REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Mathématiques et Applications

Par :

M. MAMCHAOUI MOHAMED

Sur le thème

Homogénéisation et convergence des opérateurs monotones

Soutenue publiquement le - - - à Tlemcen devant le jury composé de :

M. BOUGUIMA. S. M.	Professeur	Université de Tlemcen	Président
M. SENOUCI BEREKSI. G.	Maître de Conférences A	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
M. ABDELLAOUI. B.	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur
M. DJELLOULI. G.	Maître de Conférences A	Université de Saida	Examinateur
M. MESSIRDI. B.	Professeur	Université d'Oran	Examinateur
M. MAHDJOUB. T.	Maître de Conférences A	Université de Tlemcen	Examinateur

Laboratoire de Statistiques et Modélisation Aléatoires (LSMA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

Laboratoire de Statistiques et Modélisation Aléatoires
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Abou Bekr Belkaid
BP 119 Tlemcen 13000

Email : m_mamchaoui@mail.univ-tlemcen.dz

A ma chère mère en témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tous les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entoure.

A mon cher père, le plus bon père dans ce monde, pour son encouragement, sa confiance , son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant ma gratitude, mon profond amour et ma passion.

A mes chères soeurs.

A ma chère femme.

A ma petite princesse Selma Lilya.

A la mémoire de mon beau-père Ammar.

Remerciements

Je remercie **ALLAH LE TOUT PUISSANT** de m'avoir aidé dans mes études et de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien cette thèse.

Je tiens à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mon directeur de thèse M. G. Senouci Bereksi. Il m'a fait l'honneur d'accepter de diriger mes travaux. J'ai eu l'opportunité de travailler sous sa direction durant le magister. Je lui réitère mes remerciements pour ses conseils avisés. Je remercie en lui le frère au soutien et à la compréhension sans limites.

Je tiens aussi à remercier vivement M. le Professeur S. M. Bouguima, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ma thèse.

Je prie M. le Professeur B. Abdellaoui, de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury qui examinera ce travail.

J'adresse à M. le Professeur B. Messirdi, l'expression de mes sincères remerciements et de ma profonde gratitude, pour faire partie du jury.

Je remercie chaleureusement, M. le Professeur T. Mahdjoub, d'avoir accepté de participer au jury qui examinera ce travail.

Je renouvelle aussi mes remerciements à M. le Professeur G. Djellouli, pour l'honneur qu'il me fait en faisant partie du jury.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à m'encourager à aller de l'avant.

Table des matières

Notations

Notation	Définition
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Elément de $I\!R^N$
$r = \|x\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)}$	Module de x
$Du = \nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradient de u
Δu	Laplacien de u
q	Exposent conjugué de p, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$
$p^* = \dfrac{Np}{(N-p)}$	Exposent critique de Sobolev
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
supp (u)	Support de la fonction u
$meas(A) = \|A\|$	Mesure de Lebesgue de $A \subset I\!R^N$
$\\| \cdot \\|_s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\\| \cdot \\|_X$	Norme dans l'espace X

Notation	Définition
X'	Espace dual de X
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou $(,)$	Crochet de dualité X, X' / Produit scalaire dans $I\!R^N$
δ_{x_0}	Mesure de Dirac centrée en x_0
$p.p$	Presque partout
$\mathcal{C}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω à support compact
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivable Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, c'est à dire espace des distributions
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable, $\int_\Omega \|u\|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable $\exists C$ tel que $\|u(x)\| \leq C$ en p.p. $x \in \Omega$ $\}$
$L^q(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, à dérivée jusqu'à l'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle
$W^{-k,q}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
$\mathcal{M}(\Omega)$	Espace des mesures de Radon dans Ω
$\mathcal{M}_\Omega(h) = \dfrac{1}{\|\Omega\|} \int_\Omega h(y)\ dy$	La moyenne de la fonction $h \in L^1(\Omega)$
$W_\sharp^{1,p}(Y)$	$\{u \in W^{1,p}(Y) \mid \mathcal{M}_Y(u) = 0$, et qui ont la même trace sur les faces opposées de Y $\}$.
μ_δ , μ	Mesure de Radon
δ, ϵ	un petit paramètre positive qui tend vers 0

Introduction

Dans ce travail on s'intéresse à une méthode d'homogénéisation qui n'est pas classique et qui fait introduire des notions de convergence de mesures. Cette méthode est introduite pour la première fois en 2002 par Chechkin, Jikov, Lukkassen et Piantniski dans le but de faciliter la modélisation de phénomènes physiques couplés. C'est pour cette raison que la méthode utilisée dans ce travail est dite méthode de jonction. Plusieurs autres méthodes classiques d'homogénéisation introduites par Cioranescu, Sanchez-Palencia, Murat, Tartar et d'autres mathématiciens ont été utilisées pour résoudre des problèmes mathématiques similaires entre domaines dis encore structures. Cette méthode de jonction a l'avantage de mieux comprendre le couplage ou jonction de domaines puis de découpler ce qui a été couplé donc de résoudre le problème inverse. Dans notre travail, on ne s'intéresse pas a résoudre un problème aux EDP par homogénéisation ni de modéliser un phénomène physique quelconque ni de résoudre un problème inverse par une méthode d'homogénéisation, mais de développer la méthode de jonction pour des opérateurs monotones non linéaires, chose qui n'a pas été faite. Ce choix n'est pas pris au hasard mais des problèmes physiques l'exigent.

L'homogénéisation est une méthode mathématique utilisée lorsque les problèmes que l'on traite sont posés dans un milieu hétérogène qui présente une structure périodique. Dans ce type de situation, les dimensions de la période sont petites par rapport aux dimensions globales du domaine. Ainsi, on définit ϵ un petit paramètre strictement positif qui représente le rapport de ces deux dimensions. Ce petit paramètre est destiné à tendre vers zéro, ce qui correspond d'un point de vue pratique au passage du problème non homogène de départ au problème dit « homogénéisé» (c'est-à-dire un problème posé dans un milieu homogène).

Plusieurs méthodes connues, comme la méthode du développement asymptotique ou la méthode de convergence multi échelles sont utilisées pour résoudre ce problème d'homogénéisation. Ce travail est décrit comme suit :

0.1 Description de la thèse

0.1.1 Description du chapitre 1

Dans le chapitre 1, intitulé «Opérateurs monotones et homogénéisation », on se donne le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\epsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1}$$

pour tout réel positif ϵ et $f \in L^2(\Omega)$ où l'opérateur a satisfait les conditions de Lipschitz-continuité et de monotonicité. Ces dernières hypothèses nous seront utiles pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de ce genre de problèmes. Ensuite, on essayera de trouver le problème homogénéisé associé. Pour plus de détails le lecteur est renvoyé aux références [6, 8, 12, 13, 15, 16].
Rappelons ce qui se passe dans le cas linéaire.
Considérons la fonction : $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow M^{n\times n}$ où les coéfficients de la matrice $a(x) = (a_{ij}(x))$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, satisfont les propriétées suivantes :

- a_{ij} est Y-périodique dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $i, j = 1, 2, ...n$;
- $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout $i, j = 1, 2, ...n$;
- $\exists \alpha > 0 : (a(x)\xi, \xi) \geq \alpha|\xi|^2$ pour p.p $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Définissons maintenant la fonction : $a_\epsilon(x) = a(\dfrac{x}{\epsilon})$.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $Y =]0, 1[^n$. Pour $\epsilon > 0$ fixé, on considère le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} A^\epsilon u_\epsilon \equiv -div(a(\frac{x}{\epsilon})Du_\epsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\epsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2}$$

où $f \in L^2(\Omega)$.
Cherchons la solution de la forme :

$$u_\epsilon(x) = u_0(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\epsilon}) + ..., \tag{3}$$

où les fonctions $u_i(x, y)$ sont Y-périodiques par rapport à y pour tout $x \in \Omega$.
La variable x correspond à l'échelle "macroscopique" et la variable $\frac{x}{\epsilon}$ à l'échelle "microscopique".
L'idée est de remplacer la fonction u_ϵ de (2) par son développement posé en (3).
On pose $v_\epsilon = v(x, \frac{x}{\epsilon})$ d'où

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i} = (\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial v}{\partial y_i})(x, \frac{x}{\epsilon}).$$

Alors, on peut écrire

$$A^\epsilon v_\epsilon = [\epsilon^{-2} A_0 + \epsilon^{-1} A_1 + \epsilon^0 A_2](x, \frac{x}{\epsilon}), \tag{4}$$

où

$$A_0 = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}),$$

$$A_1 = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial x_j}),$$

$$A_2 = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial x_j}).$$

De (3) et (4), l'équation (2) devient :

$$(A_0 u_0)(x, \frac{x}{\epsilon}) = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{5}$$

$$(A_0 u_1 + A_1 u_0)(x, \frac{x}{\epsilon}) = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{6}$$

$$(A_0 u_2 + A_1 u_1 + A_2 u_0)(x, \frac{x}{\epsilon}) = f(x) \text{ dans } \Omega. \tag{7}$$

Puisque $u_i\left(x,.\right)$ est Y-périodique ($\forall x\in\Omega$), alors la fonction $z\longmapsto u_i\left(z,\dfrac{z}{\epsilon_h}\right)$ et la fonction $z\longmapsto u_i\left(x,\dfrac{z}{\epsilon_h}\right)$ ont le même comportement. Dans ce cas on considère x comme paramètre fixé dans les problèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{c}(A_0u_0)(x,.)=0 \qquad \text{dans } Y,\\ u_0(x,.)\;\; Y-\text{périodique}\end{array}\right. \tag{8}$$

$$\left\{\begin{array}{c}(A_0u_1)(x,.)=-(A_1u_0)(x,.) \qquad \text{dans } Y,\\ u_1(x,.)\;\; Y-\text{périodique}\end{array}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{array}{c}(A_0u_2)(x,.)=f(x)-(A_1u_1+A_2u_0)(x,.) \qquad \text{dans } Y,\\ u_1(x,.)\;\; Y-\text{périodique}\end{array}\right. \tag{10}$$

Soit $H^{1,2}_{per}(Y)$ le sous ensemble de $H^{1,2}(Y)$ qui contient les fonctions u qui ont la même trace sur les faces opposées de Y. On note par $H^{1,2}_{\sharp}(Y)$ l'ensemble des fonctions u de $H^{1,2}(Y)$ avec la moyenne de u nulle et u à la même trace sur les faces opposées de Y.

Lemme 0.1. Soit $F\in(H^{1,2}_{per}(Y))^*$. Alors le problème

$$\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\int_Y(a(y)D\varphi,D\psi)dy=\langle F,\psi\rangle \qquad \text{pour tout } \psi\in H^{1,2}_{per}(Y),\\ \varphi\in H^{1,2}_{\sharp}(Y)\end{array}\right. \tag{11}$$

admet une solution unique si est seulement si

$$\langle F,1\rangle=0. \tag{12}$$

Appliquons ce Lemme pour les problèmes (8), (9) et (10).
Dans [8], l'auteur a démontré les résultats suivants :

$$u_0\left(x,y\right)=u_0\left(x\right), \tag{13}$$

$$u_1\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\omega^k\left(y\right)+\tilde{u}_1\left(x\right), \tag{14}$$

et l'équation homogénéisée est :

$$-\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_k} = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{15}$$

où le coéfficient homogénéisé est donné par :

$$b_{ik} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(a_{ik}(y) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y) \frac{\partial \omega^k}{\partial y_j}(y) \right) dy. \tag{16}$$

0.1.2 Description du chapitre 2

Dans le chapitre 2, intitulé «Opérateurs monotones et convergence à deux échelles », on utilisera la notion de convergence "à deux échelles" au problème

$$-div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)) + |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon = f_\epsilon, \qquad u_\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

pour trouver le problème homogénéisé. Cette convergence a été introduite pour la première fois en 1989 par G. Nguetseng (voir [19]). Il a prouvé que pour toute suite bornée (u_ϵ) dans $L^2(\Omega)$, il existe une sous-suite de (u_ϵ) et $u \in L^2(\Omega \times Y)$ tel que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega u_\epsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx = \int_\Omega \int_Y u(x,y)\phi(x,y) dy dx,$$

pour $\phi(x,y)$ Y-périodique et assez régulière. Il a aussi montré que pour une suite bornée (u_ϵ) dans $W^{1,2}(\Omega)$, il existe $u \in L^2(\Omega \times Y)$ et $u_1 \in L^2(\Omega; W^{1,2}_{per}(Y))$ tel que

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } W^{1,2}(\Omega),$$

et

$$\int_\Omega \left(Du_\epsilon(x), \Phi(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) dx \to \int_\Omega \int_Y \left(Du(x) + D_y u_1(x,y), \Phi(x,y) \right) dy dx,$$

pour $\phi(x,y)$ assez régulière.

0.1.3 Description du chapitre 3

Dans ce chapitre on s'est inspiré des travaux [16], [28] et aussi de quelques résultats dans [8], mais sans l'utilisation de la convergence à deux-échelles. On établit ainsi quelques résultats de convergences dans la théorie de l'homogénéisation en utilisant des opérateurs monotones par rapport à $\mu_{\epsilon,\delta}$ comme mesure et montrant ainsi la commutativité du diagramme comme celui du chapitre précédent sous certaines hypothèses. Pour cela on considère a comme un opérateur monotone qui satisfait les hypothèses de continuité et de monotonicité. On traitera deux cas d'opérateurs $a(x, Du_\delta)$ et $a_\delta(x, Du_\delta)$.
Au début, on prend une suite bornée $Du_\delta \in (L^p(\Omega, d\mu_\delta))^N$ qui serait faiblement convergente vers $Du \in (L^p(\Omega, d\mu))^N$ dans le sens suivant

$$\lim_{\delta \to 0} \int_\Omega (Du_\delta, \varphi) d\mu_\delta = \int_\Omega (Du, \varphi) d\mu, \tag{17}$$

pour toute fonction test $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^N$. Ensuite, si on considère les suites $(a(x, Du_\delta))$ et $(a_\delta(x, Du_\delta))$, qu'elles seraient leurs limites lorque δ tends vers 0 ?
La plus belle des situations est de préserver le même sens de convergence que celui d'une fonction f continue appliquée à une suite (v_n) convergente vers v.
Sous certaines hypothèses, et sans utiliser la convergence à deux-échelles ni la périodicité de a ni celle de la mesure μ_δ, on a pu montrer que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_\Omega (a(x, Du_\delta), \varphi) d\mu_\delta = \int_\Omega (a(x, Du), \varphi) d\mu, \tag{18}$$

pour tout $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^N$.

Nos résultats principaux sont introduits dans les deux dernières sections de ce chapitre.

0.2 Préliminaires

Nous allons introduire des notions, des définitions et des théorèmes qui nous seront utiles dans les différents chapitres de cette thèse.

0.2.1 Rappels sur les mesures

Tribus

Définition 0.1. Une tribu (ou $\sigma-$algèbre) sur un ensemble E est une famille $\mathcal{F}$ de sous ensembles de E tels que :

$$\begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F} \\ A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \\ (A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Définition 0.2. On appelle espace mesurable tout couple $(E, \mathcal{F})$ formé par un ensemble E et une tribu $\mathcal{F}$ sur E.

Mesures positives

Définition 0.3. Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur E. On appelle une mesure positive sur $(E, \mathcal{F})$ une application $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que

$$\begin{cases} \mu(\emptyset) = 0 \\ (A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \text{ disjoints (càd } A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m) \Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \end{cases}$$

Espace mesuré

Un espace mesuré est un triplet $(E, \mathcal{F}, \mu)$ où :
- E est un ensemble.
- $\mathcal{F}$ est une tribu (ou $\sigma-$algèbre) sur E.
- μ est une mesure positive sur $(E, \mathcal{F})$.

Tribu Borélienne

On note O l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.

Définition 0.4. La tribu $\sigma(O)$ engendrée par O est appelée la tribu borélienne de $I\!R$. On la note $B(I\!R)$. Ses éléments sont appelés les boréliens.

Définition 0.5. Une mesure borélienne ou (rarement) mesure de Borel est une mesure positive définie sur la tribu borélienne d'un espace topologique.

Définition 0.6. Une mesure de Borel positive μ définie sur $\Omega \subset I\!R^N$ est appelé une mesure de Radon si $\mu(K) < \infty$ pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$.

Définition 0.7. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
Une famille de mesures de Radon $(\mu_\delta)_\delta$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ converge faiblement vers la mesure de Radon μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et on note $\mu_\delta \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} \mu$ si

$$\int_\Omega g d\mu_\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\to} \int_\Omega g d\mu, \forall g \in C_0(\Omega) \tag{19}$$

0.2.2 La convergence faible

La convergence faible dans un Banach

Définition 0.8. Soit E un espace de Banach, E^* son dual et $\langle ., . \rangle$ le crochet de dualité sur $E^* \times E$.
On dit que la suite $(x_h)_h$ dans E converge faiblement vers $x \in E$ si et seulement si :

$$\langle x^*, x_h \rangle \underset{h \to +\infty}{\to} \langle x^*, x \rangle \quad \forall x^* \in E^*, \tag{20}$$

et on écrit :

$$x_h \underset{h \to +\infty}{\rightharpoonup} x \text{ faib. dans } E. \tag{21}$$

On dit que la suite $(x_h^*)_h$ dans E^* converge faiblement $*$ vers $x^* \in E^*$ si et seulement si :

$$\langle x_h^*, x \rangle \underset{h \to +\infty}{\to} \langle x^*, x \rangle \quad \forall x \in E, \tag{22}$$

et on écrit :

$$x_h^* \underset{h \to +\infty}{\rightharpoonup} x^* \quad * \text{ faib. dans } E^*. \tag{23}$$

Théorème 0.1. Soit E un espace de Banach, E^* son dual. Soient $(x_h)_h$ et $(x_h^*)_h$ deux suites de E et de E^* respectivement.

Si $x_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ faib. dans E, alors :

$$\begin{cases} \exists k > 0 \text{ t.q. } \forall h \in \mathbb{N} : \|x_h\|_E \leq k \\ \|x\|_E \leq \liminf\limits_{h\to+\infty} \|x_h\|_E \end{cases} \tag{24}$$

Si $x_h^* \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x^*$ $*$ faib.dans E^*, alors :

$$\begin{cases} \exists k > 0 \text{ t.q. } \forall h \in \mathbb{N} : \|x_h^*\|_{E^*} \leq k \\ \|x^*\|_{E^*} \leq \liminf\limits_{h\to+\infty} \|x_h^*\|_{E^*} \end{cases} \tag{25}$$

Si $x_h \underset{h\to+\infty}{\rightarrow} x$ (fortement dans E), alors $x_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ faib. dans E.
Si $x_h^* \underset{h\to+\infty}{\rightarrow} x^*$ (fortement dans E^*), alors $x_h^* \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x^*$ $*$ faib. dans E^*.
Si $x_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ dans E et $x_h^* \underset{h\to+\infty}{\rightarrow} x^*$ dans E^*, alors $\langle x_h^*, x_h\rangle \underset{h\to+\infty}{\rightarrow} \langle x^*, x\rangle$.

Définition 0.9 (**Espace réflexif**)**.** Soit E un espace de Banach, soit E^* son dual (muni de la norme duale $\|f\|_{E^*} = \sup\limits_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E \leq 1}} |\langle f, x\rangle|$).
Soit E^{**} son bidual (muni de la norme $\|g\|_{E^{**}} = \sup\limits_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|_{E^*} \leq 1}} |\langle g, f\rangle|$).
On a une injection canonique $J : E \to E^{**}$ définie comme suit : soit $x \in E$ fixé, l'application $f \to \langle f, x\rangle$ de E^* dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur E^* i.e.
un élément de E^{**} noté Jx. On a donc

$$\langle Jx, f\rangle_{E^{**}E^*} = \langle f, x\rangle_{E^*E} \quad \forall x \in E, \ \ \forall f \in E^*.$$

Il est clair que J est linéaire et J est une isométrie i.e. $\|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$;
en effet

$$\|Jx\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|_{E^*} \leq 1}} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|_{E^*} \leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_E$$

Lorsque J est surjective on dit que E est réflexif.

Définition 0.10 (**Espace séparable**)**.** On dit qu'un espace de Banach E est séparable s'il existe un ensemble au plus dénombrable qui est dense dans E.

Théorème 0.2. Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_h)_h$ une suite bornée dans E,
alors il existe une sous suite $\left(x_{\sigma(h)}\right)$ de $(x_h)_h$ et $x \in E$ tel.que.

$$x_{\sigma(h)} \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x \;\text{ faib. dans } E. \tag{26}$$

Si chaque sous suite converge faiblement vers la même limite x, alors :

$$x_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} x \;\text{ faib. dans } E. \tag{27}$$

0.2.3 Les espaces L^p

Définition 0.11. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
i) Soit $1 \leq p < +\infty$. On note par $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tel que

$$\|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < +\infty. \tag{28}$$

$\|.\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)}$ est une norme sur $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$.
ii) Si $p = +\infty$, on note par $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tel que

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \inf\{\alpha : |f(x)| \leq \alpha \text{ p.p } x \in \Omega\} < +\infty.$$

$\|.\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)}$ est une norme sur $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$.
iii) $L^p_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^n) = \Big\{f \;/\; f \in L^p(\Omega';\mathbb{R}^n)$ pour tout ensemble ouvert borné Ω' avec $\overline{\Omega'} \subset \Omega\Big\}$.

Remarque 0.1. a) Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On désigne par q le conjugué de p càd : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
b) Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors l'espace dual de $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ est $L^q(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Théorème 0.3 (Inégalité de Hölder)**.** Soient $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Alors $(f, g) \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ et

$$\int_\Omega |(f(x), g(x))|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^n)} . \tag{29}$$

La convergence faible dans les espaces L^p

La notion de convergence faible dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ devient donc comme suit :

• Si $1 \leq p < +\infty$, alors $f_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ faib. dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ si :

$$\int_\Omega (f_h(x), g(x))\, dx \underset{h\to+\infty}{\to} \int_\Omega (f(x), g(x))\, dx \quad \forall g \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^n) . \tag{30}$$

• Si $p = +\infty$, alors $f_h \underset{h\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ $*$ faib.dans $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ si :

$$\int_\Omega (f_h(x), g(x))\, dx \underset{h\to+\infty}{\to} \int_\Omega (f(x), g(x))\, dx \quad \forall g \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n) , \tag{31}$$

Théorème 0.4. L'espace $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ est reflexif pour $1 < p < +\infty$. De plus $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire définit par :

$$(f, g)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \int\limits_\Omega (f(x), g(x))\, dx. \tag{32}$$

0.2.4 Les espaces de Sobolev

Définition 0.12. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : Du \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)\} , \tag{33}$$

où $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$ représente la $1^{ère}$ dérivée au sens des distributions de la fonction réelle u.

On définit dans cet espace la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Du\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} , \tag{34}$$

ou parfois une norme équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Du\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\right)^{1/p} \quad (\text{si } 1 \leq p < +\infty). \tag{35}$$

Définition 0.13. Soit $1 \leq p < +\infty$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est définie comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est noté par $W^{-1,q}(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Remarque 0.2. Si $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est noté par $H^{1,2}(\Omega)$ ou bien $H^1(\Omega)$. Même chose pour $W_0^{1,p}(\Omega)$; on le note par $H_0^{1,2}(\Omega)$ ou bien $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 0.1. i) L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.
ii) L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace réflexif pour $1 < p < +\infty$.
iii) L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace séparable pour $1 \leq p < +\infty$.
iv) L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable ; il est de plus réflexif pour $1 < p < +\infty$.
v) Les espaces $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert muni du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)}. \tag{36}$$

Théorème 0.5 (Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné et soit $1 \leq p < +\infty$.
Alors il existe une constante $k > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq k \|Du\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Remarque 0.3. A partir du théorème 1.5, on conclut que $\|Du\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ notée par $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Théorème des injections

Théorème 0.6 (l'injection compacte). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\partial\Omega$ est Lipschitzienne.

• Si $1 \leq p < n$, alors :
$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \in \left[1, \dfrac{np}{n-p}\right]$ avec injection compacte pour $q \in \left[1, \dfrac{np}{n-p}\right[$.
• Si $p = n$, alors :
$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, +\infty[$ et l'injection est compacte.
• Si $p > n$, alors :
$W^{1,p}(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$ avec injection compacte.

Remarque 0.4. L'injection compacte permet de passer de la convergence faible à la convergence forte comme suit :
Soit $u_h \rightharpoonup u$ faib. dans $W^{1,p}(\Omega)$.
• Si $1 \leq p < n$, alors $u_{\sigma(h)} \to u$ fortement dans $L^q(\Omega)$ avec $1 \leq q < \dfrac{np}{n-p}$.
• Si $p = n$, alors $u_{\sigma(h)} \to u$ fortement dans $L^q(\Omega)$ avec $1 \leq q < +\infty$.
• Si $p > n$, alors $u_{\sigma(h)} \to u$ fortement dans $L^\infty(\Omega)$.

0.2.5 Fonctions périodiques rapidement oscillantes

Nous introduisons une classe de fonctions périodiques oscillantes, qui jouent un rôle essentiel dans la théorie de l'homogénéisation. En particulier, on considère les fonctions de la forme :

$$a_\epsilon(x) = a(\frac{x}{\epsilon}),$$

où a est une fonction périodique et ϵ un paramètre positif qui prend ses valeurs dans une suite qui tend vers 0.

Définition 0.14. Soit Y un "intervalle" de $\mathbb{R}^n$ définie par : $Y =]0, l_1[\times]0, l_2[\times ... \times]0, l_n[$ où $l_1, l_2, ..., l_n$ sont des nombres positifs donnés. On désignera par Y la période de référence. Soit f une fonction définie p.p $x \in \mathbb{R}^n$. La fonction f est dite Y-périodique ssi :

$$f(x + kl_ie_i) = f(x) \quad \text{p.p } x \in \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\},$$

où $\{e_i\}_1^n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 0.5. Si a est Y-périodique alors a_ϵ est ϵY-périodique où $\epsilon Y =]0, \epsilon l_1[\times ... \times]0, \epsilon l_n[$.

Définition 0.15. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1(\Omega)$. La valeur moyenne de f sur Ω est le nombre réel donné par :

$$\mathcal{M}_\Omega(f) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(y)dy.$$

Théorème 0.7. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et f est Y-périodique dans $L^p(\Omega)$.
Soit $f_\epsilon(x) = f(\frac{x}{\epsilon})$ p.p $x \in \mathbb{R}^n$.
• Si $p < +\infty$ alors on a :

$$f_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} \frac{1}{|Y|}\int_Y f(y)dy \ \text{ dans } L^p(\omega),$$

pour tout sous ensemble ω borné de $\mathbb{R}^n$.
• Si $p = +\infty$, alors

$$f_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\overset{*}{\rightharpoonup}} \frac{1}{|Y|}\int_Y f(y)dy \ \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration. Voir [7]. □

0.2.6 Extension des fonctions périodiques

Dans cette partie, on établira le prolongement des fonctions périodiques (voir [8]).
Soit $Y =]0,1[^n$ le cube unité ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et $1 < p < +\infty$.

Définition 0.16. $W^{1,p}_\sharp(Y)$ est l'espace des fonctions $u \in W^{1,p}(Y)$, tel que $\mathcal{M}_Y(u) = 0$, et qui ont la même trace sur les faces opposées de Y.

Remarque 0.6. Dans le cas où $p = 2$, $W^{1,2}_\sharp(Y)$ est noté par $H^1_\sharp(Y)$.

Lemme 0.2. Soit $f \in W^{1,p}_\sharp(Y)$. Alors f peut être prolongée par périodicité en un élément de $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 0.3. Soit $g \in L^q(Y;\mathbb{R}^n)$ tel que $\int_Y (g, Dv)dy = 0 \ \ \forall v \in W^{1,p}_\sharp(Y)$. Alors g peut être prolongée par périodicité en un élément de $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, qu'on note g tel que $-divg = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 0.4 (Lemme de compacité par compensation)**.** Soit $1 < p < +\infty$. Soit $(u_\epsilon)_\epsilon$ une suite qui converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$, et soit $(g_\epsilon)_\epsilon$ une suite dans $L^q(\Omega;\mathbb{R}^n)$ qui converge faiblement vers g dans $L^q(\Omega;\mathbb{R}^n)$ quand $\epsilon \to 0$.
De plus supposons que $(-divg_\epsilon)_\epsilon$ converge fortement vers $-divg$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$ quand $\epsilon \to 0$. Alors

$$\int_\Omega (g_\epsilon, Du_\epsilon)\varphi dx \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_\Omega (g, Du)\varphi dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Démonstration. Il suffit de voir que

$$\int_\Omega (g_\epsilon, Du_\epsilon)\varphi dx = \langle -divg_\epsilon, u_\epsilon\varphi\rangle - \int_\Omega u_\epsilon(g_\epsilon, D\varphi)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

□

0.2.7 Théorème d'existence

Définition 0.17 (**Forme linéaire**)**.** Soit $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que f est une forme linéaire sur E si est seulement si :

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v). \tag{37}$$

Définition 0.18 (**Forme bilinéaire**)**.** Soit $a : E \times E \to \mathbb{R}$. On dit que a est une forme bilinéaire sur E si pour tout $u \in E$ fixé, les applications suivantes **:**

$$\begin{aligned} a(u,.) &: v \in E \to a(u,v) \in \mathbb{R}, \\ a(.,u) &: v \in E \to a(v,u) \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{38}$$

sont linéaires.
Rappellons que si a est une forme bilinéaire continue sur E, alors $\exists c > 0$ tel que

$$|a(u,v)| \leq c \|u\|_E \|v\|_E \quad \forall u, v \in E. \tag{39}$$

Définition 0.19 (**Forme bilinéaire coercive**)**.** Soit V un espace de Hilbert et

a une forme bilinéaire sur V. a est coercive sur V si $\exists \alpha > 0$ tel que

$$a\left(u,u\right) \geq \alpha \left\|u\right\|_V^2 \quad \forall u \in V. \tag{40}$$

Théorème 0.8 (**Lax–Milgram**)**.** Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur l'espace de Hilbert V. Alors pour tout élément f de V^*, il existe un unique élément u dans E qui vérifie :

$$a\left(u,v\right) = \left(\left(f,v\right)\right), \quad \forall v \in V. \tag{41}$$

De plus on a :

$$\left\|u\right\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\left\|f\right\|_{V^*}, \tag{42}$$

où α est donnée dans (40).

Démonstration. Voir [20]. $\square$

Définition 0.20. Soit E un espace de Banach et E^* son dual.
Soit $A : D(A) \subset E \to E^*$ un opérateur.
1- On dit que A est monotone si

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle \geq 0 \ \ \forall u_1, u_2 \in D(A).$$

2- On dit que A est strictement monotone si

$$\forall u_1, u_2 \in D(A) : \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

3- On dit que A est maximal monotone si

$$\forall \left[x,y\right] \in E \times E^* \text{ tel que } \langle y - Au, x - u\rangle \geq 0 \ \ \forall u \in D(A) \Rightarrow y = Ax.$$

4- On dit que A est hémicontinu si

$A\left(u+tv\right) \underset{t\to 0}{\to} Au$ faiblement dans E^* $\forall u \in D(A)$ et $v \in E$ tel que $u+tv \in D(A)$

pour $0 \leq t \leq 1$.

Théorème 0.9. Soit E un espace de Banach séparable et soit $A : E \to E^*$(i.e $D(A) = E$) un opérateur monotone et hémicontinu.
Alors A est maximal monotone. En plus, si E est réfexif et A est coercif, i.e.

$$\lim_{\|u\|_E \to \infty} \frac{\langle Au, u \rangle_{E^* E}}{\|u\|_E} = +\infty,$$

alors $R(A) = E^*$.

Démonstration. Voir [11]. □

Chapitre 1

Opérateurs monotones et homogénéisation

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on parlera de la théorie de l'homogénéisation concernant les opérateurs monotones non linéaires (voir [8]).
Avant d'aborder le cas non linéaire, rappellons l'exemple suivant du cas linéaire.

Exemple 1.1. Soit $\Omega =]d_1, d_2[\subset \mathbb{R}$, on considère le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(a_\epsilon(x)\dfrac{du_\epsilon}{dx}\right) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u_\epsilon(d_1) = u_\epsilon(d_2) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où

$$\begin{cases} f \in L^2(\Omega) \\ 0 < \alpha \leq a_\epsilon(x) \leq \beta < +\infty \quad \text{p.p } x \in \Omega \\ a_\epsilon(x) = a(\dfrac{x}{\epsilon}) \text{ où } a \text{ est } l_1\text{-périodique} \\ a \in L^\infty(0, l_1) \text{ et } \epsilon \text{ un paramètre positif} \end{cases}$$

La formulation variationnelle nous donne :

$$\int_\Omega a_\epsilon(x)\frac{du_\epsilon}{dx}\frac{dv}{dx}dx = \int_\Omega fv dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Posons :

$$\begin{cases} a(u,v) = \int_\Omega a_\epsilon(x)\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dx}dx \\ L(v) = \int_\Omega fv dx \end{cases}$$

Le problème initial est équivalent à

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On veut appliquer le théorème de Lax-Milgram pour déduire l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.1). Pour celà il faut vérifier les conditions suivantes :

1-la coercivité de a :

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega a_\epsilon(x)\frac{du}{dx}\frac{du}{dx}dx \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \\ &\geq \alpha \int_\Omega \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \alpha \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} = \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} . \end{aligned}$$

2-la continuité de a :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_\Omega \left| a_\epsilon(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\right| dx \qquad \forall u,v \in H_0^1(\Omega) \\ &\leq \beta \int_\Omega \left|\frac{du}{dx}\right| \left|\frac{dv}{dx}\right| dx \\ &\leq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} . \end{aligned}$$

3-la continuité de L :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \int_\Omega |f|\,|v|\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)} . \end{aligned}$$

Conclusion : le problème (1.1) admet une solution unique et on a l'estimation suivante :

$$\|u_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{c(\Omega)}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci veut dire que la suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ est bornée.

Puisque l'espace $H_0^1(\Omega)$ est réflexif alors on peut en extaire une sous suite notée encore $(u_\epsilon)_\epsilon$ tel que

$$u_\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} u_0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

On pose : $\xi^\epsilon = a_\epsilon(x)\dfrac{du_\epsilon}{dx}$.

$$\Rightarrow -\frac{d\xi^\epsilon}{dx} = f \quad \text{dans } \Omega.$$

En plus

$$\begin{cases} \|\xi^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \beta^2 \left\|\dfrac{du_\epsilon}{dx}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \beta^2 \|u_\epsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta^2 \left(\dfrac{c(\Omega)}{\alpha}\right)^2 \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \left\|\dfrac{d\xi^\epsilon}{dx}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|\xi^\epsilon\|^2_{H^1(\Omega)} &= \|\xi^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{d\xi^\epsilon}{dx}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\beta^2\left(\frac{c(\Omega)}{\alpha}\right)^2 + 1\right)\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\xi^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq k.$$

Ceci veut dire que la suite $(\xi^\epsilon)_\epsilon$ est bornée. Puisque l'espace $H^1(\Omega)$ est réflexif alors on peut en extaire une sous suite notée encore $(\xi^\epsilon)_\epsilon$ tel que

$$\xi^\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} \xi^0 \quad \text{dans } H^1(\Omega).$$

En utilisant le Théorème 0.6, on aboutit à

$$\xi^\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\to} \xi^0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

Enfin, on déduit que

$$\frac{1}{a_\epsilon}\xi^\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} \mathcal{M}_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)\xi^0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Or

$$\frac{du_\epsilon}{dx} = \frac{1}{a_\epsilon}\xi^\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} \mathcal{M}_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)\xi^0 = \frac{du_0}{dx} \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow \xi^0 = \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}\frac{du_0}{dx}.$$

Finalement, le problème homogénéisé est donné par :

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\mathcal{M}_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}\dfrac{du_0}{dx}\right) = f \qquad \text{dans } \Omega \\ u_0(d_1) = u_0(d_2) = 0 \end{cases}$$

1.2 Position du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $Y =]0,1[^n$ le cube unité ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Considérons l'opérateur non linéaire suivant :

$$A^\epsilon(u) := -div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du)) \ \ , \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

où $a(x,.)$ est Y-périodique satisfaisant les propriétés suivantes :

1/- $a: \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $a(.,\xi)$ est Lebesgue-mesurable et Y-périodique.

2/- $(a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \geq \alpha\, |\xi_1 - \xi_2|^2$ p.p $x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$.

3/- $|a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2)| \leq \beta\, |\xi_1 - \xi_2|$ p.p $x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$.

4/- $a(x,0) = 0$ p.p $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 1.1. Si a satisfait ces conditions, on dit que $a \in N_\sharp$.

Etant donné $a \in N_\sharp$, alors pour tout réel positif ϵ et $f \in L^2(\Omega)$, considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u_\epsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.2}$$

Le problème devient comme suit :
Trouver $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega) = E \ / \ A^\epsilon u_\epsilon = f$:

$$\langle A^\epsilon u_\epsilon, v\rangle = \int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Dv)dx \tag{1.3}$$

et

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega fvdx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Lemme 1.1. L'opérateur A^ϵ de E dans E^* est hemicontinu, monotone et coercif.

Démonstration. i) Montrons d'abord que

$$A^\epsilon w \in H^{-1}(\Omega) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

$$\begin{aligned} |\langle A^\epsilon w, v\rangle| &= \left|\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Dw), Dv)dx\right| \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \\ &\leq \int_\Omega \left|(a(\frac{x}{\epsilon}, Dw), Dv)\right| dx \\ &\leq \int_\Omega \left|a(\frac{x}{\epsilon}, Dw)\right| |Dv|\, dx \\ &\leq \beta \int_\Omega |Dw|\, |Dv|\, dx \\ &\leq \beta \|w\|_E \|v\|_E \\ &\leq \beta'. \|v\|_E , \end{aligned}$$

d'où

$$A^\epsilon w \in H^{-1}(\Omega) = E^*.$$

ii) Montrons que A^ϵ est hémicontinu. Pour cela calculons la quantité suivante :

$$\begin{aligned}
|\langle A^\epsilon(u+kv) - A^\epsilon u, z\rangle_{E^*E}| &= \left|\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du+kDv) - a(\frac{x}{\epsilon}, Du), Dz)dx\right| \quad \forall z \in H_0^1(\Omega) \\
&\leq \int_\Omega \left|(a(\frac{x}{\epsilon}, Du+kDv) - a(\frac{x}{\epsilon}, Du)\right| |Dz|\, dx \\
&\leq \beta k \int_\Omega |Dv|\,.\,|Dz|\, dx \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

iii) Montrons que A^ϵ est monotone :

$$\begin{aligned}
\langle A^\epsilon u - A^\epsilon v, u-v\rangle_{E^*E} &= \int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du) - a(\frac{x}{\epsilon}, Dv), Du - Dv)dx \\
&\geq \alpha \int_\Omega |Du - Dv|^2\, dx \\
&\geq 0 \qquad \forall u, v \in D(A^\epsilon) = H_0^{1,2}(\Omega).
\end{aligned}$$

De plus, A^ϵ est strictement monotone car :

$$\forall u, v \in D(A) : \langle A^\epsilon u - A^\epsilon v, u-v\rangle_{E^*E} = 0 \Rightarrow u = v.$$

iv) Montrons que A^ϵ est coercif :

$$\begin{aligned}
\langle A^\epsilon u, u\rangle_{E^*E} &= \int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du), Du)dx \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) = E \\
&\geq \alpha \int_\Omega |Du|^2\, dx = \alpha \|u\|_E^2 \\
&\Rightarrow \lim_{\|u\|_E \to +\infty} \frac{\langle A^\epsilon u, u\rangle_{E^*E}}{\|u\|_E} = +\infty.
\end{aligned}$$

□

Conclusion : L'opérateur A^ϵ de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ est hémicontinu, monotone et coercif. En plus, $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Banach séparable et réflexif. En appliquant le Théorème 0.9, on déduit que $R(A^\epsilon) = H^{-1}(\Omega)$ c'est à dire que A^ϵ est surjectif.

Sachant que A^ϵ est injectif, alors le problème (1.2) admet une solution unique.

1.3 Le problème homogénéisé

Théorème 1.1. Soit $a \in N_\sharp$, et soit $(\epsilon_h)_h$ une suite de réels positifs qui tend vers zéro quand $h \to +\infty$.
Supposons que $f_\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\to} f$ fortement dans $H^{-1}(\Omega)$.
Soit $(u_\epsilon)_\epsilon$ la solution du problème (1.2). Alors

$$u_\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} u_* \;\text{ dans } H_0^1(\Omega) \tag{1.5}$$

$$a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon) \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} b(Du_*) \;\text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \tag{1.6}$$

où u_* est l'unique solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -div(b(Du_*)) = \; f \quad \text{dans } \Omega \\ u_* \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.7}$$

L'opérateur b est définit comme suit :

$$b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\xi \to b(\xi) = \int_Y a(y, \xi + Dw^\xi(y))dy \tag{1.8}$$

où w^ξ est l'unique solution du problème local suivant :

$$\begin{cases} \int_Y (a(y, \xi + Dw^\xi(y)), Dv(y))dy = 0 \quad \forall v \in H_\#^1(Y) \\ w^\xi \in H_\#^1(Y) \end{cases} \tag{1.9}$$

Proposition 1.1. L'opérateur b satisfait les propriétées suivantes :
i) b est monotone
ii) il existe une constante $\gamma > 0$ tel que :

$$|b(\xi_1) - b(\xi_2)| \leq \gamma \, |\xi_1 - \xi_2| \qquad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

iii) $b(0) = 0$.

Démonstration. Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$. Par définition de l'opérateur b, il existe $w^{\xi_i} \in$

$H^1_{\#}(Y)$ pour $i = 1, 2$ tel que :

$$\begin{cases} \int_Y (a(y, \xi_i + Dw^{\xi_i}(y)), Dv(y))dy = 0 \quad \forall v \in H^1_{\#}(Y) \\ b(\xi_i) = \int_Y a(y, \xi_i + Dw^{\xi_i}(y))dy \end{cases}$$

i) Montrons que b est monotone : Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2) &= (\int_Y a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y))dy - \int_Y a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y))dy, \xi_1 - \xi_2) \\
&= \int_Y (a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)), \xi_1 - \xi_2)dy \\
&= \int_Y (a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)), (\xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) \\
&\quad -(\xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)))dy - \int_Y (a(y\ \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) \\
&\quad -a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)), Dw^{\xi_1}(y))dy + \int_Y (a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) \\
&\quad -a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)), Dw^{\xi_2}(y))dy \\
&\geq \alpha \int_Y \left|(\xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - (\xi_2 + Dw^{\xi_2}(y))\right|^2 dy \geq 0.
\end{aligned}$$

ii) Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
|b(\xi_1) - b(\xi_2)|^2 &= \left| \int\limits_Y a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y))dy - \int\limits_Y a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y))dy \right|^2 \\
&\leq \left(\int\limits_Y \left| a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)) \right| dy \right)^2 \\
&\leq \left(\beta \int\limits_Y \left| \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y) - \xi_2 - Dw^{\xi_2}(y) \right| dy \right)^2 \\
&\leq \beta^2 \left(\int\limits_Y \left| \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y) - \xi_2 - Dw^{\xi_2}(y) \right|^2 dy \right) \\
&\leq \frac{\beta^2}{\alpha} \Bigg(\int\limits_Y (a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)), (\xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) \\
&\quad -(\xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)))dy \Bigg) \\
&\leq \frac{\beta^2}{\alpha} (b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \\
&\leq \frac{\beta^2}{\alpha} \left|(b(\xi_1) - b(\xi_2)\right| . \left|\xi_1 - \xi_2\right|,
\end{aligned}$$

d'où

$$|b(\xi_1) - b(\xi_2)| \leq \frac{\beta^2}{\alpha} |\xi_1 - \xi_2| \qquad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

iii) $b(0) = 0$ car $a(x, 0) = 0$ p.p $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Démonstration du Théorème 1.1. On va procéder comme suit :

Etape 1

D'après ce qui précède, le problème (1.2) admet une solution unique.

Etape 2 (*Estimation à priori !*)

La formulation variationnelle du problème (1.2) est donnée par :

$$\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Dv)dx = \langle f_\epsilon, v \rangle_{E^* E} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

en prenant $v = u_\epsilon$, on obtient :

$$\alpha \|u_\epsilon\|_E^2 = \alpha \int_\Omega |Du_\epsilon|^2 \, dx \leq \int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Du_\epsilon)dx = \langle f_\epsilon, u_\epsilon \rangle_{E^* E} \leq \|f_\epsilon\|_{E^*} . \|u_\epsilon\|_E .$$

$$\Rightarrow \|u_\epsilon\|_E \leq c.$$

Posons : $\xi^\epsilon = a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)$

$$\begin{aligned} \|\xi^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} &= \int_\Omega \left| a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon) \right|^2 dx \\ &= \int_\Omega \left| a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon) - a(\frac{x}{\epsilon}, 0) \right|^2 dx \\ &\leq \beta^2 \int_\Omega |Du_\epsilon|^2 \, dx \leq C. \end{aligned}$$

Conclusion : On peut extaire deux sous suite de $(u_\epsilon)_\epsilon$ et de $(\xi^\epsilon)_\epsilon$, qu'on note encore par $(u_\epsilon)_\epsilon$ et $(\xi^\epsilon)_\epsilon$ tels que :

$$u_\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} \hat{u} \text{ dans } H_0^1(\Omega) \tag{1.10}$$

$$\xi^\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} \hat{\xi} \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \tag{1.11}$$

avec $\hat{\xi}$ satisfaisant :

$$- div\hat{\xi} = f \text{ dans } \Omega \tag{1.12}$$

Si nous montrons que $\hat{\xi} = b(D\hat{u})$ p.p $x \in \Omega$ alors par unicité de la solution du problème (1.7) nous concluons que $\hat{u} = u_*$.

Etape 3

Maintenant, tout revient à montrer que

$$\hat{\xi} = b(D\hat{u}) \quad \text{p.p } x \in \Omega.$$

Pour cela, définissons une suite de fonctions $w_\epsilon^\eta \in H^1(\Omega)$, Y-périodiques, comme suit :

Pour $\eta \in \mathbb{R}^n$, considérons la solution $w^\eta \in H^1_\#(Y)$ du problème (1.9).

Notons encore par w^η son extension Y-périodique à tout $\mathbb{R}^n$, et d'après le Lemme 0.2, nous pouvons prouver que $w^\eta \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (a(x, \eta + Dw^\eta(x)), Dv(x))dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ (voir Lemme 0.3)} \quad (1.13)$$

Soit :

$$w_\epsilon^\eta(x) = (\eta, x) + \epsilon w^\eta(\frac{x}{\epsilon}) \quad \text{p.p } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.14)$$

On a :

$$Dw_\epsilon^\eta(x) = \eta + Dw^\eta(\frac{x}{\epsilon}) \quad \text{p.p } x \in \mathbb{R}^n.$$

Puisque w^η est Y-périodique, alors $w^\eta(\frac{x}{\epsilon}) \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} \mathcal{M}_Y(w^\eta)$.

donc

$$w_\epsilon^\eta(x) - (\eta, x) = \epsilon w^\eta(\frac{x}{\epsilon}) \underset{\epsilon \to 0}{\rightarrow} 0,$$

d'où le résultat suivant :

$$w_\epsilon^\eta \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} (\eta, x) \quad \text{dans } H^1(\Omega). \quad (1.15)$$

Calculons maintenant la quantité suivante :

$$\int_Y \frac{\partial w^\eta}{\partial y_k}(y)dy = \int_{(]0,1[)^{n-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial w^\eta}{\partial y_k}(y)dy_k \right) dy_1 dy_2 ... dy_{k-1} dy_{k+1} ... dy_n.$$

Le fait que $w^\eta \in H^1_\sharp(Y)$ permet de déduire que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial w^\eta}{\partial y_k}(y)dy_k &= w^\eta(y_1,...,y_{k-1},1,y_{k+1},...,y_n) - w^\eta(y_1,...,y_{k-1},0,y_{k+1},...,y_n) = 0\\ &\Longrightarrow \int_0^1 \frac{\partial w^\eta}{\partial y_k}(y)dy_k = 0.\\ &\Longrightarrow \int_Y \frac{\partial w^\eta}{\partial y_k}(y)dy = 0.\end{aligned}$$

Soit $\psi \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ càd $\psi = (\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)$ / $\psi_k \in L^2(\Omega)$ pour $1 \leq k \leq n$.

$$\int_\Omega (Dw^\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \psi(x))dx = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \frac{\partial w^\eta}{\partial x_k}(\frac{x}{\epsilon}).\psi_k(x)\,dx \underset{\epsilon\to 0}{\to} \sum_{k=1}^n \int_\Omega \left(\int_Y \frac{\partial w^\eta}{\partial y_k}(y)dy\right).\psi_k(x)\,dx = 0,$$

$$\Rightarrow Dw^\eta_\epsilon(x) - \eta = Dw^\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} 0 \text{ faiblement dans } L^2(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

$$\Rightarrow Dw^\eta_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} \eta \text{ faiblement dans } L^2(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

Finalement, le faite que $a(.,.)(\frac{x}{\epsilon})$ est Y-périodique, on déduit que :

$$a(\frac{x}{\epsilon}, Dw^\eta_\epsilon(x)) = a(.,\eta+Dw^\eta(.))(\frac{x}{\epsilon}) \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} \frac{1}{|Y|}\int_Y a(y,\eta+Dw^\eta(y))dy = b(\eta) \text{ dans } L^2(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

Puisque a est monotone, on a :

$$\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon(x)) - a(\frac{x}{\epsilon}, Dw^\eta_\epsilon(x)), Du_\epsilon(x) - Dw^\eta_\epsilon(x))\varphi(x)dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0.$$

Posons :

$$\begin{aligned}U_\epsilon(x) &= u_\epsilon(x) - w^\eta_\epsilon(x) \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} \hat{u}(x) - (\eta, x) = U(x) \text{ dans } H^1(\Omega)\\ G_\epsilon(x) &= a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon(x)) - a(\frac{x}{\epsilon}, Dw^\eta_\epsilon(x)) \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} \hat{\xi}(x) - b(\eta) = G(x) \text{ dans } L^2(\Omega;\mathbb{R}^n).\\ -div(G_\epsilon(x)) &= -div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon(x))) - div(a(\frac{x}{\epsilon}, Dw^\eta_\epsilon(x)))\end{aligned}$$

Or

$$-div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon(x))) = f_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\to} f = -div\hat{\xi} \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \tag{1.16}$$

et

$$-div(a(\frac{x}{\epsilon}, Dw^\eta_\epsilon(x))) = 0 \underset{\epsilon\to 0}{\to} 0 = -div(b(\eta)) \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \tag{1.17}$$

$$(1.16) \text{ et } (1.17) \Rightarrow -divG_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\to} -divG \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega). \tag{1.18}$$

Puisque Les hypothèses du Lemme de compacité par compensation sont vérifiées, nous obtenons après passage à la limite quand $\epsilon \to 0$

$$\int_\Omega (\hat{\xi}(x) - b(\eta), D\hat{u}(x) - \eta)\varphi(x)dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0.$$

Par conséquent :

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^n : (\hat{\xi}(x) - b(\eta), D\hat{u}(x) - \eta) \geq 0 \quad \text{p.p } x \in \Omega.$$

En particulier pour $(\eta_m) \subset \overline{E} = \mathbb{R}^n \Rightarrow (\hat{\xi}(x) - b(\eta_m), D\hat{u}(x) - \eta_m) \geq 0$ p.p $x \in \Omega$ et $\forall m \in \mathbb{N}$. Enfin, puisque b est continu, nous obtenons :

$$(\hat{\xi}(x) - b(\eta), D\hat{u}(x) - \eta) \geq 0 \quad \text{p.p } x \in \Omega \text{ et } \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Finalement, le fait que b est un opérateur maximal monotone, on déduit que :

$$\hat{\xi}(x) = b(D\hat{u}(x)) \quad \text{p.p } x \in \Omega.$$

$\square$

Proposition 1.2. L'opérateur $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par (1.8) satisfait la propriété suivante :

$$(b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \geq \alpha \left|\xi_1 - \xi_2\right|^2 \qquad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Soit $\xi_i \in \mathbb{R}^n$ pour $i = 1, 2$.
Pour $i = 1, 2$, considérons $(w_\epsilon^{\xi_i}) \in H^1(\Omega)$ / $w_\epsilon^{\xi_i}(x) = (\xi_i, x) + \epsilon w^{\xi_i}(\frac{x}{\epsilon})$.
D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{cases} w_\epsilon^{\xi_i} \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} (\xi_i, x) \quad \text{dans } H^1(\Omega) \\ Dw_\epsilon^{\xi_i} \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} \xi_i \qquad \text{dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \\ a(\frac{x}{\epsilon}, Dw_\epsilon^{\xi_i}(x)) \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} \frac{1}{|Y|}\int_Y a(y, \xi_i + Dw^{\xi_i}(y))dy = b(\xi_i) \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Puisque a est monotone, on a : $\forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)$; $\phi \geq 0$

$$\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Dw_\epsilon^{\xi_1}(x)) - a(\frac{x}{\epsilon}, Dw_\epsilon^{\xi_2}(x)), Dw_\epsilon^{\xi_1}(x) - Dw_\epsilon^{\xi_2}(x))\phi(x)dx \geq \alpha \int_\Omega \left|Dw_\epsilon^{\xi_1}(x) - Dw_\epsilon^{\xi_2}(x)\right|^2 \phi(x)dx$$

Quand $\epsilon \to 0$ et après avoir appliqué le Lemme de compacité par compensation, nous obtenons :

$$\int_\Omega (b(\xi_1)-b(\xi_2), \xi_1-\xi_2)\phi(x)dx \geq \alpha \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega \left|Dw_\epsilon^{\xi_1}(x) - Dw_\epsilon^{\xi_2}(x)\right|^2 \phi(x)dx \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega); \phi \geq 0.$$

Posons :

$$\begin{aligned} \Psi_\epsilon(x) &= (Dw_\epsilon^{\xi_1}(x) - Dw_\epsilon^{\xi_2}(x))\overline{\varphi}(x) \text{ pour } \overline{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega) \ / \ |\overline{\varphi}|^2 = \varphi. \\ &\Rightarrow \Psi_\epsilon \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

En plus on a :

$$\Psi_\epsilon(x) = (Dw_\epsilon^{\xi_1}(x) - Dw_\epsilon^{\xi_2}(x))\overline{\varphi}(x) \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} \Psi(x) = (\xi_1 - \xi_2)\overline{\varphi}(x) \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Maintenant il suffit d'utiliser le Théorème 0.1 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_\Omega (b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2)\phi(x)dx &\geq \alpha \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega \left|Dw_\epsilon^{\xi_1}(x) - Dw_\epsilon^{\xi_2}(x)\right|^2 \phi(x)dx \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\xi_1 - \xi_2|^2 \phi(x)dx. \end{aligned}$$

Il résulte que

$$(b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2)\phi(x) \geq \alpha |\xi_1 - \xi_2|^2 \phi(x) \qquad \text{p.p } x \in \mathbb{R}^n$$

d'où

$$(b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \geq \alpha |\xi_1 - \xi_2|^2 \qquad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

□

Chapitre 2

Opérateurs monotones et convergence à deux échelles

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats de convergence à deux échelles. Pour plus de détails voir [15]. Dans la suite, on utilisera cette notion pour déterminer le problème homogénéisé du problème

$$-div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)) + |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon = f_\epsilon, \qquad u_\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et Y le cube unité de $\mathbb{R}^n$. Notons par $C_{per}(Y)$ l'ensemble des fonctions Y–périodiques, continues et définies sur $\mathbb{R}^n$, et $L^1(\Omega; C_{per}(Y))$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to C_{per}(Y)$ qui sont mesurables et vérifiant :

$$\int_\Omega \|f(x)\|_{C_{per}(Y)} \, dx < +\infty.$$

Toute fonction f dans $L^1(\Omega; C_{per}(Y))$ peut être identifiée à une fonction $f(x, y)$ définit sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ par $f(x, y) = f(x)(y)$.
Nous avons les caractérisations suivantes des fonctions dans $L^1(\Omega; C_{per}(Y))$:

Théorème 2.1. Soit $f(x,y) \in L^1(\Omega; C_{per}(Y))$. Alors $f(x, \frac{x}{\epsilon})$ est une fonction mesurable sur Ω tel que :

$$\left\| f(x, \frac{x}{\epsilon}) \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \| f(x,y) \|_{L^1(\Omega; C_{per}(Y))} = \int_\Omega \sup_{y\in Y} |f(x,y)| \, dx,$$

et

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega f(x, \frac{x}{\epsilon}) dx = \int_\Omega \int_Y f(x,y) dy dx.$$

Théorème 2.2. Soit $B_p(\Omega, Y)$, $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble des espaces $L^p(\Omega; C_{per}(Y))$, $L^p_{per}\left(Y; C(\overline{\Omega})\right)$, $C(\overline{\Omega}; C_{per}(Y))$, alors $B_p(\Omega, Y)$ a les propriétés suivantes :

- $B_p(\Omega, Y)$ est un espace de Banach séparable.
- $B_p(\Omega, Y)$ est dense dans $L^p(\Omega \times Y)$.
- Si $f(x,y) \in B_p(\Omega, Y)$ alors $f(x, \frac{x}{\epsilon})$ est une fonction mesurable sur Ω tel que :
$$\left\| f(x, \frac{x}{\epsilon}) \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \| f(x,y) \|_{B_p(\Omega, Y)}.$$
- Pour toute fonction $f(x,y) \in B_p(\Omega, Y)$ on a :
$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega \left| f(x, \frac{x}{\epsilon}) \right|^p dx = \int_\Omega \int_Y |f(x,y)|^p \, dy dx.$$

2.2 La convergence à deux échelles

Soit $p, q \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 2.1. Soit $(\epsilon_h)_h$ une suite réelle positive qui tend vers 0 quand $h \to \infty$, et soit $(u_\epsilon)_\epsilon$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$.
On dit que $(u_\epsilon)_\epsilon$ converge à deux échelles faiblement vers $u \in L^p(\Omega \times Y)$ ($u_\epsilon \overset{2}{\rightharpoonup} u$) si :

$$\int_\Omega u_\epsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx \underset{\epsilon\to 0}{\to} \int_\Omega \int_Y u(x,y) \phi(x,y) dy dx \ , \quad \forall \phi \in L^q(\Omega; C_{per}(Y)).$$

Remarque 2.1. La limite à deux échelles est unique, en effet : Supposons que $(u_\epsilon)_\epsilon$ est une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles faiblement vers u et

$v \in L^p(\Omega \times Y)$, avec $u \neq v$. Alors :

$$\int_\Omega u_\epsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx \underset{\epsilon\to 0}{\to} \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)dydx,$$

et

$$\int_\Omega u_\epsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx \underset{\epsilon\to 0}{\to} \int_\Omega\int_Y v(x,y)\phi(x,y)dydx,$$

et ceci $\forall\phi \in L^q(\Omega; C_{per}(Y))$. D'aprés les deux dérnières limites on a donc

$$\int_\Omega\int_Y (u(x,y) - v(x,y))\,\phi(x,y)dydx = 0,$$

d'où on conclut que :

$$u(x,y) = v(x,y) \text{ presque partout.}$$

Théorème 2.3. Si $(u_\epsilon)_\epsilon$ converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$, alors $(u_\epsilon)_\epsilon$ converge à deux échelles faiblement vers $u_1(x,y) = u(x)$.

Démonstration. Soit $\phi \in L^q(\Omega; C_{per}(Y))$,

$$\begin{aligned}
& \left|\int_\Omega u_\epsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx - \int_\Omega\int_Y u_1(x,y)\phi(x,y)dydx\right| \\
= & \left|\int_\Omega u_\epsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx - \int_\Omega\int_Y u_1(x,y)\phi(x,y)dydx + \int_\Omega u(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx - \int_\Omega u(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx\right| \\
\leq & \left|\int_\Omega [u_\epsilon(x) - u(x)]\,\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx\right| + \left|\int_\Omega u(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx - \int_\Omega\int_Y u_1(x,y)\phi(x,y)dydx\right| \\
\leq & \|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \left\|\phi(x,\frac{x}{\epsilon})\right\|_{L^q(\Omega)} + \left|\int_\Omega u(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx - \int_\Omega\int_Y u_1(x,y)\phi(x,y)dydx\right|.
\end{aligned}$$

D'aprés le Théorème 2.2, on conclut que $\left\|\phi(x,\frac{x}{\epsilon})\right\|_{L^q(\Omega)}$ est bornée, car $\phi \in L^q(\Omega; C_{per}(Y))$. Par suite on a :

$$\left\|\phi(x,\frac{x}{\epsilon})\right\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\phi(x,y)\|_{L^q(\Omega;C_{per}(Y))}, \tag{2.1}$$

et comme (u_ϵ) converge vers u dans $L^p(\Omega)$, alors on a :

$$\|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0. \tag{2.2}$$

Donc d'aprés (2.1) et (2.2) on a :

$$\|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \left\|\phi(x, \frac{x}{\epsilon})\right\|_{L^q(\Omega)} \to 0.$$

D'autre part si on pose :

$$f(x,y) = u(x)\,\phi(x,y),$$

alors on voit bien que $f(x,y) \in L^1(\Omega; C_{per}(Y))$. En utilisant le Théorème 2.1 on conclut que :

$$\left| \int_\Omega u(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx - \int_\Omega \int_Y u_1(x,y)\phi(x,y)dydx \right| \to 0.$$

On conclut alors que (u_ϵ) converge à deux échelles faiblement vers $u_1(x,y) = u(x)$. □

Théorème 2.4. Soit $(u_\epsilon)_\epsilon$ une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles faiblement vers $u \in L^p(\Omega \times Y)$. Alors :

$$u_\epsilon \rightharpoonup v \text{ faib. dans } L^p(\Omega) \text{ tel que } v(x) = \int_Y u(x,y)dy,$$

de plus, $(u_\epsilon)_\epsilon$ est bornée.

Démonstration. Par hypothèse, $(u_\epsilon)_\epsilon$ est une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles faiblement vers $u \in L^p(\Omega \times Y)$, c'est-à-dire :

$$\int_\Omega u_\epsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx \underset{\epsilon\to 0}{\to} \int_\Omega \int_Y u(x,y)\phi(x,y)dydx, \quad \forall \phi \in L^q(\Omega; C_{per}(Y)),$$

donc en particulier pour ϕ indépendante de y. On a donc

$$\int_{\Omega} u_{\epsilon}(x)\phi(x)dx \underset{\epsilon\to 0}{\to} \int_{\Omega}\int_{Y} u(x,y)\phi(x)dydx = \int_{\Omega}\phi(x)\left[\int_{Y} u(x,y)dy\right]dx = \int_{\Omega}\phi(x)v\,(x)\,dx.$$

Et puisque toute fonction dans $L^q(\Omega)$ peut être identifiée avec une fonction $\phi \in L^q\,(\Omega; C_{per}(Y))$ qui est indépendante de y, alors on conclut que :

$$u_{\epsilon} \rightharpoonup v \ \text{ faib. dans } L^p(\Omega) \text{ tel que } v(x) = \int_{Y} u(x,y)dy.$$

De plus on sait que toute suite qui converge faiblement est une suite bornée, ceci implique que $(u_{\epsilon})_{\epsilon}$ est bornée. □

Théorème 2.5. De toute suite bornée $(u_{\epsilon})_{\epsilon}$ de $L^p(\Omega)$ on peut en extraire une sous suite qui converge à deux échelles faiblement vers $u \in L^p\,(\Omega \times Y)$.

Démonstration. Soit $\phi \in L^q\,(\Omega; C_{per}(Y))$. En utilisant l'inégalité de Hölder et le Théorème 2.2 on obtient :

$$\left|\int_{\Omega} u_{\epsilon}(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx\right| \ \leq \ \|u_{\epsilon}\|_{L^p(\Omega)}\left\|\phi(x,\frac{x}{\epsilon})\right\|_{L^q(\Omega)} \leq c\,\|\phi(x,y)\|_{L^q(\Omega;C_{per}(Y))} \tag{2.3}$$

Ceci signifie que tout élément u_{ϵ} peut être identifié avec un élément U_{ϵ} dans l'espace dual $(L^q\,(\Omega; C_{per}(Y)))'$, c'est-à-dire :

$$\langle U_{\epsilon}, \phi\rangle = \int_{\Omega} u_{\epsilon}(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx. \tag{2.4}$$

La suite $(U_{\epsilon})_{\epsilon}$ est bornée dans $(L^q\,(\Omega; C_{per}(Y)))'$, en effet d'aprés (2.3) on a :

$$\|U_{\epsilon}\| = \sup_{\|\phi\|=1} |\langle U_{\epsilon}, \phi\rangle| = \sup_{\|\phi\|=1}\left|\int_{\Omega} u_{\epsilon}(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx\right| \leq c.$$

Et comme $L^q\,(\Omega; C_{per}(Y))$ est un espace de Banach sépararable, alors il existe une sous suite qu'on note toujours par (U_{ϵ}) et il existe $U \in (L^q\,(\Omega; C_{per}(Y)))^*$ tel que

$$U_{\epsilon} \rightharpoonup U \ \text{ faib.} * \ \text{dans } \ (L^q\,(\Omega; C_{per}(Y)))', \tag{2.5}$$

c'est-à-dire :

$$\int_\Omega u_\epsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\epsilon})dx = \langle U_\epsilon,\phi\rangle \to \langle U,\phi\rangle \quad \forall\phi\in L^q\left(\Omega;C_{per}(Y)\right). \tag{2.6}$$

Pour que le théorème soit verifié il faut monter que U est de la forme :

$$\langle U,\phi\rangle = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)dydx.$$

D'aprés (2.3) on a :

$$|\langle U_\epsilon,\phi\rangle| \leq c\left\|\phi(x,\frac{x}{\epsilon})\right\|_{L^q(\Omega)}. \tag{2.7}$$

En tenant compte de (2.6) et en utilisant le Théorème 2.2, on obtient en passant à la limite dans (2.7) :

$$|\langle U,\phi\rangle| \leq c\left\|\phi\right\|_{L^q(\Omega\times Y)} \qquad \forall\phi\in L^q\left(\Omega;C_{per}(Y)\right).$$

Puisque $L^q\left(\Omega;C_{per}(Y)\right)$ est dense dans $L^q\left(\Omega\times Y\right)$, alors pour toute $\phi\in L^q\left(\Omega\times Y\right)$ il existe une suite $\left(\phi_h\right)_h$ dans $L^q\left(\Omega;C_{per}(Y)\right)$ tel que $\phi_h\to\phi$ dans $L^q\left(\Omega\times Y\right)$. Ceci veut dire qu'on peut définir le prolongement $\tilde{U}$ de U à $L^q\left(\Omega\times Y\right)$ tel que

$$\langle\tilde{U},\phi\rangle = \lim_{h\to+\infty}\langle U,\phi_h\rangle.$$

Le théorème de représentation de Riesz nous garantie l'existence et l'unicité de $u\in L^p\left(\Omega\times Y\right)$ tel que

$$\langle\tilde{U},\phi\rangle = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)dydx \quad \forall\phi\in L^q\left(\Omega\times Y\right).$$

Donc, en particulier pour $\phi\in L^q\left(\Omega;C_{per}(Y)\right)$ on a :

$$\langle U,\phi\rangle = \langle\tilde{U},\phi\rangle = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)dydx.$$

□

Théorème 2.6. Soit $\left(u_\epsilon\right)_\epsilon$ une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles faiblement vers $u \in L^p(\Omega \times Y)$. Alors :

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \|u_\epsilon\|_{L^p(\Omega)} \geq \|u\|_{L^p(\Omega \times Y)} \geq \|v\|_{L^p(\Omega)},$$

où

$$v(x) = \int_Y u(x,y)dy.$$

Démonstration. Soit $(u_\epsilon)_\epsilon$ une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles faiblement vers $u \in L^p(\Omega \times Y)$. Et soit $(\phi_m)_m$ une suite dans $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$ tel que $\phi_m \to |u|^{p-2} u$ dans $L^q(\Omega \times Y)$. En appliquant l'inégalité de Young qui dit que si a et b sont deux nombres réels positifs alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ceci veut dire que :

$$u_\epsilon(x)\,\phi_m\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \leq \frac{|u_\epsilon(x)|^p}{p} + \frac{\left|\phi_m\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)\right|^q}{q},$$

ce qui implique :

$$pu_\epsilon(x)\,\phi_m\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \leq |u_\epsilon(x)|^p + \frac{p}{q}\left|\phi_m\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)\right|^q.$$

Or on a :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow \frac{p}{q} = p - 1,$$

donc :

$$\int_\Omega |u_\epsilon(x)|^p\,dx \geq p\int_\Omega u_\epsilon(x)\phi_m\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)dx - (p-1)\int_\Omega \left|\phi_m\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)\right|^q dx. \tag{2.8}$$

En passant à la limite en ϵ dans (2.8), on obtient :

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \|u_\epsilon\|^p_{L^p(\Omega)} \geq p\int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi_m(x,y)dydx - (p-1)\int_\Omega\int_Y |\phi_m(x,y)|^q\,dydx, \tag{2.9}$$

et en passant à la limite en m dans (2.9), on obtient :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\inf \|u_\epsilon\|^p_{L^p(\Omega)} \geq p\int_\Omega\int_Y |u(x,y)|^p\, dydx-(p-1)\int_\Omega\int_Y |u\,(x,y)|^p\, dydx= \|u\|^p_{L^p(\Omega\times Y)}\,.$$

D'autre part en utilisant l'inégalité de Jensen on a :

$$\|v\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega \left|\int_Y u(x,y)dy\right|^p dx \leq \int_\Omega\int_Y |u\,(x,y)|^p\, dydx = \|u\|^p_{L^p(\Omega\times Y)}\,.$$

$\square$

Définition 2.2. Soit (u_ϵ) une suite bornée dans $L^p(\Omega)$. On dit que u_ϵ converge à deux éhelles fortement vers $u\in L^p(\Omega\times Y)$ ($u_\epsilon \overset{2}{\to} u$) si

$$\int_\Omega u_\epsilon(x)v_\epsilon(x)dx \underset{\epsilon\to 0}{\to} \int_\Omega\int_Y u(x,y)v(x,y)dydx,$$

pour toute suite bornée $v_\epsilon\in L^q(\Omega)$ tel que v_ϵ converge à deux échelles faiblement vers v.

Lemme 2.1. La convergence à deux échelles faible $u_\epsilon \overset{2}{\rightharpoonup} u$, munit de la relation

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |u_\epsilon|^p\, dx = \int_\Omega\int_Y |u|^p\, dydx,$$

est équivalente à la convergence à deux échelles forte $u_\epsilon \overset{2}{\to} u$.

2.2.1 La convergence à deux échelles dans les espaces de Sobolev

Dans toute la partie précédente on a étudié la convergence à deux échelles dans les espaces $L^p(\Omega)$. Passons maintenant à l'étude dans les espaces de Sobolev. Pour cela rappelons que $W^{1,p}_\sharp(Y)$ est un sous ensemble de $W^{1,p}(Y)$ contenant les fonctions de valeur moyenne nulle et qui ont la même trace sur les faces opposées de Y. Rappelons aussi que si f est une fonction de $W^{1,p}_\sharp(Y)$, alors f est prolongeable par périodicité à un élément de $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Notons cet élément toujours par f.

Théorème 2.7. Soit $(u_\epsilon)_\epsilon$ une suite dans $W^{1,p}(\Omega)$ telle que :

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \text{ faib. dans } W^{1,p}(\Omega).$$

Alors (u_ϵ) converge à deux échelles faiblement vers u, et il existe une sous suite $(u_{\epsilon'})$ et $u_1 \in L^p\left(\Omega; W^{1,p}_\sharp(Y)\right)$ tel que $(Du_{\epsilon'})$ converge à deux échelles faiblement vers $Du + D_y u_1$.

Démonstration. Puisque toute suite qui converge faiblement est une suite bornée, alors on conclut que $(u_\epsilon)_\epsilon$ et $(Du_\epsilon)_\epsilon$ sont bornées dans $L^p(\Omega)$ et $[L^p(\Omega)]^n$ respectivement. En utilisant le Théorème 2.5 on déduit qu'il existe une sous suite qu'on note toujours par $(u_\epsilon)_\epsilon$, et $u_0(x,y) \in L^q(\Omega \times Y)$ et $U(x,y) \in [L^p(\Omega)]^n$ telles que $\forall \phi(x,y) \in \mathcal{D}\left(\Omega; C^\infty_{per}(Y)\right)$ et $\forall \Phi(x,y) \in \left[\mathcal{D}\left(\Omega; C^\infty_{per}(Y)\right)\right]^n$, on a :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega u_\epsilon(x)\phi(x, \frac{x}{\epsilon})dx = \int_\Omega \int_Y u_0(x,y)\phi(x,y)dydx,$$

et

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \left(Du_\epsilon(x), \Phi(x, \frac{x}{\epsilon})\right) dx = \int_\Omega \int_Y \left(U(x,y), \Phi(x,y)\right) dydx. \tag{2.10}$$

Le Théorème 2.4 nous dit que :

$$u(x) = \int_Y u_0(x,y)dy.$$

Donc si on montre que u_0 ne dépend pas de y, alors par l'unicité de la limite faible on conclut que toute la suite converge à deux échelles faiblement vers u. En effet, intégrons par parties le terme suivant :

$$\epsilon \int_\Omega \left(Du_\epsilon(x), \Phi(x, \frac{x}{\epsilon})\right) dx = -\int_\Omega u_\epsilon(x) \left[\epsilon div_x \Phi(x, \frac{x}{\epsilon}) + div_y \Phi(x, \frac{x}{\epsilon})\right] dx.$$

En passant à la limite on obtient :

$$0 = -\int_\Omega \int_Y u_0(x,y) div_y \Phi(x,y)dydx.$$

Ceci implique que u_0 ne dépend pas de y. Il reste à montrer que :

$$U(x,y) = Du_\epsilon(x) + D_y u_1(x,y).$$

Soit Φ une fonction telle que :

$$div_y \Phi(x,y) = 0.$$

Alors en intégrant par parties le membre gauche du (2.10) on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_Y (U(x,y), \Phi(x,y))\, dydx &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \left(Du_\epsilon(x), \Phi(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) dx \\
&= -\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega u_\epsilon(x) \left[div_x \Phi(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon div_y \Phi(x, \frac{x}{\epsilon}) \right] dx \\
&= -\int_\Omega \int_Y u(x,y) div_x \Phi(x,y) dydx \\
&= \int_\Omega \int_Y \left(Du(x), \Phi(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) dydx.
\end{aligned}$$

Ainsi pour $\Phi(x,y) \in \left[\mathcal{D}\left(\Omega; C^\infty_{per}(Y)\right) \right]^n$ telle que :

$$div_y \Phi(x,y) = 0,$$

on a :

$$\int_\Omega \int_Y \left(U(x,y) - Du(x), \Phi(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) dydx = 0.$$

Ceci nous permet de conclure que $U(x,y) - Du(x)$ est un gradient, c'est-à-dire il existe $u_1(x,y) \in L^p\left(\Omega; W^{1,p}_\sharp(Y)\right)$ telle que :

$$D_y u_1(x,y) = U(x,y) - Du(x).$$

$\square$

2.3 Le problème homogénéisé par la méthode de la convergence à deux échelles

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, où la mesure de Lebesgue de la frontière est zero et $Y = [0,1)^N$ le cube demi-ouvert dans $\mathbb{R}^N$.
Soit $a : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction tel que $a(.,\xi)$ est $Y-$périodique et mesurable pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. De plus, supposons qu'il exsite des constantes $c_1, c_2 > 0$, α, et β, avec $0 \leq \alpha \leq \min\{1, p-1\}$ et $\max\{p, 2\} \leq \beta < \infty$ tel que a satisfait les hypothèses suivantes :

$$a(y, 0) = 0, \tag{2.11}$$

$$|a(y,\xi_1) - a(y,\xi_2)| \leq c_1(1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{p-1-\alpha} |\xi_1 - \xi_2|^{\alpha}, \tag{2.12}$$

$$(a(y,\xi_1) - a(y,\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \geq c_2(1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{p-\beta} |\xi_1 - \xi_2|^{\beta}, \tag{2.13}$$

pour p.p. $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$.
On considère l'équation

$$-\,div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)) + |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon = f_\epsilon, \qquad u_\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{2.14}$$

où a satisfait les conditions (2.11)-(2.12)-(2.13), $f_\epsilon \in L^q(\Omega)$.
On rappelle par définition que $u_\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution de (2.14) si

$$\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), D\varphi)dx + \int_\Omega |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon \varphi dx = \int_\Omega f_\epsilon \varphi dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.15}$$

D'après le Théorème 13 (voir [16]), (2.14) admet une solution unique.
Dans [16], les auteurs ont démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.8. Supposons que a satisfait les conditions (2.11)-(2.12)-(2.13). Soit (Du_ϵ) une suite bornée dans $(L^p(\Omega))^N$ qui converge à deux échelles faiblement vers $z \in (L^p(\Omega \times Y))^N$ et supposons que $a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)$ converge à deux échelles faiblement vers $\overline{a}(x,y) \in (L^q(\Omega \times Y))^N$. Alors

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Du_\epsilon)dx \geq \int_\Omega \int_Y (\overline{a}(x,y), z(x,y))dydx.$$

En plus, si

$$\liminf_{\delta\to 0}\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Du_\epsilon)dx = \int_\Omega\int_Y (\overline{a}(x,y), z(x,y))dydx,$$

alors

$$\overline{a}(x,y) = a(x, z(x,y)).$$

Théorème 2.9. Supposons que a satisfait les conditions (2.11)-(2.12)-(2.13). Soit (Du_ϵ) une suite bornée dans $(L^p(\Omega))^N$ qui converge à deux échelles faiblement vers $z \in (L^p(\Omega\times Y))^N$, $a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)$ converge à deux échelles faiblement vers $\overline{a} \in (L^q(\Omega\times Y))^N$, et $|Du_\epsilon|^{p-2} Du_\epsilon$ converge à deux échelles faiblement vers $v \in (L^q(\Omega\times Y))^N$. Si

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Du_\epsilon)dx = \int_\Omega\int_Y (\overline{a}(x,y), z(x,y))dydx, \tag{2.16}$$

alors la suite Du_ϵ converge à deux échelles fortement vers z.

A l'aide de ces deux derniers résultats, on peut montrer le théorème suivant :

Théorème 2.10. On suppose que $(f_\epsilon) \in L^q(\Omega)$ converge fortement vers $f \in L^q(\Omega)$. Soit (u_ϵ) une suite de solutions de (2.14). Alors (u_ϵ) converge fortement vers u où u est la solution du problème homogénéisé et (Du_ϵ) converge à deux échelles fortement vers $Du+D_yu_1$, où $u_1 \in L^p\left(\Omega; W^{1,p}_\sharp(Y)\right)$ est l'unique solution du problème périodique suivant

$$\int_Y a(x, Du(x) + D_yu_1(x,y))Dw(y)dx = 0, \forall w \in C^\infty_{per}(Y). \tag{2.17}$$

Démonstration. Choisissons $u_\epsilon \in W^{1,p}_0(\Omega)$ comme fonction test dans (2.14) qui donne

$$\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Du_\epsilon)dx + \int_\Omega |u_\epsilon|^p\, dx = \int_\Omega f_\epsilon u_\epsilon dx. \tag{2.18}$$

L'hypothèse de monotonicité (2.13) de a et l'inégalité de Hölder nous donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\epsilon|^p \, dx &\leq \int_\Omega c_2(1+|Du_\epsilon|)^{p-\beta} |Du_\epsilon|^\beta \, dx + \int_\Omega |u_\epsilon|^p \, dx \\ &\leq \int_\Omega f_\epsilon u_\epsilon dx \leq \|f_\epsilon\|_{L^q(\Omega)} \|u_\epsilon\|_{L^p(\Omega)} .\end{aligned} \tag{2.19}$$

Puisque (f_ϵ) est fortement convergente dans $L^q(\Omega)$ et donc bornée dans $L^q(\Omega)$, on voit que la suite (u_ϵ) est bornée dans $L^p(\Omega)$. On peut en extraire une sous-suite u_ϵ tel que u_ϵ converge à deux échelles faiblement vers $u \in L^p(\Omega \times Y)$.
On obtient

$$\int_\Omega c_2(1+|Du_\epsilon|)^{p-\beta} |Du_\epsilon|^\beta \, dx \leq k.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder inversé (avec $p/(p-\beta)$ et $0 < p/\beta < 1$) on obtient

$$\begin{gathered}(\|1\|_{(L^p(\Omega))^N} + \|Du_\epsilon\|_{(L^p(\Omega))^N})^{p-\beta} \|Du_\epsilon\|^\beta_{(L^p(\Omega))^N} \\ \leq \|1+|Du_\epsilon|\|^{p-\beta}_{(L^p(\Omega))^N} \|Du_\epsilon\|^\beta_{(L^p(\Omega))^N} \leq k.\end{gathered}$$

Si on pose : $\lambda = \|1\|_{(L^p(\Omega))^N}$, alors

$$(\lambda + \|Du_\epsilon\|_{(L^p(\Omega))^N})^{p-\beta} \|Du_\epsilon\|^\beta_{(L^p(\Omega))^N} \leq k.$$

Supposons que $\|Du_\epsilon\|_{(L^p(\Omega))^N} \geq \lambda$. Alors

$$(2\|Du_\epsilon\|_{(L^p(\Omega))^N})^{p-\beta} \|Du_\epsilon\|^\beta_{(L^p(\Omega))^N} \leq (\lambda + \|Du_\epsilon\|_{(L^p(\Omega))^N})^{p-\beta} \|Du_\epsilon\|^\beta_{(L^p(\Omega))^N} \leq k.$$

Ce qui nous donne l'estimation suivante

$$\|Du_\epsilon\|^p_{(L^p(\Omega))^N} \leq k2^{\beta-p}.$$

On peut extraire une sous-suite Du_ϵ tel que Du_ϵ converge à deux échelles faiblement vers $z \in (L^p(\Omega \times Y))^N$.
D'après Théorème 2.7 on déduit que $u(x,y) = u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $z(x,y) = Du(x) + D_y u_1(x,y)$ où $u_1 \in L^p\left(\Omega; W^{1,p}_\sharp(Y)\right)$.

La suite $(|u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon)$ est bornée dans $L^q(\Omega)$. Il existe $v \in L^q(\Omega \times Y)$ tel que $|u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon$ converge à deux échelles faiblement vers v.
L'hypothèse (2.13) implique que

$$\left|a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)\right| \leq c_1(1+|Du_\epsilon|)^{p-1-\alpha} |Du_\epsilon|^\alpha \leq c_1(1+|Du_\epsilon|)^{p-1} \leq 2^{p-1}c_1(1+|Du_\epsilon|^{p-1})$$

qui donne que $a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)$ est bornée dans $(L^q(\Omega))^N$. Il existe donc une sous-suite tel que $a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)$ converge à deux échelles faiblement vers $\overline{a} \in (L^q(\Omega \times Y))^N$. Choisissons $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ comme fonction test dans (2.14) et passons à la limite quand $\epsilon \to 0$ on obtient

$$\int_\Omega \int_Y (\overline{a}(x,y), D\varphi(x))dydx + \int_\Omega \int_Y v(x,y)\varphi(x)dydx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.20}$$

De plus , si $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\varphi_2 \in C_{per}^\infty(Y)$, alors

$$\begin{aligned}\epsilon \int_\Omega f_\epsilon \varphi_1(x)\varphi_2(\frac{x}{\epsilon})dx - \epsilon \int_\Omega |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon \varphi_1(x)\varphi_2(\frac{x}{\epsilon})dx \\ = \epsilon \int_\Omega a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)D(\varphi_1(x)\varphi_2(\frac{x}{\epsilon}))dx \\ = \epsilon \int_\Omega a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)D\varphi_1(x)\varphi_2(\frac{x}{\epsilon})dx \\ + \int_\Omega a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)\varphi_1(x)D\varphi_2(\frac{x}{\epsilon})dx.\end{aligned}$$

Passons à la limite nous obtenons

$$\int_\Omega \int_Y \overline{a}(x,y)\varphi_1(x)D\varphi_2(y)dydx = 0, \forall \varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega), \forall \varphi_2 \in C_{per}^\infty(Y). \tag{2.21}$$

(2.20), (2.21) et l'argument de densité entrainent que

$$\int_\Omega \int_Y \overline{a}(x,y)(Dw(x) + D_y w_1(x,y))dydx + \int_\Omega \int_Y vwdydx = \int_\Omega fwdx, \tag{2.22}$$

pour tout $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et pour tout $w_1 \in L^p\left(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y)\right)$.

Choisissons $w = u$ et $w_1 = u_1$ dans cette égalité, nous obtenons

$$\int_\Omega \int_Y \overline{a}(x,y)(Du(x) + D_y u_1(x,y))dydx + \int_\Omega \int_Y vudydx = \int_\Omega fudx. \tag{2.23}$$

De (2.15) on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Du_\epsilon)dx + \int_\Omega |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon u_\epsilon dx \right) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega f_\epsilon u_\epsilon dx = \int_\Omega fudx. \tag{2.24}$$

(2.23) et (2.24) nous donnent

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Du_\epsilon)dx + \int_\Omega |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon u_\epsilon dx \right)$$

$$= \int_\Omega \int_Y \overline{a}(x,y)(Du(x) + D_y u_1(x,y))dydx + \int_\Omega \int_Y vudydx. \tag{2.25}$$

Théorème 2.8 implique que

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Du_\epsilon)dx \geq \int_\Omega \int_Y \overline{a}(x,y)(Du(x) + D_y u_1(x,y))dydx, \tag{2.26}$$

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon u_\epsilon dx \geq \int_\Omega \int_Y vudydx \tag{2.27}$$

De (2.25), (2.26) et (2.27) on voit que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Du_\epsilon)dx = \int_\Omega \int_Y \overline{a}(x,y)(Du(x) + D_y u_1(x,y))dydx$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon u_\epsilon dx = \int_\Omega \int_Y vudydx.$$

Théorème 2.8 donne que $\overline{a}(x,y) = a(y, Du(x) + D_y u_1(x,y)),\ v = |u|^{p-2} u$. Le Lemme 2.1 entraine que (u_ϵ) converge à deux échelles fortement vers u et le Théorème 2.9 implique que (Du_ϵ) converge fortement à deux échelles vers $Du(x) + D_y u_1(x,y)$.

De plus, u et Du satisfont l'égalité suivante

$$\int_\Omega\int_Y (a(y, Du(x)+D_y u_1(x,y)), Dv(x)+D_y v_1(x,y))dydx+\int_\Omega\int_Y |u|^{p-2} uvdydx = \int_\Omega fvdx, \tag{2.28}$$

pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et pour tout $v_1 \in L^p\left(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y)\right)$.

Par séparation des variables, ce système est équivalent à : Trouver $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$-div(b(Du)) + |u|^{p-2} u = f,$$

où l'opérateur b est définie par

$$b(\xi) = \int_Y a(y, \xi + Dv^\xi(y))dy,$$

avec $v^\xi \in L^p\left(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y)\right)$ la solution du problème périodique :

$$\int_Y (a(y, \xi + Dv^\xi(y)), Dw(y))dy = 0, \qquad \forall w \in C_{per}^\infty(Y).$$

L'équation (3.37) admet une solution unique u qui est la limite de la suite mère u_ϵ. $\square$

Chapitre 3

Opérateurs monotones et convergence par rapport aux mesures

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous établissons quelques résultats de convergence dans la théorie de l'homogénéisation. Pour cela, nous avons utilisé quelques idées exsitantes dans la littérature comme dans [8], [28] et [16]. Les problèmes abordés dans ce travail sont principalement liés aux opérateurs monotones sous des hypothèses de continuité et de monotonicité. Les opérateurs introduits doivent satisfaire les hypothèses par rapport aux mesures singulières introduites dans [5]. Les résultats établis sont obtenus sans utilisation de la convergence à deux échelles comme dans [16]. Nous pouvons citer quelques références dans la littérature comme [23, 24, 25, 26, 31, 14, 15] où les auteurs ont obtenu des différents résultats dans la théorie de l'homogénéisation. Notons par le paramètre δ l'épaisseur d'une structure mince incluse dans une jonction de structures, et par ϵ un petit paramètre qui caractérise l'échelle de longueur microscopique de toute la structure. Dans ce travail, nous nous occupons de deux cas d'opérateurs monotones. Le premier cas où l'opérateur, noté a ne dépend pas du paramètre δ, et le second cas lorsque l'opérateur dépend de ce paramètre. Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la deuxième partie nous rappelons quelques définitions de convergence dans L^p espaces introduits dans [28]. La troisième partie est consacrée aux résultats de la convergence pour les deux cas d'opérateurs monotones. Pour le premier cas un lemme de densité (lemme 3.5) est posé et prouvé pour généraliser la notion de convergence à des problèmes non linéaires définies par des opérateurs monotones, lorsque δ tend vers zéro. Nous avons prouvé que la limité du gradient converge faiblement puis fortement lorsque l'épaisseur tend vers zéro, vers une certaine limite, et que le comportement asymptotique de l'opérateur dépend de cette limite. Les mêmes résultats ont été obtenus pour le second cas en utilisant la notion de convergence défini en deuxième partie. Nous avons prouvé que l'opérateur limite satisfaisait aux mêmes conditions de monotonicité et de continuité. Nous l'avons illustré en donnant un exemple. Enfin, dans la partie 4, nous considérons le problème $-div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta})) + |u_{\epsilon,\delta}|^{p-2} u_{\epsilon,\delta} = f_{\epsilon,\delta}$ avec $(u_{\epsilon,\delta}, Du_{\epsilon,\delta}) \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta})$, où a satisfait les hypothèses de Lipschitz-continuité et de monotonicité. Le problème homogénéisé correspondant, lorsque le paramètre ϵ tend vers zéro avec δ fixé, est introduit. Nous avons prouvé une certaine convergence du problème lorsque δ tend vers zéro avec un ϵ fixé. Ensuite, sous certaines hypothèses, nous avons montré la commutativité des diagrammes correspondants.

3.2 Motivation

En 2002, G. A. Chechkin, V. V. Jikov, D. Lukkassen et A. L. Piatnitski (voir [5]) ont développé une nouvelle approche à l'homogénéisation des problèmes posés sur des réseaux et des jonctions de structures périodiques. Par rapport à la technique standard utilisée en homogénéisation, leur approche permet de traiter non seulement le cas classique correspondant à des structures minces, mais aussi le cas où on a des constructions de structures infiniment minces impliquant des mesures singulières. Leur méthode permet de réduire essentiellement des calculs dans diverses applications. Ils considèrent des problèmes scalaires et comparent deux différentes méthodes d'homogénéisation pour des réseaux et des jonctions de structures périodiques. Ils notent par δ le petit paramètre qui caractérise l'épaisseur fixée des structures minces ($\delta-$structures), et par ϵ un autre petit paramètre qui est utilisé pour caractériser l'échelle microscopique de toute la construction. Ils considèrent un problème homogénéisé en introduisant une mesure $\mu_{\epsilon,\delta}(dx) = \epsilon^2\mu_\delta(\epsilon^{-1}dx)$ avec μ_δ une mesure sur $\delta-$structure. Ils considèrent aussi un problème homogénéisé " singulier " en introduisant une mesure $\mu_\epsilon(dx) = \epsilon^2\mu(\epsilon^{-1}dx)$ avec μ une mesure $Y-$périodique où $\mu(Y) = 1$ (Y est la cellule unité de référence). Ils supposent que la mesure μ est la limite faible de μ_δ quand $\delta \to 0$. Ils notent par $A_{\epsilon,\delta}$, $A_\epsilon^{\sin g}$, $A_\delta^{\hom}$ et $A_0^{\hom}$ la matrice des coéfficients de l'opérateur original du premier problème, la matrice des coéfficients du problème singulier, la matrice constante des coéfficients de l'opérateur homogénéisé du premier problème et la matrice effective du problème singulier homogénéisé respectivement. Ils ont montré les convergences posées dans le diagramme (ci-dessous) et ont montré que le diagramme correspondant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A_{\epsilon,\delta} & \xrightarrow[\delta \to 0]{} & A_\epsilon^{\sin g} \\ \epsilon \downarrow\downarrow 0 & & \epsilon \downarrow\downarrow 0 \\ A_\delta^{\hom} & \xrightarrow[\delta \to 0]{} & A_0^{\hom} \end{array}$$

3.2.1 Définition

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, et supposons que μ est une mesure de Probabilité sur Ω. L'espace $L^2(\Omega, d\mu)$ est défini tel que

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 \, d\mu < +\infty.$$

Nous introduisons l'espace $H^1(\Omega, d\mu)$ comme suit :

Définition 3.1. On dit qu'une fonction $u \in H^1(\Omega, d\mu)$ s'il existe (u_n) une suite dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, et $\bar{z} \in (L^2(\Omega, d\mu))^2$ tel que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} u \text{ dans } L^2(\Omega, d\mu) \tag{3.1}$$

et

$$Du_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \bar{z} \ \text{ dans } \left(L^2(\Omega, d\mu)\right)^2 \tag{3.2}$$

On dit alors que $\bar{z}$ est le gradient de u et on le note par Du.

3.2.2 Segments

Soit $I = \{x = (x_1, x_2) \ / \ a \leq x_1 \leq b \ ; \ x_2 = 0\}$ un segment dans $\mathbb{R}^2$, et supposons que $I \subset \Omega$.
Pour $\delta > 0$ suffisament petit, considérons la barre

$$I_\delta := \{x = (x_1, x_2) \ / \ a < x_1 < b \ ; \ -\delta < x_2 < \delta\} \subset \Omega.$$

Nottons par μ_δ la mesure de Probabilité uniforme sur I_δ :

$$\mu_\delta(dx) = \frac{\chi_{I_\delta}(x)}{2\delta(b-a)} dx_1 dx_2. \tag{3.3}$$

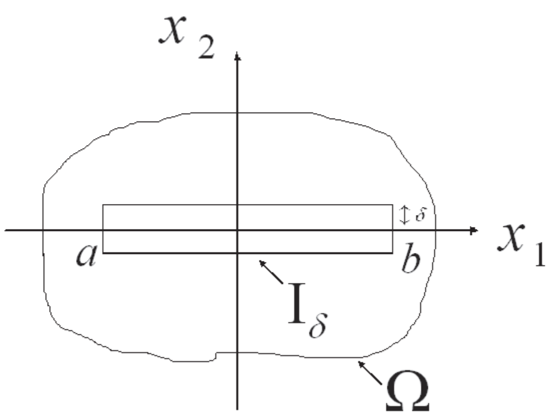

Figure 3.1 – Segment.

Montrons que $\mu_\delta \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} \mu = \widehat{\mu} \otimes \delta$ où $\widehat{\mu}$ représente la mesure de Probabilité uniforme sur $[a, b]$, et δ la mesure de Dirac en 0.

Soit φ une fonction continue et bornée définie sur Ω :

$$\int_\Omega \varphi(x)d\mu_\delta(x) - \int_\Omega \varphi(x)d\mu(x) = \int_\Omega \varphi(x)d\mu_\delta(x) - \int_\Omega \varphi(x)d\left(\widehat{\mu}\otimes\delta\right)(x) \quad \text{où} \quad x=(x_1,x_2)$$

En développant les calculs, on trouve que :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(x_1,x_2)d\mu_\delta(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\delta\,(b-a)}\int_a^b\int_{-\delta}^{+\delta}\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2\\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta}\varphi(x_1,x_2)dx_2\right)dx_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(x_1,x_2)d\left(\widehat{\mu}\otimes\delta\right)(x_1,x_2) &= \int_a^b\left(\int_{\{0\}}\varphi(x_1,x_2)d\delta\,(x_2)\right)d\widehat{\mu}(x_1)\\ &= \int_a^b \varphi(x_1,0)d\widehat{\mu}\,(x_1)\\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(x_1,0)dx_1.\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\int_\Omega \varphi d\mu_\delta - \int_\Omega \varphi d\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta}\varphi(x_1,x_2)dx_2\right)dx_1 - \frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(x_1,0)dx_1$$

Posons : $\hat{x}=\dfrac{x_2}{\delta}\Rightarrow dx_2=\delta d\hat{x}$ et $-1<\hat{x}<+1$.
On a :

$$\int_\Omega \varphi d\mu_\delta - \int_\Omega \varphi d\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(x_1,\delta\hat{x})d\hat{x}\right)dx_1 - \frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(x_1,0)dx_1$$

Puisque φ est borné $\Rightarrow |\varphi|\leq M$.
Donc

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(x_1,\delta\hat{x})d\hat{x}\right)dx_1\right) &= \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\lim_{\delta\to 0}\varphi(x_1,\delta\hat{x})d\hat{x}\right)dx_1\right)\\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(x_1,0)d\hat{x}\right)dx_1\\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(x_1,0)dx_1\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \varphi(x_1,x_2)d\mu_\delta(x_1,x_2)=\int_\Omega \varphi(x_1,x_2)d\mu(x_1,x_2).$$

Considérons une famille de fonctions u_δ tel que

$$\int_\Omega \left(u_\delta^2+|Du_\delta|^2\right)d\mu_\delta\leq c. \tag{3.4}$$

Alors (voir [23]), il existe $u_0\in L^2(\Omega,d\mu)$, et $z=(z_1,z_2)\in\left(L^2(\Omega,d\mu)\right)^2$ tel que $u_\delta\rightharpoonup u_0$ et $Du_\delta\rightharpoonup z$ faiblement quand $\delta\to 0$.
Cette dernière convergence est définit comme suit : $\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\forall\psi\in(C_0^\infty(\mathbb{R}^2))^2$

$$\int_\Omega u_\delta\varphi d\mu_\delta \underset{\delta\to 0}{\to}\int_\Omega u_0\varphi d\mu \tag{3.5}$$

$$\int_\Omega (Du_\delta,\psi)d\mu_\delta \underset{\delta\to 0}{\to}\int_\Omega (z,\psi)d\mu \tag{3.6}$$

Proposition 3.1. Pour la mesure μ définie dans (3.5), le gradient d'une fonction $u\in H^1(\Omega,d\mu)$ n'est pas unique.

Démonstration. Montrons que pour une fonction $u=u(x_1)$, $u(x_1)\in H^1([a,b])$, considérée comme une fonction de deux variables (x_1,x_2), le gradient correspondant à la forme :

$$Du=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},w(x_1)\right)$$

où w est une fonction arbitraire de $L^2(\Omega,d\mu)$.
Posons :

$$u_n(x_1,x_2)\equiv u(x_1)+x_2w(x_1)$$

avec u et w soient assez régulières.
Nous obtenons la convergence forte $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} u$ dans $L^2(\Omega,d\mu)$. De plus

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right|_{x_2=0}\to\frac{\partial u}{\partial x_1},\qquad \left.\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}\to w(x_1).$$

Par la définition 3.1, $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2),w(x_1)\right)$ est le gradient de u, $u\in H^1(\Omega,d\mu)$ et w quelconque. $\square$

Lemme 3.1. La fonction u_0 définie dans (3.5) appartient à $H^1(\Omega, d\mu)$. De plus,

$$z = Du_0. \tag{3.7}$$

Démonstration. Montrons que

$$z_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x_1}. \tag{3.8}$$

Considérons la famille de fonctions u_δ définie dans (3.4).

Posons :

$$\overline{u}_\delta(x_1) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta} u_\delta(x_1, x_2)dx_2.$$

Considérons $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, qui ne dépend que de x_1 dans un voisinage de I.

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_\delta\varphi(x)d\mu_\delta &\equiv \frac{1}{2\delta(b-a)}\int_a^b\int_{-\delta}^{+\delta} u_\delta\varphi(x)dx_1dx_2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \overline{u}_\delta(x_1)\varphi(x_1)dx_1. \\ &\underset{\delta\to 0}{\rightarrow} \frac{1}{b-a}\int_a^b u_0\varphi dx_1.\end{aligned}$$

d'où

$$\overline{u}_\delta \rightharpoonup u_0 \text{ dans } L^2([a,b]).$$

Calculons maintenant

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial u_\delta}{\partial x_1}\varphi(x)d\mu_\delta &\equiv \frac{1}{2\delta(b-a)}\int_a^b\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_1}\varphi(x)dx_1dx_2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{\partial \overline{u}_\delta}{\partial x_1}(x_1)\varphi(x_1)dx_1 \\ &\underset{\delta\to 0}{\rightarrow} \frac{1}{b-a}\int_a^b z_1\varphi dx_1.\end{aligned}$$

Supposons en plus que $\varphi = 0$ aux extrémités du segment, alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial u_\delta}{\partial x_1}\varphi(x)d\mu_\delta &= -\int_\Omega u_\delta\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}d\mu_\delta = -\frac{1}{b-a}\int_a^b \overline{u}_\delta(x_1)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}dx_1 \\ &\underset{\delta\to 0}{\rightarrow} -\frac{1}{b-a}\int_a^b u_0\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}dx_1,\end{aligned}$$

ce qui nous donne que

$$z_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x_1}.$$

□

3.2.3 Jonctions simples

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, et notons par $R_\delta \subset \Omega$ l'union de

$$Q = \{x = (x_1, x_2) \;/\; -1 < x_1 < 1 \;;\; -1 < x_2 < 1\}$$

et

$$\Pi_\delta = \{x = (x_1, x_2) \;/\; 0 < x_1 < 2 \;;\; -\delta < x_2 < \delta\}$$

Sur Q, on définit la mesure μ_0 donnée par :

$$\mu_0(A) = \int_{A \cap Q} dx_1 dx_2 \quad \forall A \subset R_\delta$$

et sur Π_δ la mesure de Probabilité μ_δ définie par :

$$\mu_\delta\,(dx) = \frac{\chi_{\Pi_\delta}(x)}{4\delta} dx_1 dx_2$$

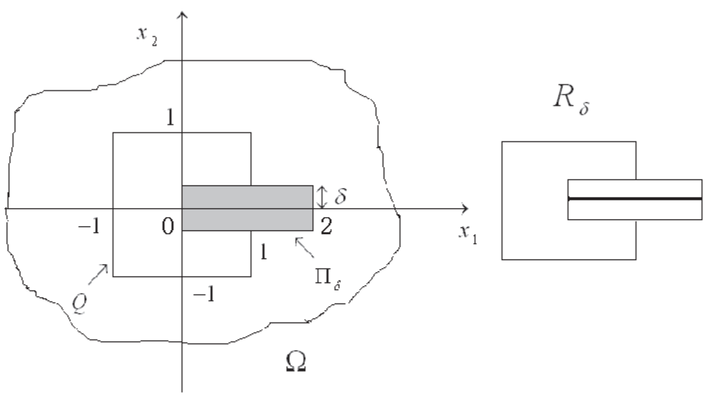

Figure 3.2 – Jonction simple.

On définit sur R_δ la mesure $\overline{\mu}_\delta$ par :

$$\overline{\mu}_\delta = \mu_0 + \mu_\delta$$

Considérons une famille de fonctions u_δ tel que

$$\int_\Omega \left(u_\delta^2 + |Du_\delta|^2\right) d\overline{\mu}_\delta \le c.$$

Alors (voir [23]), il existe $u_0 \in L^2(\Omega, d\overline{\mu})$, et $z = (z_1, z_2) \in \left(L^2(\Omega, d\overline{\mu})\right)^2$ tel que $u_\delta \rightharpoonup u_0$ et $Du_\delta \rightharpoonup z$ faiblement quand $\delta \to 0$ au sens suivant :
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega u_\delta \varphi d\overline{\mu}_\delta = \int_\Omega u_0\varphi d\overline{\mu} \tag{3.9}$$

Même chôse pour Du_δ :

$$\int_\Omega (Du_\delta, \psi) d\overline{\mu}_\delta \underset{\delta\to 0}{\to} \int_\Omega (Du_\delta, \psi) d\overline{\mu} \quad \forall \psi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^2))^2.$$

En fait la mesure $\overline{\mu}$ a pour support la "jonction" : $R_0 = Q \cup I$ avec

$$I = \{x = (x_1, x_2) \ / \ 0 < x_1 < 2 \ ; \ x_2 = 0\}$$

Lemme 3.2. La fonction u_0 définie dans (3.9) appartient à $H^1(\Omega, d\overline{\mu})$. De plus,

$$z = Du_0.$$

3.2.4 Jonctions multiples

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.
On définit maintenant une jonction multiple $\tilde{R}_\delta \subset \Omega$. Soit $b > a > 0$ et $d > c > 0$.
Sur $Q = (-1, 1)^2$, on définit la mesure μ_0 donnée par:

$$\mu_0(A) = \int_{A\cap Q} dx_1 dx_2 \quad \forall A \subset \tilde{R}_\delta$$

Pour $i = \overline{1,4}$, on définit sur I_δ^i la mesure de Probabilité μ_δ^i définie par :

$$\mu_\delta^i(A) = \int_{A\cap I_\delta^i} \frac{1}{mes(I_\delta^i)} dx_1 dx_2 \quad \forall A \subset \tilde{R}_\delta$$

où

$$\begin{aligned}
I_\delta^1 &= \{x = (x_1, x_2) \ / \ a < x_1 < b \ ; \ -\delta < x_2 < \delta\} \\
I_\delta^2 &= \{x = (x_1, x_2) \ / \ -\delta < x_1 < \delta \ ; \ c < x_2 < d\} \\
I_\delta^3 &= \{x = (x_1, x_2) \ / \ -b < x_1 < -a \ ; \ -\delta < x_2 < \delta\} \\
I_\delta^4 &= \{x = (x_1, x_2) \ / \ -\delta < x_1 < \delta \ ; \ -d < x_2 < -c\}
\end{aligned}$$

On définit les ensembles suivants :

$$I^1 = \{x = (x_1, x_2) \ / \ a < x_1 < b \ ; \ x_2 = 0\}$$

$$I^2 = \{x = (x_1, x_2) \ / \ x_1 = 0 \ ; \ c < x_2 < d\}$$

$$I^3 = \{x = (x_1, x_2) \ / \ -b < x_1 < -a \ ; \ x_2 = 0\}$$

$$I^4 = \{x = (x_1, x_2) \ / \ x_1 = 0 \ ; \ -d < x_2 < -c\}$$

D'après ce qui précède, on peut facilement montrer que :

$$\mu_\delta^1, \mu_\delta^2, \mu_\delta^3, \mu_\delta^4 \text{ convergent faiblement (quand } \delta \to 0) \text{ vers } \mu^1, \mu^2, \mu^3, \mu^4,$$

où μ^i est la mesure de Probabilité uniforme sur I^i pour $i = \overline{1,4}$.

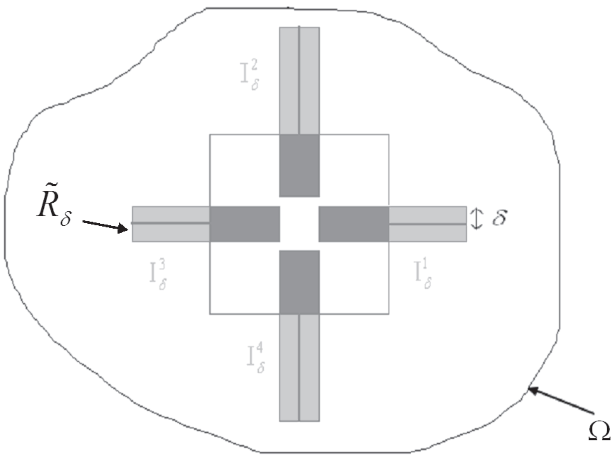

Figure 3.3 – Jonction multiple.

On définit la mesure $\overline{\mu}_\delta$ par :

$$\overline{\mu}_\delta = \mu_0 + \sum_{i=1}^{4} \mu_\delta^i \tag{3.10}$$

Considérons une famille de fonctions u_δ tel que

$$\int_\Omega \left(u_\delta^2 + |Du_\delta|^2 \right) d\overline{\mu}_\delta \leq c \tag{3.11}$$

Alors (voir [23]), il existe $u_0 \in L^2(\Omega, d\overline{\mu})$, et $z = (z_1, z_2) \in \left(L^2(\Omega, d\overline{\mu})\right)^2$ tel que $u_\delta \rightharpoonup u_0$ et $Du_\delta \rightharpoonup z$ faiblement quand $\delta \to 0$ au sens suivant :

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_\delta \varphi d\overline{\mu}_\delta \underset{\delta \to 0}{\rightarrow} \int_\Omega u_0 \varphi d\overline{\mu} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \\ \int_\Omega (Du_\delta, \psi) d\overline{\mu}_\delta \underset{\delta \to 0}{\rightarrow} \int_\Omega (z, \psi) d\overline{\mu} \quad \forall \psi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^2))^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

où

$$\overline{\mu} = \mu_0 + \sum_{i=1}^{4} \mu^i \tag{3.13}$$

Lemme 3.3. La fonction u_0 définie dans (3.12) appartient à $H^1(\Omega, d\overline{\mu})$. De plus,

$$z = Du_0.$$

3.3 Convergence dans L^p

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats de convergence qui seront utilisés le long de ce chapitre (voir [28]). Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Nous supposons que p et q sont conjugués, i.e. $1/p + 1/q = 1$ et $1 < p < \infty$. Soit μ_δ et μ des mesures de Radon dans Ω tel que $\mu_\delta \underset{\delta \to 0}{\rightharpoonup} \mu$. On dis que la suite u_δ est bornée dans $L^p(\Omega, d\mu_\delta)$ si

$$\limsup_{\delta \to 0} \int_\Omega |u_\delta|^p \, d\mu_\delta < \infty.$$

Définition 3.2. Une suite bornée $u_\delta \in L^p(\Omega, d\mu_\delta)$ est faiblement convergente vers $u \in L^p(\Omega, d\mu)$, $u_\delta \rightharpoonup u$ si

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_\Omega u_\delta \varphi d\mu_\delta = \int\limits_\Omega u\varphi d\mu, \tag{3.14}$$

pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Proposition 3.2. Nous avons le résultat suivant :

– Toute suite bornée admet une sous-suite qui converge faiblement.

– Si la suite u_δ converge faiblement vers u, alors

$$\liminf_{\delta\to 0} \int\limits_\Omega |u_\delta|^p \, d\mu_\delta \geq \int\limits_\Omega |u|^p \, d\mu.$$

Définition 3.3. Une suite bornée $u_\delta \in L^p(\Omega, d\mu_\delta)$ est fortement convergente vers $u \in L^p(\Omega, d\mu)$ si

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\Omega u_\delta v_\delta d\mu_\delta = \int_\Omega uv d\mu,$$

pour tout $v_\delta \rightharpoonup v$ dans $L^q(\Omega, d\mu_\delta)$.

Proposition 3.3. On a :

– La convergence forte implique la convergence faible.

– La convergence faible $u_\delta \rightharpoonup u$, munit de la relation

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_\Omega |u_\delta|^p \, d\mu_\delta = \int\limits_\Omega |u|^p \, d\mu,$$

est équivalente à la convergence forte $u_\delta \to u$.

3.4 Monotonicité et convergence

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, où la mesure de Lebesgue de la frontière est zero, $Y = [0,1)^N$ le cube demi-ouvert dans $\mathbb{R}^N$. Soit μ_δ et μ des mesures de Radon dans Ω tel que $\mu_\delta \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} \mu$.

Considérons la famille de suite (u_δ) tel que

$$\int\limits_\Omega (|u_\delta|^p + |Du_\delta|^p) \, d\mu_\delta \leq c.$$

Soit $a : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction tel que $a(.,\xi)$ est $Y-$périodique et $\mu_\delta-$mesurable pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. De plus, supposons qu'il exsite des constantes $c_1, c_2 > 0$, α, et β, avec $0 \leq \alpha \leq \min\{1, p-1\}$ et $\max\{p,2\} \leq \beta < \infty$ tel que a satisfait les hypothèses suivantes :

$$a(y, 0) = 0, \tag{3.15}$$

$$|a(y,\xi_1) - a(y,\xi_2)| \leq c_1(1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{p-1-\alpha} |\xi_1 - \xi_2|^\alpha, \tag{3.16}$$

$$(a(y,\xi_1) - a(y,\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \geq c_2(1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{p-\beta} |\xi_1 - \xi_2|^\beta, \tag{3.17}$$

pour μ_δ p.p. $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$.
Nous supposons que

$$a(x,\varphi) \in (C_0^\infty(\Omega))^N \text{ pour tout } \varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^N, \tag{3.18}$$

et que $\mu_\delta(\Omega)$ est finie et uniformément bornée par rapport à δ.

3.4.1 Premier cas

Dans ce cas, on considère que l'opérateur monotone a ne dépend pas de δ.

Lemme 3.4. Il existe une sous-suite de u_δ et $\overline{a} \in (L^q(\Omega, d\mu))^N$ tel que $a(x, Du_\delta) \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} \overline{a}$.

Démonstration.

$$|a(x,Du_\delta)| \leq c_1(1+|Du_\delta|)^{p-1-\alpha} |Du_\delta|^\alpha \leq c_1(1+|Du_\delta|)^{p-1} \leq 2^{p-1}c_1(1+|Du_\delta|^{p-1})$$

Ceci donne que $a(x, Du_\delta)$ est bornée dans $(L^q(\Omega, d\mu_\delta))^N$ puisque (Du_δ) est bornée dans $(L^p(\Omega, d\mu_\delta))^N$ et (1_Ω) est bornée dans $L^p(\Omega, d\mu_\delta)$. Par la Proposition 3.2 il existe une sous-suite tels que : il existe $\overline{a} \in (L^q(\Omega, d\mu))^N$ tel que $a(x, Du_\delta) \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} \overline{a}$ i.e :

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\Omega (a(x, Du_\delta), \varphi) d\mu_\delta = \int_\Omega (\overline{a}, \varphi) d\mu$$

pour tout $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^N$. $\square$

Lemme 3.5. Supposons que

$$\int_\Omega (\overline{a} - a(x,\varphi), z - \varphi) d\mu \geq 0, \forall \varphi \in \left(C_0^\infty(\Omega)\right)^N,$$

pour $\overline{a}$ et z qui appartient à $\left(L^q(\Omega, d\mu)\right)^N$ et $\left(L^p(\Omega, d\mu)\right)^N$ respectivement. Alors, l'inégalité reste vraie pour tout $\varphi \in \left(L^p(\Omega, d\mu)\right)^N$.

Démonstration. Soit (φ_m) une suite dans $\left(C_0^\infty(\Omega)\right)^N$ tel que φ_m converge fortement vers φ dans $\left(L^p(\Omega, d\mu)\right)^N$. Nous avons :

$$\int_\Omega (\overline{a} - a(x,\varphi_m), z - \varphi_m) d\mu \geq 0, \forall \varphi_m \in \left(C_0^\infty(\Omega)\right)^N.$$

Puisque

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\overline{a} - a(x,\varphi_m), z - \varphi_m) d\mu &= \int_\Omega (\overline{a}, z) d\mu - \int_\Omega (\overline{a}, \varphi_m) d\mu \\ &\quad - \int_\Omega (a(x,\varphi_m), z) d\mu + \int_\Omega (a(x,\varphi_m), \varphi_m) d\mu,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \int_\Omega (\overline{a} - a(x,\varphi_m), z - \varphi_m) d\mu &= \int_\Omega (\overline{a}, z) d\mu - \lim_{m\to\infty} \int_\Omega (\overline{a}, \varphi_m) d\mu \\ &\quad - \lim_{m\to\infty} \int_\Omega (a(x,\varphi_m), z) d\mu + \lim_{m\to\infty} \int_\Omega (a(x,\varphi_m), \varphi_m) d\mu.\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité de Hölder et passons à la limite nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left| \int_\Omega (\overline{a}, \varphi_m) d\mu - \int_\Omega (\overline{a}, \varphi) d\mu \right| &= \left| \int_\Omega (\overline{a}, \varphi_m - \varphi) d\mu \right| \\ &\leq \|\overline{a}\|_{(L^q(\Omega,d\mu))^N} \|\varphi_m - \varphi\|_{(L^p(\Omega,d\mu))^N} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

L'hypothèse de Lipschitz-continuité de a, l'inégalité de Hölder et le passage à la limite nous donne :

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (a(x,\varphi_m)-a(x,\varphi),z)d\mu\right| &\leq \int_\Omega |a(x,\varphi_m)-a(x,\varphi)|\,|z|\,d\mu \\
&\leq c_1\int_\Omega (1+|\varphi_m|+|\varphi|)^{p-1-\alpha}\,|\varphi_m-\varphi|^{\alpha}\,|z|\,d\mu \\
&\leq c_1\left(\int_\Omega (1+|\varphi_m|+|\varphi|)^{p-\alpha q}\,|\varphi_m-\varphi|^{\alpha q}\,d\mu\right)^{1/q}\left(\int_\Omega |z|^p\,d\mu\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Enfin, on trouve que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega (a(x,\varphi_m),\varphi_m)d\mu-\int_\Omega (a(x,\varphi),\varphi)d\mu\right| \\
\leq\ &\left|\int_\Omega (a(x,\varphi_m)-a(x,\varphi),\varphi_m)d\mu\right|+\left|\int_\Omega (a(x,\varphi),\varphi_m-\varphi)d\mu\right| \\
\leq\ &\int_\Omega |a(x,\varphi_m)-a(x,\varphi)|\,|\varphi_m|\,d\mu+\int_\Omega |a(x,\varphi)|\,|\varphi_m-\varphi|\,d\mu \\
\leq\ &c_1\left(\int_\Omega (1+|\varphi_m|+|\varphi|)^{p-\alpha q}\,|\varphi_m-\varphi|^{\alpha q}\,d\mu\right)^{1/q}\left(\int_\Omega |\varphi_m|^p\,d\mu\right)^{1/p}+ \\
&\left(\int_\Omega |a(x,\varphi)|^q\,d\mu\right)^{1/q}\left(\int_\Omega |\varphi_m-\varphi|^p\,d\mu\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega (1+|\varphi_m|+|\varphi|)^{p-\alpha q}\,|\varphi_m-\varphi|^{\alpha q}\,d\mu \leq \left(\int_\Omega (1+|\varphi_m|+|\varphi|)^p d\mu\right)^{(p-\alpha q)/p}\left(\int_\Omega |\varphi_m-\varphi|^p\,d\mu\right)^{\alpha q/p}$$

Ainsi, les deux termes du côté droit convergent vers 0 . □

Théorème 3.1. Supposons que a satisfait les conditions (3.15)-(3.16)-(3.17). Soit (Du_δ) une suite bornée dans $(L^p(\Omega,d\mu_\delta))^N$ qui converge faiblement vers $z\in(L^p(\Omega,d\mu))^N$ et supposons que $a(x,Du_\delta)$ converge faibelement vers $\overline{a}\in(L^q(\Omega,d\mu))^N$. Alors

$$\liminf_{\delta\to 0}\int_\Omega (a(x,Du_\delta),Du_\delta)d\mu_\delta \geq \int_\Omega (\overline{a},z)d\mu.$$

En plus, si

$$\liminf_{\delta\to 0}\int_{\Omega}(a(x,Du_\delta),Du_\delta)d\mu_\delta=\int_{\Omega}(\overline{a},z)d\mu,$$

alors

$$\overline{a}=a(x,z) \text{ pour } \mu \text{ p.p } x\in\Omega.$$

Démonstration. Supposons que

$$\liminf_{\delta\to 0}\int_{\Omega}(a(x,Du_\delta),Du_\delta)d\mu_\delta<\int_{\Omega}(\overline{a},z)d\mu,$$

qui implique que

$$\liminf_{\delta\to 0}\int_{\Omega}(a(x,Du_\delta),Du_\delta)d\mu_\delta=\int_{\Omega}(\overline{a},z)d\mu-C, \tag{3.19}$$

où C est une constante positive. Le fait que a est monotone implique que

$$\int_{\Omega}(a(x,Du_\delta)-a(x,\varphi),Du_\delta-\varphi)d\mu_\delta\geq 0,\forall\varphi\in\left(C_0^\infty(\Omega)\right)^N.$$

Décomposons le côté gauche de l'inégalité ci-dessus en quatre termes et passons à la limite lorsque $\delta\to 0$:
La convergence faible de $a(x,Du_\delta)$ vers $\overline{a}$ dans le sens (3.14) donne :

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\Omega}(a(x,Du_\delta),\varphi)d\mu_\delta=\int_{\Omega}(\overline{a},\varphi)d\mu.$$

La convergence faible de μ_δ vers μ et en utilisant (3.18) donne :

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\Omega}(a(x,\varphi),\varphi)d\mu_\delta=\int_{\Omega}(a(x,\varphi),\varphi)d\mu.$$

La convergence faible de Du_δ vers z et en utilisant (3.18) donne :

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\Omega}(a(x,\varphi),Du_\delta)d\mu_\delta=\int_{\Omega}(a(x,\varphi),z)d\mu.$$

(3.19) est

$$\liminf_{\delta\to 0}\int_\Omega (a(x,Du_\delta),Du_\delta)d\mu_\delta = \int_\Omega (\overline{a},z)d\mu - C.$$

La somme des limites donne l'estimation suivante :

$$\int_\Omega (\overline{a}-a(x,\varphi),z-\varphi)d\mu \geq C, \forall\varphi\in\left(C_0^\infty(\Omega)\right)^N.$$

Par densité (voir Lemme 3.5) cette inégalité est vraie pour tout $\varphi \in \left(L^p(\Omega,d\mu)\right)^N$. Posons $z-\varphi = tw, \forall w \in \left(L^p(\Omega,d\mu)\right)^N$. Alors après division sur $t>0$ on obtient

$$\int_\Omega (\overline{a}-a(x,z-tw),w)d\mu \geq \frac{C}{t}.$$

Passons à la limite quand t tend vers 0, on obtient

$$\int_\Omega (\overline{a}-a(x,z),w)d\mu \geq \infty.$$

Pour $t<0$, on obtient

$$\int_\Omega (\overline{a}-a(x,z),w)d\mu \leq \infty.$$

Ce qui donne une contradiction. Si l'égalité ait lieu, nous répétons la même procédure avec $C=0$. Par suite, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega (\overline{a}-a(x,\varphi),z-\varphi)d\mu \geq 0,\ \forall\varphi\in\left(C_0^\infty(\Omega)\right)^N.$$

Par densité (voir Lemme 3.5) et en utilisant la même technique on trouve que

$$\int_\Omega (\overline{a}-a(x,z),\phi)d\mu = 0, \forall\phi\in\left(L^p(\Omega,d\mu)\right)^N,$$

çà implique que $\overline{a}=a(x,z)$ pour μ p.p. $x\in\Omega$. □

Théorème 3.2. Supposons que a satisfait les conditions (3.15)-(3.16)-(3.17). Soit (Du_δ) une suite bornée dans $\left(L^p(\Omega,d\mu_\delta)\right)^N$ qui converge faiblement vers $z \in \left(L^p(\Omega,d\mu)\right)^N$, $a(x,Du_\delta)$ converge faiblement vers $\overline{a}\in\left(L^q(\Omega,d\mu)\right)^N$, et

$|Du_\delta|^{p-2} Du_\delta$ converge faibelement vers $v \in (L^q(\Omega, d\mu))^N$. Si

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\Omega (a(x, Du_\delta), Du_\delta) d\mu_\delta = \int_\Omega (\overline{a}, z) d\mu, \tag{3.20}$$

alors la suite Du_δ converge fortement vers z.

Démonstration. Pour $k > 0$, nous avons :

$$\int_\Omega (a(x, Du_\delta), Du_\delta) d\mu_\delta = \int_\Omega k\,|Du_\delta|^p\, d\mu_\delta + \int_\Omega (a(x, Du_\delta) - kDu_\delta\,|Du_\delta|^{p-2}, Du_\delta) d\mu_\delta.$$

De (3.20), on a

$$\begin{aligned} &\limsup_{\delta\to 0} \int_\Omega k\,|Du_\delta|^p\, d\mu_\delta + \liminf_{\delta\to 0} \int_\Omega (a(x, Du_\delta) - kDu_\delta\,|Du_\delta|^{p-2}, Du_\delta) d\mu_\delta \\ = &\int_\Omega (kv, z) d\mu + \int_\Omega (\overline{a} - kv, z) d\mu. \end{aligned}$$

La fonction $a(x, Du_\delta) - kDu_\delta\,|Du_\delta|^{p-2}$ satisfait la condition de monotonicité. Donc, par Théorème 3.1 on a

$$\liminf_{\delta\to 0} \int_\Omega (a(x, Du_\delta) - kDu_\delta\,|Du_\delta|^{p-2}, Du_\delta) d\mu_\delta \geq \int_\Omega (\overline{a} - kv, z) d\mu. \tag{3.21}$$

Par conséquent,

$$\limsup_{\delta\to 0} \int_\Omega |Du_\delta|^p\, d\mu_\delta \leq \int_\Omega (v, z) d\mu. \tag{3.22}$$

La fonction $|Du_\delta|^{p-2} Du_\delta$ satisfait les conditions du Théorème 3.1 qui implique que

$$\liminf_{\delta\to 0} \int_\Omega |Du_\delta|^p\, d\mu_\delta = \liminf_{\delta\to 0} \int_\Omega (Du_\delta\,|Du_\delta|^{p-2}, Du_\delta) d\mu_\delta \geq \int_\Omega (v, z) d\mu. \tag{3.23}$$

Par (3.22) et (3.23)

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\Omega |Du_\delta|^p\, d\mu_\delta = \lim_{\delta\to 0} \int_\Omega (Du_\delta\,|Du_\delta|^{p-2}, Du_\delta) d\mu_\delta = \int_\Omega (v, z) d\mu$$

D'où il suit par Théorème 3.1 que $v = |z|^{p-2} z$. Enfin, par la Proposition 3.3 Du_δ converge fortement vers z. $\square$

Théorème 3.3. Supposons que a satisfait les conditions (3.15)-(3.16)-(3.17). Soit (Du_δ) une suite dans $(L^p(\Omega, d\mu_\delta))^N$ qui converge fortement vers $z \in (L^p(\Omega, d\mu))^N$ et supposons que $a(x, Du_\delta)$ converge faibelement vers $\overline{a} \in (L^q(\Omega, d\mu))^N$. Alors

$$\overline{a} = a(x, z) \text{ pour } \mu \text{ p.p } x \in \Omega.$$

Démonstration. Dans le même esprit de la démonstration du Théorème 3.1, on montre que

$$\overline{a} = a(x, z) \text{ pour } \mu \text{ p.p } x \in \Omega.$$

$\square$

3.4.2 Deuxième cas

Nous considérons dans ce cas que l'opérateur monotone a dépend du paramètre δ.

Lemme 3.6. Si Du est bornée dans $(L^p(\Omega, d\mu_\delta))^N$ alors il existe une sous-suite de $a_\delta(x, Du)$ et $a_0 \in (L^q(\Omega, d\mu))^N$ tel que $a_\delta(x, Du) \underset{\delta \to 0}{\rightharpoonup} a_0$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Lemme 3.4. Il suffit simplement de prouver que $a_\delta(x, Du)$ est bornée dans $(L^q(\Omega, d\mu))^N$. $\square$

Théorème 3.4. Supposons que a_δ satisfait les conditions (3.15)-(3.16)-(3.17) et qu'elle converge faiblement vers a_0 dans le sens (3.14). Alors la limite a_0 satisfait les conditions (3.15)-(3.16)-(3.17).

Démonstration. Pour tout $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^N$:

$$0 = \lim_{\delta \to 0} \int_\Omega (a_\delta(x, 0), \varphi) d\mu_\delta \quad = \quad \int_\Omega (a_0(x, 0), \varphi) d\mu.$$

Pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (a_\delta(x,\xi_1) - a_\delta(x,\xi_2), \varphi(\xi_1-\xi_2))d\mu_\delta\right| &\leq \int_\Omega |(a_\delta(x,\xi_1) - a_\delta(x,\xi_2)| \, |\varphi(\xi_1-\xi_2)| \, d\mu_\delta \\ &\leq c_1 \int_\Omega (1+|\xi_1|+|\xi_2|)^{p-1-\alpha} \, |\xi_1-\xi_2|^\alpha \, |\varphi(\xi_1-\xi_2)| \, d\mu_\delta.\end{aligned}$$

Passons ici à la limite nous obtenons l'inegalité

$$\left|\int_\Omega (a_0(x,\xi_1) - a_0(x,\xi_2), \varphi(\xi_1-\xi_2))d\mu\right| \leq c_1 \int_\Omega (1+|\xi_1|+|\xi_2|)^{p-1-\alpha} \, |\xi_1-\xi_2|^\alpha \, |\varphi(\xi_1-\xi_2)| \, d\mu,$$

qui montre que

$$|(a_0(x,\xi_1) - a_0(x,\xi_2)| \leq c_1(1+|\xi_1|+|\xi_2|)^{p-1-\alpha} \, |\xi_1-\xi_2|^\alpha,$$

pour μ p.p. $x \in \Omega$ et pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$. Enfin, on a pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (a_\delta(x,\xi_1) - a_\delta(x,\xi_2), \varphi(\xi_1-\xi_2))d\mu_\delta &= \int_\Omega (a_\delta(x,\xi_1) - a_\delta(x,\xi_2), (\xi_1-\xi_2))\varphi d\mu_\delta \\ &\geq c_2 \int_\Omega (1+|\xi_1|+|\xi_2|)^{p-\beta} \, |\xi_1-\xi_2|^\beta \, \varphi d\mu_\delta\end{aligned}$$

Passons ici à la limite nous obtenons l'inégalité

$$\int_\Omega (a_0(x,\xi_1) - a_0(x,\xi_2), (\xi_1-\xi_2))\varphi d\mu \geq c_2 \int_\Omega (1+|\xi_1|+|\xi_2|)^{p-\beta} \, |\xi_1-\xi_2|^\beta \, \varphi d\mu,$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0$, qui complète la démonstration. $\square$

Lemme 3.7. Il exsite une sous-suite et $a_1 \in (L^q(\Omega, d\mu))^N$ tel que $a_\delta(x, Du_\delta) \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} a_1$.

Démonstration.

$$|a_\delta(x, Du_\delta)| \leq c_1(1+|Du_\delta|)^{p-1-\alpha} \, |Du_\delta|^\alpha \leq c_1(1+|Du_\delta|)^{p-1} \leq 2^{p-1}c_1(1+|Du_\delta|^{p-1})$$

Ce qui donne que $a_\delta(x, Du_\delta)$ est bornée dans $(L^q(\Omega, d\mu_\delta))^N$ puisque (Du_δ) est bornée dans $(L^p(\Omega, d\mu_\delta))^N$ et (1_Ω) est bornée dans $L^p(\Omega, d\mu_\delta)$. Par la Proposition 3.2, il existe une sous-suite tels que : Il existe $a_1 \in (L^q(\Omega, d\mu))^N$ tel que $a_\delta(x, Du_\delta) \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} a_1$ i.e :

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a_\delta(x, Du_\delta), \varphi)d\mu_\delta = \int_\Omega (a_1, \varphi)d\mu,$$

pour tout $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^N$. □

Théorème 3.5. Supposons que a_δ satisfait les conditions (3.15)-(3.16)-(3.17). Soit (Du_δ) une suite bornée dans $(L^p(\Omega, d\mu_\delta))^N$ qui converge fortement vers $z \in (L^p(\Omega, d\mu))^N$ et suppposons que $a_\delta(x, Du_\delta)$ converges faiblement vers $a_1 \in (L^q(\Omega, d\mu))^N$. Alors,

$$a_1 = a_0(x, z),$$

où a_0 est la limite de a_δ dans le sens (3.14).

Démonstration. Par la monotonicité de a_δ, nous avons

$$\int_\Omega (a_\delta(x, Du_\delta) - a_\delta(x, \varphi), Du_\delta - \varphi)d\mu_\delta \geq 0,$$

pour tout $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^N$. Passons à la limite dans cette inégalité. Son côté gauche contient quatre termes. Nous avons :

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a_\delta(x, Du_\delta), \varphi)d\mu_\delta = \int_\Omega (a_1, \varphi)d\mu,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a_\delta(x, \varphi), \varphi)d\mu_\delta = \int_\Omega (a_0(x, \varphi), \varphi)d\mu,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a_\delta(x, \varphi), Du_\delta)d\mu_\delta = \int_\Omega (a_0(x, \varphi), z)d\mu,$$

et

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a_\delta(x, Du_\delta), Du_\delta)d\mu_\delta = \int_\Omega (a_1, z)d\mu.$$

Par suite, nous obtenons l'inégalité

$$\int_\Omega (a_1 - a_0(x, \varphi), z - \varphi)d\mu \geq 0, \ \forall\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^N .$$

Par densité, cette inégalité est vraie pour tout $\varphi \in (L^p(\Omega, d\mu))^N$. Posons $\varphi = z - t\phi, \forall \phi \in (L^p(\Omega, d\mu))^N$. Pour $t > 0$ on a

$$\int_\Omega (a_1 - a_0(x, z - t\phi), \phi) d\mu \geq 0. \tag{3.24}$$

Pour $t < 0$ on obtient que

$$\int_\Omega (a_1 - a_0(x, z - t\phi), \phi) d\mu \leq 0 \tag{3.25}$$

Par (3.24), (3.25) et faisons tendre t vers 0 on trouve que

$$\int_\Omega (a_1 - a_0(x, z), \phi) d\mu = 0, \forall \phi \in (L^p(\Omega, d\mu))^N.$$

Ce qui implique que $a_1 = a_0(x, z)$ pour μ p.p. $x \in \Omega$. La preuve est complète. $\square$

Exemple 3.1. [5] $N = p = 2$. Soit

$$I = \{x = (x_1, x_2) \mid a \leq x_1 \leq b \; ; \; x_2 = 0\}$$

un segment dans $\mathbb{R}^2$, et supposons que Ω est un domaine borné qui contient I. Pour tout $\delta > 0$ suffisament petit on considère la barre

$$I_\delta := \{x = (x_1, x_2) \mid a < x_1 < b \; ; \; -\delta < x_2 < \delta\} \subset \Omega.$$

Notons par μ_δ la mesure dans Ω, concentrée et uniformément distribuée sur I_δ :

$$\mu_\delta(dx) = \frac{\chi_{I_\delta}(x)}{2\delta(b-a)} dx_1 dx_2.$$

La famille μ_δ converge faiblement, quand $\delta \to 0$, vers la mesure

$$\mu(dx) = \frac{1}{(b-a)} dx_1 \times \delta(x_2)$$

où $\delta(z)$ représente la masse de Dirac en zéro.

Considérons l'opérator a_δ :

$$a_\delta(x, Du_\delta) = \left(\frac{1+\delta|x|}{2+\delta|x|}\right) Du_\delta.$$

L'opérator a_δ satisfait les conditions (3.15)-(3.16)-(3.17). Or

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a_\delta(x,\varphi),\varphi)d\mu_\delta &= \lim_{\delta\to 0}\int_\Omega ((\frac{1+\delta|x|}{2+\delta|x|})\varphi,\varphi)d\mu_\delta \\
&= \int_\Omega (\frac{1}{2}\varphi,\varphi)d\mu, \forall\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^2 .
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$a_0(x,\xi) = \frac{1}{2}\xi$$

et

$$|a_0(x,\xi_1) - a_0(x,\xi_2)| = \frac{1}{2}|\xi_1 - \xi_2|,$$

pour p.p. $x \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^2$.

Enfin, si Du_δ converge fortement vers z, alors le Théorème 3.5 donne

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a_\delta(x,Du_\delta),\varphi)d\mu_\delta &= \int_\Omega (a_1,\varphi)d\mu \\
&= \int_\Omega (a_0(x,z),\varphi)d\mu \\
&= \int_\Omega (\frac{1}{2}z,\varphi)d\mu, \forall\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^2 .
\end{aligned}$$

3.5 Homogénéisation et convergence des opérateurs monotones

Soit μ une mesure $Y-$périodique et définissons la mesure $\epsilon-$périodique μ_ϵ par $\mu_\epsilon(B) = \epsilon^N \mu(\epsilon^{-1}B)$ pour tout ensemble borélien B dans $\mathbb{R}^N$.

Par définition $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\epsilon)$ est un sous espace fermé de $L^p(Y, d\mu_\epsilon)\times(L^p(Y, d\mu_\epsilon))^N$. Puisque tout sous espace fermé d'un espae de Banach réflexive est réflexive alors on a $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\epsilon)$ est réflexive (voir [16]).

On considère l'équation

$$-\,div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)) + |u_\epsilon|^{p-2}\, u_\epsilon = f_\epsilon, \qquad (u_\epsilon, Du_\epsilon) \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\epsilon), \tag{3.26}$$

où a satisfait les conditions (3.15)-(3.16)-(3.17), $f_\epsilon \in L^q(\Omega, d\mu_\epsilon)$ tel que $f_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\rightarrow} f_0 \in L^q(\Omega, \mu(Y)dx)$. On rappelle par définition que $(u_\epsilon, Du_\epsilon) \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\epsilon)$ est une solution de (3.26) si

$$\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), D\varphi) d\mu_\epsilon + \int_\Omega |u_\epsilon|^{p-2}\, u_\epsilon \varphi d\mu_\epsilon = \int_\Omega f_\epsilon \varphi d\mu_\epsilon, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

D'après le Théorème 13 (voir [16]), (3.26) admet une solution unique.

Dans la théorie de l'homogéniésation (voir [16]), on sait que $(u_\epsilon, Du_\epsilon)$ converge quand $\epsilon \to 0$ vers la solution u_0 du problème suivant :

$$-\,div(b(Du_0)) + \mu(Y)\,|u_0|^{p-2}\, u_0 = \mu(Y) f_0, \qquad u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.27}$$

où $f_0 \in L^q(\Omega, \mu(Y)dx)$ et l'opérateur homogénéisé b est définie par

$$b(\xi) = \frac{1}{\mu(Y)} \int_Y a(y, \xi + Dv^\xi(y)) d\mu,$$

avec $v^\xi \in L^p(\Omega; W_\sharp^{1,2}(Y))$ la solution du problème périodique :

$$\int_Y (a(y, \xi + Dv^\xi(y)), Dw) d\mu = 0, \qquad \forall w \in C_{per}^\infty(Y).$$

Par définition $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est la solution de (3.27) si :

$$\int_\Omega (b(Du_0), D\varphi) dx + \mu(Y) \int_\Omega |u_0|^{p-2}\, u_0 \varphi dx = \mu(Y) \int_\Omega f_0 \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Soit μ_δ une mesure $Y-$périodique et on définit la mesure $\epsilon-$périodique $\mu_{\epsilon,\delta}$ par $\mu_{\epsilon,\delta}(B) = \epsilon^N \mu_\delta(\epsilon^{-1} B)$ pour tout ensemble borélien B dans $\mathbb{R}^N$.
Supposons que $\mu_{\epsilon,\delta}(\Omega)$ est finie et uniformément bornée par rapport à δ et ϵ

respectivement. Maintenant, on considère le problème suivant :

$$-\,div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta})) + |u_{\epsilon,\delta}|^{p-2}\, u_{\epsilon,\delta} = f_{\epsilon,\delta} \qquad (u_{\epsilon,\delta}, Du_{\epsilon,\delta}) \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta}). \quad (3.28)$$

D'abord nous allons passer à la limite, quand $\delta \to 0$, dans le problème (3.28) pour un $\epsilon > 0$ fixé.

Théorème 3.6. Pour tout $\epsilon > 0$ fixé, on suppose que $(f_{\epsilon,\delta}) \in L^q(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta})$ converge fortement vers $f_\epsilon \in L^q(\Omega, d\mu_\epsilon)$. Soit $(u_{\epsilon,\delta})$ une suite de solutions de (3.28). Alors $(u_{\epsilon,\delta})$ converge fortement vers u_ϵ et $(Du_{\epsilon,\delta})$ converge fortement vers Du_ϵ, où u_ϵ est l'unique solution de l'équation

$$-\,div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)) + |u_\epsilon|^{p-2}\, u_\epsilon = f_\epsilon, \quad (u_\epsilon, Du_\epsilon) \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\epsilon). \qquad (3.29)$$

Démonstration. Choisissons $(u_{\epsilon,\delta}, Du_{\epsilon,\delta}) \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta})$ comme fonction test dans (3.28) qui donne

$$\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), Du_{\epsilon,\delta}) d\mu_{\epsilon,\delta} + \int_\Omega |u_{\epsilon,\delta}|^p \, d\mu_{\epsilon,\delta} = \int_\Omega f_{\epsilon,\delta} u_{\epsilon,\delta} d\mu_{\epsilon,\delta}. \qquad (3.30)$$

L'hypothèse de monotonicité (3.17) de a et l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_{\epsilon,\delta}|^p \, d\mu_{\epsilon,\delta} \ &\leq \ \int_\Omega c_2(1 + |Du_{\epsilon,\delta}|)^{p-\beta} \, |Du_{\epsilon,\delta}|^\beta \, d\mu_{\epsilon,\delta} + \int_\Omega |u_{\epsilon,\delta}|^p \, d\mu_{\epsilon,\delta} \quad (3.31) \\ &\leq \ \int_\Omega f_{\epsilon,\delta} u_{\epsilon,\delta} d\mu_{\epsilon,\delta} \leq \|f_{\epsilon,\delta}\|_{L^q(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta})} \, \|u_{\epsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta})} . \end{aligned}$$

Puisque $(f_{\epsilon,\delta})$ est fortement convergente dans $L^q(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta})$ et donc bornée dans $L^q(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta})$ on voit que la suite $(u_{\epsilon,\delta})$ est bornée dans $L^p(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta})$. On peut en extraire une sous-suite $u_{\epsilon,\delta}$ tel que $u_{\epsilon,\delta}$ converge faiblement au sens (3.14) vers $u_\epsilon \in L^p(\Omega, d\mu_\epsilon)$.
On obtient

$$\int_\Omega c_2(1 + |Du_{\epsilon,\delta}|)^{p-\beta} \, |Du_{\epsilon,\delta}|^\beta \, d\mu_{\epsilon,\delta} \leq k(\epsilon).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder inversé (avec $p/(p-\beta)$ et $0 < p/\beta < 1$) et en s'inspirant de la preuve du Théorème 5.10 on peut montrer que

$$\|Du_{\epsilon,\delta}\|^p_{(L^p(\Omega,d\mu_{\epsilon,\delta})^N} \leq k(\epsilon)2^{\beta-p}.$$

On peut extraire une sous-suite $Du_{\epsilon,\delta}$ tel que $Du_{\epsilon,\delta}$ converge faiblement au sens (3.14) vers $z_\epsilon = Du_\epsilon \in (L^p(\Omega,d\mu_\epsilon))^N$. La suite $(|u_{\epsilon,\delta}|^{p-2}\, u_{\epsilon,\delta})$ est bornée dans $L^q(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta})$. Il existe $v_\epsilon \in L^q(\Omega, d\mu_\epsilon)$ tel que $|u_{\epsilon,\delta}|^{p-2}\, u_{\epsilon,\delta}$ converge faiblement au sens (3.14) vers v_ϵ.
L'hypothèse (3.17) implique que

$$\left|a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta})\right| \leq c_1(1+|Du_{\epsilon,\delta}|)^{p-1-\alpha}\,|Du_{\epsilon,\delta}|^\alpha \leq c_1(1+|Du_{\epsilon,\delta}|)^{p-1} \leq 2^{p-1}c_1(1+|Du_{\epsilon,\delta}|^{p-1})$$

qui donne que $a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta})$ est bornée dans $(L^q(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta}))^N$. Il existe une sous-suite tel que $a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta})$ converge faiblement au sens (3.14) vers $\overline{a}_\epsilon \in (L^q(\Omega, d\mu_\epsilon))^N$.
Choisissons $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ comme fonction test dans (3.28) et passons à la limite quand $\delta \to 0$ on obtient

$$\int\limits_\Omega (\overline{a}_\epsilon, D\varphi)d\mu_\epsilon + \int\limits_\Omega v_\epsilon\varphi d\mu_\epsilon = \int\limits_\Omega f_\epsilon\varphi d\mu_\epsilon, \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

L'argument de densité donne que $\overline{a}_\epsilon$ et v_ϵ satisfaient

$$\int\limits_\Omega (\overline{a}_\epsilon, D\varphi)d\mu_\epsilon + \int\limits_\Omega v_\epsilon\varphi d\mu_\epsilon = \int\limits_\Omega f_\epsilon\varphi d\mu_\epsilon,$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\epsilon)$. Choisissons $\varphi = u_\epsilon$ dans cette égalité donne que

$$\int\limits_\Omega (\overline{a}_\epsilon, Du_\epsilon)d\mu_\epsilon + \int\limits_\Omega v_\epsilon u_\epsilon d\mu_\epsilon = \int\limits_\Omega f_\epsilon u_\epsilon d\mu_\epsilon. \tag{3.32}$$

De (3.30) on a

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), Du_{\epsilon,\delta})d\mu_{\epsilon,\delta} + \int\limits_\Omega |u_{\epsilon,\delta}|^{p-2}\, u_{\epsilon,\delta}u_{\epsilon,\delta}d\mu_{\epsilon,\delta}\right) = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_\Omega f_{\epsilon,\delta}u_{\epsilon,\delta}d\mu_{\epsilon,\delta} = \int\limits_\Omega f_\epsilon u_\epsilon d\mu_\epsilon. \tag{3.33}$$

(3.32) et (3.33) nous donne

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), Du_{\epsilon,\delta})d\mu_{\epsilon,\delta} + \int_\Omega |u_{\epsilon,\delta}|^{p-2} u_{\epsilon,\delta}u_{\epsilon,\delta}d\mu_{\epsilon,\delta}\right) = \int_\Omega (\overline{a}_\epsilon, Du_\epsilon)d\mu_\epsilon + \int_\Omega v_\epsilon u_\epsilon d\mu_\epsilon. \tag{3.34}$$

Théorème 3.1 implique que

$$\liminf_{\delta\to 0}\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), Du_{\epsilon,\delta})d\mu_{\epsilon,\delta} \geq \int_\Omega (\overline{a}_\epsilon, Du_\epsilon)d\mu_\epsilon \tag{3.35}$$

$$\liminf_{\delta\to 0}\int_\Omega |u_{\epsilon,\delta}|^{p-2} u_{\epsilon,\delta}u_{\epsilon,\delta}d\mu_{\epsilon,\delta} \geq \int_\Omega v_\epsilon u_\epsilon d\mu_\epsilon \tag{3.36}$$

De (3.34), (3.35) et (3.36) on voit que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), Du_{\epsilon,\delta})d\mu_{\epsilon,\delta} = \int_\Omega (\overline{a}_\epsilon, Du_\epsilon)d\mu_\epsilon.$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega |u_{\epsilon,\delta}|^{p-2} u_{\epsilon,\delta}u_{\epsilon,\delta}d\mu_{\epsilon,\delta} = \int_\Omega v_\epsilon u_\epsilon d\mu_\epsilon.$$

Théorème 3.1 donne que $\overline{a}_\epsilon = a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)$, $v_\epsilon = |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon$, Proposition 3.2 que $(u_{\epsilon,\delta})$ converge fortement vers u_ϵ et par Théorème 3.2 $(Du_{\epsilon,\delta})$ converge fortement vers Du_ϵ.
De plus, nous avons u_ϵ satisfait l'égalité suivante

$$\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), Dw)d\mu_\epsilon + \int_\Omega |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon w d\mu_\epsilon = \int_\Omega f_\epsilon w d\mu_\epsilon, \tag{3.37}$$

pour tout $w \in C_0^\infty(\Omega)$.
L'équation (3.37) admet une solution unique u_ϵ qui est la limite de la suite mère $u_{\epsilon,\delta}$. □

Maintenant, on considère le problème

$$-div(a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta})) + |u_{\epsilon,\delta}|^{p-2} u_{\epsilon,\delta} = f_{\epsilon,\delta},\ (u_{\epsilon,\delta}, Du_{\epsilon,\delta}) \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta}). \tag{3.38}$$

Nous allons passer à la limite, quand $\epsilon \to 0$, dans le problème (3.38) pour $\delta > 0$

fixé.

$(u_{\epsilon,\delta}, Du_{\epsilon,\delta})$ converge quand $\epsilon \to 0$ vers la solution $u_{0,\delta}$ du problème

$$-\, div(b(Du_{0,\delta})) + \mu_\delta(Y) \left|u_{0,\delta}\right|^{p-2} u_{0,\delta} = \mu_\delta(Y) f_{0,\delta}, u_{0,\delta} \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.39}$$

où $f_{\epsilon,\delta} \underset{\epsilon\to 0}{\to} f_{0,\delta} \in L^q(\Omega, \mu_\delta(Y)dx)$ et l'opérator homogénéisé b est définit par

$$b(\xi) = \frac{1}{\mu_\delta(Y)} \int\limits_Y a(y, \xi + Dv^\xi(y)) d\mu_\delta,$$

avec $v^\xi \in L^p(\Omega; W_\sharp^{1,2}(Y)$ est la solution du problème périodique :

$$\int\limits_Y (a(y, \xi + Dv^\xi(y)), Dw) d\mu_\delta = 0, \forall w \in C_{per}^\infty(Y).$$

Par définition $u_{0,\delta} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est la solution de (3.39) si

$$\int\limits_\Omega (b(Du_{0,\delta}), D\varphi)dx + \mu_\delta(Y) \int\limits_\Omega \left|u_{0,\delta}\right|^{p-2} u_{0,\delta}\varphi dx = \mu_\delta(Y) \int\limits_\Omega f_{0,\delta}\varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Proposition 3.4. On a

$$\lim_{\delta\to 0} \mu_\delta(Y) = \mu(Y).$$

Démonstration. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left(\lim_{\delta\to 0} \int\limits_\Omega \varphi d\mu_{\epsilon,\delta} \right) = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_\Omega \varphi d\mu_\epsilon = \mu(Y) \int\limits_\Omega \varphi dx,$$

or,

$$\lim_{\delta\to 0} \left(\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_\Omega \varphi d\mu_{\epsilon,\delta} \right) = \lim_{\delta\to 0} \mu_\delta(Y) \int\limits_\Omega \varphi dx.$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta\to 0} \mu_\delta(Y) = \mu(Y).$$

□

Théorème 3.7. Supposons que a satisfait les conditions (3.15)-(3.16)-(3.17). Soit $(Du_{\epsilon,\delta})$ une suite bornée dans $(L^p(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta}))^N$ qui converge faibelement vers $z_\epsilon \in (L^p(\Omega, d\mu_\epsilon))^N$ et supposons que $a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta})$ converge faiblement vers $\overline{a}_\epsilon \in$

$(L^q(\Omega, d\mu_\epsilon))^N$. Si

$$\liminf_{\delta\to 0} \int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), Du_{\epsilon,\delta}) d\mu_{\epsilon,\delta} = \int_\Omega (\overline{a}_\epsilon, z_\epsilon) d\mu_\epsilon,$$

alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}) & \underset{\delta \to 0}{\rightharpoonup} & a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon) \\
\epsilon & & \epsilon \\
\downarrow \ \downharpoonright & & \downharpoonleft \ \downarrow \\
0 & & 0 \\
b(Du_{0,\delta}) & \underset{\delta \to 0}{\rightharpoonup} & b(Du_0)
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. D'après Théorème 3.1 il s'ensuit que

$$\overline{a}_\epsilon = a(\frac{x}{\epsilon}, z_\epsilon) \text{ pour } \mu \text{ p.p } x \in \Omega.$$

On a pour tout $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^N$

$$\lim_{\delta\to 0} \left(\lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), \varphi) d\mu_{\epsilon,\delta} \right) = \lim_{\delta\to 0} \int_\Omega (b(Du_{0,\delta}), \varphi) dx.$$

Puisque $z_\epsilon = Du_\epsilon$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} \left(\lim_{\delta\to 0} \int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), \varphi) d\mu_{\epsilon,\delta} \right) &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega (\overline{a}_\epsilon, \varphi) d\mu_\epsilon. \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), \varphi) d\mu_\epsilon. \\
&= \int_\Omega (b(Du_0), \varphi) dx.
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.8. Supposons que a_δ satisfait les conditions (3.15)-(3.16)-(3.17).

Soit $(Du_{\epsilon,\delta})$ une suite bornée dans $\left(L^p(\Omega, d\mu_{\epsilon,\delta})\right)^N$ qui converge fortement vers $z_\epsilon \in \left(L^p(\Omega, d\mu_\epsilon)\right)^N$ et supposons que $a_\delta(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta})$ converge faiblement vers $a_1^\epsilon \in \left(L^q(\Omega, d\mu_\epsilon)\right)^N$. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
a_\delta(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}) & \underset{\delta \to 0}{\rightharpoonup} & a_0(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon)) \\
\begin{array}{c}\epsilon\\ \downarrow \ \downharpoonright \\ 0\end{array} & & \begin{array}{c}\epsilon\\ \downharpoonleft \ \downarrow \\ 0\end{array} \\
b(Du_{0,\delta}) & \underset{\delta \to 0}{\rightharpoonup} & b(Du_0)
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. D'après Théorème 3.5 il s'ensuit que

$$a_1^\epsilon = a_0(\frac{x}{\epsilon}, z_\epsilon) \text{ pour } \mu \text{ p.p } x \in \Omega.$$

On a pour tout $\varphi \in \left(C_0^\infty(\Omega)\right)^N$

$$\lim_{\delta \to 0}\left(\lim_{\epsilon \to 0}\int_\Omega (a_\delta(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), \varphi)d\mu_{\epsilon,\delta}\right) = \lim_{\delta \to 0}\int_\Omega (b(Du_{0,\delta}), \varphi)dx.$$

Puisque $z_\epsilon = Du_\epsilon$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0}\left(\lim_{\delta \to 0}\int_\Omega (a_\delta(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), \varphi)d\mu_{\epsilon,\delta}\right) &= \lim_{\epsilon \to 0}\int_\Omega (a_1^\epsilon, \varphi)d\mu_\epsilon. \\
&= \lim_{\epsilon \to 0}\int_\Omega (a_0(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon), \varphi)d\mu_\epsilon. \\
&= \int_\Omega (b(Du_0), \varphi)dx.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.1. Dans le Théorème 3.7, l'hypothèse

$$\liminf_{\delta \to 0}\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), Du_{\epsilon,\delta})d\mu_{\epsilon,\delta} = \int_\Omega (\overline{a}_\epsilon, z_\epsilon)d\mu_{\epsilon,\delta},$$

ne peut pas être remplacé par

$$\liminf_{\delta\to 0}\int_\Omega (a(\frac{x}{\epsilon}, Du_{\epsilon,\delta}), Du_{\epsilon,\delta})d\mu_{\epsilon,\delta} \geq \int_\Omega (\overline{a}_\epsilon, z_\epsilon)d\mu_{\epsilon,\delta},$$

pour la raison suivante :

$$0 \leq \int_\Omega (a(x, Du_\delta) - a(x,\varphi), Du_\delta - \varphi)d\mu_{\epsilon,\delta}, \forall\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^N .$$

Passons à la limite dans cette inégalité. Son côté gauche contient quatre termes. Nous avons :

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a(x, Du_{\epsilon,\delta}), \varphi)d\mu_{\epsilon,\delta} = \int_\Omega (\overline{a}_\epsilon, \varphi)d\mu_\epsilon.$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a(x, \varphi), \varphi)d\mu_{\epsilon,\delta} = \int_\Omega (a(x,\varphi), \varphi)d\mu_\epsilon.$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a(x, \varphi), Du_{\epsilon,\delta})d\mu_{\epsilon,\delta} = \int_\Omega (a(x,\varphi), z_\epsilon)d\mu_\epsilon.$$

$$\liminf_{\delta\to 0}\int_\Omega (a(x, Du_{\epsilon,\delta}), Du_{\epsilon,\delta})d\mu_{\epsilon,\delta} \geq \int_\Omega (\overline{a}_\epsilon, z_\epsilon)d\mu_\epsilon.$$

Enfin, on obtient :

$$0 \leq \lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (a(x, Du_{\epsilon,\delta}) - a(x,\varphi), Du_{\epsilon,\delta} - \varphi)d\mu_{\epsilon,\delta} \geq \int_\Omega (\overline{a}_\epsilon - a(x,\varphi), z_\epsilon - \varphi)d\mu_\epsilon.$$

Bibliographie

[1] G. Allaire : Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Anal. **23**, 1482-1518(1992).

[2] A. Bensoussan, J.L. Lions , G. Papanicolaou , Asymptotic Analysis For Periodic Structures, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[3] I. Boudghène Stambouli : Convergence à deux échelles et G-convergence. Thèse de Magister. Université de Tlemcen. 2007.

[4] H. Brezis. Analyse fonctionnelle(Théorie et applications). Edition Masson-Paris, 1983.

[5] G. A. Chechkin, V. V. Jikov, D. Lukkassen and A.L. Piatnitski : On homogenization of networks and junctions, Asymptotic Anal. **30**(1), 61-80(2002).

[6] V. Chiadò Piat and A. Defrancheschi, Homogenization of monotone operators, Nonlinear Anal. **14**, 717-732(1990).

[7] D. Cioranescu and P. Donato. An Itroduction to Homogenization. OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1999.

[8] A. Defranceschi : An Introduction to Homogenization and G-convergence, School on Homogenization, at the ICTP, Trieste. September 6-8(1993).

[9] L. C. Evans. Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations. CBMS, Regional Conference Series in Mathematics, Number 74, at Loyola University of Chicago. June 27-July 1, 1988.

[10] V. V. Jikov, S. M. Kozlov and O. A. Oleinik : Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals, (Springer, Berlin, 1994).

[11] J.-L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod Gauthier-Villars, Paris (1969).

[12] J.-L. Lions, D. Lukkassen, L.-E. Persson and P. Wall. Reiterated homogenization of monotone operators. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330**, 675-680(2000).

[13] J.-L. Lions, D. Lukkassen, L.-E. Persson and P. Wall. Reiterated homogenization of nonlinear monotone operators. *Chin. Ann. of Math.* **22B**, 1-12(2001).

[14] D. Lukkassen : A new reiterated structure with optimal macroscopic behavior, SIAM J. Appl. Math. **59**(5), 1825-1842(1999).

[15] D. Lukkassen, G. Nguetseng, and P. Wall : Two-scale convergence, International J. of Pure and Appl Math. **2**(1), 35-86(2002).

[16] D. Lukkassen and P. Wall : Two-scale convergence with respect to measures and homogenization of monotone operators, Function Spaces and Applications. **3**(2), 125-161(2005).

[17] M. Mamchaoui : Méthode de jonctions dans la théorie de l'homogénéisation. Thèse de Magister. Université de Tlemcen. 2007.

[18] M. Mamchaoui and G. Senouci Bereksi : Convergence of monotone operators with respect to measures. ZAMM - Z. Angew. Math. Mech./J. Appl. Math. Mech. DOI : 10.1002/zamm.201600112.

[19] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. SIAM J. Math. Anal. **20**(3), 608-623(1989).

[20] P. A. Raviart, J.-M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.Dunod. Juin 2000.

[21] G. Senouci Bereksi and K.-H. Hoffmann : On modelling of electronic smart systems and junctions. Application to a piezoelectric plate as junction domain. ZAMM - Z. Angew. Math. Mech./J. Appl. Math. Mech. **85**(8). 539-556(2005).

[22] G. Senouci Bereksi. Homogénéisation, support de cours de post-graduation, Magister en Mathématiques et Applications. 2004-2005.

[23] V. V. Zhikov : Weighted Sobolev spaces, Russian Acad. Sci. Sb. Math. **189**(8), 1139-1170(1997).

[24] V. V. Zhikov : On the homogenization technique for variational problems, Funct. Anal. Appli. **33**(1), 11-24(1999).

[25] V. V. Zhikov : On an extension of the method of two-scale convergence and its applications, Russian Academy of Sciences, (DoM) and London Mathematical Society, Turpion Ltd. Sbornik : Mathematics. **191**(7), 31-72(2000).

[26] V. V. Zhikov : Homogenization of elasticity problems on singular structures, Izv. Math. **66**(2), 299-365(2002).

[27] V. V. Zhikov, M. E. Rychago and S. B. Shul'ga : Homogenization of monotone operators by the method of two-scale convergence, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 127, No. 5,(2005).

[28] V. V. Zhikov : On two-scale convergence, J. Math. Sci. **120**(3), 1328-1352(2004).

[29] V. V. Zhikov : On passage to the limit in nonlinear elliptic equations. Dokl. Math. **77**(3), 383-387(2008).

[30] V. V. Zhikov : On the technique for passing to the limit in nonlinear elliptic equations. Funct. Anal. Appl. **43**(2), 96-112(2009).

[31] V. V. Zhikov and G. A. Yosifian : Introduction to the theory of two-scale convergence. J. Math. Sci. **197**(3), 325-357(2014).

Résumé :

Cette thèse porte sur les opérateurs monotones dans la théorie de l 'homogénéisation. Les opérateurs introduits peuvent dépendre d'un petit paramètre delta. Nous établissons quelques résultats de convergence par rapport aux mesures singulières. Notre résultat est valable sans utiliser la convergence à deux échelles. Enfin, sous certaines hypothèses appropriées, nous montrons la commutativité du diagramme correspondant.
Mots Clés :

Homogénéisation, opérateurs monotones, mesures, fonctions périodiques, jonctions.

Abstract:

This thesis deals with monotone operators in the theory of homogenization. The operators introduced may depend on a small parameter delta. We establish some convergence results with respect to singular measures. Our result is valid without using the two-scale convergence. Finally, under some suitable assumptions, we show the commutativity of the corresponding diagram.

Key words :

Homogenization, monotone operators, measures, periodic functions, junctions.

الملخص:

في هذه الأطروحة، نهتم بدراسة فئة من المؤثرات الرتيبة في نظرية التجانس. هذه المؤثرات تعتمد على وسيط صغير دلتا. سنتعرض إلى بعض نتائج التقارب بالنسبة إلى القياس. النتيجة المتحصل عليها صالحة بدون استعمال التقارب الثنائي السلمي. وفي الأخير وباستعمال بعض الفرضيات نبرهن أن الرسم البياني الموافق تبديلي.

الكلمات المفتاحية:

التجانس، مؤثرات رتيبة، قياس، دوال دورية، تقاطعات.