Soit b n'importe quelle configuration dans $\widetilde{\omega}$ et ρ défini comme ci-dessus, ceci nous donne une application $\hat{u}_\rho{:}\Omega_\rho \to S^1$ qui est solution du problème de minimisation $J(\rho)$.

D'autre part, $I(\varepsilon, \rho)$ est réalisée par certains $u^{\varepsilon,\rho}$. Si on pose

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} \hat{u}_\rho(x) & x \in \overline{G} \setminus \bigcup_i B_\rho(b_i), \\ u^{\varepsilon,\rho}(x - b_i) & x \in B_\rho(b_i), \end{cases}$$

on déduit comme dans [4], que

$$F_{\varepsilon_{n_k}}(v_{\varepsilon_{n_k}}) = F_{\varepsilon_{n_k}}(w_{\varepsilon_{n_k}}) = \pi d p_0^2 \log \frac{1}{\rho} + W(a) + d p_0^2 I(\varepsilon_{n_k}, \rho) + o(1), \text{ quand } k \to \infty. \tag{4.30}$$

Cette inégalité renverse l'inégalité suivante

$$F_{\varepsilon_{n_k}}(v_{\varepsilon_{n_k}}) \geq \pi d p_0^2 \log \frac{1}{\rho} + W(a) + d p_0^2 I(\varepsilon_{n_k}, \rho) + o(1), \text{ quand } k \to \infty. \tag{4.31}$$

Et pour poursuit le même raisonement comme dans [4].

Annexe

L'unicité du minimiseur lorsque la donnée au bord est de degré nul

Dans cette section, p est soit une fonction régulière positive, ou elle est vérifie

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ p_0 & \text{si } x \in \omega \end{cases}$$

où $0 < p_0 < 1$.

Théorème 4.1 *On suppose que $d = 0$. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ dépendant de g tel que pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, le minimiseur de E_ε dans H^1_g soit unique.*

Preuve: On suppose que u et v soient deux solutions du problème de minimisation (1.1). Alors, pour ε assez petit, on peut écrire $u = \rho e^{i\varphi}$ et $v = \eta u e^{i\phi}$, avec $\varphi = \varphi_0$ dans ∂G, $\phi = 0$ sur G et $\eta = \rho = 1$ sur ∂G (car si $d = 0$, $g = e^{i\varphi_0}$ tel que $\varphi_0 : \partial G \to \mathbb{R}$).

Le théorème 5.1 est une conséquence directe du lemme ■

Lemme 4.1 *On a pour $\alpha > 0$*

$$E_\varepsilon(v) \geq E_\varepsilon(u) + \frac{1}{2}\int_G \rho^2 \left|\nabla\eta\right|^2 + \frac{1}{2}\int_G \rho^2(\eta^2 - \alpha)\left|\nabla\phi\right|^2 + \frac{1}{2}\int_G \rho^2(1-\eta^2)^2\left(\frac{\rho^2}{2\varepsilon^2} - \frac{\left|\nabla\varphi\right|^2}{\alpha}\right) \quad \text{(A.1)}$$

Preuve: On écrit $w = \eta e^{i\phi}$, donc $v = u.w$.

En réitérant le même procédé que celui qui est dans le lemme de substitution, on obtient

$$E_\varepsilon(v) = E_\varepsilon(u) + \frac{1}{2}\int_G \rho^2 \left|\nabla w\right|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G \rho^4(1-\eta^2)^2 + \int_G \rho^2\eta^2\nabla\varphi\nabla\phi. \quad \text{(A.2)}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(v) &= E_\varepsilon(uw)\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_G |u|^2|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_G |w|^2|\nabla u|^2 + \int\limits_G u\nabla u.w\nabla w + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_G \left(p^2 - |u|^2|w|^2\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_G \rho^2|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_G \eta^2|\nabla u|^2 + \int\limits_G u\nabla u.w\nabla w + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_G \left(p^2 - \rho^2\eta^2\right)^2\\
&= E_\varepsilon(u) + \frac{1}{2}\int\limits_G \rho^2|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_G (\eta^2-1)|\nabla u|^2 + \int\limits_G u\nabla u.w\nabla w\\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_G \left[\left(p^2 - \eta^2\rho^2\right) - \left(p^2-\rho^2\right)^2\right]\\
&= E_\varepsilon(u) + \frac{1}{2}\int\limits_G \rho^2|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_G (\eta^2-1)|\nabla u|^2 + \int\limits_G u\nabla u.w\nabla w\\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_G \rho^2(1-\eta^2)\left[2\left(p^2-\rho^2\right) + \rho^2(1-\eta^2)\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(v) &= E_\varepsilon(u) + \frac{1}{2}\int\limits_G \rho^2|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_G (\eta^2-1)|\nabla u|^2 + \int\limits_G u\nabla u.w\nabla w +\\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_G \rho^2(1-\eta^2)\left(p^2-\rho^2\right) + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_G \rho^4(1-\eta^2)^2.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

On observe qu'en fonction de ρ et ϕ, l'équation de Ginzburg-Landau devient

$$\begin{cases} -\Delta\rho + \rho|\nabla\varphi|^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho\left(1-\rho^2\right) & \text{dans } G,\\ \operatorname{div}\left(\rho^2\nabla\varphi\right) = 0 & \text{dans } G.\end{cases}$$

En effet, pour $k = 1, 2$, on a

$$u_{x_k} = \rho_{x_k}e^{i\varphi} + i\rho e^{i\varphi}\varphi_{x_k},$$

$$u_{x_kx_k} = \rho_{x_kx_k}e^{i\varphi} + 2i\rho_{x_k}e^{i\varphi}\varphi_{x_k} - \rho e^{i\varphi}\varphi_{x_k}^2 + i\rho e^{i\varphi}\varphi_{x_kx_k},$$

donc

$$\Delta u = e^{i\varphi}\left(\Delta\rho + 2i\ \nabla\rho.\nabla\varphi - \rho|\nabla\varphi|^2 + i\rho\Delta\varphi\right) = -\tfrac{1}{\varepsilon^2}\rho e^{i\varphi}(p^2-\rho^2).$$

On divise cette équation par $e^{i\varphi}$, on obtient

$$\Delta\rho + 2i\ \nabla\rho.\nabla\varphi - \rho\left|\nabla\varphi\right|^2 + i\rho\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon^2}\rho(p^2-\rho^2).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$-\Delta\rho + \rho\left|\nabla\varphi\right|^2 = \tfrac{1}{\varepsilon^2}\rho(p^2-\rho^2)$$

et

$$2\nabla\rho.\nabla\varphi + \rho\Delta\varphi = \tfrac{1}{\rho}\operatorname{div}(\rho^2\nabla\varphi) = 0.$$

Donc

$$\operatorname{div}(\rho^2\nabla\varphi) = 0.$$

En multipliant la première équation par $\rho\left(\eta^2-1\right)$ et en utilisant le fait que $\eta = 1$ sur ∂G, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^2}\int_G \rho^2(p^2-\rho^2)\left(\eta^2-1\right) &= \int_G -\Delta\rho\left(\eta^2-1\right)\rho + \int_G \rho^2\left|\nabla\varphi\right|^2\left(\eta^2-1\right)\\
&= \int_G \nabla\rho\nabla\left(\rho\left(\eta^2-1\right)\right) + \int_G \rho^2\left|\nabla\varphi\right|^2\left(\eta^2-1\right)\\
&= \int_G \left|\nabla\rho\right|^2\left(\eta^2-1\right) + 2\int_G \rho\nabla\rho.\eta\nabla\eta + \int_G \rho^2\left|\nabla\varphi\right|^2\left(\eta^2-1\right)
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (A.3), on obtient (A.2).

Ensuite, en multipliant la deuxième équation par $\phi \in H_0^1(G)$, on obtient

$$\int_G \rho^2\nabla\varphi.\nabla\phi = 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_G \rho^2\eta^2\nabla\varphi.\nabla\phi &= \int_G \rho^2\left(\eta^2-1\right)\nabla\varphi.\nabla\phi\\
&= \int_G \rho\nabla\phi\rho\left(\eta^2-1\right)\nabla\varphi\\
&\le \tfrac{1}{2}\alpha\int_G \rho^2\left|\nabla\phi\right|^2 + \tfrac{1}{2\alpha}\int_G \rho^2\left(1-\eta^2\right)^2\left|\nabla\varphi\right|^2.
\end{aligned}$$

Dans la dernière assertion, on a utilisé l'inégalité élémentaire suivante

Pour $\delta > 0$ fixé, on a l'inégalité suivante

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2 \qquad \forall a, b > 0,$$

avec $a = \rho |\nabla \phi|$, $b = \rho \left(1 - \eta^2\right) \nabla \varphi$ et $\delta = \frac{\alpha}{2}$, donc

$$-\int_G \rho^2 \eta^2 \nabla \varphi \nabla \phi \geq -\frac{1}{2} \alpha \int_G \rho^2 \left|\nabla \phi\right|^2 - \frac{1}{2\alpha} \int_G \rho^2 (1 - \eta^2)^2 \left|\nabla \varphi\right|^2.$$

On remplace dans (A.2), on obtient l'estimation (A.1). ■

Remarque 4.1 ♦ *L'unicité pour ε assez petit dans le cas p régulière, résulte de (A.1)et le fait que $\|\nabla \varphi\|_{L^\infty} \leq C$, où C une constante indépendant de ε (voir [9]).*

♦ *Dans le cas discontinue, i.e p satisfait*

$$p(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \Omega \\ p_0 & si\ x \in \omega \end{cases} \qquad 0 < p_0 < 1,$$

on utilise l'estimation suivante, qui complète la démonstration du théorème.

Lemme 4.2 *Il existe une constante $C = C(G, g)$, telle que*

$$\|\nabla \varphi\|_{L^\infty(G)} \leq C / \varepsilon^{4/5}.$$

Preuve: On a

$$\mathrm{div}(\rho^2 \nabla \varphi) = 2\rho \nabla \rho \nabla \varphi + \rho^2 \Delta \varphi = 0,$$

donc

$$\Delta \varphi = -\frac{2}{\rho} \nabla \rho \nabla \varphi \quad \text{dans } G. \tag{A.4}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|\Delta \varphi\|_{L^2(G)} &\leq C \|\nabla \rho\|_{L^2(G)} . \|\nabla \varphi\|_{L^2(G)} \\ &\leq C \|\nabla \rho\|_{L^2(G)} . \end{aligned}$$

De plus, puisque $E_\varepsilon(u) \leq \frac{C}{\varepsilon}$, on obtient

$$\|\nabla \rho\|_{L^2(G)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}},$$

car

$$\|\nabla\rho\|_{L^2(G)}^2 \leq E_\varepsilon(u).$$

Cela implique

$$\|\Delta\varphi\|_{L^2(G)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{A.5}$$

D'autre part, par (A.4) et $\|\nabla u\|_{L^\infty(G)} \leq \frac{C}{\varepsilon}$, on trouve que

$$\|\Delta\varphi\|_{L^\infty(G)} \leq \frac{C}{\varepsilon^2}, \tag{A.6}$$

car

$$|\nabla u|^2 = |\nabla\rho|^2 + \rho^2 |\nabla\varphi|^2$$

et

$$\rho^2 |\nabla\varphi|^2 \leq |\nabla u|^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^2}.$$

De (A.5) et (A.6), on obtient

$$\|\Delta\varphi\|_{L^p(G)} \leq C/\varepsilon^{(2p-3)/p} \qquad \text{pour } 2 \leq p \leq +\infty.$$

En particulier, si $p = \frac{5}{2}$, on trouve que

$$\|\Delta\varphi\|_{L^{5/2}(G)} \leq C/\varepsilon^{4/5}.$$

De plus, puisque $\varphi = \varphi_0$ est régulière dans ∂G, on obtient

$$\left\|D^2\varphi\right\|_{L^{5/2}(G)} \leq C/\varepsilon^{4/5},$$

d'où

$$\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(G)} \leq C/\varepsilon^{4/5}.$$

On sait déjà que $\eta = 1$ et $\phi = 0$ sur ∂G. Et à partir de l'égalité $E_\varepsilon(u) = E_\varepsilon(v)$, (A.1) devient

$$\frac{1}{2}\int_G \rho^2 |\nabla\eta|^2 + \frac{1}{2}\int_G \rho^2(\eta^2 - \alpha) |\nabla\phi|^2 \leq \frac{1}{2}\int_G \rho^2(1-\eta^2)\left(\frac{C}{\alpha\varepsilon^{8/5}} - \frac{\rho^2}{2\varepsilon^2}\right).$$

Ce qui implique que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int\limits_G \rho^2\,|\nabla\eta|^{\,2}+\frac{1}{2}\int\limits_G \rho^2(\eta^2-\alpha)\,|\nabla\phi|^{\,2}+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_G \rho^4(1-\eta^2) \qquad \text{(A.7)}\\
\leq\ & \frac{1}{2}\int\limits_G \rho^2(1-\eta^2)\frac{C}{\alpha\varepsilon^{8/5}}\\
\leq\ & \frac{1}{2}\int\limits_G (1-\eta^2)\frac{C}{\alpha\varepsilon^{8/5}}.
\end{aligned}
$$

car $\rho \leq 1$.

Le membre de gauche de (A.7) est minoré par

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{8}\int\limits_G (1-p_0)^2\,|\nabla\eta|^{\,2}+\frac{1}{4}\int\limits_G (1-p_0)^2\left(\frac{(1-p_0)^2}{4}-\alpha\right)|\nabla\phi|^{\,2} \qquad \text{(A.8)}\\
& +\frac{1}{16\varepsilon^2}\int\limits_G (1-p_0)^4(1-\eta^2)\\
\leq\ & \frac{C}{2\alpha\varepsilon^{8/5}}\int\limits_G (1-\eta^2).
\end{aligned}
$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ fixé tel que

$$\tfrac{1}{8}\tfrac{(1-p_0)^4}{\varepsilon_0^{8/5}}\alpha > C.$$

Pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on déduit de (A.8) que $\eta = 1$ et $\phi = const$ sur G.

Comme $\phi = 0$ sur ∂G, il résulte que $\phi = 0$ sur G. Cela implique que $u = v$ sur G, d'où l'unicité du minimiseur du problème

$$\min_{u\in H^1_g} E_\varepsilon(u), \qquad \text{(P)}$$

pour ε petit. ■

Dans ce paragraphe, on démontre l'unicité du minimiseur u_ε du problème de minimisation (P), pour ε grand.

Mais, l'étude de l'unicité de u_ε entre les deux valeur de ε, reste encore un problème ouvert.

A cet effet, (pour ε grand), soit $\lambda_1 = \lambda_1(-\Delta) > 0$, la première valeur propre de l'opérateur $(-\Delta)$ dans $H^1_0(G)$. On se propose de monter que si $\varepsilon > 1/\sqrt{\lambda_1}$, alors u_ε est unique, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 9 *Supposons que* $\deg(g,\partial G)=0$, *pour* $\varepsilon > 1/\sqrt{\lambda_1}$, *alors* E_ε *admet un unique minimiseur, tel que* $\lambda_1=\lambda_1(-\Delta)>0$, *est la première valeur propre de l'opérateur* $(-\Delta)$ *dans* $H_0^1(G)$.

Preuve: Considérons $\varepsilon > 1/\sqrt{\lambda_1}$ et u_ε un minimiseur de E_ε dans H_g^1. On remarque que

$H_g^1(G,\mathbb{R}^2)=\{u_\varepsilon\}+H_0^1(G,\mathbb{R}^2)$.

Soit alors $v\in H_0^1(G,\mathbb{R}^2)$, en multipliant la première ligne de l'équation de Ginzburg-Landau par v, on obtient

$$\int_G \nabla u_\varepsilon \nabla v = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_G u_\varepsilon v(p^2-|u_\varepsilon|^2).$$

Si $v\neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(u_\varepsilon+v)-E_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2+\int_G \nabla u_\varepsilon\nabla v+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G (2u_\varepsilon v+|v|^2)^2 \\
&\quad -\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G 2(p^2-|u_\varepsilon|^2)(2u_\varepsilon v+|v|^2)^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G \left[2|v|^2(|u_\varepsilon|^2-p^2)+(2u_\varepsilon v+|v|^2)^2\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_G |v|^2\geq 0 \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\int_G |\nabla v|^2-\lambda_1\int_G |v|^2\right)\geq 0
\end{aligned}$$

car $\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et $(p^2-|u_\varepsilon|^2)\leq 1$, alors

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon+v)-E_\varepsilon(u_\varepsilon)>0$$

donc u_ε est un minimiseur local stricte. Il résulte que le problème (P) admet au plus une solution, d'où on déduit l'unicité du minimiseur de E_ε dans H_g^1, pour ε grand. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a constaté que la plupart des résultats de F. Béthuel et al. se généralise à l'énergie de Ginzburg-Landau suivante

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int\limits_G \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(p^2 - |u|^2)^2\right),$$

sauf dans le calcul de l'estimation de l'énergie potentielle qui est

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_G (p^2 - |u|^2)^2 \geq \frac{C}{\varepsilon},\ 0 < \varepsilon < 1.$$

Dans leurs cas, ils ont trouvé l'estimation

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_G (1 - |u|^2)^2 \leq C,\ 0 < \varepsilon < 1,$$

Ainsi, lorsque la fonction p est différente de 1, la construction des mauvais disques utilisé dans [3] n'est plus évidente.

L'idée utilisée dans ce mémoire est d'étudier le comportement asymptotique de minimiseur u_ε sous la forme $v_\varepsilon U_\varepsilon$,où U_ε est un minimiseurs de l'énergie E_ε dans la classe $H_1^1(G, \mathbb{C})$ telle que $p_0 \leq U_\varepsilon \leq 1$ et v_ε soit un minimiseur de l'énergie

$$F_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int\limits_G \left({U_\varepsilon}^2|\nabla v|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}U_\varepsilon^4(1 - |v|^2)^2\right).$$

En fait, on obtient les résultats de convergence pour u_ε par l'étude de U_ε et v_ε séparément.

Bibliographie

[1] A. André, P. Bauman, D. Philips, Vortex pinning with bounded fields for the Ginzburg-Landau equation, Annal de l'institut de Henri Poincaré (C), Nonlinear Analysis, 20 (2003), 705-729.

[2] N. André, I. Shafrir, Asymptotic behavior of minimizers for the Ginzburg-Landau functional with weight, Parties I et II, Arch. Rational Mech. Anal. 142 (1998), 45–73, 75–98.

[3] F. Béthuel, H. Brézis, F. Hélein, Asymptotics for the minimization of a Ginzburg-Landau functional, Calc. Var. Partial Differential Equations, 1 (1992), 123-148.

[4] F. Béthuel, H. Brézis, F. Hélein, Ginzburg-Landau vortices, Birkhaüser, Boston, 1994.

[5] A. Beaulieu, R. Hadiji, Equation with weight near their zeroes, Asymptotic Analysis, 22 (2000), 303-347.

[6] H. Brézis, L. Nirenberg, Degree theory and BMO, Part I, Part II: compact manifolds without boundaries, Selecta Math(N. S) 1 (1995), 2(1996), 197-263, 1-60.

[7] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson, 1992.

[8] H. Brézis, F. Merle, T. Rivière, Quantization effects for $-\Delta u = u(1-|u|^2)$ dans $\mathbb{R}^2$, Anal. 126 (1994), 35-58.

[9] M. De1 Pino, P. Felmer, Local minimizers for the Ginzburg-Landau energy, Math. Z, 255 (1997), 671-684.

[10] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Grundlehren Math. Wiss. 224, Springer, Berlin et New York, 1983.

[11] L. Lassoued, P. Mironescu, Ginzburg-Landau type energy with discontinuous constaint, J. Anal. Math, 77 (1999), 1-26.

[12] N. G. Lloyd, Degree theory, Cambridge Univ. Press Deimling, Nonlinear functional Analysis, Springer, Great Britain, 1978.

[13] P. Mironescu, Les minimiseurs locaux pour l'équation de Ginzburg-Landau sont à symétrie radiale, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 323 (1996), 593-598.

[14] J. Rubinstein, On the equilibrium position of Ginzburg-Landau vortices, Z.Angew. Math. Phys, 46 (1995), 1-13.

[15] T. Rivière, Asymptotic analysis for the Ginzburg-Landau equations, J. Eur. Math. Soc, 1 (1997), 1-39.

[16] I. Shafrir, On a class of singular perturbation problems, H. Diff. Equations, 1 (2004), 297-383.

[17] M. Struwe, On the asymptotic behavior of minimizers of a Ginzburg-Landau model in 2-dimensions, J. Diff. Int. Equations, 7 (1994), 1613-1624.