

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr BelKaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de
MAGISTERE EN MATHÉMATIQUES

Option : Systèmes Dynamiques et Applications

Titre du Mémoire

**Modèles mathématiques pour des populations
structurées en âge**

Présenté par : BOUIZEM Mohammed

Soutenu le : 17 novembre 2011

Devant le Jury :

Président:	Mr M. YEBDRI	Prof. U. Tlemcen
Examineurs:	Mr S. M. BOUGUIMA	Prof. U. Tlemcen
	Mr A. OUAHAB	M.C.A U.Sidi Bel Abbas
Rapporteur :	Mr A. LAKMECHE	Prof. U. Sidi Bel Abbas

**Année Universitaire
2011-2012**

ملخص:

في هذه المذكرة, نعتبر بعض النماذج الرياضية لفئات منظمة من حيث السن. نقدم النظام الكلاسيكي لوتكا- مكندريك و تحليله من جانب معادلة التجديد. نجد الحلول لمعادلة مكندريك بمعني التوزيع المنخفض و ندرس حالة نموذجية لانتشار هذا الوباء في فئات ذوي السن المنظم.

كلمات مفتاحيه : الفئات منظمة من حيث السن، معادلة مكندريك، معادلة التجديد، انتشار الوباء.

RESUME : Dans ce mémoire, on considère quelques modèles mathématiques pour des populations structurées en âge. On introduit le système classique de Lotka-McKendrick et son analyse par l'équation de renouvellement. On prouve l'existence des solutions de l'équation de McKendrick dans le sens distributionnel et on étudie le cas d'un modèle de la propagation d'une épidémie dans une population structurée en âge.

Mots clés: Populations structurées en âge, équation de McKendrick, équation de renouvellement, propagation de l'épidémie.

ABSTRACT :

In this paper, we consider some mathematical models for age structured populations. We introduce the classical of Lotka-McKendrick system and its analysis by the renewal equation . We prove the existence of solutions of the McKendrick equation in the distributional sense and we study the case of an epidemic model spread for an age structured population.

Key words : Structured populations age, McKendrick equation, renewal equation, spread of an epidemic

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier mon encadreur, le Professeur Abdelkader LAKMECHE, pour la qualité de son encadrement, de par sa pédagogie et sa capacité d'écoute exceptionnelle, il a su me transmettre son intérêt et me donner goût pour cette pluridisciplinarité que représentent les mathématiques. Son intuition mathématique et son sens physique de l'interprétation m'épateront toujours.

J'adresse mes sincères remerciements au Professeur Mustapha YEBDRI, pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury et pour sa grande disponibilité malgré un emploi du temps chargé.

Toute l'expression de ma profonde reconnaissance et ma grande gratitude s'adressent au Professeur Sidi Mohammed BOUGUIMA et au Docteur Abdelghani OUAHAB d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et d'y consacrer une part de leur temps.

Je tiens également à remercier les différents membres des deux départements de mathématiques de Tlemcen et Sidi Bel Abbès.

Je voudrais remercier ceux sans qui tout ce travail n'aurait pas le même sens, la même saveur.

Merci à toi, ma belle soeur Hadjera. Aussi incroyable que cela puisse paraître, tu es de ceux qui connaissent la substantifique moëlle de mon effort abordé dans ce mémoire. A ma soeur Nacéra, pour son aide et son implication à surmonter les embûches jonchant le chemin de la soutenance.

Je n'ai pas de mots suffisants pour remercier mon épouse Khadidja qui m'a encouragé et m'a soutenu toutes ces années. A mes enfants Rayane et Houssam qui m'ont donné l'amour, le courage et l'esprit de vie.

A vous, mes parents, à toi ma soeur Amara, et à toi, mon frère Seddik. Je tiens à vous remercier du fond du coeur. Votre investissement, aussi bien affectif que matériel, votre écoute, votre confiance et votre compréhension sont d'une constance sans faille, rassurante et stabilisante. Vous m'avez chaque jour permis d'avancer et finalement d'accomplir ce travail que je vous dédie. Merci.

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaires	6
1.1 Intégrales impropres	6
1.2 Transformées de Laplace	7
1.2.1 Définitions et propriétés de la transformée de Laplace	7
1.2.2 Comportement asymptotique de la fonction d'origine	10
1.3 Les Résidus	11
1.3.1 Le théorème des résidus	12
1.4 Equations Intégrales de Volterra	12
1.4.1 Le théorème de Paley-Wiener	15
1.5 Quelques définitions et propriétés sur les espaces fonctionnels	17
1.5.1 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$	19
1.6 Quelques modèles mathématiques en dynamique des populations	21
1.6.1 Modèle de malthus	22
1.6.2 Modèle de Verhulst	24
2 Modèles Mathématiques pour des populations structurées en âge	26
2.1 L'équation de Lotka-McKendrick (Approche de Iannelli)	33
2.1.1 L'équation de renouvellement	35
2.1.2 Analyse de l'équation de Lotka-McKendrick	39
2.1.3 Le comportement asymptotique	46

3	Cas d'un Modèle Démographique	52
3.1	Préliminaires	53
3.2	Populations avec une classe d'âge fertile	59
3.3	Populations avec plusieurs classes d'âge fertile	73
3.4	Prédictions à partir des données démographiques	81
3.5	Conclusion	82
4	Cas d'un Modèle Epidémiologique	85
4.1	Un modèle général pour les épidémies	89
4.2	Etats endémiques pour le modèle S-I-S	93
4.3	Le comportement asymptotique pour le cas intra-cohorte	97
	Conclusions et Perspectives	103
	Bibliographie	104

Introduction

L'objet de ce mémoire est de présenter quelques modèles mathématiques pour des populations structurées en âge, ces modèles sont en général décrits par des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles.

Les modèles mathématiques des populations intégrant la structure par âge ou d'autres structures d'individus aux propriétés variées ont une grande histoire. Les premiers modèles des populations structurées en âge sont réalisés grâce à Sharpe et Lotka [40] et McKendrick [36] qui ont établi une approche par les équations aux dérivées partielles afin de modéliser l'évolution d'une population structurée en âge.

La première étape lors de la modélisation d'une population est de considérer certaines variables significatives qui permettent de diviser la population en des sous groupes homogènes internes, afin de décrire la dynamique comme l'interaction de ces sous groupes, gouvernés par des mécanismes qui dépendent de ces variables.

L'âge est l'un des paramètres naturels les plus importants structurant la population. En fait, beaucoup de variables internes, à l'échelle du seul individu, sont strictement en fonction de l'âge parce que des âges différents signifient des reproductions et des capacités de survie différentes, et aussi, des comportements différents. En effet, si pendant longtemps l'intérêt pour la structure d'âge a été limité à la démographie, de nos jours il joue un rôle fondamental dans des domaines comme l'écologie, l'épidémiologie, la croissance des cellules... etc [8].

Parmi tous les modèles de population, le plus simple est celui de TR Malthus [31] qui a écrit un célèbre traité sur la croissance de la population humaine, prédisant qu'elle serait exponentielle dans le temps avec toutes les conséquences catastrophiques que l'on puisse imaginer.

Pour présenter ce modèle nous considérons une population homogène simple ; c'est-à-dire, nous supposons que tous les individus de la population sont identiques de sorte que la seule variable que nous avons à traiter soit le nombre d'individus présenté comme une fonction du temps $P(t)$ (taille de la population totale).

En outre, nous supposons que la population vit isolée dans un habitat invariant, sans limite de ressources. Ainsi, la population est soumise aux taux constants de fertilité et de mortalité que nous appelons respectivement β et μ (leur différence $\alpha = \beta - \mu$ est généralement appelé le paramètre malthusien de la population) et la croissance est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}P(t) = \beta P(t) - \mu P(t) = \alpha P(t).$$

Ainsi

$$P(t) = P(0)e^{\alpha t}.$$

Dans le modèle de Malthus, la fonction densité de population ne tient pas compte des âges des individus, les taux de fertilité et de mortalité non plus. D'où l'introduction du modèle linéaire de Lotka-McKendrick qui est un modèle linéaire de base et qui prend en considération la variable âge voir [45],[25]. Il est constitué par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(a, t)}{\partial a} = -\mu(a)p(a, t), \quad p.p. \quad a \geq 0, \quad t \geq 0, \\ p(0, t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)p(a, t)da, \quad t > 0, \\ p(a, 0) = p_0(a), \quad a \geq 0. \end{array} \right.$$

Ce mémoire se compose de quatre chapitres.

Après l'introduction, nous trouverons, au chapitre 1, un rappel de quelques résultats que nous utiliserons dans la suite du mémoire.

Dans le chapitre 2, on considère une population simple vivant isolée dans un habitat invariable, tous ces individus étant parfaitement égaux sauf pour leurs âges [26].

On suppose qu'il n'y a aucune différence de sexe, la fertilité et la mortalité sont des paramètres intrinsèques de la croissance de la population, indépendant du temps et de la taille de la population, elles dépendent de l'âge seulement. Pour la description d'une telle population, on introduit le système classique de Lotka-McKendrick et son analyse par l'équation de renouvellement.

Dans le chapitre 3, on donne un exemple du cas démographique [34], l'objectif est de trouver les solutions de l'équation de Mckendrick dans le sens distributionnel faible, pour calculer exactement des exemples spécifiques et pour obtenir une partie de leurs propriétés.

Le chapitre 4 est consacré au cas d'un modèle de la propagation d'une épidémie dans une population structurée en âge, en prenant soin de la structure par âge de la population [26]. L'importance de considérer l'âge des individus dans un modèle épidémique, vient du fait que pour de nombreuses maladies le taux d'infection varie considérablement avec l'âge.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire.

1.1 Intégrales impropres

Définition 1.1. [27] Soit (a, b) ($a < b$) un intervalle (ouvert, fermé ou semi-ouvert). Une fonction $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sera dite localement intégrable sur (a, b) , si elle est Riemann-intégrable sur tout sous intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. On écrira dans ce cas $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

Définition 1.2. [27] Soit $f \in \mathcal{R}([a, b[)$. Si la limite $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ existe, on dit que f est intégrable (au sens généralisé) sur $[a, b[$ et l'on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt.$$

Dans ce cas, on dit aussi que l'intégrale généralisée ou l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ existe ou est convergente. Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ n'est pas convergente, c'est à dire si $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ n'existe pas, on dira que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

Théorème 1.1. [27] L'ensemble $\mathbb{R}([a, b[)$ est un espace vectoriel, l'application $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}([a, b[)$. Autrement dit, si les intégrales impropres $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b g(t)dt$ sont convergentes, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt$ est encore convergente et l'on a

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$

Théorème 1.2. [27] Soit $f \in \mathcal{R}([a, b[)$, $f \geq 0$. Pour que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit que la fonction $u \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ soit majorée, autrement dit si

$$\exists M > 0, \forall x \in [a, b[: \left[\int_a^x f(t)dt \leq M \right].$$

1.2 Transformées de Laplace

1.2.1 Définitions et propriétés de la transformée de Laplace

Soit $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors f admet une transformée de la Laplace en λ , si l'intégrale impropre

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt \tag{1.1}$$

existe.

Remarque 1.1. Par ailleurs, f admet une transformée de Laplace absolument en λ , si l'intégrale (1.1) est absolument convergente.

Il est facile de voir que si f admet une transformée de Laplace (respectivement une transformée de Laplace absolument) en λ_0 , alors elle admet une transformée de Laplace (respectivement une transformée de Laplace absolument) en tout λ tel que $\Re \lambda > \Re \lambda_0$, \hat{f} est définie sur une partie de l'espace \mathbb{C} .

Ainsi nous pouvons définir l'abscisse de convergence

$$\sigma = \inf\{\lambda_0 \in \mathbb{R} / f \text{ admet une transformée de Laplace en } \lambda_0\}.$$

Ainsi (1.1) définit une fonction complexe dans le demi-plan $S_\sigma = \{\lambda/\Re\lambda > 0\}$, cette fonction se révèle être analytique dans S_σ .

Ainsi la fonction analytique $\hat{f}(\lambda)$, définie par (1.1) sur S_σ est appelée la transformée de Laplace de f .

La transformée de Laplace, grâce à ses propriétés, est un outil utile pour traiter les équations différentielles et intégrales.

Théorème 1.3. [26] Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ admet une transformée de Laplace en $\lambda_0 > 0$ et on considère

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Alors $F(t)$ admet une transformée de Laplace absolue pour $\Re\lambda > \lambda_0$ et

$$\hat{F}(\lambda) = \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda} \quad \text{pour } \Re\lambda > \lambda_0.$$

Théorème 1.4. [26] Soit f est absolument continue . Si f' admet une transformée de Laplace en $\lambda_0 > 0$, alors f admet une transformée de Laplace pour $\Re\lambda > \lambda_0$ et

$$\hat{f}'(\lambda) = \lambda\hat{f}(\lambda) - f(0^-) \quad \text{pour } \Re\lambda > \lambda_0.$$

Théorème 1.5. [26] Soient f et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tels que f admet une transformée de Laplace en $\lambda_0 > 0$ et g admet une transformée de Laplace absolue en $\lambda_0 > 0$. Alors

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds \quad \text{pour } t \geq 0$$

admet une transformée de Laplace pour $\Re\lambda > \lambda_0$ et $\widehat{(f * g)}(t) = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$ pour $\Re\lambda > \lambda_0$, ($f * g$ est le produit de convolution de f et g).

Théorème 1.6. [26] Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ à variation bornée et admettant une transformée de Laplace absolue pour $\Re\lambda > \sigma_0$, alors nous avons

$$\frac{f(0^+)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{f}(\lambda)d\lambda \quad (1.2)$$

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \hat{f}(\lambda)d\lambda \quad \text{pour } t > 0 \quad (1.3)$$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \hat{f}(\lambda) d\lambda = 0 \quad \text{pour } t < 0 \quad (1.4)$$

ici nous avons

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g(\lambda) d\lambda = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T g(\sigma + is) ds.$$

Théorème 1.7. [26] Soient f_1 et $f_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tels que $\hat{f}_1(\lambda) = \hat{f}_2(\lambda)$ pour $\Re\lambda$ suffisamment grand; alors

$$f_1(t) = f_2(t) \quad \text{p. p. sur } \mathbb{R}_+$$

Théorème 1.8. [26] Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ admet une transformée de Laplace avec l'abscisse de convergence σ , alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow +\infty \\ \Re\lambda \geq \sigma + \varepsilon}} \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda} = 0 \quad (1.5)$$

Si, en plus f est absolument transformable pour $\Re\lambda \geq \sigma_0$, alors

$$\lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow +\infty \\ \Re\lambda \geq \sigma_0}} \hat{f}(\lambda) = 0. \quad (1.6)$$

Théorème 1.9. [26] Soit $F(\lambda)$ vérifiant les conditions suivantes,

$$F(\lambda) \text{ est analytique dans le demi-plan } S_\lambda \quad (1.7)$$

$$\lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow +\infty \\ \Re\lambda \geq 0}} \hat{F}(\lambda) = 0. \quad (1.8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{F}(x + iy)| dy < +\infty \quad \text{pour tout } x > \sigma. \quad (1.9)$$

alors la fonction $f(t)$ définie par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F(\lambda) d\lambda. \quad (1.10)$$

est absolument Laplace transformable et on a

$$\hat{f}(\lambda) = F(\lambda) \quad \text{pour } \Re\lambda > \sigma.$$

1.2.2 Comportement asymptotique de la fonction d'origine

L'utilisation de la formule d'inversion complexe fournit une représentation de la fonction originale qui permet d'étudier son comportement asymptotique à l'infini.

Théorème 1.10. [16] Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ admet une transformée de Laplace pour $\Re\lambda > \sigma$. Si \hat{f} a un pôle isolé en λ_0 avec la série de Laurent suivante

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{i=-m}^{+\infty} C_i(\lambda - \lambda_0)^i. \quad (1.11)$$

et il existe $\sigma_1 < \Re\lambda_0$ tel que

$$\lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow +\infty \\ \sigma_1 \leq \Re\lambda \leq \sigma}} \hat{f}(\lambda) = 0. \quad (1.12)$$

Alors il existe $\delta < \Re\lambda_0$ tel que :

$$f(t) = e^{\lambda_0 t} \sum_{i=1}^m C_{-i} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{\lambda t} \hat{f}(\lambda) d\lambda. \quad (1.13)$$

L'équation (1.13) détermine le comportement asymptotique de f pourvu qu'on puisse déterminer le comportement de l'intégrale dans (1.13)

Remarque 1.2. [16] mais l'hypothèse suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\delta + iy)| dy < +\infty. \quad (1.14)$$

suffit d'avoir

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\Re\lambda_0 t} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{\lambda t} \hat{f}(\lambda) d\lambda = 0. \quad (1.15)$$

Une application du théorème précédent peut fournir un développement asymptotique de la fonction originale.

1.3 Les Résidus

Soit $f(z)$ une fonction analytique et uniforme à l'intérieur d'un cercle C et sur C , excepté au point $z = a$ centre de C . Alors $f(z)$ possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de $z = a$, donné par

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots \quad (1.16)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.17)$$

Dans le cas particulier $n = -1$ nous avons d'après (1.17)

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}. \quad (1.18)$$

On peut obtenir formellement (1.18) à partir de (1.16) par intégration terme à terme en utilisant les résultats suivants.

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^p} = \begin{cases} 2\pi i & p = 1 \\ 0 & p \neq 1 \end{cases}$$

L'intégrale de (1.18) s'exprimant à l'aide du seul coefficient a_{-1} de (1.16), on appelle a_{-1} le résidu de $f(z)$ en $z = a$.

Calcul des Résidus :

Pour obtenir le résidu d'une fonction $f(z)$ en $z = a$, on peut écrire d'après (1.16) le développement de $f(z)$ en série de Laurent dans le voisinage de $z = a$. En fait, dans le cas où $z = a$ est un pôle d'ordre k , il existe une formule simple qui donne a_{-1}

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z-a)^k f(z)). \quad (1.19)$$

Si $k = 1$ (pôle simple) le résultat est particulièrement simple,

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$$

qui est un cas particulier de (1.19) avec $k = 1$

1.3.1 Le théorème des résidus

Soit $f(z)$ une fonction uniforme et analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , sauf en des singularités a, b, c, \dots intérieurs à C pour lesquelles les résidus de $f(z)$ sont $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \dots$ (voir [37]).

Alors le théorème des résidus établit que

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \dots) \quad (1.20)$$

c'est à dire l'intégrale de $f(z)$ le long de C est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de $f(z)$ en les singularités contenues dans C . Notons que (1.20) est une généralisation de (1.18).

1.4 Equations Intégrales de Volterra

Ce paragraphe est consacré à présenter quelques résultats de la théorie des équations intégrales de Volterra et à introduire, sous une forme plus complète, les méthodes utilisées dans ce mémoire.

On considère le système de convolution linéaire de Volterra

$$u(t) = \int_0^t K(t-s)u(s)ds + f(t) \quad (1.21)$$

où $u(t)$ et $f(t)$ sont des n -vecteurs, tandis que $K(t)$ est une matrice $n \times n$. On suppose

$$K \in L^1([0, \infty); \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)), \quad f \in L^1([0, \infty); \mathbb{R}^n) \quad (1.22)$$

Nous allons présenter un traitement général du problème basée sur l'utilisation des équations résolvantes

$$R(t) = -K(t) + \int_0^t K(t-s)R(s)ds \quad (1.23)$$

$$R(t) = -K(t) + \int_0^t R(t-s)K(s)ds \quad (1.24)$$

En fait, en considérant ces équations on a

Théorème 1.11. [21] Soit K satisfait (1.22) , alors il existe un unique $R \in L^1_{loc}([0, \infty); \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ satisfaisant (1.23)-(1.24) et tel que pour tout f satisfaisant (1.22)

$$u(t) = f(t) - \int_0^t R(t-s)f(s)ds \quad (1.25)$$

est l'unique solution de (1.21)

Le principal intérêt de ce théorème, outre l'existence et l'unicité d'une solution de (1.22) , est la formule de représentation (1.25) qui donne cette solution par rapport à la fonction f et permet d'obtenir des propriétés de la solution en liaison avec ceux de f . A cet égard, une situation particulière se produit lorsque le noyau de la resolvante R est intégrable sur l' ensemble de la demi-droite $[0, \infty)$; en fait, nous avons

Proposition 1.1. [21] Soit

$$R \in L^1([0, \infty); \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \quad (1.26)$$

alors, si $f \in C_B([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ on a

$$|u(t)| \leq (1 + \|R\|_{L^1}) \|f\|_{\infty} \quad \forall t > 0 \quad (1.27)$$

si en plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0 \quad (1.28)$$

où $C_B([0, \infty); \mathbb{R}^n) = \{f \in C([0, \infty); \mathbb{R}^n) \text{ tel que } \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, \infty)} |f(t)| < +\infty\}$

La proposition précédente est en fait un résultat de stabilité pour la solution triviale $u \equiv 0$ de (1.21) (correspondant à la fonction triviale $f \equiv 0$), selon la définition suivante

Définition 1.3. [21] La solution triviale de (1.21) est dite stable si $\forall \epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\text{si } \|f\|_{\infty} < \delta \text{ alors } \|u\|_{\infty} < \epsilon. \quad (1.29)$$

Elle est asymptotiquement stable si elle est stable et

$$\text{si } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 \text{ alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0. \quad (1.30)$$

Cette définition, qui est relatif au cas continue, est le concept de stabilité dont nous avons besoin et que nous allons l'étendre au cas non linéaire

Théorème 1.12. [21] *La solution triviale de (1.21) est stable si et seulement si $R \in L^1([0, \infty); \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$*

Preuve :

On donne la preuve pour le cas scalaire, puisque l'extension au cas général est trivial. On note d'abord que, par (1.27) , la condition (1.26) implique la stabilité. Ensuite on suppose que la stabilité existe et on prouve (1.26).

A cet effet, par définition, soit δ tel que pour $f \in C_B([0, \infty); \mathbb{R})$ et $\|f\|_\infty \leq \delta$ la solution $u(t)$ de (1.21) satisfait $\|u(t)\| \leq 1$.

Alors pour tout $f \in C_B([0, \infty); \mathbb{R})$ on pose $g(t) = \frac{\delta}{\|f\|_\infty} f(t)$ De sorte que, depuis

$$(R * f)(t) = f(t) - \frac{\|f\|_\infty}{\delta} [g(t) - (R * g)(t)] \quad (1.31)$$

et le terme entre crochets est la solution de (1.21) avec g , on conclut

$$| (R * f)(t) | \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \|f\|_\infty \quad (1.32)$$

Maintenant, on suppose que par Contradiction (1.26) n'est pas satisfaite et soit t_n , telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty, \quad \int_0^{t_n} |R(s)| ds > n$$

Ensuite on définit

$$\phi_n = \text{sign}(R(t_n - s)), \quad \forall s \in [0, t_n]$$

de sorte que

$$\int_0^{t_n} R(t_n - s) \phi_n(s) ds > n \quad | \phi_n(s) | \leq 1 \quad p.p. \text{ dans } [0, t_n]$$

Alors, pour tout n fixé on considère la suite $(\phi_n^k(s))_k$ des fonctions continues sur $[0, t_n]$ tel que

$$| \phi_n^k(s) | \leq 1, \quad \phi_n^k(t_n) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_n^k(s) = \phi_n(s) \quad p.p. \text{ dans } [0, t_n]$$

et on choisit \bar{k} tel que

$$\int_0^{t_n} R(t_n - s)\phi_n^{\bar{k}}(s)ds > n \quad (1.33)$$

Enfin, on pose

$$f_n(t) = \begin{cases} \phi_n^{\bar{k}}(t) & \text{pour } t \in [0, t_n] \\ 0 & \text{pour } t > t_n \end{cases}$$

on a $f_n \in C_B([0, \infty); \mathbb{R})$, $\|f_n\|_\infty \leq 1$ et, par (1.32),

$$\|(R * f_n)(t)\| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)$$

ce qui contredit (1.33). En conséquence de ce théorème et de la Proposition , nous avons aussi

Corollaire 1.1. [21] *La solution triviale de (1.21) est stable si et seulement si elle est asymptotiquement stable.*

1.4.1 Le théorème de Paley-Wiener

Dans ce qui précède nous avons vu que dans le but d'étudier la stabilité asymptotique de (1.21), nous sommes amenés à considérer les conditions sur le noyau K de sorte que (1.26) soit satisfaite : Nous présentons ici un résultat classique qui est généralement connue comme le théorème de Paley-Wiener et qui est l'outil de base pour l'étude de la stabilité des équations intégrales. A cet égard,

$$\hat{K}(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} K(t) dt$$

désigne la transformée de Laplace de K qui, par (1.22), existe absolument pour $\Re \lambda \geq 0$; alors on a

Théorème 1.13. [21] *la condition suivante*

$$\det(I - \hat{K}(\lambda)) \neq 0 \text{ pour } \Re \lambda \geq 0 \quad (1.34)$$

est nécessaire et suffisante pour que (1.26) soit satisfaite.

Preuve :

On démontre le théorème dans le cas d'un scalaire, idem pour le cas général (à noter que dans le cas scalaire les deux équations (1.23)-(1.24) coïncident). On démontre d'abord que (1.34) est nécessaire. En fait, (1.26) implique que R admet une transformée de Laplace absolue pour $\Re\lambda \geq 0$ et, par ailleurs, à partir de (1.23) nous avons

$$\hat{R}(\lambda) - \hat{K}(\lambda)\hat{R}(\lambda) = -\hat{K}(\lambda), \quad \Re\lambda \geq 0$$

ce qui donne

$$(I - \hat{K}(\lambda))(I - \hat{R}(\lambda)) = I, \quad \Re\lambda \geq 0$$

de sorte que (1.34) doit être satisfaite.

Pour prouver que la condition (1.34) est suffisante, on démontre d'abord que R admet une transformée de Laplace absolue pour $\Re\lambda$ suffisamment grand. En fait, soit λ suffisamment grand afin que

$$a = \int_0^\infty e^{-\lambda t} |K(t)| dt < 1.$$

alors, à partir de (1.23)

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\lambda t} |K(t)| dt &\leq a + \int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t |K(t-s)| |R(s)| ds dt \\ &\leq a + \int_0^T e^{-\lambda s} |R(s)| \int_s^T e^{-\lambda(t-s)} |K(t-s)| dt ds \\ &\leq a + a \int_0^T e^{-\lambda s} |R(s)| ds \end{aligned}$$

et

$$\int_0^T e^{-\lambda s} |R(s)| ds \leq \frac{a}{1-a}$$

ce qui implique que R admet une transformée de Laplace absolue pour $\Re\lambda$ suffisamment grand. On note également que par (1.23) on a aussi

$$\hat{R}(\lambda) = \hat{K}(\lambda)(\hat{K}(\lambda) - I)^{-1} \quad \text{pour } \Re\lambda \text{ suffisamment grand} \quad (1.35)$$

On a maintenant besoin d'un résultat fondamental de la théorie de la transformation de Fourier, notant par $f^*(x)$ la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$f^*(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

on rappelle

Remarque 1.3. [21] Soit $F(z)$ une fonction analytique dans l'ouvert connexe $A \ni 0$ et tel que $F(0) = 0$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $f^*(x) \in A$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que

$$g^*(x) = F(f^*(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.36)$$

Alors on appelle \tilde{K} l'extension de K en posant $\tilde{K}(t) = 0$ pour $t < 0$; aussi, par (1.34) on a

$$\tilde{K}^*(x) = \hat{K}(ix) \neq I \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

de sorte que, puisque $F(z)$ est analytique dans $C - \{1\}$, il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que

$$g^*(x) = \hat{K}(ix)(\hat{K}(ix) - I)^{-1} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.37)$$

Maintenant, on considère les deux fonctions

$$\phi_1(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-zt} g(t) dt \quad \text{dans le demi-plan } \Re \lambda \leq 0$$

$$\phi_2(z) = \hat{K}(z)(\hat{K}(z) - I)^{-1} - \int_0^{\infty} e^{-zt} g(t) dt \quad \text{dans le demi-plan } \Re \lambda \geq 0$$

Ce sont des fonctions analytiques dans leurs domaines respectifs, d'ailleurs elles satisfont

$$\begin{aligned} \phi_1(ix) &= \phi_2(ix) \quad x \in \mathbb{R} \\ \phi(z) &= \phi_1(z) \quad \text{pour } \Re \lambda < 0 \\ \phi(z) &= \phi_2(z) \quad \text{pour } \Re \lambda < 0 \end{aligned}$$

Maintenant, ϕ est borné parce que ϕ_1 et ϕ_2 le sont, par conséquent, elle est constante et, puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$, $\phi(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Cela donne

$$\hat{g}(\lambda) = \hat{K}(\lambda)(\hat{K}(\lambda) - I)^{-1} \quad \text{pour } \Re \lambda \geq 0$$

1.5 Quelques définitions et propriétés sur les espaces fonctionnels

Définition 1.4. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Définition 1.5. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p. p sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C, |f(x)| \leq C \text{ p. p sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.14. (Inégalité de Holder)[2].

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors, $f, g \in L^1$ et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Notation : Soit $1 \leq p < \infty$. On désigne par q l'exposant conjugué de p . C'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.15. (Tonelli)[2].

Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$, des ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose que

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega_1.$$

et que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty.$$

Alors, $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème 1.16. (Fubini)[2].

On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy &= \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \\ &= \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Notation : On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact, c'est à dire

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega), f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K, K \subset \Omega \text{ est un compact}\}.$$

Théorème 1.17. (Ascoli)[2].

Soit K un espace métrique compact et soit H un sous ensemble borné de $C(K)$. On suppose que H est uniformément équicontinue c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in H.$$

Alors, H est relativement compact dans $C(K)$.

Notation :

1. On pose $(\varphi_h f)(x) = f(x + h)$ (translation de f par h).
2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, on dit qu'un ouvert ω est fortement inclus dans Ω et on écrit $\omega \subset \Omega$ si $\bar{\omega} \subset \Omega$ et si $\bar{\omega}$ est compact.

Lemme 1.1. [2] Soit $G \in L^q(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq q < \infty$ Alors, $\lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi_h G - G\| = 0$.

1.5.1 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$

Définition 1.6. [2] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev, noté $W^{m,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m , au sens des distributions, s'identifient à des fonctions de $L^p(\Omega)$.

Pour ces dérivées, on pose $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ et on utilise la notion :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdot \dots \cdot \partial^{\alpha_N} x_N} \quad (1.38)$$

La définition précédente donc,

$$W^{m,p} = \{u \in L^p(\Omega) / \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Théorème 1.18. [2] L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

est une espace de Banach.

Remarque 1.4. [2] L'espace $W^{1,p} = \{u \in L^p(\Omega) / \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq 1 : u' \in L^p(\Omega)\} \dots$

Remarque 1.5. [2] Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, on peut en utilisant les transformations de Fourier $\xi \mapsto \widehat{u}(\xi)$ des fonctions u de $L^2(\mathbb{R}^N)$, donner la définition équivalente :

$$W^{m,2} = H^m(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) / \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Définition 1.7. [2] L'espace $W_0^{m,p}$ est défini par la fermeture de l'espace $C_c^\infty(\Omega)$.

Définition 1.8. [2] Soit $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W_0^{1,p}$ muni de la norme induite par $W^{1,p}$ est un espace de Banach ; il est H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de H^1 , si $1 \leq p < \infty$.

Remarque 1.6. [2] Soit $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W_0^{1,p}$ muni de la norme induite par $W^{1,p}$ est un espace de Banach.

Définition 1.9. Espace dual de $W_0^{1,p}$ [2]

On désigne par $W^{-1,q}(\Omega)$ (Ω un ouvert de \mathbb{R}^N) l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ (avec $1 \leq p \leq \infty$) et par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$. On a les inclusions :

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1}$$

avec injections continues et denses.

Remarque 1.7. [2] Si Ω est borné, on a

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,q} \text{ pour tout } 1 \leq p < \infty,$$

avec injections continues (et denses pour $1 < p$).

Si Ω n'est pas borné on a seulement

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,q} \text{ pour tout } 1 \leq p \leq 2$$

avec injections continues (et denses si $1 < p \leq 2$).

1.6 Quelques modèles mathématiques en dynamique des populations

Commençons tout d'abord par rappeler certaines définitions de termes employés dans le domaine de la modélisation de croissance de population.

Le mot **population** désigne un ensemble d'organismes ou d'individus, souvent d'une même espèce, occupant une région déterminée et ayant tous ensemble certaines fonctions. La taille d'une population est mesurée par une grandeur appelée **densité** de population, qui est le nombre d'individus par unité d'espace (et de temps).

L'espace est supposé homogène, c'est à dire que la population est uniformément répartie dans l'environnement qu'elle occupe.

Plusieurs facteurs peuvent intervenir dans la variation de la densité d'une population, nous considérerons deux de ces facteurs :

- **la natalité** qui fait croître le nombre des individus.
- **la mortalité** qui fait décroître le nombre des individus.

Il y a aussi la migration qui peut entraîner la variation de la densité. D'autres facteurs importants peuvent être pris en considération tels que : L'âge, le sexe,...etc

1.6.1 Modèle de malthus

Dans ce modèle, on suppose que les individus se comportent comme s'ils étaient isolés et équivalents, et que l'accroissement de la population est proportionnel à l'effectif de la population et à la longueur de l'intervalle de temps mesuré selon une échelle discrète ou continue.

La croissance, d'après Malthus [31], est simplement liée aux taux de mortalité et de natalité. Il se base sur une loi mentionnant que les décès et les naissances sont proportionnels à la population. De plus, il considère que le milieu n'influence pas la croissance, c'est-à-dire qu'il n'est pas limitant. On suppose donc que dans le milieu ou les facteurs limitants (tels que la guerre ou la famine) la population suivra une croissance qui tend vers l'infini. Ce modèle est idéal lorsque le but premier consiste à évaluer le potentiel d'augmentation d'une espèce dans les conditions idéales. Ce qui se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$P'(t) = \alpha P(t), \tag{1.39}$$

où $P'(t)$ désigne la dérivée de $P(t)$ par rapport à la variable t .

α s'appelle taux de croissance intrinsèque de la population.

Modèle discret :

On considère que la variable temps est décrite d'une manière discrète à pas constant.

Par exemple, on peut prendre comme unité : le jour, le mois, l'an... etc.

Soit $n \in \mathbb{N}$, notons par P_n le nombre d'individus à l'instant n , d'une population P donnée, ($P_n \geq 0$). Soit β le coefficient de fertilité, défini comme étant le nombre de naissances par unité de temps et par individu et soit μ le taux de mortalité qui désigne le nombre de décès par unité de temps et par unité de population. Alors on peut écrire :

$$P_{n+1} = P_n + \beta P_n - \mu P_n \Leftrightarrow P_{n+1} - P_n = (\beta - \mu)P_n. \tag{1.40}$$

Nous avons donc une relation entre le nombre des individus à l'instant $n + 1$ et celui des individus à l'instant n .

De (1.40) on a $1 + \beta - \mu \geq 0$. Plus exactement : $\mu \leq \beta + 1$, ce qui traduit le fait qu'il ne peut mourir plus d'individus qu'il n'y en a effectivement.

Si on pose $r = 1 + \beta - \mu$, r s'appelle le taux de croissance net et peut dépendre de plusieurs facteurs.

β et μ dépendent du nombre d'individus de la population P à l'instant n , ie $\beta = \beta(P_n)$ et $\mu = \mu(P_n)$, alors on a

$$P_{n+1} = (1 + \beta(P_n) - \mu(P_n))P_n = r(P_n)P_n$$

Par itération, on aura :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= r(P_n)P_n \\ P_{n+2} &= r(P_{n+1})P_{n+1} = r(P_{n+1})r(P_n)P_n \\ &= r(P_{n+1})r(P_n)\dots r(P_0)P_0 = \left(\prod_{i=0}^{n+1} r(P_i)\right)P_0 \end{aligned}$$

- Si $r(P_n) \geq \alpha_1 > 1$ alors

$$P_{n+1} = r(P_n)r(P_{n-1})\dots r(P_0)P_0 > \alpha_1^{n+1}P_0, \forall n \in \mathbb{N},$$

et on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$, (explosion de la population).

- Si $r(P_n) \leq \alpha_2 < 1$ alors

$$P_{n+1} = r(P_n)r(P_{n-1})\dots r(P_0)P_0 < \alpha_2^{n+1}P_0, \forall n \in \mathbb{N},$$

et on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$, (extinction de la population).

Modèle continu :

La variable temps est notée t et appartient à l'espace $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

Soit $P(t)$ la population totale à l'instant t , Soit β le coefficient de fertilité, défini comme étant le nombre de naissances par unité de temps et par individu et soit μ le taux de mortalité qui désigne le nombre de décès par unité de temps et par unité de population. Si Δt désigne la longueur d'un intervalle de temps court $[t, t + \Delta t]$, le nombre de naissance est approximativement $\beta \Delta t P(t)$. On suppose aussi que le nombre des morts dans le même intervalle de temps est approximativement $\mu \Delta t P(t)$, donc on a :

$$P(t + \Delta t) - P(t) \approx (\beta - \mu)P(t)\Delta t,$$

En divisant par Δt on a

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx (\beta - \mu)P(t),$$

sous l'hypothèse que Δt prend des valeurs arbitrairement petites, la fonction $P(t)$ est dérivable, et en prenant $\alpha = \beta - \mu$, il en découle l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$P'(t) = \alpha P(t), \tag{1.41}$$

où $P'(t)$ désigne la dérivée de $P(t)$ par rapport à la variable t .

α s'appelle taux de croissance intrinsèque de la population. Dans ce cas α est constant et l'équation (1.41) est dite modèle de Malthus [45]

L'équation différentielle (1.41) a une infinité de solutions données par

$$P(t) = P_0 e^{\alpha(t-t_0)}, \tag{1.42}$$

où P_0 est la taille de la population à l'instant t_0 , ie $P(t_0) = P_0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \alpha > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = +\infty, \text{ (explosion de la population),} \\ \text{Si } \alpha < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0, \text{ (extinction de la population),} \\ \text{Si } \alpha = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = P_0 \text{ (l'évolution de la population est stationnaire} \\ \text{pour n'importe quelle condition initiale).} \end{array} \right.$$

Le modèle de malthus est irréaliste sur une longue période, même s'il décrit correctement certaines épisodes de la croissance d'organismes ou ou de populations.

1.6.2 Modèle de Verhulst

Ce modèle a été présenté par le mathématicien Verhulst en (1838)[45], pour modéliser la croissance d'une population en présence de facteurs limitant (ie la croissance de la population se stabilise au cours du temps).

C'est un modèle de croissance proposé, en réponse au modèle de Malthus qui supposait un taux de croisement constant sans frein conduisant à une croissance exponentielle de la population.

Le modèle de Verhulst suppose que le taux de natalité et le taux de mortalité sont

des fonctions affines respectivement décroissante et croissante de la taille de la population.

Autrement dit, plus la taille de la population augmente, plus son taux de natalité diminue et son taux de mortalité augmente.

Ce modèle conduit, en temps continu, à une fonction logistique et en temps discret à une suite logistique.

Si on appelle par :

- P la taille de population .
- $\beta(P)$ le taux de fertilité.
- $\mu(P)$ le taux de mortalité.

La taille de la population suit l'équation différentielle suivante :

$$P'(t) = P(t)(\beta(P) - \mu(P)). \quad (1.43)$$

si μ et β sont des fonctions affines respectivement croissante et décroissante, alors $\alpha = \beta - \mu$ est une fonction affine décroissante.

$$\alpha(P) = \alpha_1 - \alpha_2 P.$$

, Avec α_1 une constante de signe quelconque et α_2 une constante positive.

D'où l'équation :

$$P'(t) = P(t)(\alpha_1 - \alpha_2 P(t)). \quad (1.44)$$

En posant $k = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ on aura,

$$P'(t) = \alpha_1 P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{k} \right). \quad (1.45)$$

Résolution en temps continu D'où

$$P(t) = \frac{P(0)k}{P(0) - (P(0) - k) e^{-\alpha_1 t}}, \quad (1.46)$$

α_1 s'appelle constante de croissance intrinsèque, k est la capacité de charge dans le cas où $\alpha_1 > 0$.

Chapitre 2

Modèles Mathématiques pour des populations structurées en âge

Dans les modèles de Malthus et Verhulst, la fonction densité de population ne tient pas compte des âges des individus, les taux de fertilité et de mortalité non plus. Alors que dans une population donnée, les différentes classes d'âges ne contribuent pas de façon identique à la reproduction de nouveaux individus, et la mortalité n'est pas en général constante par rapport à l'âge.

Le modèle linéaire de Lotka-McKendrick est un modèle linéaire de base qui prend en considération la variable âge, c'est la conséquence de certains travaux, voir [45],[25].

Définissons d'abord la fonction densité $p(a, t)$ par rapport à l'âge ($a > 0$: l'âge, t : le temps), ou bien ce qu'on appelle encore la distribution d'âge d'une population :

$$p(a, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{nombre d'individus d'âges compris entre } a \text{ et } a + \varepsilon \text{ au temps } t}{\varepsilon}$$

Si $0 < a_1 \leq a_2$, alors $\int_{a_1}^{a_2} p(a, t) da$ représente le nombre d'individus qui à l'instant t ont un âge compris entre a_1 et a_2 et $P(t) = \int_0^{+\infty} p(a, t) da$ est la population totale à l'instant t (ou bien $P(t) = \int_0^{a_M} p(a, t) da$, a_M étant l'âge maximum).

On appellera $t \mapsto p(0, t)$ le taux de naissances ou fonction de naissances, il faut noter que $p(0, t)$ ne représente pas un nombre d'individus mais encore une densité.

Les naissances ($\hat{\text{age}}=0$) sont supposées obtenues par :

$$p(0, t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)p(a, t)da.$$

- $\beta = \beta(a)$: coefficient ou taux de fertilité à l'âge a , c'est le nombre moyen de naissances provenant d'un individu d'âge a .
- $\mu = \mu(a)$: coefficient ou taux de mortalité à l'âge a , c'est le nombre moyen de décès à l'âge a par unité de population de même âge.

Si un individu a un âge a à l'instant t , il aura un âge $a + h$ à l'instant $t + h$ et la variation du nombre d'individus d'âge a à l'instant t après un intervalle de temps de longueur h (h petit) est due à ceux qui disparaissent entre les deux instants t et $t + h$:

$$p(a + h, t + h) - p(a, t) = - \int_0^h \mu(a + s)p(a + s, t + s)ds,$$

En divisant par h et en passant à la limite lorsque $h \rightarrow 0$, on obtient (quand la limite existe) :

$$\begin{aligned} Dp(a, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(a + h, t + h) - p(a, t)}{h} \\ &= -\mu(a)p(a, t). \end{aligned}$$

C'est la variation instantanée de la population d'âge a à l'instant t .

La distribution initiale d'âge est supposée connue :

$$p(a, 0) = p_0(a).$$

Alors le modèle de Lotka-McKendrick-Von Foester est constitué par le système suivant :

$$(S) \begin{cases} Dp(a, t) = -\mu(a)p(a, t), & p.p. & a \geq 0, \quad t \geq 0, \\ p(0, t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)p(a, t)da, & & t > 0, \\ p(a, 0) = p_0(a), & & a \geq 0. \end{cases}$$

Résolution

On suppose que les données du problème μ, β et p_0 sont des fonctions continues par morceaux, positives, μ et β bornées, $\int_0^{+\infty} \mu(x)dx = +\infty$ et que $p_0 \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

Notons que lorsque p est différentiable, la quantité $Dp(a, t)$ n'est autre que $\frac{\partial p}{\partial a}(a, t) + \frac{\partial p}{\partial t}(a, t)$. La technique des caractéristiques (ici on a des demi-droites de pente +1) réduit la première équation du système (S) sur chacune de ces caractéristiques à une équation différentielle ordinaire dont la résolution est simple.

Soit $(a_0, t_0) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$, avec $a_0 \geq 0$ ou $t_0 \geq 0$. Posons le changement de fonctions suivant :

$$\begin{cases} \bar{p}(h) &= p(a_0 + h, t_0 + h), \\ \bar{\mu}(h) &= \mu(a_0 + h). \end{cases}$$

Alors de (S) on a :

$$\frac{d\bar{p}}{dh} = -\bar{\mu}(h)\bar{p}(h), \quad (D)$$

qui, admet pour chaque condition initiale $\bar{p}(0)$ une solution unique :

$$\bar{p}(h) = \bar{p}(0)e^{-\int_0^h \bar{\mu}(x)dx}.$$

D'où on a :

$$p(a_0 + h, t_0 + h) = p(a_0, t_0)e^{-\int_0^h \mu(a_0 + x)dx}.$$

Tout point $(a, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ est atteint par une demi-droite et une seule parallèle à la première bissectrice qui part du point $(a - t, 0)$ si $a > t$, du point $(0, t - a)$ si $t > a$ et de l'origine si $t = a$.

Soit $(a, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Si $a \geq t$, on pose $a_0 = a - t, t_0 = 0$ et $h = t$, alors

$$\begin{aligned} p(a, t) &= p(a_0 + h, t_0 + h) = p(a_0, t_0) e^{-\int_0^h \mu(a_0 + x) dx} \\ &= p(a - t, 0) e^{-\int_0^h \mu(a_0 + x) dx} \\ &= p(a - t, 0) e^{-\int_0^t \mu(a_0 + x) dx} \end{aligned}$$

d'où

$$p(a, t) = p(a - t, 0) e^{-\int_0^t \mu(a - t + x) dx}. \quad (2.1)$$

Si $a < t$, on pose $a_0 = 0, t_0 = t - a$ et $h = t$, alors :

$$\begin{aligned} p(a, t) &= p(0, t - a) e^{-\int_0^h \mu(x) dx} \\ p(a, t) &= \int_0^{+\infty} \beta(x) p(x, t - a) dx e^{-\int_0^h \mu(x) dx} \end{aligned}$$

Remarque 2.1. On obtient une équation intégrale, les solutions de cette équation intégrale sont les solutions de (S).

Introduction des paramètres fondamentaux

l'évolution de la population est décrite par sa fonction de densité par rapport à l'âge a au temps t :

$$p(a, t) \quad a \in [0, a_M], \quad t \geq 0$$

où a_M désigne l'âge maximum qu'on suppose fini. Ainsi, l'intégrale :

$$\int_{a_1}^{a_2} p(a, t) da$$

donne le nombre d'individus qui, au temps t , ont un âge compris dans l'intervalle $[a_1, a_2]$; et,

$$P(t) = \int_0^{a_M} p(a, t) da. \quad (2.2)$$

est la population totale à l'instant t .

En ce qui concerne la fertilité et la mortalité, nous introduisons tout d'abord :

$\beta(a) \equiv$ taux de fertilité à l'âge a ,

qui peut être défini comme le nombre de nouveau-né, dans une unité de temps, provenant d'un seul individu dont l'âge est dans l'intervalle d'âge infinitésimal $[a, a + da]$.

Ainsi,

$$\int_{a_1}^{a_2} \beta(a)p(a, t)da$$

donne le nombre de nouveau-né dans une unité de temps, provenant des individus ayant un âge compris dans l'intervalle $[a_1, a_2]$. Nous considérons également que le taux de natalité totale

$$B(t) = \int_0^{a_M} \beta(a)p(a, t)da. \quad (2.3)$$

qui donne le nombre total de nouveau-né dans une unité de temps.

Nous introduisons également

$\mu(a) \equiv$ taux de mortalité à l'âge a ,

est le taux de mortalité des personnes ayant un âge compris dans l'intervalle $[a, a+da]$;

alors le taux de mortalité totale est :

$$D(t) = \int_0^{a_M} \mu(a)p(a, t)da \quad (2.4)$$

et donne le nombre total de décès survenus dans une unité de temps.

Les fonctions $\beta(\cdot)$ et $\mu(\cdot)$ sont, bien sûr, positives : elles sont aussi appelées les taux vitaux et elles sont considérées comme des taux déterministes, en pratique, elles sont données sur une base statistique. En figures (2.1) et (2.2), nous montrons des exemples classiques de ces fonctions, tirées de la démographie.

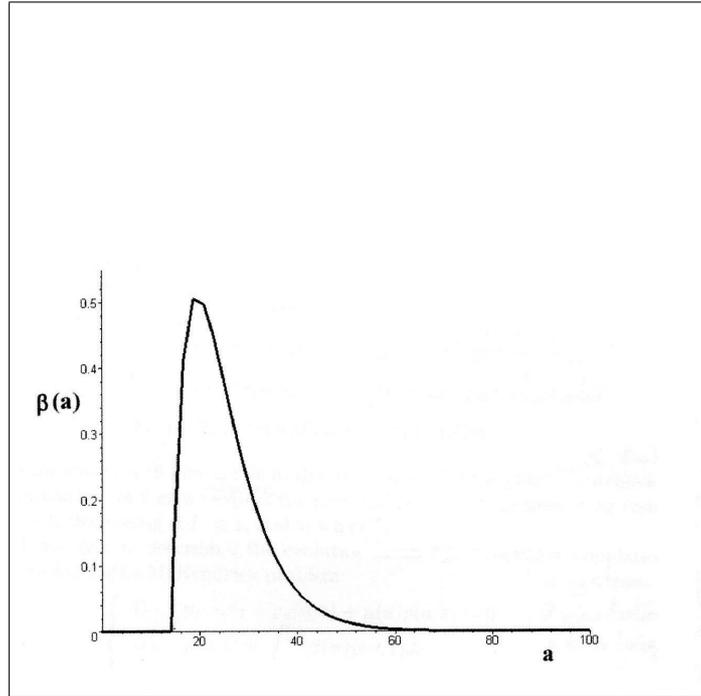


FIGURE 2.1 – Une courbe typique pour la fertilité [26]

D'autres quantités significatives proviennent de $\beta(\cdot)$ et $\mu(\cdot)$; à savoir

$$\Pi(a) = e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma}, \quad a \in [0, a_M] \quad (2.5)$$

désigne la probabilité de survie à savoir la probabilité pour qu'un individu survive jusqu'à l'âge a ; donc $\Pi(a_M) = 0$; en outre la fonction

$$K(a) = \beta(a)\Pi(a), \quad a \in [0, a_M] \quad (2.6)$$

est appelée la fonction de maternité et synthétise la dynamique de la population; elle est relative au paramètre

$$R = \int_0^{a_M} \beta(a)\Pi(a) da \quad (2.7)$$

qui est appelé le taux net de reproduction et donne le nombre de nouveau-né qu'un individu est censé produire au cours de sa vie reproductive. Nous allons voir que ce paramètre va jouer un rôle dans la discussion du comportement asymptotique de

la population, en fait nous attendons de la population à montrer une tendance à la hausse lorsque $R > 1$, une décroissance si $R < 1$, une stabilité lorsque $R = 1$.

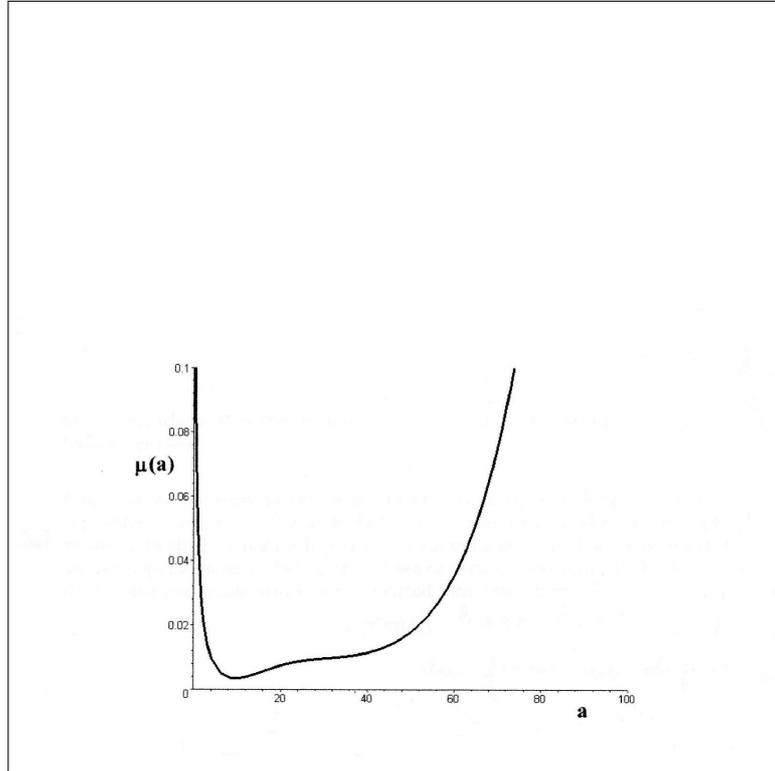


FIGURE 2.2 – Une courbe typique pour la mortalité [26]

Enfin nous considérons la durée de vie :

$$L = \int_0^{a_M} \Pi(a) da. \quad (2.8)$$

Il s'agit de la valeur moyenne de la vie d'un individu : en réalité (2.8) peut être mieux comprise si l'on note que $\mu(a)\Pi(a)da$ est la probabilité pour qu'un individu survive jusqu'à l'âge a et ensuite mourir dans $[a, a + da]$; ainsi :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{a_M} a\mu(a)\Pi(a)da = - \int_0^{a_M} a \frac{d}{da} \Pi(a) da \\ &= -a\Pi(a)|_0^{a_M} + \int_0^{a_M} \Pi(a) da \\ &= \int_0^{a_M} \Pi(a) da \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $\Pi(a_M) = 0$.

2.1 L'équation de Lotka-McKendrick (Approche de Iannelli)

Nous allons maintenant déduire les équations de base qui décrivent l'évolution de la population selon les hypothèses phénoménologiques de la section précédente, ces équations sont la conséquence de la balance des naissances et des décès au cours du temps.

Considérons d'abord la fonction :

$$N(a, t) = \int_0^a p(\sigma, t) d\sigma$$

qui représente le nombre d'individus qui, au temps t , ont l'âge inférieur ou égal à a .

Ensuite, nous avons, pour $h > 0$

$N(a+h, t+h)$ représente le nombre d'individus qui, au temps $t+h$, ont l'âge inférieur ou égal à $a+h$.

$$N(a+h, t+h) = N(a, t) + [+ \text{naissance} - \text{mortalité}].$$

$$N(a+h, t+h) = N(a, t) + \int_t^{t+h} B(s) ds - \int_0^h \int_0^{a+s} \mu(\sigma) p(\sigma, t+\sigma) d\sigma ds \quad (2.9)$$

En fait, dans (2.9), le second terme de droite donne l'entrée de tous les nouveaux-nés dans l'intervalle de temps $[t, t+h]$: ils ont l'âge inférieur ou égal à h et, par conséquent, ils doivent être inclus dans le nombre $N(a+h, t+h)$.

En outre, puisque :

$$\int_0^{a+s} \mu(\sigma) p(\sigma, t+\sigma) d\sigma$$

est le nombre des individus qui meurent à l'instant $t+s$, ayant un âge inférieur ou égal à $a+s$, le troisième terme sur la droite de (2.9) donne la perte à partir du groupe initial des individus $N(a, t)$ et des nouveau-nés, à travers l'intervalle de temps $[t, t+h]$.

Maintenant nous dérivons (2.9) par rapport à h , et posons $h = 0$:

$$p(a, t) + \int_0^a \frac{\partial p(\sigma, t)}{\partial t} d\sigma = B(t) - \int_0^a \mu(\sigma) p(\sigma, t) d\sigma \quad (2.10)$$

A partir de ceci, mettant $a = 0$, on obtient :

$$p(0, t) = B(t) \quad (2.11)$$

et, dérivant (2.9) par rapport à a :

$$\frac{\partial p(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(a, t)}{\partial a} + \mu(a)p(a, t) = 0 \quad (2.12)$$

Ainsi (voir également (2.3)), nous arrivons au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad \frac{\partial p(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(a, t)}{\partial a} + \mu(a)p(a, t) = 0 \\ ii) \quad p(0, t) = \int_0^{a_M} \beta(\sigma)p(\sigma, t) d\sigma \\ iii) \quad p(a, 0) = p_0(a) \end{array} \right. \quad (2.13)$$

où nous avons ajouté la condition initiale (iii).

Le système (2.13) est le modèle de base qui décrit l'évolution d'une seule population dans les conditions phénoménologiques spécifiées au début de ce chapitre. Voici une liste des hypothèses que les fonctions de base $\beta(\cdot)$ et $\mu(\cdot)$ sont censées remplir pour être biologiquement significatives et pour permettre le traitement mathématique de (2.13) .

$$\beta(\cdot) \quad \text{est positive et appartient à } L^\infty(0, a_M) \quad (2.14)$$

$$\mu(\cdot) \quad \text{est positive et appartient à } L^1_{loc}([0, a_M)) \quad (2.15)$$

$$\int_0^{a_M} \mu(\sigma) d\sigma = +\infty \quad (2.16)$$

$$p_0 \in L^1(0, a_M) \quad p_0(a) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } [0, a_M] \quad (2.17)$$

Ici a_M est l'âge maximum qu'un individu de la population peut atteindre et, comme déjà indiqué, nous supposons $a_M < +\infty$. La condition (2.16) est nécessaire pour que

la probabilité de survie $\Pi(a_M)$ s'annule à l'âge a_M .

Le traitement du problème (2.13), sous ces hypothèses, sera développé à travers les sections suivantes, effectivement, au lieu de traiter (2.13) directement, il sera transformé en une équation intégrale de Volterra donnée dans la section suivante.

2.1.1 L'équation de renouvellement

Nous allons maintenant obtenir une formulation différente du problème (2.13). A cette fin, nous avons fixés :

$$q(a, t) = e^{\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma} p(a, t) \quad (2.18)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad \frac{\partial q(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(a, t)}{\partial a} = 0 \\ ii) \quad q(0, t) = B(t) \\ iii) \quad q(a, 0) = e^{\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma} p_0(a) = q_0(a) \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Si nous supposons que $B(t)$ est donné, q peut être considérée comme la solution de l'équation différentielle partielle du premier ordre ((2.19), *i*) dans la bande $\{a \in [0, a_M], t \geq 0\}$ avec les conditions aux limites ((2.19), *ii*) et ((2.19), *iii*) sur la ligne médiane $\{a = 0, t > 0\}$ et sur $\{a \in [0, a_M], t = 0\}$, respectivement.

Considérons l'équation ((2.19), *i*). Par la méthode des caractéristiques, on a : $da = dt$ ce qui implique que $a - t = c, c \in \mathbb{R}$.

On projette sur les caractéristiques,

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = a - t \\ \xi = t \end{array} \right.$$

$q = u(\xi, \eta)$ et on écrit l'équation ((2.19), i) dans (η, ξ) . Ainsi, on obtient,

$$\begin{aligned}\frac{\partial q(a, t)}{\partial a} &= \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta(a, t)}{\partial a}, \\ &= \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial q(a, t)}{\partial t} &= \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta(a, t)}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta}\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\partial q(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(a, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0, \quad \text{ce qui implique que,} \quad u(\xi, \eta) = \phi(\eta) = \phi(a - t)$$

Ainsi, q est de la forme :

$$q(a, t) = \phi(a - t)$$

où ϕ est déterminé par les conditions aux limites ; en fait, nous avons

$$q(a, t) = \begin{cases} q_0(a - t) & \text{si } a \geq t \\ B(t - a) & \text{si } a < t \end{cases}$$

qui à son tour, par l'intermédiaire de (2.18), donne la formule suivante pour $p(a, t)$:

$$p(a, t) = \begin{cases} p_0(a - t) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a - t)} & \text{si } a \geq t \\ B(t - a)\Pi(a) & \text{si } a < t \end{cases} \quad (2.20)$$

Maintenant, la formule (2.20) nous permet d'obtenir une équation pour le taux de natalité $B(t)$: En fait, le remplacement de (2.20) dans ((2.13), ii)

(voir(2.11)), nous donne, pour $t \leq a_M$:

$$\begin{aligned}B(t) &= \int_0^{a_M} \beta(a)p(a, t)da = \int_0^t \beta(a)\Pi(a)B(t - a)da + \\ &+ \int_t^{a_M} \beta(a) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a - t)} p_0(a - t)da\end{aligned}$$

et, pour $t > a_M$:

$$B(t) = \int_0^{a_M} \beta(a)\Pi(a)B(t-a)da$$

Ainsi $B(t)$ satisfait l'équation intégrale de Volterra du second degré suivante :

$$B(t) = F(t) + \int_0^t K(t-s)B(s)ds \quad (2.21)$$

avec

$$F(t) = \int_t^\infty \beta(a) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} p_0(a-t) da = \int_0^\infty \beta(a+t) \frac{\Pi(a+t)}{\Pi(a)} p_0(a) da \quad (2.22)$$

$$K(t) = \beta(t)\Pi(t) \quad (2.23)$$

où $t \geq 0$, et les fonctions β, Π, p_0 sont prolongées par zéro en dehors de l'intervalle $[0, a_M]$.

L'équation (2.21) est connu comme l'équation de renouvellement et aussi comme l'équation de Lotka, nous remarquons que le noyau $K(t)$ est la fonction de maternité définie dans (2.6).

Notre procédure ci-dessus montre que, bien que formellement, (2.21) est équivalent au problème (2.13) ; effectivement (2.21) est le principal outil pour étudier ce problème, le lien étant assurée par (2.22) et (2.23) avec la formule (2.20). La proposition suivante expose quelques propriétés de(2.21) sur la base des hypothèses (2.14) - (2.17) .

Proposition 2.1. [26] *Soient (2.14) - (2.17) sont satisfaites, alors :*

$$K(t) \geq 0 \text{ p.p.}, \quad K(t) = 0 \text{ pour } t > a_M, \quad K \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+) \quad (2.24)$$

$$F(t) \geq 0, \quad F(t) = 0 \text{ pour } t > a_M, \quad F \in C(\mathbb{R}_+) \quad (2.25)$$

Si en plus

$$p_0 \in W^{1,1}(0, a_M) \quad \text{et} \quad \mu(\cdot)p_0(\cdot) \in L^1(0, a_M) \quad (2.26)$$

alors $F \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$.

Preuve :

(2.24)et la première partie de (2.25) sont évidents.

Effectivement, on a $K(t) = \beta(t)\Pi(t)$ or $\beta(t) > 0$ et $\Pi(t) \geq 0$ d'ou $K(t) \geq 0$ p.p.

Pour $t > a_M$, on a $\Pi(t) = 0$, ce qui implique que $K(t) = 0$.

On a $F(t) \geq 0$ par définition et

$$F(t) = \int_t^\infty \beta(a) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} p_0(a-t) da,$$

on pose $a' = a - t \Rightarrow a = a' + t$ et $da = da'$

$$F(t) = \int_0^\infty \beta(a' + t) \frac{\Pi(a' + t)}{\Pi(a')} p_0(a') da' = \int_0^\infty \beta(a + t) \frac{\Pi(a + t)}{\Pi(a)} p_0(a) da.$$

Pour $t > a_M$, on a $\Pi(a + t) = 0$ d'où $F(t) = 0$

Pour prouver que $F \in C(\mathbb{R}_+)$, prenons $t_0 \geq 0$, alors nous avons

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_t^\infty \beta(a) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} (p_0(a-t) - p_0(a-t_0)) da + \\ &+ \int_t^\infty \beta(a) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} p_0(a-t_0) da \end{aligned}$$

étant donné $p_0 \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \left| \int_t^\infty \beta(a) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} (p_0(a-t) - p_0(a-t_0)) da \right| &\leq \\ &\leq |\beta|_{L^\infty} \int_0^\infty |p_0(a-t) - p_0(a-t_0)| da \end{aligned}$$

or d'après le lemme (1.1) du paragraphe 1.5 on a

$$\int_0^\infty |p_0(a-t) - p_0(a-t_0)| da \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow t_0$$

comme $t \rightarrow t_0$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \int_{t_0}^\infty \beta(a) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} p_0(a-t_0) da = F(t_0)$$

Enfin, d'une manière similaire, on peut prouver que les conditions de (2.26) impliquent que $F \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$.

2.1.2 Analyse de l'équation de Lotka-McKendrick

Maintenant, nous étudions le problème (2.13) en considérant l'équation de renouvellement (2.21) avec (2.22) et (2.23). D'abord nous avons le théorème suivant qui est en fait une partie de la théorie standard des équations de Volterra (Voir Les préliminaires, Chapitre 1) : ici nous donnons la preuve du théorème dans un souci de rigueur :

Théorème 2.1. [26] *Soient (2.14) - (2.17) sont satisfaites, alors l'équation (2.21), avec (2.22) et (2.23), a une solution unique $B \in C(\mathbb{R}_+)$ telle que $B(t) \geq 0$ pour tout t . Si en plus p_0 satisfait (2.26), alors $B \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$ et :*

$$B'(t) = F'(t) + K(t)B(0) + \int_0^t K(t-s)B'(s)ds \quad (2.27)$$

Preuve :

Dans ce qui suit, nous considérons

$C([0, T]; \mathbb{R}) = \{f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ continue sur } [0, T]\}$ et

$$\|f\|_{C([0, T])} = \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|$$

Supposons d'abord que

$$\|K\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \int_0^{\infty} K(s)ds < 1 \quad (2.28)$$

Ensuite, la solution de (2.21) est obtenue par la procédure d'itération standard

$$\begin{cases} B^0(t) = F(t) \\ B^{k+1}(t) = F(t) + \int_0^t K(t-s)B^k(s)ds. \end{cases} \quad (2.29)$$

En fait, prenons n'importe quel $T > 0$, puis par (2.24) et (2.25) nous avons $B^k \in$

$C([0, T])$ et $B^k(t) \geq 0$; d'ailleurs.

$$\begin{aligned} \|B^{k+1} - B^k\|_\infty &= \left| \int_0^t K(t-s)(B^k(s) - B^{k-1}(s))ds \right| \\ &\leq \int_0^t |K(t-s)(B^k(s) - B^{k-1}(s))|ds \\ &\leq \int_0^t K(t-s)|B^k(s) - B^{k-1}(s)|ds \end{aligned}$$

et

$$\|B^{k+1} - B^k\|_\infty \leq \|K\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \|B^k - B^{k-1}\|_\infty.$$

En effet, essayons de donner plus de détails, on a :

$$B^0(t) = F(t)$$

$$B^1(t) = F(t) + \int_0^t K(t-s)B^0(s)ds$$

ce qui implique que,

$$\begin{aligned} \|B^1 - B^0\|_\infty &= \left| \int_0^t K(t-s)B^0(s)ds \right| \\ &\leq \int_0^t |K(t-s)||B^0(s)|ds \\ &\leq \|K\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \|B^0\|_\infty \end{aligned}$$

$$B^2(t) = F(t) + \int_0^t K(t-s)B^1(s)ds$$

ce qui implique que,

$$\begin{aligned} \|B^2 - B^1\|_\infty &= \left| \int_0^t K(t-s)(B^1(s) - B^0(s))ds \right| \\ &\leq \int_0^t K(t-s)|B^1(s) - B^0(s)|ds \\ &\leq \|K\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^2 \|B^0\|_\infty. \end{aligned}$$

$$B^3(t) = F(t) + \int_0^t K(t-s)B^2(s)ds$$

ce qui implique que,

$$\begin{aligned} \|B^3 - B^2\|_\infty &= \left| \int_0^t K(t-s)(B^2(s) - B^1(s))ds \right| \\ &\leq \int_0^t K(t-s)|B^2(s) - B^1(s)|ds \\ &\leq |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^3 \|B^0\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc, $\forall k \in \mathbb{N}$

alors

$$\|B^{k+1} - B^k\|_\infty \leq |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^{k+1} \|B^0\|_\infty.$$

Montrons que $(B^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $C([0, T], \mathbb{R})$. Verifiant, donc si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \Rightarrow \|B^n - B^m\|_\infty \leq \epsilon.$$

$$\begin{aligned} \|B^n - B^m\|_\infty &= \|B^n - B^{n+1} + B^{n+1} + \dots + B^{m-1} - B^m\|_\infty \\ &\leq \|B^n - B^{n+1}\|_\infty + \|B^{n+1} - B^{n+2}\|_\infty + \dots + \|B^{m-1} - B^m\|_\infty \\ &\leq (|K|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^{n+1} + |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^{n+2} + \dots + |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^m) \|B^0\|_\infty. \end{aligned}$$

Considérons la série $\sum |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^{n+1}$ avec le terme général $U_n = |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^{n+1}$.

$\sum U_n$ est convergente $\Rightarrow (S_n)$ la suite des sommes partielles est de cauchy.

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \Rightarrow |S^m - S^{n-1}| \leq \epsilon$$

$$S^n = \sum_{i=0}^n |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^{i+1}$$

$$S^m - S^{n-1} = \sum_{i=n}^m |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^{i+1}$$

D'où $\|B^n - B^m\|_\infty \leq |S^m - S^{n-1}| \leq \epsilon$, donc la suite $(B^k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de cauchy.

Comme $(C([0, T], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de banach, alors il existe $B(t) \in C([0, T], \mathbb{R})$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k(t) = B(t)$.

Montrons que $B(t)$ est la solution de (2.21), on a :

$$B^k(t) = F(t) + \int_0^t K(t-s)B^{k-1}(s)ds.$$

Posons $Z(t) = F(t) + \int_0^t K(t-s)B(s)ds$ et vérifions, si $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k(t) = Z(t)$

$$\begin{aligned} \|B^k - Z\|_\infty &= \left| \int_0^t K(t-s)(B^{k-1}(s) - B(s))ds \right| \\ &\leq \int_0^t K(t-s)|B^{k-1}(s) - B(s)|ds \\ &\leq |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \int_0^t |B^{k-1}(s) - B(s)|ds \\ &\leq |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \|B^{k-1} - B\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, par (2.28) la suite $(B^k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, T]$, vers la solution $B(t)$ de (2.21), tels que $B \in C([0, T])$ et $B(t) \geq 0$.

En ce qui concerne l'unicité de cette solution nous constatons que si $B(t)$ et $\bar{B}(t)$ sont deux solutions de (2.21), alors nous avons

$$\|B - \bar{B}\|_\infty \leq |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \|B - \bar{B}\|_\infty$$

de sorte que, par (2.28) $B(t) = \bar{B}(t)$.

Si en plus p_0 satisfait (2.26) alors, par la Proposition 2.1 et (2.29), nous avons $B^k \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$ et, en posant :

$$V^k(t) = \frac{d}{dt} B^k(t) \quad p.p.,$$

on a $V^k \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ et

$$V^{k+1}(t) = F'(t) + K(t)F(0) + \int_0^t K(t-s)V^k(s)ds, \quad (2.30)$$

ce qui donne

$$|V^{k+1} - V^k|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq |K|_{L^1(\mathbb{R}_+)} |V^k - V^{k-1}|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}.$$

Ainsi, à nouveau par (2.28), la suite V^k converge dans $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ vers

$$V(t) = \frac{d}{dt} B(t) \quad p.p. \text{ Bien sûr, (2.27) résulte de (2.30).}$$

Enfin, si (2.28) n'est pas vérifiée, prenons α tel que

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} K(t) dt < 1$$

Posons $\bar{B}(t) = e^{-\alpha t} B(t)$, $\bar{F}(t) = e^{-\alpha t} F(t)$, $\bar{K}(t) = e^{-\alpha t} K(t)$ l'équation (2.21) est transformé en une équation équivalente :

$$\bar{B}(t) = \bar{F}(t) + \int_0^t \bar{K}(t-s) \bar{B}(s) ds \quad (2.31)$$

et puisque que $\bar{K}(t)$ satisfait (2.28), ce problème peut être résolu de la même manière que précédemment.

Le théorème (2.1) nous permet d'énoncer des résultats pour le problème (2.13) via la formule (2.20). En effet, nous avons :

Théorème 2.2. [26] *Soient (2.14)-(2.17) et (2.26) sont satisfaites. On suppose également que :*

$$p_0(0) = \int_0^\infty \beta(a) p_0(a) da \quad (2.32)$$

et soit $p(a, t)$ définie par (2.20) où $B(t)$ est une solution de (2.21) - (2.23). Alors :

$$p \in C([0, a_M] \times \mathbb{R}_+), \quad p(a, t) \geq 0, \quad \mu(\cdot) p(\cdot, t) \in L^1(0, a_M) \quad \forall t > 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(a, t), \quad \frac{\partial p}{\partial a}(a, t) \text{ existe } p.p. \text{ dans } [0, a_M] \times [0, \infty] \quad (2.34)$$

et le problème (2.13) est satisfait. Cependant $p(a, t)$ est la seule solution dans le sens de (2.33) et (2.34).

Preuve :

La preuve de (2.33) et (2.34) est assez simple et résulte des propriétés de $B(t)$, données

dans le Théorème (2.1). Nous considérons seulement l'inégalité suivante concernant la dernière partie de (2.33) :

$$\begin{aligned}
\int_0^{a_t} \mu(a)p(a, t) &= \int_0^{\min(t, a_M)} \mu(a)B(t-a)\Pi(a)da + \int_{\min(t, a_M)}^{a_M} \mu(a)p_0(t-a)\frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}da \leq \\
&\leq \max_{s \in [0, t]} |B(s)| \int_0^{\min(t, a_M)} \mu(a)\Pi(a)da + \\
&+ e^{\int_0^{\max(t, a_M)-t} \mu(\sigma)d\sigma} \|p_0\|_\infty \int_{\min(t, a_M)}^{a_M} \mu(a)\Pi(a)da \leq \\
&\leq \max_{s \in [0, t]} |B(s)| + e^{\int_0^{\max(t, a_M)-t} \mu(\sigma)d\sigma} \|p_0\|_\infty
\end{aligned}$$

et soulignons le fait que (2.32) a pour but d'assurer la continuité de $p(a, t)$ à travers la droite $a = t$; en fait

$$B(0) = \int_0^\infty \beta(a)p_0(a)da = p_0(0).$$

Tant que l'unicité est concerné, nous avons déjà vu (formellement, mais maintenant la procédure peut être répétée avec rigueur) que la solution de (2.13) doit être de la forme (2.20) avec $B(t)$ satisfaisant (2.21) et (2.23) : l'unicité de la solution de ce dernier problème donne l'unicité pour (2.13).

Nous avons vu, qu'avec les hypothèses (2.26) et (2.32), la formule (2.20) nous donne une solution que nous pouvons appeler classique, effectivement, cette formule est significative même si ces conditions ne sont pas satisfaites, en effet (2.26) est suffisante pour donner une solution au sens indiqué dans le texte suivant :

Théorème 2.3. [26] *Soient (2.14) - (2.17) sont satisfaits, alors $p(a, t)$, définie par (2.20) a les propriétés suivantes :*

$$p(\cdot, t) \in C([0, T]; L^1(0, a_M)), \quad p(a, t) \geq 0, \quad p.p. \quad \text{dans} \quad [0, a_M] \times \mathbb{R}_+, \quad (2.35)$$

$$|p(\cdot, t)|_{L^1} \leq e^{t|\beta|_{L^\infty}} |p_0|_{L^1}, \quad (2.36)$$

$$p(a, t) \text{ est continue pour } a < 1 \text{ et satisfait (2.13, ii) pour } t > 0, \quad (2.37)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [p(a+h, t+h) - p(a, t)] = -\mu(a)p(a, t) \quad p.p. \quad \text{dans} \quad [0, a_M] \times \mathbb{R}_+ \quad (2.38)$$

Preuve :

Prouvons (2.36) en premier. De (2.22) nous avons :

$$F(t) \leq |\beta|_{L^\infty} |p_0|_{L^1}, \quad K(t) \leq |\beta|_{L^\infty},$$

puis, à partir de (2.21) :

$$B(t) \leq |\beta|_{L^\infty} |p_0|_{L^1} + |\beta|_{L^\infty} \int_0^t B(s) ds.$$

Ainsi, par l'inégalité de Gronwall

$$B(t) \leq |\beta|_{L^\infty} e^{t|\beta|_{L^\infty}} |p_0|_{L^1}. \quad (2.39)$$

De cette estimation, la formule (2.20) donne :

$$\begin{aligned} |p(\cdot, t)|_{L^1} &= \int_0^t B(t-a) \Pi(a) da + \int_0^\infty \frac{\Pi(a+t)}{\Pi(a)} p_0(a) da \\ &\leq \left(|\beta|_{L^\infty} \int_0^t e^{(t-a)|\beta|_{L^\infty}} da + 1 \right) |p_0|_{L^1} \\ &= e^{t|\beta|_{L^\infty}} |p_0|_{L^1} \end{aligned}$$

Maintenant (2.35) découle facilement de (2.36), en fait, pour un $p_0 \in L^1(0, a_M)$, considérons p_0^n une suite telle que :

$$p_0^n \text{ satisfait (2.26) et (2.32), } \lim_{n \rightarrow \infty} |p_0^n - p_0|_{L^1} = 0,$$

et soit p^n la solution de (2.13) correspondant à p_0^n . Ainsi $p^n \in C([0, T]; L^1(0, a_M))$, par (2.36) et la linéarité, nous avons :

$$|p^n(\cdot, t) - p(\cdot, t)|_{L^1} \leq e^{t|\beta|_{L^\infty}} |p_0^n - p_0|_{L^1}$$

de sorte que p est la limite de la suite p^n dans l'espace $C([0, T]; L^1(0, a_M))$ i.e. (2.35) est vrai.

Enfin, (2.37) et (2.38) sont simples.

Le théorème précédent montre que même lorsque la donnée initiale p_0 n'est pas régulière la solution $p(a, t)$ a encore une certaine régularité. Nous notons également que (2.36) assure la continuité de la solution p par rapport à la donnée initiale p_0 (donc bien posé), dans la norme de l'espace $L^1(0, a_M)$: il s'agit d'une caractéristique principale du problème et il est en accord avec la signification biologique de la densité de la population $p(a, t)$.

2.1.3 Le comportement asymptotique

Ici, nous étudions le comportement asymptotique du taux de natalité $B(t)$, i.e, nous discutons le comportement asymptotique de la solution de l'équation de renouvellement (2.21)-(2.23) : aussi tout résultat sur $B(t)$ peut être traduit à $p(a, t)$, via la formule (2.20).

En premier, nous notons que, par (2.39), $B(t)$ est absolument Laplace transformable et

$$\hat{B}(\lambda) = \frac{\hat{F}(\lambda)}{1 - \hat{K}(\lambda)} = \hat{F}(\lambda) + \frac{\hat{F}(\lambda)\hat{K}(\lambda)}{1 - \hat{K}(\lambda)} \quad (2.40)$$

où $\hat{f}(\lambda)$ désigne la transformée de Laplace de $f(t)$.

Ainsi, nous pouvons utiliser les techniques classiques de la transformée de Laplace qui conserve le comportement asymptotique de $B(t)$ pour les singularités de $\hat{B}(\lambda)$ (voir Préliminaires).

Comme $F(t)$ et $K(t)$ s'annulent pour $t > a_M$, leurs transformées $\hat{F}(\lambda)$ et $\hat{K}(\lambda)$ sont des fonctions analytiques entières de λ ; en effet d'après (2.40) $\hat{B}(\lambda)$ ne peut avoir que des pôles qui sont trouvées parmi les racines de l'équation

$$\hat{K}(\lambda) = 1. \quad (2.41)$$

En ce qui concerne cette dernière équation nous avons ;

Théorème 2.4. [26] *L'équation (2.41) a une et une seule solution réelle α^* qui est une racine simple. $\alpha^* < 0$ si et seulement si $\int_0^\infty K(t) < 1$. Toute autre solution α de (2.41) est tel que $\Re\alpha < \alpha^*$. Dans toute bande $\sigma_1 < \Re\lambda < \sigma_2$, il y a au plus un nombre fini de racines.*

Preuve : Considérons la fonction réelle :

$$x \rightarrow \hat{K}(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} K(t) dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.42)$$

qui, puisque $K(t) \geq 0$, est strictement décroissante et telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{K}(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \hat{K}(x) = 0.$$

Alors, il y a une et une seule solution réelle α^* de (2.41) et, puisque

$$\frac{d}{dx} \hat{K}(x)|_{x=\alpha^*} = - \int_0^{\infty} t e^{-\alpha^* t} K(t) dt < 0,$$

α^* est une solution simple. Bien sûr $\alpha^* < 0$ si et seulement si $\hat{K}(0) = \int_0^{\infty} K(t) dt < 1$.

Soit α une solution différente de α^* , alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^* t} K(t) dt &= 1 = \Re \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} K(t) dt \right) = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\Re \alpha t} \cos(\Im \alpha t) K(t) dt < \int_0^{\infty} e^{-\Re \alpha t} K(t) dt \end{aligned}$$

de sorte que, puisque (2.42) est strictement décroissante, il s'ensuit que $\Re \alpha < \alpha^*$.

Enfin, puisque $\hat{K}(\lambda) \rightarrow 0$ quand $|\lambda| \rightarrow +\infty$, toutes les racines dans la bande $\sigma_1 < \Re \lambda < \sigma_2$ doivent se trouver dans un sous ensemble borné et en nombre fini car si non $\hat{K}(\alpha)$ s'annulerait de manière identique.

Maintenant nous sommes prêts à formuler.

Théorème 2.5. [26] Soit p_0 satisfait (2.17) et soit α^* défini dans le théorème précédent alors

$$B(t) = b_0 e^{\alpha^* t} (1 + \Omega(t)) \quad (2.43)$$

où

$$b_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t) = 0.$$

Preuve : En premier on considère le dernier terme dans (2.40), on a :

$$\lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow +\infty \\ \Re \lambda > \delta}} \frac{\hat{F}(\lambda) \hat{K}(\lambda)}{1 - \hat{K}(\lambda)} = 0 \quad (2.44)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\hat{F}(\sigma + iy)\hat{K}(\sigma + iy)}{1 - \hat{K}(\sigma + iy)} \right| dy < +\infty \quad (2.45)$$

où $\delta \in \mathbb{R}$ est arbitrairement choisie et $\sigma \in \mathbb{R}$ est tel que la ligne $\Re\lambda = \sigma$ ne croise aucune racine de (2.41). La condition (2.44) est vérifiée parce que

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \hat{K}(\lambda) = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \hat{F}(\lambda) = 0. \quad (2.46)$$

dans le demi-plan $\Re\lambda > \delta$. Concernant (2.45), on note d'abord que (2.46) implique aussi

$$m_\sigma = \inf_{y \in \mathbb{R}} |1 - \hat{K}(\sigma + iy)| > 0.$$

En outre, définissant les fonctions

$$f_\sigma(t) = e^{-\sigma t} F(t) \quad \forall t \geq 0; \quad f_\sigma(t) = 0 \quad \forall t < 0,$$

et

$$g_\sigma(t) = e^{-\sigma t} K(t) \quad \forall t \geq 0; \quad g_\sigma(t) = 0 \quad \forall t < 0,$$

on constate que, puisque qu'elles s'annulent en dehors de $[0, a_M]$, leurs transformées de Fourier $f_\sigma^*(y), g_\sigma^*(y)$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$ et aussi

$$f_\sigma^*(y) = \hat{F}(\sigma + iy), \quad g_\sigma^*(y) = \hat{K}(\sigma + iy).$$

Ainsi

$$\left| \frac{\hat{F}(\sigma + iy)\hat{K}(\sigma + iy)}{1 - \hat{K}(\sigma + iy)} \right| \leq \frac{1}{m_\sigma} |f_\sigma^*(y)g_\sigma^*(y)|. \quad (2.47)$$

et (2.45) est satisfait.

Maintenant on prend $\sigma > \alpha^*$ et on considère la fonction

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\hat{F}(\lambda)\hat{K}(\lambda)}{1 - \hat{K}(\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda. \quad (2.48)$$

qui, par (2.44) et (2.45) est bien définie et a la transformée de Laplace

$$\hat{H}(\lambda) = \frac{\hat{F}(\lambda)\hat{K}(\lambda)}{1 - \hat{K}(\lambda)}; \text{ par conséquent, de (2.40), nous avons}$$

$$B(t) = F(t) + H(t). \quad (2.49)$$

Enfin, on considère $\sigma_1 < \alpha^*$ telle que toute racine de (2.41), autre que α^* , se trouve uniquement sur la gauche de la ligne $\Re\lambda = \sigma_1$. De (2.44) et (2.45) on change l'abscisse d'intégration dans (2.48), de σ à σ_1 (voir Préliminaires); ce qui donne :

$$H(t) = e^{\alpha^* t}(b_0 + \Omega_0(t)), \quad (2.50)$$

où

$$b_0 = \text{Res} \left[\frac{\hat{F}(\lambda)\hat{K}(\lambda)}{1 - \hat{K}(\lambda)} \right]_{\lambda=\alpha^*} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha^* t} F(t) dt}{\int_0^\infty t e^{-\alpha^* t} K(t) dt} \quad (2.51)$$

et

$$\begin{aligned} |\Omega_0(t)| &= \frac{e^{-\alpha^* t}}{2\pi} \left| \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{\hat{F}(\lambda)\hat{K}(\lambda)}{1 - \hat{K}(\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda \right| \\ &\leq \frac{e^{-(\alpha^* - \sigma_1)t}}{m_{\sigma_1}} |f_{\sigma_1}^*|_{L^2(\mathbb{R})} |g_{\sigma_1}^*|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

On voit que $b_0 = 0$ si et seulement si $F(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, mais dans ce cas la seule solution pour (2.21) est la solution trivial $B(t) \equiv 0$. D'autre part, si $b_0 > 0$, par (2.49) et (2.50)

$$B(t) = b_0 e^{\alpha^* t} \left(1 + \frac{e^{-\alpha^* t} F(t)}{b_0} + \frac{1}{b_0} \Omega_0(t) \right)$$

et (2.43) est prouvé.

Quelques commentaires sur b_0 sont maintenant dans l'ordre. En premier, nous allons interpreter le cas $b_0 = 0$: nous avons vu, dans la preuve du théorème, que ce cas se produit si et seulement si $F(t) \equiv 0$, c'est à dire si et seulement si

$$\int_0^\infty \beta(a+t)p_0(a) \frac{\Pi(a+t)}{\Pi(a)} da = 0 \quad \forall t \geq 0$$

et par conséquent, si et seulement si, pour tout $t \geq 0$,

$$\beta(a+t)p_0(a) = 0 \text{ p p sur } [0, a_M]. \quad (2.53)$$

Maintenant (2.53) se produit si et seulement si le support de $\beta(\cdot)$ se trouve à la gauche du support de p_0 , ceci est quand tous les les individus initiaux sont trop vieux pour

pouvoir devenir fertiles. Dans ce cas nous avons

$$p(a, t) = \begin{cases} p_0(a-t) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} & \text{si } a \geq t \\ 0 & \text{si } a < t \end{cases} \quad (2.54)$$

Nous remarquons que le comportement de $p(a, t)$ peut être négligeable même si la donnée initiale p_0 n'est pas identiquement nulle. La donnée initiale qui ne satisfait pas la condition (2.53) s'appelle une donnée non triviale.

Une autre remarque découle de (2.52); en fait, puisque

$$F(t) = \int_0^\infty \beta(a+t) p_0(a) \frac{\Pi(a+t)}{\Pi(a)} da \leq |\beta|_{L^\infty} |p_0|_{L^1},$$

il s'ensuit que

$$b_0 \leq M_0 |p_0|_{L^1}, \quad |f_{\sigma_1}^*|_{L^2(\mathbb{R})} \leq M_0 |p_0|_{L^1}. \quad (2.55)$$

où M_0 est une constante indépendante de p_0 . Ainsi l'estimation (2.39) peut être améliorée pour

$$|p(\cdot, t)|_{L^1} \leq M e^{\alpha^* t} |p_0|_{L^1}; \quad (2.56)$$

où M est une constante indépendante de p_0 . En fait (2.56) résulte de (2.55) parce que, pour $t > a_M$

$$p(a, t) = e^{\alpha^*(t-a)} (b_0 + \Omega_0(t-a)) \Pi(a).$$

Nous notons aussi que la formule (2.43) implique

$$B(t) \text{ est soit identiquement nul ou éventuellement positive.} \quad (2.57)$$

Ainsi, nous pouvons affirmer.

Proposition 2.2. [26] *Soit $p(a, t)$ la solution de (2.13) sous l'hypothèse du Théorème (2.2) et soit $b_0 > 0$ dans (2.43), alors*

$$P(t) = \int_0^{a_M} p(a, t) da > 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve : Nous notons d'abord que si nous posons $q(a, t) = p(a, t + t_0)$, $t \geq 0$, alors $q(a, t)$ est la solution du même problème (2.13) avec la condition initiale

$$q(a, 0) = p(a, t_0)$$

Ainsi nous pouvons raisonner par absurde. En fait si $P(t_0) = 0$ pour un t_0 alors

$$p(a, t_0) = 0 \quad p \text{ p sur } [0, a_M]$$

et par conséquent, pour $t \geq t_0$

$$p(a, t) = 0 \quad p \text{ p sur } [0, a_M]$$

ce qui implique

$$P(t) = 0 \quad \text{pour } t \geq t_0.$$

Maintenant, si $b_0 > 0$, par (2.57) et la formule (2.43) nous avons que $P(t)$ est finalement positive, de sorte qu'il est impossible que $P(t)$ s'annule en t_0 .

Avant de terminer ce paragraphe, nous revenons à l'équation (2.41) pour discuter de la signification de α^* . En fait, cette équation est appelée l'équation caractéristique de Lotka et α^* le paramètre intrinsèque Malthusien, il détermine la croissance de la population par le taux de natalité $B(t)$, dont le comportement est donné dans le Théorème 2.5, et il est lié au taux de reproduction net défini dans (2.7) par :

$$R > 1 \quad \text{si et seulement si } \alpha^* > 0, \quad (2.58)$$

$$R = 1 \quad \text{si et seulement si } \alpha^* = 0,$$

$$R < 1 \quad \text{si et seulement si } \alpha^* < 0,$$

Cela fait partie du Théorème 2.4 parce que $R = \hat{K}(0)$: ainsi le lien naturel entre les deux paramètres R et α^* est précisé.

Chapitre 3

Cas d'un Modèle Démographique

Dans ce chapitre on va présenter l'étude d'un modèle pour une population structurée en âge, il s'agit de l'équation de McKendrick, cette équation décrit le temps d'évolution de la population structurée en âge. En premier temps, elle a apparu explicitement dans la littérature de la dynamique des populations dans l'ouvrage de McKendrick [36]. L'équation de McKendrick est une équation aux dérivées partielles hyperbolique du premier ordre, avec le temps et l'âge comme des variables indépendantes, et une condition aux limites qui prend en compte les naissances dans une population. L'existence des solutions classiques de l'équation de McKendrick et leurs comportements asymptotiques dans le temps sont bien établis et il existe dans la littérature de la dynamique des populations un grand nombre d'enquêtes. Voir par exemple les ouvrages de Webb [45] et de Iannelli [26]

Indépendamment du fait, que l'existence des solutions classiques de l'équation de McKendrick soit bien établie, il existe un manque d'exemples spécifiques et il n'y a pas de solutions explicites connues de l'équation de McKendrick . Cela est dû à la forme particulière de la condition aux limites qui est difficile à manipuler analytiquement.

L'approche de la modélisation de McKendrick est une tentative pour combler les lacunes montrées par la loi malthusienne ou la loi de croissance exponentielle de la dynamique des populations, en introduisant la dépendance en âge de la mortalité et de la fertilité de la population. Dans sa forme la plus simple, le modèle de McKendrick ne décrit pas les effets de surpeuplement, la dépendance dans les ressources ou

les interactions économiques et intraspécifiques dans les populations humaines. Pour inclure ces effets, plusieurs d'autres modèles ont été introduits et analysés à partir d'un point de vue mathématique et numérique voir [45].

En démographie, afin de faire des prévisions sur la croissance de la population, une approche en général a suivi. Après la mesure des taux de natalité et de mortalité par classe d'âge ou par génération, les démographes utilisent le modèle de Leslie[32], un modèle discret analogue à l'équation de McKendrick [29].

Notre but ici est de trouver les solutions de l'équation de McKendrick dans le sens distributionnel faible, pour calculer exactement des exemples spécifiques et obtenir une partie de leurs propriétés. Afin de combler l'écart entre les modèles théoriques et informatiques, on compare les propriétés de stabilité du modèle de McKendrick et du modèle discret de Leslie, unifiant les deux approches de modélisation à la fois.

A partir de la théorie qualitative des équations aux dérivées partielles, on montre que les solutions de l'équation de McKendrick ont des cycles (cycles démographiques ou cycles Easterlin [18]), comme sont observés dans la croissance des populations humaines et bactériennes. Dans l'approche qualitative d'Easterlin [18], la période des cycles est estimé être de l'ordre de l'âge de deux générations, qui pour la population humaine est de l'ordre de 50 années. Ici, on montre que la période des cycles démographiques est associée à l'âge de la première classe d'âge reproductive, et pour les populations humaines est dans le rang 10 – 20 ans. Les amplitudes des cycles sont amorties et l'amortissement est associé à la dispersion de la fertilité de la population autour d'un certain âge de fertilité maximal.

3.1 Préliminaires

On note par $p(a, t)$ la densité des individus de la population, ou a représente l'âge et t le temps. En supposons que, dans une population la mort se produit avec le module de mortalité $\mu(a)$ dépendant de l'âge, nous avons $\frac{dp(a, t)}{dt} = -\mu(a)p(a, t)$. Comme l'âge est en fonction du temps, $a \equiv a(t)$, et il est mesuré dans la même échelle de temps, $\frac{da}{dt} = 1$, la fonction $p(a, t)$ vérifie l'équation différentielle aux dérivées partielles

hyperbolique linéaire du premier ordre

$$\frac{\partial p(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(a, t)}{\partial a} = -\mu(a)p(a, t) \quad (3.1)$$

où $a \geq 0$ et $t \geq 0$. Pour décrire les naissances, la fonction distribution de fertilité d'âge spécifique par classe d'âge $\beta(a)$ est introduite, et les nouveaux nés (individus avec l'âge $a = 0$) au temps t sont calculés par la condition aux limites,

$$p(0, t) = \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(a)p(a, t)da. \quad (3.2)$$

Appuyée par des données à partir des populations humaines et bactériennes, $b(a)$ est une fonction à support compact dans l'intervalle $[\alpha, \sigma]$, où $\alpha > 0$ et $\sigma < \infty$ et $\mu(a)$ est une fonction positive. L'équation (3.1) avec la condition aux limites (3.2) est l'équation de Mckendrick [36]. Connaissant les solutions de l'équation de Mckendrick, la population totale au temps t est donnée par

$$N(t) = \int_0^{+\infty} p(a, t)da. \quad (3.3)$$

L'existence des solutions de l'équation linéaire (3.1) avec la condition aux limites (3.2) a été implicitement prouvé par plusieurs auteurs et remonte aux travaux de McKendrick [36], Lotka [33] et Feller [20]. Plus récemment, Gurtin et MacCamy [22] ont prouvé l'existence des solutions de (3.1) pour une classe de modèle où le module de mortalité dépend de la population totale, $\mu \equiv \mu(a, N(t))$. Cependant, due à la forme particulière de la condition aux limites (3.2), des solutions explicites de l'équation de McKendrick n'ont pas été trouvées.

Dans le développement de la théorie de l'équation de McKendrick, les efforts ont été portés sur le calcul de l'existence des solutions, sur les conditions pour l'extinction asymptotique et pour les solutions d'équilibres positifs, ainsi que, sur l'existence des répartitions par âge stable dans des intervalles d'âge fini. D'un point de vue démographique, la plupart des conclusions obtenues par le modèle de McKendrick sont basés sur des solutions construites numériquement à partir de données initiales particulières.

Dans la suite, nous considérons le cas le plus général

$$p(0, t) = \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(a, t)p(a, t)da. \quad (3.4)$$

où le module de fertilité $\beta(a, t)$ dépend de l'âge et du temps, et pour chaque $t \geq 0$, $\beta(a, t)$ a un support compact dans l'intervalle $[\alpha, \sigma]$ avec $0 < \alpha < \sigma < \infty$. En vue de simplifier les calculs, nous considérons parfois que la fonction $\beta(a, t)$ a une extension naturel comme fonction nulle à la moitié de la ligne réelle $a \geq 0$. Cette condition aux limites est d'un intérêt particulier dans les modèles de croissance démographiques et économiques, permettant l'analyse des effets des fluctuations du module de fertilité au cours du temps.

Pour calculer les solutions générales de l'équation de McKendrick (3.1) vérifiant la condition aux limites (3.4), nous considérons la donnée initiale $p(a, 0) = \phi(a)$, pour $a > 0$. En général $\phi(0) \neq \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(a, 0)p(a, 0)da$. Sous ces conditions, comme t augmente, la condition aux limites (3.2) ou (3.4) introduit des discontinuités dans les solutions de (3.1). Ici, on suppose que $\phi(a) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, impliquant que $p(a, t)$ est aussi localement intégrable. Dans ce cas, la population totale au temps $t = 0$, $N(0)$ est bien défini seulement si $\phi(a)$ a un support compact dans \mathbb{R}_+ . Comme nous le verrons, ceci n'introduit pas de restrictions techniques car les solutions asymptotiques dépendent de $\phi(a)$ dans un intervalle d'âge de longueur finie. Dans ce cadre, le problème de Cauchy pour l'équation de McKendrick doit être compris dans le sens des distributions (problème de Cauchy faible).

Pour calculer explicitement les solutions générales de l'équation aux dérivées partielles (3.1) vérifiant la condition aux limites (3.4) et prescrivant les données initiales, nous utilisons la technique des caractéristiques. Ecrivant l'équation (3.1) sous la forme $\frac{dp(a, t)}{dt} = -\mu(a)p(a, t)$, les solutions de (3.1) sont aussi solutions du système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\mu(a)p \\ \frac{da}{dt} = 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Ces deux équations ont pour solutions

$$\begin{aligned} p(a, t) &= p(a_0, t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t \mu(s + a_0 - t_0) ds\right) \\ a - a_0 &= t - t_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

où a_0 est la variable d'âge à l'instant $t = t_0$, la deuxième équation dans (3.6) est l'équation des courbes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles (3.1). En remplaçons la deuxième équation de (3.6) dans la première, nous obtenons la solution de l'équation de McKendrick pour $t < a$,

$$\begin{aligned} p(a, t) &= \phi(a - t) \exp \left(- \int_0^t \mu(s + a_0) ds \right) \\ &= \phi(a - t) \exp \left(- \int_{a-t}^a \mu(s) ds \right) \quad (t < a) \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $\phi(a - t) = p(a - t, 0)$ est la distribution d'âge initiale de la population au temps $t_0 = 0$. Pour $t < a$, la solution (3.7) ne dépend pas de la condition aux limites (3.4), et si $\phi(a) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ou $\phi(a) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $p(a, t)$ est intégrable ou localement intégrable en a , à condition que $\mu(a) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ et $\mu(a) \geq 0$.

Pour $t \geq a$, par (3.6), nous avons

$$p(a, t) = p(0, t - a) \exp \left(- \int_0^a \mu(s) ds \right) := p(0, t - a) \Pi(a) \quad (3.8)$$

et $\pi(a)$ est la probabilité de survie jusqu'à l'âge a des individus de la population.

Dans la démographie mathématique, les théories de renouvellement des populations structurées en âge sont généralement utilisées. En raison de la structure simple des courbes caractéristiques de l'équation (3.1), Lotka [33] a montré que la densité des nouveaux nés au temps, $B(t) := p(0, t)$, vérifie une équation intégrale. Remplaçons (3.7) et (3.8) dans la condition aux limites (3.4) et prolongeons par zéro de $\beta(a, t)$ dans la demi-droite réelle $a \geq 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_0^t \beta(a, t) \phi(a) B(t - a) da + \int_t^{+\infty} \beta(a, t) \Pi(a) \frac{\phi(a - t)}{\Pi(a - t)} da \\ &:= \int_0^t \bar{\beta}(a, t) B(t - a) da + g(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

qui est l'équation intégrale de renouvellement de la démographie. Introduite en premier par Lotka [33] et développée plus tard par Feller [20].

Si les solutions de l'équation intégrale (3.9) sont connues, alors, par (3.7) et (3.8),

les solutions de l'équation de McKendrick peuvent être écrites comme,

$$p(a, t) = \begin{cases} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} \phi(a-t) & (t < a) \\ \Pi(a)B(t-a) & (t \geq a) \end{cases} \quad (3.10)$$

Donc, une fois les solutions de l'équation intégrale de renouvellement (3.9) sont connues, les solutions de l'équation de Mckendrick (3.1) avec les conditions aux limites (3.4) sont facilement obtenues. Inversement, si nous resolvons le problème des données initiales pour l'équation de McKendrick, la solution de l'équation de renouvellement est aussi facilement obtenue.

Les solutions indépendantes du temps ou les solutions d'équilibre de l'équation de Mckendrick vérifient l'équation différentielle ordinaire $\frac{dp}{da} = -\mu(a)p$. Par conséquent, toutes les solutions d'équilibre sont de la forme

$$p(a) = p_0 \exp\left(-\int_0^a \mu(s) ds\right)$$

où p_0 est une constante. En multipliant la solution d'équilibre par $\beta(a)$ et en intégrant en a , par la condition aux limites (3.2), il suit que $\int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da = 1$. Aussi, nous définissons le taux de croissance de Lotka comme le nombre

$$R = \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da. \quad (3.11)$$

C'est un résultat bien connu que les propriétés des solutions asymptotiques de l'équation de McKendrick sont déterminées pour le nombre de croissance de Lotka.

Dans les deux paragraphes suivants, nous calculons explicitement les solutions faibles de l'équation de McKendrick (3.1), ainsi que les solutions de l'équation intégrale de renouvellement (3.9).

Dans le paragraphe 3.2, nous supposons que la population a seulement une classe d'âge fertile. Ceci nous mène à l'introduction d'une nouvelle condition aux limites $p(0, t) = \beta_1(t)p(\alpha, t)$, où $\beta_1(t)$ est une fonction positive et $a = \alpha > 0$ est la seule classe d'âge reproductive. Ceci correspond au choix $\beta(a, t) = \beta_1(t)\delta(a - \alpha)$, où $\delta(\cdot)$ est la fonction delta de Dirac.

Dans ce cas, les solutions de l'équation de McKendrick sont facilement obtenues et l'équation intégrale de renouvellement (3.9) se réduit à l'équation fonctionnelle

$$B(t) = \begin{cases} \beta_1(t) \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha - t)} \phi(\alpha - t) & (t < \alpha) \\ \beta_1(t) \Pi(\alpha) B(t - \alpha) & (t \geq \alpha) \end{cases} \quad (3.12)$$

Le choix de la condition aux limites $p(0, t) = \beta_1(t)p(\alpha, t)$ a l'avantage de décrire les modèles de croissance globaux de la population comme si la fécondité s'est concentrée dans une classe d'âge reproductive. Ceci permet de discuter les effets associées aux retards dans la reproduction et, comme nous le verrons, il est important de déterminer les périodes des cycles démographiques. D'autre part, cette condition aux limites ainsi que la forme linéaire de l'équation de McKendrick permettent d'unifier les approches de Leslie et McKendrick, avec des avantages considérables pour la compréhension qualitative des effets de croissance dans des populations réelles.

Un des résultats principaux de la section 3.3 est que la solution de l'équation de McKendrick est le produit d'une fonction exponentielle dans le temps par une fonction périodique avec une période égale à l'âge de la seule classe d'âge reproductive. La forme de la modulation périodique dépend de la distribution d'âge initiale de la population, et l'amplitude dépend du module de mortalité.

Dans le paragraphe 3.3, nous considérons le cas général où les classes d'âge fertiles sont réparties le long d'un intervalle d'âge, et nous obtenons les formules explicites pour les solutions faibles de l'équation de McKendrick et de renouvellement. Le comportement asymptotique des solutions est obtenu comme une fonction du taux de croissance de Lotka. Alors, nous calculons explicitement les solutions de l'équation de McKendrick et de renouvellement pour le cas où $\beta(a, t)$ est constant dans l'intervalle d'âge $[\alpha, \sigma]$.

Nous montrons que la stabilité et l'instabilité des solutions de l'équation de McKendrick dans le sens faible sont déterminées par le taux de croissance de Lotka. Dans la présente théorie de l'équation de McKendrick, la stabilité et l'instabilité des solutions sont données implicitement par les racines réelles de l'équation caractéristique associée à la transformée de Laplace de (3.1) [26]. Une procédure algorithmique pour

déterminer les racines de l'équation caractéristique est récemment obtenue par Farkas [19]. Cependant, ce n'est pas toujours possible de localiser ces racines. Avec l'approche développé ici, la stabilité et l'instabilité des solutions de l'équation de McKendrick sont directement calculés à partir de la fonction de fertilité $\beta(a)$ et le module de mortalité $\mu(a)$, des paramètres directement mesurés dans la démographie,[29].

En général, nous concluons que si les intervalles de temps dans les séries chronologiques de la population sont égales à l'âge de la fertilité maximale, ces séries chronologiques ont une croissance exponentielle ou malthusienne. Pour des intervalles de temps plus petits, la série chronologique est modulée par une fonction périodique dans le temps. Ceci prouve que, dans l'échelle de temps de l'ordre de 10-20 ans, il existe un comportement cyclique dans le modèle de croissance de la population. L'approximation de la distribution d'âge de la population par la somme des fonctions delta de Dirac est concentrée aux classes d'âge consécutives, une possibilité de modélisation d'un point de vue informatique, la modulation du modèle de croissance d'une population devient presque périodique dans le temps (paragraphe 3.4).

A la fin de chaque chapitre, nous discutons les aspects qualitatifs des solutions que nous avons analysées. Les conclusions principales de ce papier pour la démographie et la dynamique des populations sont discutées dans la conclusion du (paragraphe 3.5).

3.2 Populations avec une classe d'âge fertile

Nous supposons que les naissances se produisent à un certain âge fixe $a = \alpha > 0$, et nous supposons que la fonction de fertilité est $\beta(a, t) \equiv \beta_1(t)\delta(a - \alpha)$, où $\delta(\cdot)$ est la fonction delta de Dirac et $\beta_1(t)$ est une fonction du temps différentiable positive et bornée . Pour ce cas particulier, la condition aux limites (3.4) devient

$$p(0, t) = \beta_1(t)p(\alpha, t) \tag{3.13}$$

avec $\alpha > 0$. Notons que, si $\alpha = 0$, le problème de Cauchy de l'équation de McKendrick est déterminé seulement pour $t \leq a$. Pour $t > a$, par (3.13) $p(0, t)$ devient indéterminée, ainsi que $p(a, t)$ avec $t > a$.

Pour étendre la solution (3.7) de l'équation de McKendrick comme fonction des données initiales à tout le domaine des variables indépendantes a et t , en tenant compte de la condition aux limites (3.13), nous considérons en premier le cas $t = a$. Par (3.8) et pour $t = a$,

$$p(a, t) = p(0, 0) \exp\left(-\int_0^a \mu(s) ds\right).$$

Comme les nouveaux-nés au temps $t = 0$ sont calculés à partir de la condition aux limites (3.13), pour rendre cette solution dépendante des données initiales, nous devons avoir

$$p(a, t) = \beta_1(0) \phi(\alpha) \exp\left(-\int_0^a \mu(s) ds\right), \quad \text{si } t = a \quad (3.14)$$

où $p(\alpha, 0) = \phi(\alpha)$, voir Figure (3.1).

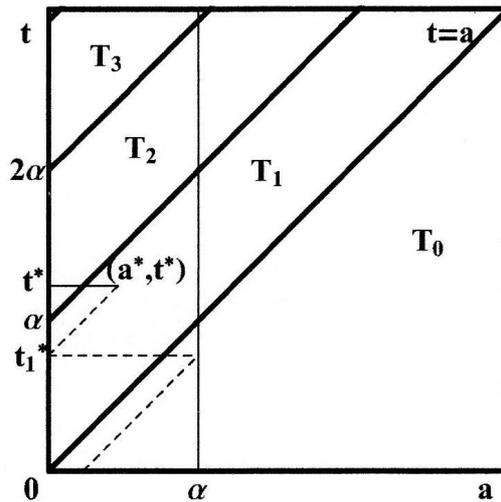


FIGURE 3.1 – Courbes caractéristiques $a - a_0 = t - t_0$ pour l'équation de McKendrick (3.1) [34]

Les points intérieurs des ensembles $\bar{T}_m = \{(a, t) : t < a + m\alpha, t \geq a + (m - 1)\alpha, a \geq 0, t \geq 0\}$ avec $m \geq 1$, et $\bar{T}_0 = \{(a, t) : t < a, a \geq 0, t \geq 0\}$ sont dénotés par T_m , avec $m \geq 0$.

La ligne verticale $a = \alpha$ représente l'âge de l'unique classe d'âge reproductrice de la population. La condition aux limites au temps t est calculée selon la valeur de $p(\alpha, t)$.

Pour $t = 0, p(a, 0) = \phi(a)$. Donnons un point arbitraire (a^*, t^*) dans le domaine de l'équation aux dérivées partielles (3.1), $p(a^*, t^*)$ est obtenu suivant la solution $p(a, t)$ le long de la ligne pointillée jusqu'à $t = 0$.

Nous introduisons maintenant les ensembles $\bar{T}_m = \{(a, t) : t < a + m\alpha, t \geq a + (m-1)\alpha, a \geq 0, t \geq 0\}$ où m est un entier positif et $\bar{T}_0 = \{(a, t) : t < a, a \geq 0, t \geq 0\}$, Figure (3.1). Nous dénotons par T_m les intérieurs des ensembles \bar{T}_m . Ainsi, donnons le point de coordonnées (a, t) , nous avons $(a, t) \in \bar{T}_m$, avec $m \geq 1$, si et seulement si $t \geq a$ et $[1 + (t-a)/\alpha] = m$, où $[x]$ désigne la partie entière de x . Un point $(a, t) \in \bar{T}_0$, si et seulement si $t < a$. Notons que, le domaine de la solution (3.7) est l'intérieur de la région marquée T_0 dans la Figure (3.1).

Pour $t > a$ et $t < a + \alpha$, nous considérons le point (a^*, t^*) sur la ligne $t = t^*$. Donc $t^* > a^*$ et $t^* < a^* + \alpha$. Ce point est dans la région marquée T_1 dans la Figure 3.1. Par(3.6), la ligne caractéristique qui passe par (a^*, t^*) traverse la ligne $a = 0$ à un instant donné $t = t_1^*$.

$$p(a^*, t^*) = p(0, t_1^*) \exp \left(- \int_{t_1^*}^{t^*} \mu(s - t_1^*) ds \right)$$

où $t_1^* = t^* - a^*$. Imposant la condition aux limites (3.13) à cette solution, nous obtenons,

$$p(a^*, t^*) = \beta_1(t_1^*) p(\alpha, t_1^*) \exp \left(- \int_{t_1^*}^{t^*} \mu(s - t_1^*) ds \right).$$

Par hypothèse, comme $t_1^* = (t^* - a^*) < \alpha$, nous sommes dans les conditions de la

solution (3.7) pour $t = t_1^*$, et $a = \alpha$, et nous avons

$$\begin{aligned}
p(a^*, t^*) &= \beta_1(t^* - a^*)p(\alpha, t^* - a^*)\exp\left(-\int_{t_1^*}^{t^*} \mu(s - t_1^*)ds\right) \\
&= \beta_1(t^* - a^*)\phi(\alpha + a^* - t^*) \\
&\times \exp\left(-\int_0^{t^* - a^*} \mu(s + a_0)ds - \int_{t^* - a^*}^{t^*} \mu(s + a^* - t^*)ds\right) \\
&= \beta_1(t^* - a^*)\phi(\alpha + a^* - t^*) \\
&\times \exp\left(-\int_0^{t^* - a^*} \mu(s + \alpha + a^* - t^*)ds\right) \\
&\times \exp\left(-\int_{t^* - a^*}^{t^*} \mu(s + a^* - t^*)ds\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons montré que pour $t \geq a$ et $t < a + \alpha$,

$$\begin{aligned}
p(a, t) &= \beta_1(t - a)\phi(\alpha + a - t) \\
&\times \exp\left(-\int_0^{t - a} \mu(s + \alpha + a - t)ds - \int_0^a \mu(s)ds\right). \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Notons que, pour $t \leq a$, la solution $p(a, t)$ donnée par (3.7), (3.14) et (3.15) est en général discontinue quand la ligne $t = a$ est franchie transversalement.

Nous procédons maintenant par induction. Supposons que, jusqu'à un certain entier $k \geq 1$, les solutions de l'équation de McKendrick (3.1) avec la condition aux limites (3.13) peuvent être écrites sous la forme

$$\begin{aligned}
p(a, t) &= \phi(m\alpha + a - t) \prod_{i=1}^m \beta_1(t - a - (i - 1)\alpha) \\
&\times \exp\left(-\int_0^{t - a - (m - 1)\alpha} \mu(s + m\alpha + a - t)ds\right) \\
&\times \exp\left(- (m - 1) \int_0^\alpha \mu(s)ds - \int_0^a \mu(s)ds\right). \tag{3.16}
\end{aligned}$$

où $m = [(t - a)/\alpha + 1]$, $(a, t) \in \bar{T}_m$, $m \leq k$ et $m \geq 1$. Comme nous avons montré, (3.16) est vraie pour $m = 1$. Supposons maintenant que $(a^*, t^*) \in T_{k+1}$. Alors, par (3.6), la courbe caractéristique qui passe par (a^*, t^*) , traverse la ligne $a = 0$ à un instant donné $t_1^* = t^* - a^*$, et,

$$p(a^*, t^*) = p(0, t_1^*)\exp\left(-\int_{t_1^*}^{t^*} \mu(s - t_1^*)ds\right).$$

Imposant, la condition aux limites (3.13) à cette solution, nous obtenons,

$$p(a^*, t^*) = \beta_1(t_1^*)p(\alpha, t_1^*) \exp \left(- \int_{t_1^*}^{t^*} \mu(s - t_1^*) ds \right).$$

Comme $[(t^* - a^* - \alpha)/\alpha + 1] = [(t^* - a^*)/\alpha] = k$, nous avons, $(\alpha, t_1^*) \in \bar{T}_k$ et par (3.16)

$$\begin{aligned} p(a^*, t^*) &= \beta_1(t_1^*)p(\alpha, t_1^*) \exp \left(- \int_{t_1^*}^{t^*} \mu(s - t_1^*) ds \right) \\ &= \beta_1(t^* - a^*)p(\alpha, t^* - a^*) \exp \left(- \int_0^{a^*} \mu(s) ds \right) \\ &= \left(\prod_{i=0}^k \beta_1(t - a - i\alpha) \right) \phi((k+1)\alpha + a^* - t^*) \exp(-\Delta) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{t^* - a^* - k\alpha} \mu(s + (k+1)\alpha + a^* - t^*) ds \\ &+ k \int_0^\alpha \mu(s) ds + \int_0^{a^*} \mu(s) ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, (3.16) reste vraie pour $m = k + 1$, et nous avons :

Proposition 3.1. [34] Soit $p(a, 0) = \phi(a) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ une condition initiale de l'équation aux dérivées partielles de McKendrick (3.1), avec $a \geq 0, t \geq 0$, et la condition aux limites (3.13). Supposons que $\mu(a) \in C^0(\mathbb{R}_+)$ est une fonction positive et $\beta_1(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ est positive. Alors, dans l'intérieur des ensembles \bar{T}_m , avec $m \geq 0$, la solution de l'équation de McKendrick (3.1) est différentiable en a et en t et, elle est donnée par :

(a) Si, $(a, t) \in T_0$,

$$p(a, t) = \phi(a - t) \exp \left(- \int_0^t \mu(s + a_0) ds \right)$$

où $a_0 = a - t$.

(b) Si, $(a, t) \in T_m$ et $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} p(a, t) &= \prod_{i=1}^m \beta_1(t - a - (i - 1)\alpha) \\ &\times \phi(m\alpha + a - t) \exp\left(-\int_0^{t-a-(m-1)\alpha} \mu(s + a_0) ds\right) \\ &\times \exp\left(-(m - 1) \int_0^\alpha \mu(s) ds - \int_0^a \mu(s) ds\right) \end{aligned}$$

où $a_0 = m\alpha + a - t$, $m = [(t - a)/\alpha + 1]$, $[x]$ signifie partie entière de x et $\alpha > 0$.

Preuve : Comme $\phi(a) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mu(a) \in C^0(\mathbb{R}_+)$ et $\beta_1(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, c'est carrément vérifiée par différenciabilité que, dans l'intérieur des ensembles \bar{T}_m avec $m \geq 0$, la solution obtenue par la méthode des caractéristiques vérifie l'équation de McKendrick (3.1).

Dans la construction précédent la Proposition 3.1, nous avons montré que les solutions de l'équation de McKendrick sont sur les frontières des ensembles \bar{T}_m , $m \geq 0$, où $p(a, t)$ est discontinue parce qu'en général, $\phi(0) \neq \beta_1(0)\phi(\alpha)$. Pour prolonger la solution de l'équation (3.1) comme indiqué dans la Proposition 3.1 sur tout le domaine des variables indépendantes, nous introduisons le concept des solutions faibles dans le sens des distributions.

Nous considérons l'espace des fonctions test qui est, l'espace des fonctions à support compact dans \mathbb{R}_+^2 indéfiniment dérivables. Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$ l'espace des fonctions test. Si $f(x)$ est une fonction localement intégrable, alors $f[\psi] = \int \psi(x)f(x)dx$ est une fonction continue dans le sens des distributions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$. Prenons l'équation (3.1) et calculons le produit scalaire avec la fonction $\psi(a, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$, comme ψ est à support compact dans \mathbb{R}_+^2 , et après intégration par partie, nous arrivons naturellement à la définition suivante :

Définition 3.1. [34] Une fonction localement intégrable $p(a, t) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^2)$ est une solution faible dans le sens des distributions de l'équation aux dérivées partielles de McKendrick (3.1), si

$$\int \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi(a, t) + \frac{\partial}{\partial a} \psi(a, t) - \mu(a)\psi(a, t) \right) p(a, t) da dt = 0$$

pour tout $\psi(a, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$.

Dans les conditions de la Définition 3.1, nous avons :

Théorème 3.1. [34] Soit $p(a, 0) = \phi(a) (\in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+))$ une condition initiale localement intégrable de l'équation aux dérivées partielles de McKendrick (3.1), avec $a \geq 0, t \geq 0$ et la condition aux limites (3.13). Supposons que $\mu(a) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+) \cap C^0(\mathbb{R}_+)$ est une fonction positive et $\beta_1(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ est positive. Alors, les solutions faibles de l'équation de McKendrick (3.1) sont :

(a) Si, $(a, t) \in \bar{T}_0$,

$$p(a, t) = \phi(a - t) \exp \left(- \int_0^t \mu(s + a_0) ds \right)$$

où $a_0 = a - t$.

(b) Si, $(a, t) \in \bar{T}_m$ et $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} p(a, t) &= \prod_{i=1}^m \beta_1(t - a - (i - 1)\alpha) \\ &\times \phi(m\alpha + a - t) \exp \left(- \int_0^{t - a - (m-1)\alpha} \mu(s + a_0) ds \right) \\ &\times \exp \left(-(m - 1) \int_0^\alpha \mu(s) ds - \int_0^a \mu(s) ds \right) \end{aligned}$$

où $a_0 = m\alpha + a - t, \alpha > 0, m = [(t - a)/\alpha + 1]$, et $[x]$ signifie la partie entière de x .

Preuve : Nous avons montré précédemment que les solutions de l'équation de McKendrick comme dans la Proposition 3.1 restent sur la frontière des ensembles \bar{T}_m , avec $m \geq 1$. Cependant, en ces points de la frontière les solutions dans la Proposition 3.1 ne sont pas différentiable et doivent être prises comme solutions faibles dans le sens des distributions. Ainsi, pour $p(a, t)$ comme dans la Proposition 3.1 pour qu'elle soit une solution de l'équation de McKendrick dans tous le domaine des variables indépendantes, elle doit satisfaire les conditions de la Définition 3.1 pour tout $\psi(a, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$. Comme par hypothèse $\phi(a)$ et $\mu(a)$ sont localement intégrable, nous sommes dans les conditions de la Définition 3.1 et nous pouvons vérifier si $p(a, t)$ donnée par la Proposition 3.1 peut être étendue comme une solution faible dans tous

le domaine de a et t . Pour cela, nous écrivons la solution dans a) dans la Proposition 3.1 sous la forme, $p(a, t) = \Phi(a - t)e^{-\Upsilon(a-t, t)}$, où $\Upsilon(a - t, t) = \Upsilon(a_0, t)$ est une fonction générique qui reflète la dépendance fonctionnelle de l'expression exponentielle, et nous calculons l'intégral,

$$I = \int \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial a} - \mu(a)\psi \right) \Phi(a - t)e^{-\Upsilon(a-t, t)} da dt$$

où $\Phi(y) = 0$, pour $y < 0$, $\Phi(y) = \phi(y)$, pour $y \geq 0$, et $\Phi(y) \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Introduisant les nouvelles coordonnées $y = a - t$ et $x = t$, nous avons,

$$I = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \mu(x + y)\psi \right) \Phi(y)e^{-\Upsilon(y, x)} dx dy.$$

Comme $\Upsilon(a - t, t) = \Upsilon(y, x) = \int_0^x \mu(s + y) ds$, et $\frac{\partial \Upsilon}{\partial x} = \mu(x + y) = \mu(a)$, presque partout, l'intégrale ci-dessus est évaluée à

$$I = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} \frac{\partial}{\partial x} (\psi e^{-\Upsilon(y, x)}) \Phi(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} [\psi e^{-\Upsilon(y, x)}]_0^\infty \Phi(y) dy = 0.$$

Par conséquent, la solution a) est une solution faible de l'équation de McKendrick. Pour le cas b), nous introduisons les nouvelles coordonnées $y = t - a$ et $x = t$. Ecrivant la solution dans b) sous la forme $p(a, t) = \Phi(a - t)e^{-\Upsilon(t-a, t)}$, et comme $m \equiv m(y)$, il s'ensuit que $\frac{\partial \Upsilon}{\partial x} = \mu(x - y) = \mu(a)$. Par un calcul analogue, nous avons $I = 0$, et la solution b) est aussi une solution faible de l'équation de McKendrick.

Pour le cas particulier $a = 0$, le Théorème 3.1 donne la solution explicite de l'équation fonctionnelle de renouvellement (3.12).

Corollaire 3.1. [34] Soit $p(a, 0) = \phi(a) (\in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+))$ une condition initiale localement intégrable pour l'équation aux dérivées partielles de McKendrick (3.1) avec $a \geq 0, t \geq 0$. Supposons que $\mu(a) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+) \cap C^0(\mathbb{R}_+)$ est une fonction positive et $\beta_1(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ est positive. Alors la solution de l'équation de la fonction de renouvellement

(3.12) est

$$\begin{aligned}
B(t) &= \phi(m\alpha - t) \prod_{i=1}^m \beta_1(t - (i-1)\alpha) \\
&\quad \times \exp\left(-\int_0^{t-(m-1)\alpha} \mu(s + m\alpha - t) ds\right) \\
&\quad \times \exp\left(-(m-1) \int_0^\alpha \mu(s) ds\right)
\end{aligned}$$

où $\alpha > 0$, $m = [t/\alpha + 1]$, et $[x]$ signifie la partie entière de x .

Dans le cas particulier où $\beta_1(t)$ est une constante, $\beta_1(t) \equiv \beta_1$, nous avons, dans le Théorème 3.1 et le Corollaire 3.1, $\beta_1(t-a)\dots\beta_1(t-a-(m-1)\alpha) = \beta_1^m$. Si, $\mu(a) \equiv \mu > 0$ et $\beta_1(t) \equiv \beta_1 > 0$ sont des fonctions constantes, la solution de l'équation de McKendrick est,

$$p(a, t) = \begin{cases} \phi(a-t)e^{-\mu t} & (t < a) \\ \beta_1^m \phi(m\alpha + a - t)e^{-\mu t} & (t \geq a) \end{cases}$$

où $m = [(t-a)/\alpha + 1]$. Pour le même cas, la solution de l'équation de renouvellement (3.12) est,

$$B(t) = \beta_1^s \phi(s\alpha - t)e^{-\mu t}$$

où $s = [t/\alpha + 1]$.

Pour analyser le comportement asymptotique dans le temps de la solution de l'équation de McKendrick avec la fonction de fertilité indépendante du temps, nous définissons la fonction $\varepsilon(a, t)$ par,

$$\varepsilon(a, t) = (t-a)/\alpha + 1 - m = (t-a)/\alpha + 1 - [(t-a)/\alpha + 1] \quad (3.17)$$

où $[(t-a)/\alpha + 1] = m$, et $m \geq 1$ est un entier. Pour a fixé et avec $t-a \geq 0$, la fonction $\varepsilon(a, t)$ prend des valeurs dans $[0, 1)$, elle est linéaire par morceaux et elle est périodique dans le temps avec la période $\tau = \alpha$. Alors, nous avons :

Théorème 3.2. [34] *Supposons que $\phi(a)$ est positive et bornée dans l'intervalle $(0, \alpha]$ et la fonction fertilité β_1 est une constante positive. Alors, dans les conditions du Théorème 3.1, nous avons :*

- a) Si, $\ln \beta_1 = \int_0^\alpha \mu(s)ds$, alors, pour a fixé et $t \geq a$, $p(a, t)$ est périodique dans le temps avec la période $\tau = \alpha$.
- b) Si, $\ln \beta_1 > \int_0^\alpha \mu(s)ds$, alors, pour a fixé et $t \geq a$, $p(a, t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$.
- c) Si, $\ln \beta_1 < \int_0^\alpha \mu(s)ds$, alors, pour a fixé et $t \geq a$, $p(a, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. De plus, pour a fixé, le comportement asymptotique dans le temps de $p(a, t)$ dépend de la condition initiale $\phi(a)$ avec a appartenant à l'intervalle $(0, \alpha]$.

Preuve : Par (3.17), avec $a_0 = m\alpha + a - t$,

$$\begin{aligned}
& \beta_1^m \exp \left(- \int_0^{t-a-(m-1)\alpha} \mu(s + a_0)ds - (m-1) \int_0^\alpha \mu(s)ds \right) \\
& \times \exp \left(- \int_0^a \mu(s)ds \right) \\
& = \exp \left(m(\ln \beta_1 - \int_0^\alpha \mu(s)ds) \right) \exp \left(- \int_0^a \mu(s)ds \right) \\
& \times \exp \left(- \int_0^{\alpha\varepsilon(a,t)} \mu(s + \alpha - \alpha\varepsilon(a,t))ds + \int_0^\alpha \mu(s)ds \right) \\
& := \exp \left(m(\ln \beta_1 - \int_0^\alpha \mu(s)ds) \right) \exp \left(- \int_0^a \mu(s)ds \right) \chi(a, t)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\chi(a, t) & = \exp \left(- \int_0^{\alpha\varepsilon(a,t)} \mu(s + \alpha - \alpha\varepsilon(a,t))ds \right) \\
& = \exp \left(- \int_{\alpha - \alpha\varepsilon(a,t)}^\alpha \mu(s)ds \right).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

En raison de la périodicité de $\varepsilon(a, t)$ dans t , pour a fixé et $t \geq a$, $\chi(a, t)$ est aussi périodique en t , et nous pouvons écrire la solution b) du Théorème 3.1 sous la forme,

$$\begin{aligned}
p(a, t) & = \phi(\alpha - \alpha\varepsilon(a, t))\chi(a, t) \\
& \times \exp \left(m(\ln \beta_1 - \int_0^\alpha \mu(s)ds) \right) \exp \left(- \int_0^a \mu(s)ds \right).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Cependant, si $\ln \beta_1 - \int_0^\alpha \mu(s)ds = 0$ et $t \geq a$, la solution de l'équation différentielle partielle de McKendrick devient oscillatoire dans le temps. Si, $\ln \beta_1 > \int_0^\alpha \mu(s)ds$,

alors, dans la limite $t \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$, la densité de la population tend vers ∞ . Si, $\ln \beta_1 < \int_0^\alpha \mu(s)ds$, alors, quand $t \rightarrow \infty$, la densité de la population tend vers 0. Par (3.19), la distribution asymptotique de la population dépend de $\phi(a)$ avec $a \in (0, \alpha]$.

Si nous fixons une valeur arbitraire large de a , et si $\ln \beta_1 > \int_0^\alpha \mu(s)ds$, alors, $p(a, t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$, ce qui implique que asymptotiquement il n'y a pas de limite dans l'espérance de la vie.

En raison de la périodicité dans le temps de $\varepsilon(a, t)$, les fonctions $\chi(a, t)$ et $\phi(\alpha - \alpha\varepsilon(a, t))$ sont périodiques dans le temps avec la période $\tau = \alpha$, l'âge de l'unique classe d'âge reproductrice.

Définissant le taux de croissance de Lotka d'une population comme $R = p(a, t + \alpha)/p(a, t)$, par le Théorème 3.1 et comme $[(t + \alpha - a)/\alpha + 1] = m + 1$, le taux de croissance de Lotka associé à l'équation de McKendrick est constant et il est donné par

$$R = \frac{p(a, t + \alpha)}{p(a, t)} = \exp\left(\ln \beta_1 - \int_0^\alpha \mu(s)ds\right) = \beta_1 \exp\left(-\int_0^\alpha \mu(s)ds\right) \quad (3.20)$$

qui coïncide avec (3.11) pour le choix $\beta(a) = \beta_1 \delta(a - \alpha)$.

Le taux de croissance de Lotka (3.20) a une simple interprétation. Par le Théorème 3.1 et 3.20, pour $t \geq a$, nous avons $p(a, t + s\alpha) = p(a, t)R^s$, où s est un entier. Avec $t = \alpha$ et $\alpha + s\alpha = \tau$, nous obtenons, $p(a, \tau) = p(a, \alpha)R^{(\tau-\alpha)/\alpha}$. Définissant la fonction densité de croissance Malthusienne comme $p_M(a, t) = p(a, \alpha)R^{(t-\alpha)/\alpha}$, et intégrant $p_M(a, t)$ en a , la population totale varie dans le temps selon

$$P_M(t) = P(\alpha)R^{(t-\alpha)/\alpha} \quad (3.21)$$

qui est la fonction de croissance Malthusienne associée à l'équation de McKendrick. Par conséquent, dans un pas de temps d'observation égale à l'âge de la seule classe d'âge reproductrice, les solutions de l'équation de McKendrick croissent exponentiellement dans le temps, avec le taux de croissance de Lotka (3.20).

La différence qualitative entre le comportement asymptotique des solutions de l'équation de McKendrick et la croissance exponentielle simple de Malthus, sans structure d'âge est associée à l'existence d'une modélisation périodique dans la croissance

des populations. Cette modélisation périodique de période α correspond aux cycles démographiques observés dans des populations réelles.

La condition de stabilité pour la persistance des solutions non nulles comme indiqué dans le Théorème 3.2 est déterminé par le taux de croissance R :

- Si $R = 1$, on a la stabilité ou périodicité des solutions.
- Si $R > 1$, croissance exponentielle de la population.
- Si $R < 1$, extinction de la population, à condition que $\phi(a)$ ne soit pas identiquement nulle dans $(0, \alpha]$.

Dans la Figure 3.2, nous décrivons l'évolution dans le temps et l'âge de la densité $p(a, t)$ de la population à partir de la distribution de l'âge initiale uniforme avec une classe d'âge maximale, et un taux de croissance de Lotka $R = 1$. Nous avons choisis le module de mortalité dépendant de l'âge $\mu(a) = \mu_0 + \mu_1 a$ et comme condition initiale, la fonction densité à support compact, $\phi(a) = 2$, pour $a \leq 100$, et $\phi(a) = 0$, pour $a > 100$. Par (3.3), ce qui correspond à une population initiale $P(0) = 200$. La constante de natalité β_1 a été choisie de telle façon que $R = 1$. Après le temps transitoire α , et pour un âge fixé, la densité de population devient périodique dans le temps avec une période $\tau = \alpha$. Dans la Figure 3.2 a), la diminution de l'amplitude des oscillations avec l'augmentation de $\mu(a)$ est en accord avec (3.14).

Dans la Figure 3.3, nous montrons que la population totale P est une fonction du temps calculée à partir de (3.3) et du Théorème 3.1. Dans la Figure 3.3 a), le taux de croissance de Lotka est $R = 1$. Dans la Figure 3.3 b), $\beta_1 > \exp(\int_0^\alpha \mu(s) ds)$ et le taux de croissance de Lotka est $R = 1.09$. Dans les deux cas, on compare la solution $P(t)$ calculée à partir du Théorème 3.1 et la courbe de croissance Malthusienne (3.21).

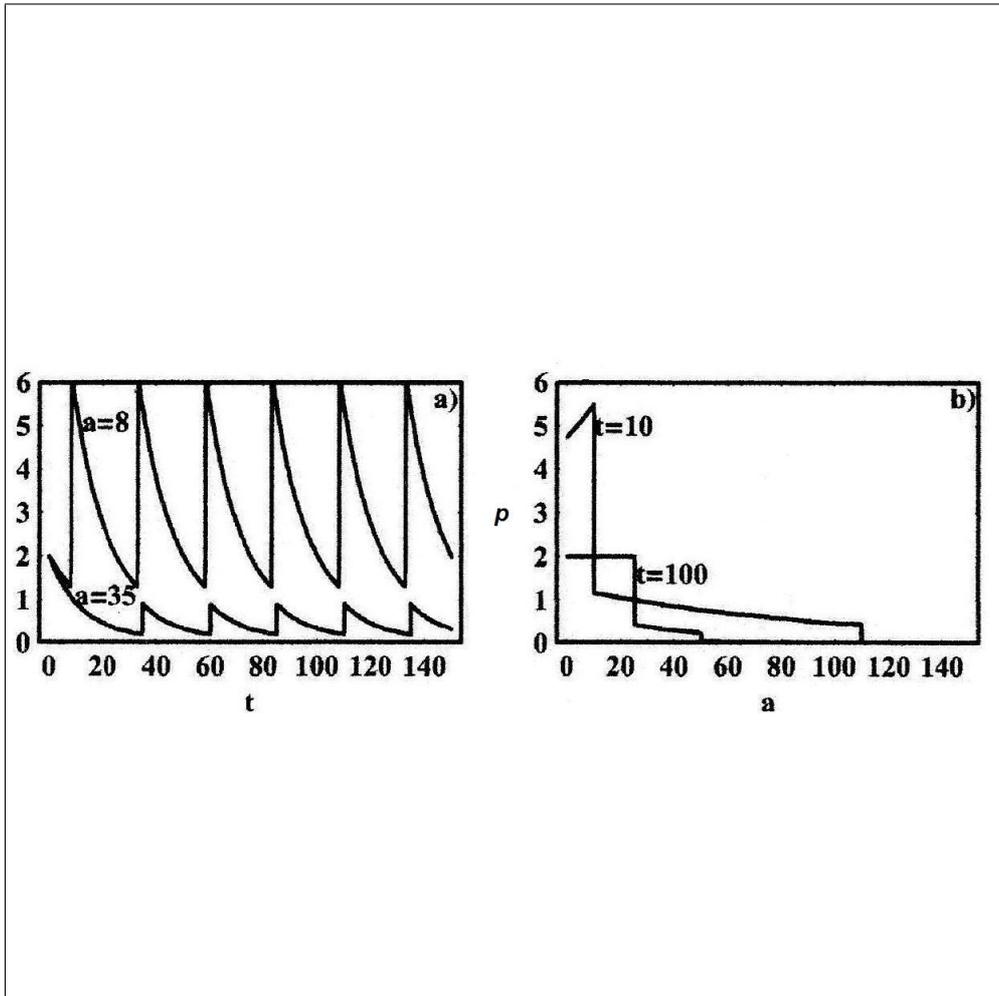


FIGURE 3.2 – [34]

Figure 3.2 :

- (a) Evolution dans le temps de la solution de l'équation de McKendrick (3.1) pour les classes d'âge $a = 8$ et $a = 35$, dans une population avec une classe d'âge reproductive $\alpha = 25$. Le module de mortalité est $\mu(a) = 0.05 + 0.001a$ et $\beta_1 = 4.77$.
- (b) Distribution de la densité des individus en fonction de l'âge pour $t = 10$ et $t = 100$. Dans les deux cas, nous avons la condition de stabilité $\beta_1 = e^{\mu\alpha}$, ce qui implique que le taux de croissance de Lotka est $R = 1$. Toutes les solutions ont été calculées d'après le Théorème 3.1 avec les conditions initiales des données $\phi(a) = 2$ pour $a \leq 100$ et $\phi(a) = 0$, pour $a > 100$.

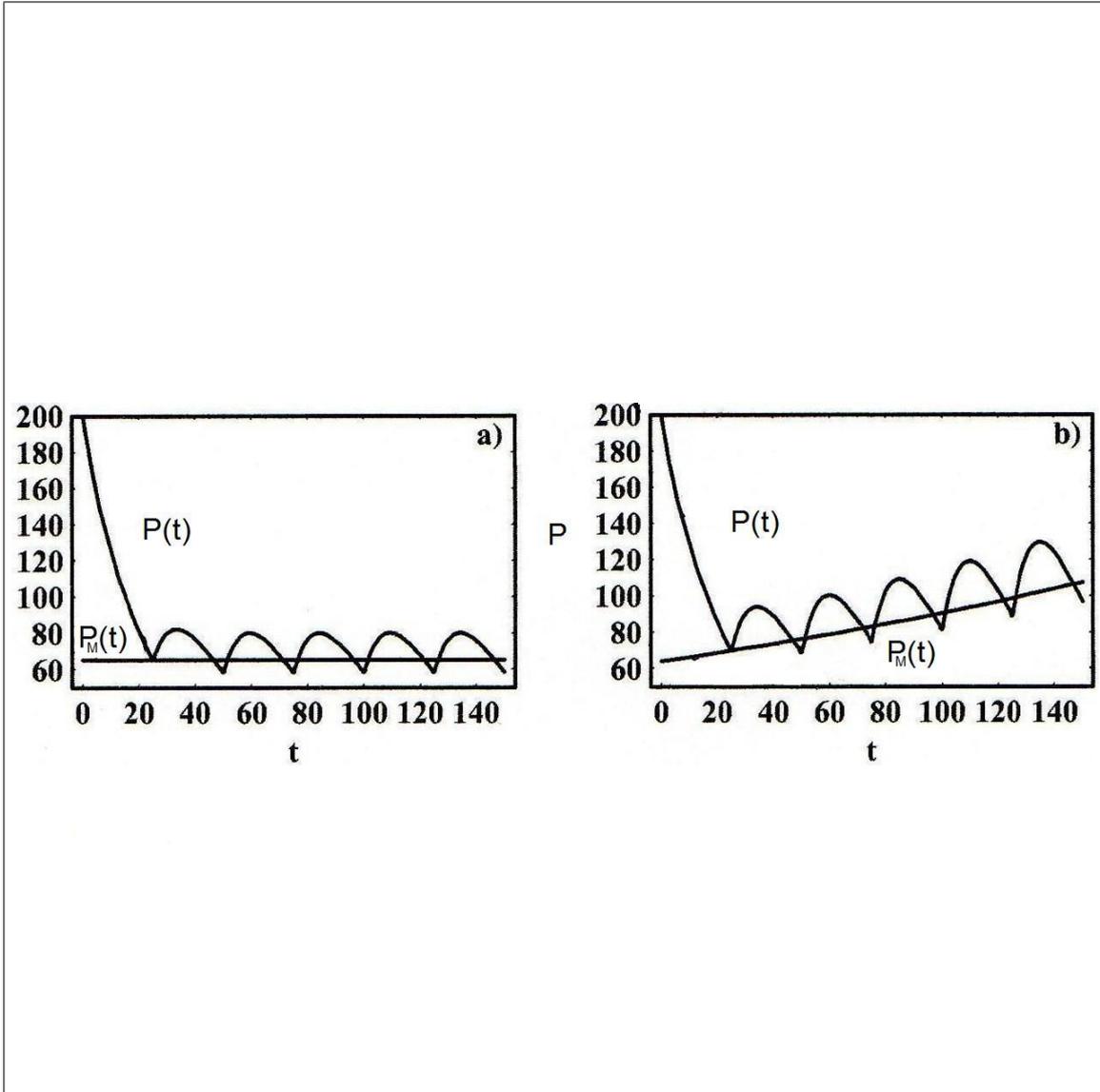


FIGURE 3.3 – [34]

Figure 3.3 : Le nombre totale de la population P en fonction du temps est calculé d'après le Théorème 3.1 et 3.3. L'âge de la seule classe d'âge de reproduction est $\alpha = 25$ et les conditions initiales sont comme dans la Figure 3.2.

En a) $\ln \beta_1 = \int_0^\alpha \mu(s) ds = 4.77$, où $\mu(a) = 0.05 + 0.001a$, $\beta_1 = 4.77$ et le taux de croissance de Lotka ou la condition de stabilité est $R = 1$.

En b) $\beta_1 = 5.2$, le taux de croissance de Lotka est $R = 1.09$ et le nombre d'individus

de la population tend vers l'infini.

Nous avons aussi représenté la fonction de croissance Malthusienne (3.21), $P_M(t)$ est mesurée dans l'échelle de temps de la seule classe d'âge de reproduction. Dans tous les cas et après un de temps de transition, la courbe de croissance de la population est modulée par une fonction périodique, de période $\tau = \alpha$. Si la fonction de fertilité β_1 considérée dans le Théorème 3.2 dépend du temps, en général, la stabilité ne peut être décidée en temps fini. Cela fait suite à une analyse similaire à celle de la preuve du Théorème 3.2.

La conclusion principale a propos des solutions de l'équation de McKendrick pour la condition aux limites (3.13) avec $\beta_1(t) \equiv \beta_1$ est que le modèle de croissance d'une population est modulé par une fonction périodique avec une période égale à l'âge de la seule classe d'âge de reproduction. La forme de la modulation périodique dépend de la distribution par âge initiale de la population, et l'amplitude dépend du module de mortalité. Dans les intervalles de temps de l'ordre de la première classe de reproduction, la croissance est Malthusienne. La croissance Malthusienne pure est obtenue si le module de mortalité s'approche de zéro et la population a une distribution par âge initiale uniforme.

3.3 Populations avec plusieurs classes d'âge fertile

Nous considérons maintenant que les âges fertiles des individus d'une population sont distribués dans un certain intervalle $[\alpha, \sigma]$ avec $0 < \alpha < \sigma < \infty$. La condition aux limites est,

$$p(0, t) = \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(a, t)p(a, t)da. \quad (3.22)$$

Les constantes α et σ représentent respectivement, les âges de la première et de la dernière classe d'âge reproductive.

Comme dans (3.7), si $t < a$, la solution de l'équation de McKendrick (3.1) est donnée par,

$$p(a, t) = \phi(a - t)e^{-\int_0^t \mu(s + a - t)ds} \quad (3.23)$$

où $\phi(a) = p(a, 0)$ est la distribution d'âge initiale de la population.

La solution générale de l'équation de McKendrick dans tout le domaine des variables indépendantes est obtenue de la manière suivante.

Théorème 3.3. [34] Soit $p(a, 0) = \phi(a) (\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+))$ une condition initiale localement intégrable pour l'équation aux dérivées partielles de McKendrick (3.1), avec $a \geq 0, t \geq 0$ et la condition aux limites (3.22). Supposons que $\mu(a) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+) \cap C^0(\mathbb{R}_+)$ est une fonction positive, et que pour tout $t \geq 0, \beta(a, t)$ est localement intégrable et différentiable. Alors, dans la bande $S = \{(a, t) : a \geq 0, 0 \leq t \leq \alpha\}$, la solution faible de l'équation de McKendrick (3.1) avec la donnée initiale $\phi(a)$ et la condition aux limites (3.22) est :

$$p_S(a, t) = \begin{cases} \phi(a-t)e^{-\int_{a-t}^a \mu(s)ds}, & \text{si } t < a \\ \Pi(a) \int_{\alpha}^{\sigma} \bar{\beta}(c, t-a) \bar{\phi}(c-t+a) dc, & \text{si } t \geq a \text{ et } t \leq \alpha \end{cases} \quad (3.24)$$

où,

$$\begin{aligned} \Pi(a) &= e^{-\int_0^a \mu(s)ds} \\ \bar{\beta}(a, t) &= \beta(a, t) \Pi(a) \\ \bar{\phi}(a) &= \phi(a) e^{\int_0^a \mu(s)ds} \end{aligned}$$

et la fonction $p_S(a, t)$ comme dans (3.24) est localement intégrable ($p_S(a, t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$).
Ecrivons $p_S(a, t)$ comme $p_S(a, t; \phi)$ et définissons les fonctions,

$$\phi_{i+1}(a) = p_S(a, \alpha; \phi_i)$$

où $i \geq 0$ et $\phi_0(a) = \phi(a)$, nous pouvons construire de manière récurrente la solution générale de l'équation de McKendrick comme $p(a, t) = p_S(a, t - i\alpha; \phi_{i+1})$, où $i = [t/\alpha]$, et $[t/\alpha]$ est la partie entière de (t/α) .

Preuve : Pour construire la solution de l'équation de McKendrick dans la bande S , le cas $(a = 0, t = 0)$ découle de la condition aux limites (3.22). Le cas où $t < a$ et $t > 0$ a été prouvé dans (3.23). Nous allons maintenant construire la solution pour $(a, t) \in \bar{T}_1$,

Figure 1, qui implique que $a \geq 0, t \geq a$ et $t < a + \alpha$. Soit (a^*, t^*) le point telle que, $t^* > a^*$ et $t^* < a^* + \alpha$. Par (3.6), la ligne caractéristique qui passe par (a^*, t^*) traverse la ligne $a = 0$ a un certain temps $t = t_1^*$, et $p(a^*, t^*) = p(0, t_1^*)e^{-\int_{t_1^*}^{t^*} \mu(s - t_1^*) ds}$ où $t_1^* = t^* - a^*$. Imposant la condition aux limites (3.22) sur cette solution, nous obtenons

$$p(a^*, t^*) = e^{-\int_{t_1^*}^{t^*} \mu(s - t_1^*) ds} \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(a, t_1^*) p(a, t_1^*) da.$$

Par hypothèse, comme $t_1^* = t^* - a^* < \alpha$, nous sommes dans les conditions de la solution (3.23), et nous avons,

$$\begin{aligned} p(a^*, t^*) &= e^{-\int_{t_1^*}^{t^*} \mu(s - t_1^*) ds} \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(a, t_1^*) p(a, t_1^*) da \\ &= \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(a, t_1^*) \phi(a - t_1^*) e^{-\int_0^{t_1^*} \mu(s + a - t_1^*) ds - \int_{t_1^*}^{t^*} \mu(s - t_1^*) ds} da. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons montré que, pour $t \geq a, t < a + \alpha$, et pour $(a, t) \in \bar{T}_1$,

$$\begin{aligned} p(a, t) &= \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(c, t - a) \phi(c - t + a) e^{-\int_0^{t-a} \mu(s + c - t + a) ds - \int_{t-a}^t \mu(s - t + a) ds} dc \\ &= \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(c, t - a) \phi(c - t + a) e^{-\int_{c-t+a}^c \mu(s) ds - \int_0^a \mu(s) ds} dc \\ &= e^{-\int_0^a \mu(s) ds} \int_{\alpha}^{\sigma} \bar{\beta}(c, t - a) \phi(c - t + a) e^{\int_0^{c-t+a} \mu(s) ds} dc \end{aligned} \tag{3.25}$$

où

$$\bar{\beta}(c, t - a) = \beta(c, t - a) e^{-\int_0^c \mu(s) ds}.$$

Pour $a = 0$ et $t = \alpha$

$$p(0, \alpha) = \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(c, \alpha) p(c, \alpha) dc. \tag{3.26}$$

Comme, pour $c > \alpha$, $p(c, \alpha) \in \bar{T}_0$, nous introduisons (3.23) dans (3.26), et nous obtenons (3.24). Par conséquent, nous avons construit la solution de l'équation de McKendrick dans la bande S .

Comme $\phi(a)$ est localement intégrable, les intégrales dans (3.24) sont bornées pour $t \leq \alpha$ et $\phi_1(a) = p_S(a, \alpha; \phi) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. A fin de construire la solution de l'équation de McKendrick pour tout $t > \alpha$, nous procédons par induction et nous prenons à chaque étape la nouvelle condition initiale $\phi_{i+1}(a) = p_S(a, \alpha; \phi_i)$ avec $i \geq 0$. Ceci justifie la formule $p(a, t) = p_S(a, t - i\alpha; \phi_m)$, où $i = [t/\alpha]$.

Nous introduisons maintenant une technique de simplification. Définissons la nouvelle fonction $q(a, t)$ à travers,

$$p(a, t) = e^{-\int_0^a \mu(s) ds} q(a, t)$$

et introduisons la dans l'équation de McKendrick (3.1), nous obtenons

$$\frac{\partial q(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(a, t)}{\partial a} = 0. \quad (3.27)$$

Supposons que la condition aux limites pour l'équation de McKendrick (3.27) est

$$q(0, t) = \int_{\alpha}^{\sigma} \bar{\beta}(a, t) q(a, t)$$

avec $\bar{\beta}(a, t) = \beta(a, t) e^{-\int_0^a \mu(s) ds}$, et la condition initiale est,

$$\psi(a) = e^{\int_0^a \mu(s) ds} \phi(a)$$

le problème de Cauchy pour l'équation de McKendrick (3.1) est simplement transformé en problème de Cauchy pour l'équation (3.27).

Par hypothèse, pour tout t , $\bar{\beta}(a, t)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[\alpha, \sigma]$. Comme, en général, la constante σ n'est pas un multiple entier de α , pour tout t , nous pouvons prolonger la fonction $\bar{\beta}(a, t)$ comme une fonction zéro dans l'intervalle $[\sigma, \sigma']$, où $\sigma' = q\alpha$, $q \geq 2$ est un entier, et $(q-1)\alpha < \sigma$. Ainsi, sans perte de généralité, nous supposons que $\sigma = q\alpha$, où $q \geq 2$ est un entier. Dans la suite, et pour simplifier la notation, nous prenons cette approche.

Théorème 3.4. [34] Soit $p(a, 0) = \phi(a) (\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+))$ une condition initiale localement intégrable pour l'équation aux dérivées partielles de McKendrick (3.1), avec $a \geq 0, t \geq 0$ et la condition aux limites (3.22). Supposons que $\mu(a) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+) \cap C^0(\mathbb{R}_+)$ est une fonction positive. Supposons également que, pour tout $t \geq 0, \beta(a, t)$ est localement intégrable et différentiable et à support compact dans l'intervalle $[\alpha, \sigma]$, où $\alpha < \sigma, \sigma = q\alpha$, et $q \geq 2$ est un entier. Définissons l'entier $m = [t/\alpha + 1]$. Alors, la solution générale de l'équation intégrale de renouvellement de Lotka est déterminé de façon récurrente et donné par :

a) Si, $0 \leq t \leq \alpha$,

$$B_1(t) = \int_{\alpha}^{\sigma} \bar{\beta}(c_1, t) \bar{\phi}(c_1 - t) dc_1 \quad (3.28)$$

où $B_1(t) = B(t)$, pour $0 \leq t \leq \alpha$.

b) Si, $\alpha \leq t \leq 2\alpha$,

$$\begin{aligned} B_2(t) &= \int_{\alpha}^t \bar{\beta}(c_2, t) B_1(t - c_2) dc_2 + \int_t^{\sigma} \bar{\beta}(c_2, t) \bar{\phi}(c_2 - t) dc_2 \\ &= \int_{\alpha}^t \bar{\beta}(c_2, t) \int_{\alpha}^{\sigma} \bar{\beta}(c_1, t - c_2) \bar{\phi}(c_1 + c_2 - t) dc_1 dc_2 \\ &+ \int_t^{\sigma} \bar{\beta}(c_2, t) \bar{\phi}(c_2 - t) dc_2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

c) Si, $m\alpha \leq t \leq (m+1)\alpha$, avec $m > 2$ et $q \geq m+1$,

$$\begin{aligned} B_m(t) &= \int_{\alpha}^{t-(m-2)\alpha} \bar{\beta}(c_m, t) B_{m-1}(t - c_m) dc_m \\ &+ \sum_{i=2}^{m-1} \int_{t-(m-i)\alpha}^{t-(m-i)\alpha+\alpha} \bar{\beta}(c_m, t) B_{m-i}(t - c_m) dc_m \\ &+ \int_t^{\sigma} \bar{\beta}(c_m, t) \bar{\phi}(c_m - t) dc_m. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Par ailleurs, $B(t)$ est continue, et $p(a, t)$ est aussi continue pour $t \geq \sigma$ et $a \in [0, \sigma]$. Pour $t \geq a$, la solution générale de l'équation de McKendrick est

$$p(a, t) = \Pi(a) B(t - a) \quad (3.31)$$

où $\Pi(a), \bar{\beta}$ et $\bar{\phi}$ sont définis comme dans le Théorème (3.3).

Preuve : Comme nous l'avons vu dans la discussion précédente du Théorème, il suffit de démontrer le Théorème pour $\mu(a) = 0$. D'après le Théorème (3.3), pour $m = 1$ et

$t \leq \alpha$, nous avons,

$$B(t) := B_1(t) = \int_{\alpha}^{\sigma} \bar{\beta}(c_1, t) \phi(c_1 - t) dc_1. \quad (3.32)$$

Pour $\mu \neq 0$, nous appliquons la substitution $\phi \rightarrow \bar{\phi}$, comme vu précédemment, et nous obtenons a).

Nous considérons maintenant le cas $\alpha \leq t \leq 2\alpha$. Alors,

$$\begin{aligned} B_2(t) &= \int_{\alpha}^t \bar{\beta}(c_2, t) p(c_2, t) dc_2 + \int_t^{\sigma} \bar{\beta}(c_2, t) \phi(c_2 - t) dc_2 \\ &= \int_{\alpha}^t \bar{\beta}(c_2, t) p(0, t - c_2) dc_2 + \int_t^{\sigma} \bar{\beta}(c_2, t) \phi(c_2 - t) dc_2 \\ &= \int_{\alpha}^t \bar{\beta}(c_2, t) B_1(t - c_2) dc_2 + \int_t^{\sigma} \bar{\beta}(c_2, t) \phi(c_2 - t) dc_2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

où $B(t) = B_2(t)$ pour $\alpha \leq t \leq 2\alpha$. remplaçons (3.32) dans (3.33), et avec $\phi \rightarrow \bar{\phi}$, nous obtenons b).

Avec $m = [t/\alpha + 1] \geq 2$, et en supposant que $\sigma \geq (m + 1)\alpha$, en raison de la forme particulière des courbes caractéristiques dans la Figure1, nous obtenons,

$$\begin{aligned} B_m(t) &= \int_{\alpha}^{t-(m-2)\alpha} \bar{\beta}(c_m, t) B_{m-1}(t - c_m) dc_m \\ &+ \sum_{i=2}^{m-1} \int_{t-(m-i)\alpha}^{t-(m-i)\alpha+\alpha} \bar{\beta}(c_m, t) B_{m-i}(t - c_m) dc_m \\ &+ \int_t^{\sigma} \bar{\beta}(c_m, t) \phi(c_m - t) dc_m. \end{aligned} \quad (3.34)$$

où $m\alpha \leq t \leq (m + 1)\alpha$, et $m \geq 2$, ce qui prouve c). De toute évidence, $B(t)$ est continue pour $t \in [\alpha, \sigma]$, et $B(t)$ dépend de $\phi(a)$ avec $a \in [0, \sigma]$. Comme $p(a, \sigma) = \Pi(a)B(\sigma - a)$, en raison de la continuité de $B(t)$ dans l'intervalle $[0, t]$, $p(a, \sigma)$ est maintenant continue pour $a \in [0, \sigma]$. Comme $B(t)$ reste continue pour $t > \sigma$, alors $p(a, t)$ est aussi continue pour $t \geq \sigma$ et $a \in [0, \sigma]$.

En définissant, la nouvelle condition initiale $\phi(a) = B(\sigma - a)$, la solution de l'équation de renouvellement est construite de manière récurrente dans les intervalles $[\sigma, 2\sigma], [2\sigma, 3\sigma], \dots$

Pour calculer la solution générale de l'équation de McKendrick, nous utilisons (3.10) et nous obtenons le Théorème.

Théorème (3.3) et (3.4) donnent les solutions générales de l'équation de McKendrick et de renouvellement de Lotka en fonction des données initiales et de la condition aux limites. Le module de fertilité est supposé dépendre du temps et de l'âge et le module de mortalité dépende de l'âge.

En diminuant la dépendance du temps dans la fonction de fertilité β , la stabilité où l'instabilité des solutions de l'équation de renouvellement de Lotka et de l'équation de McKendrick est donnée à partir des Théorèmes précédants. En diminuant la dépendance du temps dans la fonction de fertilité β , la stabilité où l'instabilité des solutions de l'équation de renouvellement de Lotka et de l'équation de McKendrick est donnée à partir des Théorèmes précédants.

Théorème 3.5. [34] *Si la fonction de fertilité est indépendante du temps et dans les conditions du Théorème 3.4, nous avons :*

a) *Si $R = 1$, alors, pour tout $a \in [0, \sigma]$ et $t \geq a$, $p(a, t)$ reste bornée quand $t \rightarrow \infty$.*

b) *Si $R > 1$, alors, pour tout $a \in [0, \sigma]$ et $t \geq a$, $p(a, t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$.*

c) *Si $R < 1$, alors, pour tout $a \in [0, \sigma]$ et $t \geq a$, $p(a, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$,*

où R est le taux de croissance de Lotka de la population, tel que définie dans (3.11). Quand la limite $t \rightarrow \infty$, la solution de l'équation de renouvellement de Lotka se comporte comme $B(t) \simeq R^{t/\sigma}$.

Preuve : D'après le Théorème 3.4, $B(t)$ est continue, et comme $p(a, \sigma) = \Pi(a)B(\sigma - a)$, $p(a, \sigma)$ est continue dans l'intervalle fermé $[0, \sigma]$. Par conséquent, il existe les nombres m et M tels que

$$m \leq p(a, \beta) \leq M. \quad (3.35)$$

D'après le Théorème 3.3, pour $0 \leq t_1 \leq \alpha$, nous avons

$$p(0, t_1 + \sigma) = B(t_1 + \sigma) = \int_{\alpha}^{\sigma} \bar{\beta}(c)p(c - t_1, \sigma)dc.$$

Comme, $c - t_1 \in [0, \sigma]$ pour $c \in [\alpha, \sigma]$ et $0 \leq t_1 \leq \alpha$, D'après (3.35), nous obtenons,

$$mR \leq B(t_1 + \sigma) \leq MR. \quad (3.36)$$

où, par (3.11)

$$R = \int_{\alpha}^{\sigma} \bar{\beta}(c)dc = \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(c)e^{-\int_0^c \mu(s)ds} dc$$

est le taux de croissance de Lotka, et $0 < \alpha < \sigma < \infty$. Calculons maintenant une borne pour $p(a, \alpha + \sigma)$, avec $a \in [0, \sigma]$. Par (3.36), et en considérant le cas $\mu = 0$, en raison de la forme particulière des courbes caractéristiques de la Figure 3.1, nous avons,

$$\begin{aligned} mR &\leq p(a, \alpha + \sigma) \leq M, & \text{si } R < 1 \\ m &\leq p(a, \alpha + \sigma) \leq MR, & \text{si } R > 1. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Alors, par (3.37),

$$B(t_1 + \alpha + \sigma) = \int_{\alpha}^{\sigma} \bar{\beta}(c) p(c - t_1, \alpha + \sigma) dc$$

et

$$\begin{aligned} mR^2 &\leq B(t_1 + \alpha + \sigma) \leq MR, & \text{si } R < 1 \\ mR &\leq B(t_1 + \alpha + \sigma) \leq MR^2, & \text{si } R > 1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

où $0 \leq t_1 \leq \alpha$. En répétant cette procédure jusqu'à $q = \sigma/\alpha$, et comme pour $\mu = 0$, $p(a, 2\sigma) = B(2\sigma - a)$, la borne pour $p(a, 2\sigma)$ avec $a \in [0, \sigma]$ doit vérifier les inégalités (3.36), (3.38), etc., ce qui donne

$$mR \leq p(a, 2\sigma) \leq MR. \quad (3.39)$$

En comparant (3.35) et (3.39), le théorème est donné par induction. Dans la limite asymptotique, la solution de l'équation de renouvellement de Lotka se comporte comme $B(s\sigma) \simeq R^s$, où s est un entier.

Avec $\beta(c) = \beta\delta(a - \alpha)$ dans le Théorème 3.5 nous obtenons Le Théorème 3.1.

Regardons un exemple simple qui montre que pour une fonction de fertilité répartie le long d'un intervalle d'âge, nous avons amorti des cycles de croissance, avec une période égal à l'âge α . Supposons que $\beta(a) = \beta$ est une constante dans l'intervalle $[\alpha, \sigma = 2\alpha]$, le module de mortalité est indépendant de l'âge, et la population initiale est constante dans l'intervalle $(0, \alpha]$. Notons la solution de l'équation de renouvellement par $B_i(t)$ pour $t \in [(i-1)\alpha, i\alpha]$ avec $i \geq 1$. Alors, D'après le Théorème 3.4, nous avons,

$$\begin{aligned} B_1(t) &= \phi e^{-\mu t} \beta \alpha \\ B_2(t) &= \phi e^{-\mu t} \beta (\beta \alpha (t - \alpha) + (2\alpha - t)). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Par (3.32) et (3.10), nous avons,

$$p(a, 2\alpha) = \Pi(a)B(2\alpha - a) = \begin{cases} \phi e^{-\mu 2\alpha} \beta (\beta \alpha (\alpha - a) + a) & \text{si } a \leq \alpha \\ \phi e^{-\mu 2\alpha} \beta \alpha & \text{si } \alpha \leq a \leq 2\alpha. \end{cases} \quad (3.41)$$

Avec les conditions initiales $\phi(a) = p(a, 2\alpha)$, d'après le Théorème 3.4 a) et b), nous obtenons,

$$\begin{aligned} B_3(t) &= \phi e^{-\mu t} \beta^2 (\alpha^2 + \frac{1}{2}(t - 2\alpha)^2 (\beta \alpha - 1)) \\ B_4(t) &= \phi e^{-\mu t} \beta^2 \frac{1}{6} (\beta t^3 (\beta \alpha - 1) - t^2 (9\beta^2 \alpha^2 - 6\beta \alpha - 3) \\ &\quad + 3t\alpha (9\beta^2 \alpha^2 - \beta \alpha - 8) - 3\alpha^2 (9\beta^2 \alpha^2 + 5\beta \alpha - 16)). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Dans ce cas, nous avons $B(0) = \phi b \alpha$, $B(\alpha) = \phi e^{-\mu \alpha} \beta \alpha$, $B(2\alpha) = \phi e^{-2\mu \alpha} \beta^2 \alpha^2$, $B(3\alpha) = \phi e^{-3\mu \alpha} \beta^2 \alpha^2 (1 + \beta \alpha)/2$ et $B(4\alpha) = \phi e^{-4\mu \alpha} \beta^3 \alpha^3 (5 + \beta \alpha)/6$. Dans la Figure 4, nous montrons le comportement du temps de $B(t)$ pour $\alpha = 10, b = 1, \phi = 1$ et le module de mortalité $\mu = 0.05$. Dans ce cas, le taux de croissance de Lotka est $R = \beta(e^{-\mu \alpha} - e^{-2\mu \alpha})/\mu = 4.77$. De cette exemple, nous concluons qu'il y a deux échelles de temps associées à la croissance de nouveau-nés. La première échelle de temps est en relation au passage des solutions $B_i(t)$ aux solutions $B_{i+1}(t)$. La deuxième échelle de temps est associée au comportement de croissance Malthusian. A partir des valeurs calculées ci-dessus de $B(i\alpha)$, avec $i \geq 0$, nous avons $B(i\alpha) \simeq R^{[i\alpha/\sigma]}$, en accord avec le Théorème 3.5. Dans cette exemple, il existe une modulation amortie dans le comportement de temps asymptotique de période α .

D'après le Théorème 3.3, nous pouvons calculer le modèle discret de Leslie de la dynamique de populations [32] et relier les propriétés de stabilité à la fois des modèles continus et discrets.

3.4 Prédiction à partir des données démographiques

Pour une population avec n classes d'âge correspondant aux âges de reproduction α_i , avec $i = 1, \dots, n$, nous définissons la fonction de fertilité,

$$\beta(a) = \sum_{i=1}^p \beta_i \delta(a - \alpha_i) \quad (3.43)$$

et la condition aux limites pour l'équation de McKendrick est maintenant,

$$p(0, t) = \sum_{i=1}^p \beta_i p(\alpha_i, t). \quad (3.44)$$

Par (3.11), le taux de croissance de la population est,

$$R = \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da = \sum_{i=1}^n \beta_i e^{-\int_0^{\alpha_i} \mu(s) ds} := \sum_{i=1}^n R_i. \quad (3.45)$$

Dans ce cas, le comportement asymptotique de la solution de l'équation de McKendrick est déterminé par le taux de croissance de Lotka de chaque génération.

Grâce à la linéarité de l'équation de McKendrick (3.1) et à la condition aux limites (3.2), la solution générale est maintenant la somme des solutions pour chaque R_i comme dans le Théorème 3.15 pour la fonction de fertilité indépendante du temps. Dans ce cas, chaque solution individuelle aura un modèle de croissance exponentielle, modulé par une fonction périodique de période α_i . Par conséquent, le modèle de croissance d'une population avec plusieurs classes d'âges fertile est presque périodique avec plusieurs périodicités ou fréquences. Si la dispersion de la fertilité autour de la classe d'âge fertile maximale est grande, le modèle de croissance est presque périodique dans le temps. Si en plus, nous considérons les variations en temps de la fonction de fertilité et le module de mortalité, le modèle de croissance peut montrer de fortes variations s'écartant de la croissance périodique ou exponentielle. Cela introduit un degré plus élevé d'imprévisibilité pour le comportement de longue durée de la croissance démographique.

L'un des aspects, les plus importants de ces résultats est que la période des oscillations des cycles de la population est de l'ordre de l'âge d'une génération, comme observé chez la population humaine. Dans le modèle d'Easterlin, la période des cycles est de l'ordre de deux générations, [29].

3.5 Conclusion

Nous avons obtenu les solutions faibles dans le sens des distributions de l'équation de McKendrick et l'équation intégrale de renouvellement de Lotka, nous avons supposé

un module de fertilité dépendent de l'âge et du temps et un module de mortalité dépendent de l'âge .

Si $\mu(a)$ est le taux de mortalité dépendent de l'âge d'une espèce et $\beta(a)$ le module de fertilité dépendent de l'âge, le taux de croissance de Lotka est défini par,

$$R = \int_{\alpha}^{\sigma} \beta(c) e^{-\int_0^c \mu(s) ds} dc \quad (3.46)$$

où α et σ sont la première et la dernière classes d'âge reproductive. Le taux de croissance de Lotka détermine la stabilité des solutions de l'équation de McKendrick, en ce sens que, asymptotiquement en temps, nous avons une croissance exponentielle si $R > 1$ et une extinction si $R < 1$. Si $R = 1$, nous avons une population asymptotiquement stable et la solution d'équilibre est $p(a) = p_0 \exp(-\int_0^a \mu(s) ds)$, où p_0 est une constante.

A partir d'un point de vue des données démographiques (3.46) implique que les nombres de fertilité mesurés par classes d'âge sont donnés par

$$\beta(a) e^{-\int_0^a \mu(s) ds},$$

justifiant partiellement la forme générale non symétrique de la fertilité des courbes dans les populations humaines.

L'une des caractéristiques la plus importante des solutions de l'équation de McKendrick repose sur l'existence d'une échelle de temps naturelle déterminée par l'âge de la première classe d'âge fertile. Dans ce cas, une population initiale constante présentera un comportement cyclique dans des modèles de croissance, la période de ces cycles est égal à l'âge de la première classe d'âge fertile. Ceci contraste avec la prévision d'Easterlin où la période est égal à deux fois la moyenne d'âge d'une génération,[29]. Les observations dans les populations humaines corroborent ce résultat. Ces oscillations sont en général amorties et l'amortissement est proportionnelle à l'importance de la dispersion de la fonction de fertilité autour de la classe d'âge la plus fertile. Ces oscillations démographiques ont été observés dans des populations humaines, et dans la croissance bactérienne dans les cultures par Lots,[39].

D'autre part, il a été démontré que les solutions générales de l'équation de McKendrick et de l'équation intégrale de renouvellement de Lotka conservent la mémoire à partir des données initiales.

Dans le cas limite d'une population avec une seule classe d'âge de reproduction, la modulation de la courbe de croissance est toujours périodique et n'a pas d'amortissement. L'amplitude des oscillations augmente si le module de mortalité diminue, et la limite de la croissance malthusienne pure est obtenue si le module de mortalité tend vers zéro. La population conserve la mémoire à partir des données initiales à travers l'amplitude des oscillations des cycles d'Easterlin.

Il résulte également de cette approche que l'équation de McKendrick est associée à une échelle de temps petite, quand nous la comparons à l'échelle de temps associée à la loi de croissance malthusienne. Ces deux échelles de temps décrivent l'évolution de la population à deux niveaux différents à long terme. En d'autres termes, la loi de croissance malthusienne peut être obtenue à partir de l'équation de McKendrick si la mortalité est nulle, la fertilité est concentrée à un âge, et la population initiale est uniforme le long de la variable d'âge. Désignons par α_0 l'âge de l'unique classe d'âge fertile, la croissance de la population mesurée au pas de temps de α_0 est exponentielle ou malthusienne. C'est la solution asymptotique de l'équation de McKendrick qui se comporte comme,

$$p(a, t = k\alpha_0) = p(a, \alpha_0)R^{(k\alpha_0 - \alpha_0)/\alpha_0} = p(a, \alpha_0)R^{k-1}$$

pour $k = 1, 2, \dots$

Nous avons explicitement obtenus le modèle de Leslie à temps discret de la dynamique des populations à partir des solutions générales de l'équation de McKendrick, permettant un étalonnage direct des solutions de l'équation de McKendrick avec des données démographiques. Nous avons montré que, si la longueur des classes d'âge tend vers zéro, le nombre intrinsèque de reproduction net de la population et le paramètre de croissance du modèle de Leslie, convergent vers le taux de croissance de Lotka.

Chapitre 4

Cas d'un Modèle Epidémiologique

Le présent chapitre est consacré à la modélisation des épidémies avec la structure par âge.

Sans la structure par âge, les modèles de base de la théorie des épidémies suppose que, mis à part, les différences dues à la maladie, la population est homogène ; alors pour la description de l'épidémie, la population est divisée en trois sous-classes principales :

Les individus susceptibles : cette catégorie comprend les individus qui ne sont pas malades et qui peuvent être infectés.

Les individus infectés : elle comprend les individus qui ont la maladie et qui peuvent la transmettre aux autres.

Les individus enlevés : elle est formée par les individus qui ont été infectés et qui sont maintenant immunisés, morts ou isolés.

On note en général par $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ le nombre d'individus qui à l'instant t appartiennent respectivement aux trois classes énumérées ci-dessus, et on retrouve la taille totale de la population $P(t)$ par :

$$S(t) + I(t) + R(t) = P(t)$$

où $P(t)$ est la taille de la population totale.

Un modèle assez général [26] pour la dynamique d'une maladie suppose que

la population est constante, sans tenir compte des taux vitaux, alors le modèle est représenté par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}S(t) = -\lambda(t)S(t) + \delta I(t) + (\beta - \mu)S(t) \\ \frac{d}{dt}I(t) = \lambda(t)S(t) - (\gamma + \delta)I(t) + (\beta - \mu)I(t) \\ \frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t) + (\beta - \mu)R(t) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où $S_0 + I_0 + R_0 = P$ et les paramètres ont la signification suivante :

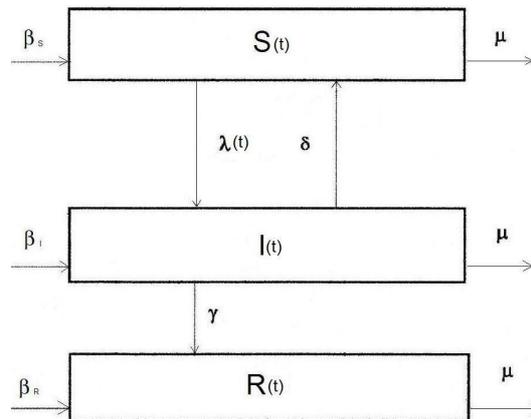


FIGURE 4.1 – Le schéma du Modèle épidémique général [26]

la force d'une infection $\lambda(t)$: c'est la vitesse à laquelle des sujets susceptibles attrapent la maladie et entrent ainsi dans la classe des infectés.

le taux de récupération δ : c'est la vitesse à laquelle les infectés quittent leur classe pour aller à celle des susceptibles.

le taux d'élimination γ : c'est la vitesse à laquelle les infectés quittent leur classe pour aller à celle des enlevés.

En ce qui concerne la force de l'infection $\lambda(t)$, nous devons supposer une certaine loi de comportement qui traduit en une forme mathématique le mécanisme d'infection de la maladie spécifique. La forme constitutive la plus simple de $\lambda(t)$ est :

$$\lambda(t) = c\phi \frac{I(t)}{P} = kI(t) \quad (4.2)$$

où les constantes c et ϕ ont la signification suivante :

$c =$ **taux de contact** = le nombre de contact qu'un seul individu a, par unité de temps, avec d'autres individus de la population.

$\phi =$ **infectiosité** = la probabilité qu'un contact avec un individu infecté transmette la maladie.

Nous notons que dans (4.2) le terme $\frac{I(t)}{P}$ correspond à la probabilité qu'un individu contacté soit infecté. La forme (4.2) repose sur l'hypothèse que la population soit mélangé d'une manière homogène, que toute la population soit active (plutôt, pour certaines maladies, toute ou une partie de la classe enlevée ne participe pas à ce mélange) et que le taux de contact est indépendant de la taille de la population active.

Concernant la nature des maladies, on peut distinguer celles qui peuvent être attrapées à plusieurs reprises (ce sont des maladies qui ne sont pas mortelles et ne communiquent pas l'immunité comme la grippe et la gonorrhée) de celles qui peuvent être attrapées plutôt en une seule fois et conduit au renvoi de la personne infectée aux enlevées (à ce groupe appartiennent, la rougeole, rubéole, les oreillons et d'autres maladies infantiles qui donnent l'immunité, mais également des maladies mortelles comme le VIH une infection récente pour laquelle la classe supprimée correspond aux personnes qui ont développé le SIDA). Dans le premier cas $\gamma = 0$ et le modèle est appelé un modèle S-I-S, parce que le parcours individuel à travers la maladie est représenté par le schéma de la Figure 4.2, dans l'autre cas $\delta = 0$ et nous avons le modèle S-I-R (voir Figure 4.3).

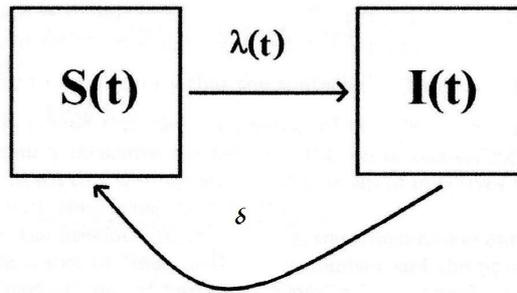


FIGURE 4.2 – Modèle S-I-S [26]

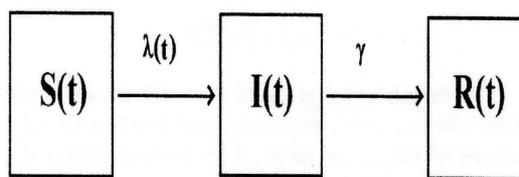


FIGURE 4.3 – Modèle S-I-R [26]

Dans ce chapitre, nous voulons modéliser la propagation d'une épidémie, en prenant soin de la structure par âge de la population. L'importance de considérer l'âge des individus dans un modèle épidémique vient du fait que pour de nombreuses maladies le taux d'infection varie considérablement avec l'âge. En fait si l'on considère les maladies exanthématiques nous voyons que la transmission concerne principalement le plus jeune âge alors que pour les maladies sexuellement transmissibles le principal mécanisme de l'infection implique les individus matures. Ainsi, nous attendons à ce que la dynamique vitale de la population et le mécanisme de l'infection, interagissent pour produire des comportements non triviaux.

Dans les paragraphes suivants nous allons d'abord étendre le modèle général (4.1), et ensuite nous allons nous concentrer sur quelques cas particuliers qui peuvent être traités mathématiquement par les méthodes des chapitres précédents. En fait nous verrons que les modèles qui se posent dans ce contexte, bien que présentant des caractéristiques différentes, peuvent être traités par les mêmes procédures et méthodes.

4.1 Un modèle général pour les épidémies

Nous considérons une population qui, en l'absence de l'épidémie que nous allons examiner, peut être décrite par le modèle linéaire vu au chapitre II, c'est à dire nous considérons une population qui est isolée, dans un habitat invariant, structurée par âge, avec les taux vitaux $\beta(a)$ et $\mu(a)$ satisfaisant les hypothèses (II.2.14)-(II.2.16).

En raison des épidémies, la population est répartie en trois classes, les sujets susceptibles, infectés et enlevés qui sont décrits par leurs densités d'âge respectives $s(a, t)$, $i(a, t)$, $r(a, t)$ au temps t . Ainsi la densité d'âge $p(a, t)$ de la population dans son ensemble doit satisfaire

$$p(a, t) = s(a, t) + i(a, t) + r(a, t) \quad (4.3)$$

En désignant par $\gamma(a)$, $\delta(a)$, $\lambda(a, t)$ le taux d'enlèvement, le taux de traitement et le taux d'infection d'âge spécifique respectivement, nous avons les équations suivantes

qui décrivent la dynamique de transmission de la maladie

$$\begin{cases} s_t(a, t) + s_a(a, t) + \mu(a)s(a, t) = -\lambda(a, t)s(a, t) + \delta(a)i(a, t) \\ i_t(a, t) + i_a(a, t) + \mu(a)i(a, t) = \lambda(a, t)s(a, t) - (\gamma(a) + \delta(a))i(a, t) \\ r_t(a, t) + r_a(a, t) + \mu(a)r(a, t) = \gamma(a)i(a, t) \\ s(0, t) = b_1(t), i(0, t) = b_2(t), r(0, t) = b_3(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

En fait, chaque classe subit la même évolution démographique déterminé par les taux vitaux $\beta(a)$ et $\mu(a)$, tandis que le passage d'une classe à une autre est contrôlé par les taux $\gamma(a), \delta(a), \lambda(a, t)$ (voir Figure 4.4).

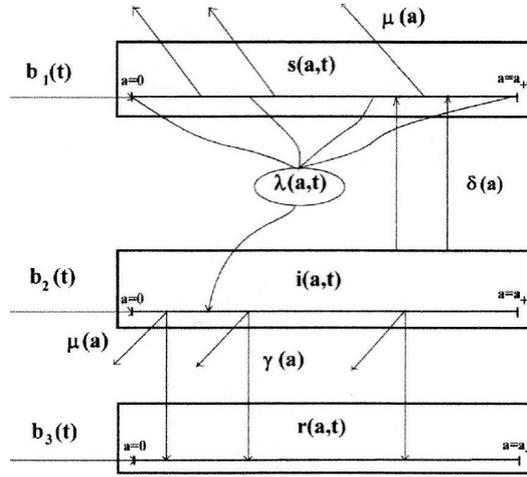


FIGURE 4.4 – Le schéma du Modèle épidémique général structuré en âge [26]

Avec le système (4.4), nous devons considérer les conditions initiales

$$s(a, 0) = s_0(a), i(a, 0) = i_0(a), r(a, 0) = r_0(a) \quad (4.5)$$

et les équations constitutives pour les taux de natalité $b_1(t), b_2(t), b_3(t)$. En ce que concerne ces derniers, nous supposons

$$\begin{cases} b_1(t) = \int_0^{a_M} \beta(a)[s(a, t) + (1 - q)i(a, t) + (1 - w)r(a, t)]da \\ b_2(t) = q \int_0^{a_M} \beta(a)i(a, t)da \\ b_3(t) = w \int_0^{a_M} \beta(a)r(a, t)da \end{cases} \quad (4.6)$$

où $q \in [0, 1]$, $w \in [0, 1]$ sont les paramètres de transmission verticale de l'infectiosité et de l'immunité respectivement. Ces paramètres indiquent la proportion des nouveaux-nés qui sont nés dans la classe de leurs parents, ainsi si $q = w = 0$ tous les nouveaux-nés sont susceptibles.

Dans ce modèle, nous supposons que la fertilité intrinsèque $\beta(a)$ et la mortalité intrinsèque $\mu(a)$ ne sont pas (significativement) touchées par la maladie, donc nous prévoyons que la population totale (4.3) subit le même processus démographique du modèle du chapitre II. En fait, si nous additionnons les équations de (4.4), nous obtenons le problème suivant pour $p(a, t)$

$$\begin{cases} p_t(a, t) + p_a(a, t) + \mu(a)p(a, t) = 0 \\ p(0, t) = \int_0^{a_M} \beta(a)p(a, t)da \\ p(a, 0) = p_0(a) = s_0(a) + i_0(a) + r_0(a) \end{cases} \quad (4.7)$$

En lequel, nous obtenons (II.2.13). A cet egard, nous considérons l'hypothèse suivante sur la démographie de la population

$$R = \int_0^{a_M} \beta(a)\Pi(a)da = 1 \quad (4.8)$$

autrement dit, nous supposons que la population est à croissance nulle ($\alpha^* = 0$) et par conséquent, il existe une solution stationnaire

$$p_\infty(a) = b_0\Pi(a) \quad (4.9)$$

En outre, nous supposons que

$$p(a, t) = p_0(a) = p_\infty(a) \quad (4.10)$$

i.e, nous supposons que la population a atteint la distribution d'équilibre $p_\infty(a)$.

En fin, nous donnons une forme constitutive pour le taux d'infection $\lambda(a, t)$, qui est généralement donnée sous la forme linéaire

$$\lambda(a, t) = K_0(a)i(a, t) + \int_0^{a_M} K(a, a')i(a', t)da' \quad (4.11)$$

où les deux termes du deuxième membre de l'égalité sont appelés le terme intracohorte et le terme intercohorte respectivement. Les cas particuliers suivantes

$$\lambda(a, t) = K_0(a)i(a, t) \quad (4.12)$$

$$\lambda(a, t) = K(a) \int_0^{a_M} i(a, t) da \quad (4.13)$$

correspondent à deux mécanismes extrêmes de la contagion, en fait (4.12) représente la situation dans laquelle les individus peuvent être infectés seulement par ceux de leurs propre âge alors que dans (4.13) ils peuvent être infectés par ceux de n'importe quel âge. En considérant ces formes constitutives, nous supposons

$$K_0(a) \geq 0 \quad p \text{ dans } [0, a_M], \quad K_0(\cdot) \in L^\infty(0, a_M) \quad (4.14)$$

$$K(a) \geq 0 \quad p \text{ dans } [0, a_M], \quad K(\cdot) \in L^\infty(0, a_M) \quad (4.15)$$

Une réduction substantielle du problème se produit lorsque nous considérons le modèle épidémique S-I-S, modélisant la maladie qui ne donne pas l'immunité. En fait, en considérant le problème (4.4)-(4.6) avec $\gamma(a) \equiv 0, r_0(a) \equiv 0$, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} s_t(a, t) + s_a(a, t) + \mu(a)s(a, t) = -\lambda(a, t)s(a, t) + \delta(a)i(a, t) \\ i_t(a, t) + i_a(a, t) + \mu(a)i(a, t) = \lambda(a, t)s(a, t) - \delta(a)i(a, t) \\ s(0, t) = \int_0^{a_M} \beta(a)[s(a, t) + (1 - q)i(a, t)]da, \quad s(a, 0) = s_0(a) \\ i(0, t) = q \int_0^{a_M} \beta(a)i(a, t)da, \quad i(a, 0) = i_0(a) \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Puisque, par (4.10),

$$s(a, t) + i(a, t) = p_\infty(a) \quad (4.17)$$

nous remplaçons $s(a, t) = p_\infty(a) - i(a, t)$ dans la deuxième équation de (4.16), et obtenir le problème suivant, avec la variable simple $i(a, t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_t(a, t) + i_a(a, t) + \mu(a)i(a, t) = \lambda(a, t)[p_\infty(a) - i(a, t)] - \delta(a)i(a, t) \\ i(0, t) = q \int_0^{a_M} \beta(a)i(a, t)da \\ i(a, 0) = i_0(a) \end{array} \right. \quad (4.18)$$

et nous pouvons nous limiter à l'étude de ce système.

Une autre reduction concerne le cas S-I-R qui correspond aux hypothèses $\delta(a) \equiv 0$ et $w = 1$, dans ce cas nous avons le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} s_t(a, t) + s_a(a, t) + \mu(a)s(a, t) = -\lambda(a, t)s(a, t) \\ i_t(a, t) + i_a(a, t) + \mu(a)i(a, t) = \lambda(a, t)s(a, t) - \gamma(a)i(a, t) \\ s(0, t) = \int_0^{a_M} \beta(a)[s(a, t) + (1 - q)i(a, t)]da \\ i(0, t) = q \int_0^{a_M} \beta(a)i(a, t)da \\ s(a, 0) = s_0(a) \\ i(a, 0) = i_0(a) \end{array} \right. \quad (4.19)$$

En fait, nous pouvons ignorer la troisième équation de (4.4) car les deux premières sont suffisantes pour déterminer l'évolution des deux classes des individus susceptibles et infectés, mais, en raison de la présence de la classe des individus enlevés, (4.17) n'est pas vrai et nous ne pouvons pas réduire davantage le système.

Dans les sections suivantes, nous allons démontrer certains résultats pour (4.18) avec les taux d'infection (4.12) et (4.13). Avec les hypothèses (4.14) et (4.15) nous supposons

$$\delta(a) \geq 0 \quad p \text{ dans } [0, a_M], \quad \delta(\cdot) \in L^\infty(0, a_M) \quad (4.20)$$

4.2 Etats endémiques pour le modèle S-I-S

Ici nous considérons le cas S-I-S (4.16) et nous discutons l'existence des états endémiques, c'est à dire les états stationnaires non triviaux du problème.

En premier, nous étudions (4.16), en supposant la forme purement intracohorte de (4.12) du taux d'infection. Avec cette hypothèse (4.16) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} i_t(a, t) + i_a(a, t) + \mu(a)i(a, t) = K_0(a)[p_\infty(a) - i(a, t)]i(a, t) - \delta(a)i(a, t) \\ i(0, t) = q \int_0^{a_M} \beta(a)i(a, t)da \\ i(a, 0) = i_0(a) \end{array} \right. \quad (4.21)$$

et l'état stationnaire $i^*(a)$ doit satisfaire

$$\begin{cases} \frac{d}{da}i^*(a) + \mu(a)i^*(a) = K_0(a)[p_\infty(a) - i^*(a)]i^*(a) - \delta(a)i^*(a) \\ i^*(0) = q \int_0^{a_M} \beta(a)i^*(a)da \end{cases} \quad (4.22)$$

Nous notons d'abord que (4.22) admet la solution triviale $i^*(a) \equiv 0$ et si $q = 0$ (c'est à dire, lorsque la maladie n'est pas verticalement transmise) cette solution est unique. Soit $q > 0$, en posant $i^*(0) = v^* > 0$, nous remarquons que la première équation (4.22) donne

$$i^*(a) = \frac{v^*E(a)}{1 + v^* \int_0^a K_0(\sigma)E(\sigma)d\sigma} \quad (4.23)$$

avec

$$E(a) = e^{-\int_0^a [\mu(\sigma) + \delta(\sigma) - K_0(\sigma)p_\infty(\sigma)]d\sigma} \quad (4.24)$$

Remplaçant (4.23) dans la seconde équation (4.22), nous obtenons l'équation suivante pour v^*

$$1 = q \int_0^{a_M} \frac{\beta(a)E(a)}{1 + v^* \int_0^a K_0(\sigma)E(\sigma)d\sigma} da \quad (4.25)$$

Bien sûr, la résolution de cette équation est équivalente à la résolution (4.22), via la formule (4.23).

Nous notons que le deuxième membre de l'équation (4.25) est une fonction décroissante de v^* , à moins que la condition suivante soit satisfaite

$$\beta(a) \int_0^a K_0(\sigma)d\sigma = 0 \quad p p \text{ pour } a \in [0, a_M] \quad (4.26)$$

Alors nous énonçons le théorème suivant qui donne une condition de seuil pour l'existence des états endémiques

Théorème 4.1. [26] *Soit $q > 0$ et supposons que (4.26) n'est pas vraie, alors (4.22) a une solution non triviale si et seulement si*

$$q \int_0^{a_M} \beta(a)E(a)da > 1 \quad (4.27)$$

et, si une telle solution existe, elle est unique. De plus, si (4.26) est satisfaite, alors le système (4.22), soit il n'a pas de solutions non triviales ou bien nous avons

$$q \int_0^{a_M} \beta(a) e^{-\int_0^a [\mu(\sigma) + \delta(\sigma)] d\sigma} da = 1 \quad (4.28)$$

Dans ce cas, il y a un nombre infini de solutions.

Preuve : supposons que (4.26) n'est pas vrai, alors la fonction

$$\Phi(x) = q \int_0^{a_M} \frac{\beta(a) E(a)}{1 + x \int_0^a K_0(\sigma) E(\sigma) d\sigma} da, \quad x \in [0, +\infty]$$

est strictement décroissante et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) &= q \int_0^{a_0} \beta(a) E(a) da = q \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a [\mu(\sigma) + \delta(\sigma)] d\sigma} da \leq \\ &\leq \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma} < \int_0^{a_M} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma} da = 1 \end{aligned}$$

où

$$a_0 = \sup\{a \setminus K_0 = 0 \text{ p p dans } [0, a]\}$$

Alors, il existe $v^* > 0$ satisfaisant (4.25) si et seulement si $\Phi(0) > 1$, et cette solution est unique. La condition du seuil $\Phi(0) > 1$ est exactement (4.27) et la première partie du théorème est démontrée.

Finalement, si (4.26) est satisfaite alors $\Phi(x)$ est constante, c'est :

$$\Phi(x) = q \int_0^{a_0} \beta(a) E(a) da, \quad x \in [0, +\infty]$$

et l'équation (4.25) a une infinité de solution si et seulement si (4.28) est réalisée.

Nous remarquons que la condition (4.26) signifie que

$$\beta(a) = 0 \text{ p p pour } a < a_0$$

c'est à dire que la partie de fertilité se situe en-dessous de celle de l'infectiosité. De plus, nous notons que (4.28) est satisfaite si et seulement si

$$q = 1, \quad \delta(a) = 0 \text{ p p sur } S = \{a \setminus \beta(a) > 0\}$$

c'est une situation très particulière qui sera prise en considération.

Maintenant, nous considérons le cas purement intercohorte sans la transmission verticale, pour laquelle nous supposons (4.13) et $q = 0$. Alors à partir de (4.16) nous obtenons le problème

$$\begin{cases} i_t(a, t) + i_a(a, t) + \mu(a)i(a, t) = K(a)[p_\infty(a) - i(a, t)]I(t) - \delta(a)i(a, t) \\ I(t) = \int_0^{a_M} i(a, t) da \\ i(0, t) = 0, \quad i(a, 0) = i_0(a) \end{cases} \quad (4.29)$$

et le suivant, concernant les états stationnaires

$$\begin{cases} \frac{d}{da} i^*(a) + \mu(a)i^*(a) = K(a)[p_\infty(a) - i^*(a)]I^* - \delta(a)i^*(a) \\ I^* = \int_0^{a_M} i^*(a) da, \quad i^*(0) = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

De la première équation dans (4.30) et de la condition $i^*(0) = 0$ nous obtenons

$$i^*(a) = I^* \int_0^a H(a, \sigma) e^{-I^* \int_\sigma^a K(s) ds} d\sigma \quad (4.31)$$

avec

$$H(a, \sigma) = K(\sigma) p_\infty(\sigma) e^{-\int_\sigma^a [\mu(s) + \delta(s)] ds} \quad (4.32)$$

Ensuite, plaçons (4.31) dans la deuxième équation de (4.30), nous obtenons l'équation suivante pour I^*

$$1 = \int_0^{a_M} \int_0^a H(a, \sigma) e^{-I^* \int_\sigma^a K(s) ds} d\sigma da \quad (4.33)$$

et nous arrivons au résultat suivant

Théorème 4.2. [26] *Le problème (4.30) a une solution non triviale si et seulement si*

$$\int_0^{a_M} \int_0^a H(a, \sigma) d\sigma da > 1 \quad (4.34)$$

et si une telle solution existe, elle est unique.

Preuve : La preuve est similaire à celle de Théorème 4.1, on note seulement que la fonction

$$\Phi(x) = \int_0^{a_M} \int_0^a H(a, \sigma) e^{-x \int_\sigma^a K(s) ds} d\sigma da$$

est strictement décroissante puisque $K(\sigma) \int_\sigma^a K(s) ds$ ne s'annule pas sur l'ensemble $\{(a, \sigma) | 0 \leq \sigma \leq a \leq a_M\}$.

Dans la section suivante nous allons considérer quelques résultats concernant la stabilité pour le cas intra-cohorte.

4.3 Le comportement asymptotique pour le cas intra-cohorte

Pour étudier le comportement asymptotique du problème (4.21), nous intégrons la première équation de (4.21) le long de la caractéristique $t - a = c$ et nous obtenons ainsi la formule suivante

$$i(a, t) = \begin{cases} \frac{i_0(a-t)E(a)}{E(a-t) + i_0(a-t) \int_0^t K_0(a-\tau)E(a-\tau)d\tau} & \text{si } a \geq t \\ \frac{i(0, t-a)E(a)}{1 + i(0, t-a) \int_0^a K_0(\tau)E(\tau)d\tau} & \text{si } a < t \end{cases} \quad (4.35)$$

où $E(a)$ est défini par (4.24). En effet, en posant $U(s) = i(a_0 + s, t_0 + s)$ avec $s \geq 0$, nous aurons

$$\frac{d}{ds}U(s) = [-\mu(a_0 + s) - \delta(a_0 + s) + K_0(a_0 + s)p_\infty(a_0 + s) - K_0(a_0 + s)U(s)]U(s)$$

de sorte que

$$i(a_0 + s, t_0 + s) = \frac{i_0(a_0, t_0)E(a_0 + s)}{E(a_0) + i(a_0, t_0) \int_0^s K_0(a_0 + \sigma)E(a_0 + \sigma)d\sigma}$$

à partir de laquelle (4.35) est facilement déduit.

La formule (4.35) est le point de départ pour l'analyse du modèle. D'abord nous éliminons le cas $q = 0$ où il n'y a pas de transmission verticale de la maladie. En fait, avec cette condition nous avons $i(0, t) \equiv 0$ et par conséquent

$$i(a, t) = 0 \quad \text{pour } t > a_M \quad (4.36)$$

ainsi, la maladie disparaît.

Ensuite, nous considérons $q > 0$. Pour traiter ce cas, nous remplaçons le problème par une équation intégrale de Volterra en utilisant le taux de natalité infectieux

$$v(t) = i(0, t) \quad (4.37)$$

En fait, remplaçant (4.35) dans la deuxième équation de (4.21), nous obtenons une équation intégrale non linéaire de la forme

$$v(t) = F(t) + \int_0^t G(a, v(t-a)) da \quad (4.38)$$

où (nous prolongeons toutes les fonctions par zéro à l'extérieur de $[0, a_M]$)

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{q\beta(a+t)E(a+t)i_0(a)}{E(a) + i_0(a) \int_0^{a+t} K_0(\tau)E(\tau)d\tau} da \quad t \geq 0 \quad (4.39)$$

$$G(a, z) = \frac{q\beta(a)E(a)z}{1 + z \int_0^a K_0(\tau)E(\tau)d\tau} \quad a \geq 0 \quad z \geq 0 \quad (4.40)$$

Avec ce passage à l'équation intégrale de Volterra, nous démontrons en premier l'existence et l'unicité de la solution du problème. En fait, nous avons

Théorème 4.3. [26] *Soient (4.14), (4.16) sont satisfaites et soit $i_0 \in L_1[0, a_M]$, alors l'équation (4.38) a une solution $v(t)$ unique et continue.*

Preuve : La solution peut être obtenue sous la forme d'un point fixe dans l'espace $C[0, T]$ (pour tout $T > 0$). En fait, l'application $\mathfrak{J} : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ définie comme

$$(\mathfrak{J} v)(t) = F(t) + \int_0^t G(a, v(t-a)) da \quad (4.41)$$

laisse l'ensemble

$$v(\cdot) \in C[0, T]; \quad 0 \leq v(t) \leq |F|_{C[0, T]} e^{q|\beta|_\infty t}$$

inchangé et, en outre, pour v et \tilde{v} appartenant à cet ensemble

$$|\mathfrak{J}^N v - \mathfrak{J}^N \tilde{v}|_{C[0, T]} \leq \frac{C^N T^N}{N!} |v - \tilde{v}|_{C[0, T]}$$

où C est une constante. Ainsi l'existence et l'unicité suivent.

Bien entendu, le théorème précédent fournit l'existence et l'unicité d'une solution au problème (4.21), via les formules (4.35) et (4.37).

Nous notons que, si nous considérons la limite de l'équation (4.38)

$$v(t) = \int_0^{a_M} G(a, v(t-s)) ds \quad (4.42)$$

nous remarquons que leurs solutions constantes $v^* > 0$ doivent satisfaire

$$v^* = \int_0^{a_M} G(a, v^*) da$$

c'est la même équation que (4.25) déjà étudiée.

Nous sommes maintenant en mesure de donner une description complète du comportement asymptotique de $v(t)$. Nous supposons que les hypothèses du Théorème 4.3 sont satisfaites et nous commençons par les résultats suivants

Proposition 4.1. [26] *Nous supposons*

$$\beta(a) > 0 \quad p p \text{ dans } [a_1, a_2] \quad (4.43)$$

et soit i_0 tel que

$$\int_0^{a_M} \beta(a+t) i_0(a) da > 0 \quad \text{pour certain } t \geq 0. \quad (4.44)$$

Alors, la solution de (4.38) est positive.

Preuve : Si (4.44) est vérifiée, alors $F(t)$ et par conséquent $v(t)$ ne sont pas identiquement nulle sur $[0, a_M]$. Supposant que $v(t) > 0$ pour $t \in [\alpha, \beta] \subset [0, a_M]$, alors

pour $t \in [\alpha + a_1, \beta + a_2]$

$$\begin{aligned} v(t) &= F(t) + \int_0^t G(t-s, v(s)) ds \geq \\ &\geq \min_{t \in [\alpha, \beta]} v(t) \int_{0 \vee (t-\beta)}^{t-\alpha} \frac{q\beta(a)E(a)}{1 + v(t-a) \int_0^a K_0(\tau)E(\tau) d\tau} da > 0 \end{aligned}$$

puisque $(a_1, a_2) \cap (0 \vee (t-\beta), t-\alpha) \neq \emptyset$. Ainsi, en itérant cet argument nous obtenons

$$v(t) > 0 \text{ pour } t \in [\alpha + na_1, \beta + na_2]$$

pour tout entier n positif et, puisque

$$\bigcup_n [\alpha + na_1, \beta + na_2] \supset [t_0, +\infty)$$

pour un certain $t_0 > 0$, nous avons $v(t) > 0$ pour $t > t_0$.

Notons que la condition (4.43) signifie que la donnée initiale i_0 a un support qui touche l'espace de fertilité, en se déplaçant vers la droite : si cette condition n'est pas satisfaite alors $F(t)$ est identiquement nulle et par conséquent $v(t)$ s'annule aussi pour $t \geq 0$.

Maintenant nous analysons le comportement de $v(t)$ sous les conditions (4.43), (4.44) : ce comportement dépend de la condition de seuil (4.27). En premier, nous avons

Théorème 4.4. [26] Soient (4.43) et (4.44) sont satisfaites et supposons

$$q \int_0^{a_M} \beta(a)E(a) da \leq 1 \tag{4.45}$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$$

Preuve : Soit $I_n = [na_M, (n+1)a_M]$ pour tout entier $n \geq 0$, alors on définit

$$M_n = \max_{t \in I_n} v(t), \quad \tilde{M}_n = \max\{M_n, M_{n-1}\} \tag{4.46}$$

Notons que, par la preuve de la Proposition 4.1, nous avons $M_n > 0$ pour tout $n \geq 0$, alors si $t \in I_n$ avec $n > 0$, nous avons

$$v(t) = \int_0^{a_M} G(s, v(t-s)) ds \geq \int_0^{a_M} G(s, \tilde{M}_n) ds = \tilde{M}_n \Phi(\tilde{M}_n) \quad (4.47)$$

où $\Phi(z)$ est une fonction définie dans démonstration du Théorème 4.1. En fait, puisque $s \in [0, a_M]$ nous avons $t-s \in I_n \cup I_{n-1}$ et, pour $a \in [0, a_M]$, $G(a, z)$ est une fonction non décroissante de z . A partir de (4.46) nous obtenons

$$M_n \leq \tilde{M}_n \Phi(\tilde{M}_n) \quad \forall n > 0 \quad (4.48)$$

et, puisque $\Phi(z)$ est strictement décroissante et $\Phi(0) \leq 1$, nous avons

$$M_n < \tilde{M}_n \Phi(0) \leq \tilde{M}_n$$

qui est $M_n < M_{n-1}$.

Ainsi, la suite $\{M_n\}$ est décroissante et, en posant $M_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$, nous allons vers la limite dans (4.47)

$$M_\infty \leq M_\infty \Phi(M_\infty).$$

Si $M_\infty > 0$, nous aurons la contradiction

$$1 < \Phi(0)$$

ce qui est absurde puisque $\Phi(0) \leq 1$. Donc $M_\infty = 0$ et la preuve est complète.

D'ailleurs nous avons

Théorème 4.5. [26] Soient (4.43) et (4.44) sont satisfaites et supposons

$$q \int_0^{a_M} \beta(a) E(a) da > 1. \quad (4.49)$$

Alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v^*$$

Preuve : Soient I_n, M_n, \tilde{M}_n définies comme précédemment, nous montrons, en premier, l'énoncé suivant

$$\text{si } M_n \leq v^* \text{ alors } M_{n+1} \leq v^* \quad (4.50)$$

En fait, nous rappelons l'inégalité suivante déjà déclaré dans (4.47)

$$M_{n+1} \leq \tilde{M}_{n+1} \Phi(\tilde{M}_{n+1}) \quad n \geq 0; \quad (4.51)$$

alors si $M_{n+1} > v^*$, nous avons $\tilde{M}_{n+1} = M_{n+1}$ et par conséquent

$$M_{n+1} \leq M_{n+1} \Phi(M_{n+1}) < M_{n+1} \Phi(v^*) = M_{n+1}$$

ce qui est absurde.

Nous démontrons ensuite que

$$\text{si } M_n > v^* \text{ pour } n > N \text{ alors } M_{n+1} < M_n \text{ pour } n > N \quad (4.52)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = v^*$$

En fait, si $M_n > v^*$ et par conséquent $\tilde{M}_{n+1} > v^*$, nous avons à partir de (4.50)

$$M_{n+1} \leq \tilde{M}_{n+1} \Phi(\tilde{M}_{n+1}) < \tilde{M}_{n+1} \Phi(v^*) = \tilde{M}_{n+1}$$

c'est $M_{n+1} < M_n$. Alors, en posant $M_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n \geq v^*$, nous allons vers la limite dans (4.50)

$$M_\infty \leq M_\infty \Phi(M_\infty)$$

de sorte que, si $M_\infty > v^*$ nous avons $M_\infty < M_\infty$, ce qui est absurde et alors nécessairement $M_\infty = v^*$.

En plus, nous définissons

$$m_n = \min_{t \in I_n} v(t), \quad \tilde{m}_n = \min\{m_n, m_{n-1}\}$$

et, remarquant que la suite $\{m_n\}$ doit éventuellement être positive par la Proposition 4.1, nous pouvons aussi le prouver (la preuve est similaire à celle de (4.49) et (4.51))

$$\text{si } m_n \leq v^* \text{ alors } m_{n+1} \leq v^* \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \text{si } m_n < v^* \text{ pour } n > N \text{ alors } m_{n+1} > m_n \\ \text{pour } n > N \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = v^* \end{aligned} \quad (4.54)$$

Finallement, posant ensemble (4.44), (4.52), (4.53), (4.54) nous obtenons la preuve du théorème.

Conclusions et Perspectives

Dans ce mémoire nous avons considéré des modèles mathématiques pour des populations structurées en âge, nous avons étudié le modèle général par l'approche des équations intégrales, nous avons appliqué les résultats obtenus à deux phénomènes naturels (modèles démographiques, modèles épidémiologiques). Ils existent d'autres approches, par exemple celles utilisant la théorie des semi groupes [43], ou bien le cas discret [35], ou des cas de nature mixte continue et discrète [35], ces cas pourraient bien être des perspectives pour la suite de notre collaboration en recherche scientifique. Nous envisageons aussi le cas des propagations spatiales [23] ou bien d'autres structures, comme la taille par exemple [26]. En fin, une étude numérique de tous ces modèles avec des simulations est nécessaire pour la comparaison avec les données réelles et le développement de nouveaux modèles plus réalistes, les premiers pas de cette étude sont déjà entamés.

Bibliographie

- [1] A. Bouzinab, *Sur les modèles de croissance des populations avec dépendance en âge*. Thèse de Doctorat d'Etat es Sciences, centre universitaire de recherche scientifique de Pau, Académie de Bordeaux, (1994).
- [2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod, Paris (1999).
- [3] S. Busenberg, and K. Cooke, *Vertically transmitted diseases, Models and Dynamics*. Springer, Biomathematics V. **23** (1993).
- [4] S. Busenberg, K. Cooke, and M. Iannelli, *Endemic threshold and stability in a class of age-structured epidemics*. SIAM J. Appl. Math. **48**, (1988),1379-1395.
- [5] S. Busenberg, K. Cooke, and M. Iannelli, *Stability and threshold in some age-structured epidemics*. Lecture Notes in Biomathematics **81**, C. Castillo-Chavez, S. Levin and C. Shoemaker, Ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1989), 124-141.
- [6] S. Busenberg, M. Iannelli, and H. Thieme, *Global behaviour of an age-structured S-I-S epidemic model*. SIAM J. Appl. Math. **22**, (1991), 1065-1080.
- [7] M. Chipot, *On the equations of age-dependent population dynamics*. Arch. Rat. Mech. Anal.**82**, (1983), 13-26.
- [8] M. Chipot, M. Iannelli, and A. Pugliese, *Age structured S-I-R Epidemic Model with Intracohort Transmission*. U.T.M. **407** November 1992.
- [9] Ph. Clement, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H. J. A. M. Heumans, and H. R. Thieme, *Perturbation Theory for dual semigroups. I. The sun-reflexive case*. Math. Ann. **277**, (1987), 709-725.

- [10] J. M. Cushing, *Bifurcation of une periodic solutions of the Mc Kendrick equations with applications to population dynamics*. Comp. e Maths. with Appls. **9**, (1983),459-478.
- [11] J. M. Cushing, *Existence and stability of equilibria in age-structured population dynamics*. J. Math. Biol. **20**, (1984), 259-276 .
- [12] A. M. De Ross, *Numerical methods for structured population models : the escalator boxcar train*. Numer. Methods for Partial Differential Equations **4**, (1988), 173-195.
- [13] W. Desch, and W. Schappacher, *Linearized stability for non-linear semigroups*. In «Differential Equation in Banach Spaces» Proceedings Bologna 1985 (A. Favini and E. Obrecht eds.), Lecture Notes in Mathematics 1223, Springer Verlag (1986).
- [14] G. Di Blasio, M. Iannelli, and E. Sinestrari, : *Approach to equilibrium in age structured population with an increasing recuitement process*. J. Math. Biol. **13**, (1982), 371-382.
- [15] O. Diekmann, H. Heesterbeck, and H. Metz, *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous population*. J. Math. Biol. **28**, (1990), 365-382.
- [16] G. Doetsch, *Intoduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer-Verlag (1974).
- [17] Jr., J. Douglas, and F. A. Milner, *Numerical methods for a model of population dynamics*. Calcolo, **24**, (1987),247-254.
- [18] R.A. Easterlin, *Population, Labor Force, and Long Swings in Economic Growth*. National Bureau of Economics Research, New York, USA, (1968).
- [19] M. Farkas, *Dynamical Models in Biology*. Academic Press, San Diego, USA, (2001).
- [20] W. Feller, *On the integral equation of renewal theory*. Annals of Mathematical Statistics, **12**, (1941), 243-267.
- [21] D. Greenhalgh, S.O. Londen, and O. Staffans, *Volterra Integral and Functional Equations*. Cambridge University Press, Cambridge (1990).

- [22] M.E. Gurtin, and R.C MacCamy, *Non-Linear Age dependent Population Dynamics*. Arc. Rat. Mec. Analysis, **54**, (1974),281-300.
- [23] M.E. Gurtin, and R.C MacCamy, *Diffusion models for age structured populations*. Math. Biosc. **54**, (1981),49-59.
- [24] M. Gyllenberg, *Nonlinear age-dependent population dynamics in continuously propagated bacterial cultures*. Math. Biosc. **62**, (1982), 45-74.
- [25] F. Hoppensteadt, *Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics*. Philadelphia : S.I.A.M. Appl. (1975).
- [26] M. Iannelli, *Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics*. Giardini Editori E Stampatori In Pisa. (1995).
- [27] K. ALLAB, *Eléments d'analyse*.Office des publications universitaires, (1980), 790-680.
- [28] W.O. Kermack, and A.G. McKendrick, *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*. Proc. Roy. Soc. (A) **115**, (1927), 700-721.
- [29] N. Keyfitz, *Applied Mathematical Demography*. Springer-Verlag, New York, USA. (1985).
- [30] M. Krasnov, A. Kisselev, and G. Makarenko, *Equations Intégrales, Problèmes et Exercices*. Editions Mir. Moscou. (1977).
- [31] P.H. Malthus, *An Essay on the Principe of Population*.(First edition), London. (1798).
- [32] T.R. Leslie, *On the use of Matrices in Certain Population* .Biometrika, **33**, (1945), 183-212.
- [33] A.J. Lotka, *On the stability of the normal age distribution* .Proc. Nat. Acad. Sciences, **8**, (1922),339-345.
- [34] A. Lakmeche, and R. dilao, *On the Weak Solutions of the McKendrick Equation :Existence of Demography Cycles*. Vol.1. Research India Publications, (2006), 0973-5348.
- [35] H. Langhaar, *General population theory in the age-time continuum* . Journal of the Franklin Institute **293(3)**, (1972), 199-214 .

- [36] A.G. McKendrick, *Applications of Mathematics to medical problems*. Pro. Edinburgh Math. Soc. **44**, (1926),98-130.
- [37] R. Spiegel. Murray, *Analyse de Fourier et Application Aux problèmes De Valeurs Aux Limites*.Serie Schaum McGraw-Hill Inc, New York. (1974).
- [38] R. Spiegel. Murray, : *Variables Complexes,Cours et problèmes*.Serie Schaum McGraw-Hill Inc, New York. (1973).
- [39] S.I. Rubinow, *Mathematical Problems in the Biological Sciences*.SIAM, Philadelphia, USA. (1973).
- [40] F.R. Sharpe, and A.J. Lotka, *A Problem In Age-Distribution*.Philosophical, Magazine, Ser. **6,21**, (1911), 435-438.
- [41] D. Tudor, *An age dependent epidemic model with application to measles*. Math. Biosc. **73**, (1985),131-147.
- [42] P.F. Verhulst, *A note on the law population growth*. Correspondence Mathématique et Physique Publiée par A. Quetelet, vol. **10**, Brussels, (1838).
- [43] G. Webb, *Nonlinear semigroups and age-dependent population models*. Annali di Mathematica Pura et Applicat, Sr. **4,129**, (1981),43-55.
- [44] G. Webb, *A semigroup proof of the Sharpe-Lotka theorem*. In : infinite Dimensional System, F. Kappel and W. Schappacher, (eds.), Lecture Notes in Mathematics **1076**, Berlin : Springer (1984), 254-268.
- [45] G. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dinamics*. New York : Marcel Dekker (1985).