UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID - TLEMCEN
FACULTE DE SIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE

pour l'obtention du grade de

MAGISTÈRE

Option :PROBABILITES ET STATISTIQUES

présentée par

Omar BELABBACI

Sur

LA PENALISATION DES TRAJECTOIRES DU MOUVEMENT BROWNIEN

Devant le jury composé de :

Mr. DIB Hacen PR Université de Tlemcen. **Président**.

Mr. LABBAS Ahmed MC Université de Tlemcen. **Examinateur**.

Mr. B. Abdellaoui, MC. Université de Tlemcen. **Examinateur**.

Mr. T. Mourid, Professeur. Université de Tlemcen. **Rapporteur**.

Mr. F. Boukhari, MC. Université de Tlemcen. **Rapporteur**.

Table des matières

0.1 Introduction 3

1 **7**

1.1 Processus stochastique 7
1.2 Le mouvement brownien 9
1.3 Martingale **à** temps continue 11
1.4 Processus de Markov 17
1.5 L'intégration stochastique 26

2 **31**

2.1 Pénalisation par $\varphi(S_t)$ 32
2.2 Pénalisation par $\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}$ 40

3 **53**

3.1 Temps local 53
3.2 Pénalisation par une fonction du temps local en zéro. 60
3.3 Conclusion 71

0.1 Introduction

Dans les dix dernières années, Bernard Roynette, Pierre Vallois et Marc Yor se sont intéressés au problème de pénalisation des trajectoires du mouvement brownien. Dans une série de travaux ils ont étudié le comportement asymptotique des quantités :

$$\frac{E_x(1_{\Gamma_s} F_t)}{E_x(F_t)}$$

lorsque $t \to \infty$, où $F = (F_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté vérifiant

$$0 < E_x(F_t) < \infty,$$

où E_x est l'espérance mathématique par rapport à la mesure de Wiener P_x. Ils ont établit plusieurs résultats pour des exemples particuliers de processus $F = (F_t)_{t\geq 0}$, dans chaque cas ils montrent l'existence d'une mesure de probabilité limite notée Q_x^F vérifiant

$$\forall s \geq 0, \forall \Gamma_s \in \mathcal{F}_s, \lim_{t\to+\infty} \frac{E_x[1_{\Gamma_s} F_t]}{E_x[F_t]} = Q_x^F(\Gamma_s).$$

Utilisant des propriétés fines du mouvement brownien ainsi que le calcul stochastique, ils ont montré que la mesure limite Q_x^F est localement absolument continue par rapport à la mesure de Wiener P_x, dans le sens où

$$\forall t \geq 0, \qquad \frac{dQ^F_{x/\mathcal{F}_t}}{dP_{x/\mathcal{F}_t}} = M_t^F.$$

où $M = M^F = (M_t^F)_{t\geq 0}$ est une martingale continue.

Dans ce mémoire nous traitons trois cas de pénalisation :

1. $\mathrm{F}_t = \varphi(S_t)$.
2. $\mathrm{F}_t = \psi(X_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t - X_t)}$.
3. $\mathrm{F}_t = h^+(L_t)1_{\{X_t>0\}} + h^-(L_t)1_{\{X_t<0\}}$,

où $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, $S = (S_t)_{t\geq 0}$ est le processus de son supremum unilatéral et $L = (L_t)_{t\geq 0}$ est le processus du temps local associé au mouvement brownien.

Nous développons dans ce mémoire les résultats de l'article :

B. Roynette, P. Vallois et M. Yor ; *Limiting laws associated with brownien motion perturbed by its maximum, minimum and local time, II* Studia Sci. Math. Hungar. $43(3)(2006), 295-360$.

Le premier chapitre est consacré aux rappels des principales propriétés du mouvement brownien. Nous y montrons en particulier la propriété de Markov pour le mouvement brownien, nous donnons aussi les principales propriétés du temps d'atteinte ainsi que les densités de probabilité de quelques variables aléatoires associées au mouvement brownien. Nous terminons ce chapitre par rappeler la formule d'Itô pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ ainsi que le théorème de Girsanov pour le changement de probabilité.

Dans le deuxième chapitre nous commençons par rappeler les martingales d'Azéma-Yor et les martingales de Kennedy qui apparaîtront d'une manière naturelle comme densité de Radon-Nykodim de la mesure limite par rapport à la mesure de Wiener. Nous exposons ensuite le premier résultat de pénalisation qui traîte le cas

$$F_t = \varphi(S_t),$$

où $S_t = \sup_{0\leq u\leq t} X_u$ et φ une fonction boréliènne et intégrable. La dernière partie de ce chapitre est cansacrée au deuxième résultat de pénalisation qui traîte le cas

$$F_t = \psi(X_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)},$$

où ψ est une fonction boréliènne satisfaisant une condition d'intégrabilité.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du problème de pénalisation :

$$F_t = h^+(L_t)1_{\{X_t>0\}} + h^-(L_t)1_{\{X_t<0\}}.$$

où $L = (L_t)_{t\geq 0}$ est le processus du temps local associé au mouvement brownien et h^+, h^- sont des fonction boréliènnes, bornées et vérifiant une condition d'intégrabilité. Nous commençons par introduire le processus du temps local $L = (L_t)_{t\geq 0}$ et nous donnons ces principales propriétés. Nous montrons en particulier le théorème de Lévy qui donne l'egalité en loi des processus

$$\{(|X_t|, S_t); t\geq 0\} \qquad \text{et} \qquad \{(S_t - X_t, L_t); t\geq 0\}$$

nous établissons enfin le troisième résultat de pénalisation en donnant pour ce cas aussi la martingale densité.

Pourquoi le terme pénalisation Prenons $x = 0$ et notons P_0 par P, Q_0 par Q, $Q_{0,t}$ par Q_t et E_0 par E.

Posons

$$(u) = \frac{1}{b}\mathbf{1}_{[0,b]}(u), \quad b > 0.$$

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, le processus canonique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est donc un mouvement Brownien standard, en particulier

$$¶(\limsup_{t\infty} X_t = +\infty) = 1,$$

ainsi

$$¶(\sup_{t\geq 0} X_t = +\infty) = 1.$$

D'autre part, pour $0 \leq u \leq t$, on a

$$\{S_u \leq b\} \in_u \subset_t,$$

par suite

$$\begin{array}{rcl} Q_t(S_u \leq b) & := & (\mathbf{1}_{(S_u \leq b)} \frac{(S_t)}{((S_t))}) \\ & = & \frac{1}{\P(S_t \leq b)}_0 (\mathbf{1}_{(S_u \leq b)} \mathbf{1}_{(S_t \leq b)}) \\ & = & \frac{1}{\P(S_t \leq b)} (\mathbf{1}_{(S_t \leq b)}) \\ & = & 1. \end{array}$$

Par conséquent, pour tout $u \geq 0$:

$$(S_u \leq b) = \lim_{t\infty} Q_t(S_u \leq b) = 1.$$

D'où

$$(\sup_{t \geq 0} X_t \leq b) = 1.$$

Ainsi la variable aléatoire

$$\sup_{t \geq 0} X_t$$

est Q-presque sûrement bornée alors qu'elle vaut $+\infty$ P-presque sûrement.

Chapitre 1

Le but de ce premier chapitre est d'éxposer les notions de base utilisées le long de ce mémoire. Nous commençons par définir : le processus stochastique, le mouvement brownien, le processus de Markov, les martingales....Nous rappelons aussi les principaux théorèmes de calcul stochastique utilisés dans ce travail.

1.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est un phénomène qui évolue dans le temps d'une manière aléatoire. La vie quotidienne et la science nous donnent beaucoup d'exemples de ce genre de phénomène, *où* en tout cas des phénomènes qui peuvent être compris de cette façon. La météo ; la population d'une ville ; le nombre de personnes dans une file d'attente et la position d'une particule de pollen dans un fluide, sont des exemples de processus stochastiques. Ce dernier fut étudié pour la première fois par le botaniste Robert Brown en 1827 et reçu le nom de mouvement brownien. Il joue un rôle fondamental dans la théorie des processus aléatoires, un peu comme la distribution gaussienne dans la théorie des probabilités.

En 1920, N. Wiener donne une définition mathématique du mouvement brownien. Il étudie en particulier ses trajectoires qui sont continues mais nulle part différentiables (*à* aucun moment la vitesse ne peut être définie car les changements de direction sont trop rapides).

Dans les années quarantes, K. Itô développa un calcul différentiel spécifique au mouvement brownien : le calcul stochastique.

Dans toute la suite, on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ supposé complet de plus nous adaptons les définitions et les notations suivants :

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires* $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ *définie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, et à valeurs dans un* *espace mesurable* $(E, \mathcal{E})$.

Dans la plus part des cas étudiés dans ce mémoire, l'espace $(E, \mathcal{E})$ *sera* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *ou* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$.

- Une *filtration* est une famille $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall t \geq s \geq 0$. Par convention, on pose $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$ (= la plus petite tribu contenant toutes les $\mathcal{F}_t$). On pose aussi $\mathcal{F}_{t_+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

- Une filtratoin $F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est dite càd(pour *"continue à droite"*) si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ pour tout $t \geq 0$.

- Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est *adapté* à $\mathcal{F}_t$ si on a : X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable $\forall t \geq 0$.

- La *filtration naturelle* d'un processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ notée par $\mathcal{F}_t^X$, est définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$.

Définitions 1.1.2

Soit $X_t; t \in \mathbb{R}$ *un processus stochastique ;*

1. *Pour* $0 \leq s < t$, *les variables aléatoires* $X_t - X_s$, *sont appelées des accroissements du processus* $(X_t)_{t\geq 0}$.
2. *Un processus* $\{X_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ *est à accroissements indépendants si pour toute suite* $0 < t_1 < ... < t_n$, *les variables aléatoires* $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*
3. *Un processus* $\{X_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ *est à accroissements stastionnaires si, la distribution de la variable* $X_{t+s} - X_t$ *ne dépend pas de* t. *En d'autre termes pour tout* $t \geq 0, h > 0$, *la loi de* $X_{t+h} - X_t$ *est égale à la loi de* $X_h - X_0$.
4. *Un processus* $\{X_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ *est gaussien si, pour tous* $0 < t_1 < ... < t_n$, $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ *est un vecteur gaussien à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.3 *Un processus* $\{X_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ *est à trajectoires continues si*

$$P(\{\omega \in \Omega : l'application\ t \to X_t(\omega)\ est\ continue\}) = 1.$$

À présent, on introduit le premier exemple de processus stochastique : le mouvement brownien.

1.2 Le mouvement brownien

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique* $\{B_t; t \in I\!\!R_+\}$ *est un* <u>*mouvement brownien standard*</u> *s'il vérifie :*

i) $B_0 = 0$ *P.p.s ;*

ii)$\{B_t; t \in I\!\!R_+\}$*est à accroissements indépendants,*

iii) $\forall 0 \leq s < t$*, la variable aléatoire* $B_t - B_s$ *suit une loi normale* $\mathcal{N}(0, t-s)$.

iv) P.p.s l'application $t \mapsto B_t$ *est continue.*

Proposition 1.2.2 *Dans la définition précédente, on peut remplacer les proprietés* ii) *et* iii) *par :*

$$\begin{cases} ii^{'})\forall t \geq 0, B_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0,t), \\ iii^{'})\forall 0 < s \leq t, B_t - B_s \text{ et } B_s \text{ sont indépendants} \end{cases}$$

Ou bien :

$$\begin{cases} ii^{''})(B_t)_{t\geq 0} \text{ est un processus gaussien, continu et centré }, \\ iii^{''})\forall s,t \in I\!\!R_+, cov(B_t, B_s) = E[B_tB_s] = s \wedge t. \end{cases}$$

Définition 1.2.3 *Soit* $x \in I\!\!R$*, on appelle* <u>*mouvement brownien issu de* x</u>*, tout processus* $\{B_t; t \in I\!\!R_+\}$ *tel que* $\{B_t - x; t \in I\!\!R_+\}$ *soit un mouvement brownien standard.*

Proposition 1.2.4 *Soit* $B = \{B_t; t \in I\!\!R_+\}$ *un mouvement brownien, alors*

a) <u>*Symétrie*</u> *Le processus* $(-B) = \{-B_t; t \in I\!\!R_+\}$*, est un mouvement brownien.*

b) <u>*Propriété de Markov simple*</u> *Pour tout* $s > 0$*, le processus*

$$\{B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s; t \in I\!\!R_+\}, \tag{1.1}$$

est un mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_u, u \leq s)$ *;*

c) <u>*Changement d'échelle*</u> *Si* $\lambda > 0$*, et si* $B_t^\lambda = \frac{1}{\lambda}B_{\lambda^2 t}, t \geq 0$ *alors le processus* $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien.*

Preuve de la proposition .

a) <u>*Symétrie.*</u>

$i)$ $-B_0 = 0$ P p.s.

$ii'')$ on a $(-B_t)$ a le même loi que B_t, en effet : $B_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0,t)$, donc $-B_t$ est symétrique, ainsi $-B_t \stackrel{(d)}{=} B_t$, alors $-B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$.

$iii'')$ $\forall s,t \in I\!R$; $cov((-B_t)(-B_s)) = E[(-B_t)(-B_s)] = E[B_tB_s] = t \wedge s.$

$iv)$ L'application $t \mapsto -B_t$ est P p.s continue.

et d'après la définition(1.2.1) la proposition(1.2.2), $(-B)$ est un mouvement brownien.

b) <u>*Propriété de Markov simple.*</u>

Soit $s > 0$, alors

$i)$ $B_0^{(s)} = B_s - B_s = 0$ P p.s,

$ii)$ $\forall t > 0$, $B_t^{(s)}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,t)$,

$iii)$ Si $u < v$, alors $B_u^{(s)} - B_v^{(s)}$ et $B_u^{(s)}$ sont indépendants, en effet :
$\forall s > 0$, et pour $u < v$, $B_u^{(s)} - B_v^{(s)} = B_{v+s} - B_s - B_{u+s} + B_s = B_{v+s} - B_{u+s}$. Puisque $s < u+s < v+s$, alors $B_{v+s} - B_{u+s}$ et $B_{u+s} + B_s$ sont indépendants.

$iv)$ Les deux applications $s \mapsto B_{t+s}$ et $s \mapsto -B_s$ P p.s. sont continues donc l'application $t \mapsto B_{t+s} - B_s$ l'est aussi.

c) <u>*Changement d'échelle.*</u> Soit $\lambda > 0$, on a

$i)$ $B_0^\lambda = \frac{1}{\lambda}B_0 = 0$ P p.s.

$ii'')$ Il est clair que $(B_t^\lambda)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien, continu et centré.

$iii'')$ $\forall t,s \in I\!R_+$

$$\begin{aligned} cov(B_s^\lambda, B_t^\lambda) &= cov(\frac{1}{\lambda}B_{\lambda^2 s}, \frac{1}{\lambda}B_{\lambda^2 t}) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}cov(B_{\lambda^2 s}, B_{\lambda^2 t}) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}(\lambda^2 s \wedge \lambda^2 t) \\ &= s \wedge t. \end{aligned}$$

$iv)$ L'application $t \mapsto B_t^\lambda$ est continue P p.s.

D'où $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. $\diamond$

La mesure de Wiener.

Soit $C(I\!R_+, I\!R)$ l'espace des fonctions continues de $I\!R_+$ dans $I\!R$. On munit cet espace de la tribu $\mathcal{C}$ qui est la plus petite tribu rendant mesurables les applications coordonnées $w \longrightarrow w(t)$ pour tout $t \in I\!R_+$.

Définition 1.2.5 *Soit $\{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ un mouvement brownien standard, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La mesure de Wiener est la mesure de probabilité P_0 sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ définie comme la mesure-image de P par l'appliction*

$$\begin{aligned} \chi : \Omega &\rightarrow C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ \omega &\mapsto (B_t(\omega))_{t \in \mathbb{R}_+} \end{aligned}$$

Remarque 1.2.6

L'application χ est mesurable : il suffit de voir que la composée de χ avec chacune des applications coordonnées $\omega \rightarrow \omega_t$ est mesurable, cette composée donne les v.a.B_t.

La mesure de probabilité P_0 est déterminée de manière unique, indépendamment du choix du mouvement brownien $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$: autrement dit tous les mouvements browniens issu de 0 ont la même loi, qui est la mesure de Wiener.

Si $x \in \mathbb{R}$, on note aussi P_x la mesure-image de P_0 par la translation $\omega \rightarrow x + \omega$(c'est la loi du mouvement brownien issu de x).

Construction canonique du mouvement brownien. Elle consiste *à* prendre comme espace de probabilité $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni de la tribu $\mathcal{C}$ et la probabilité P_0. On définit alors pour tout $t \geq 0$,

$$B_t(\omega) = \omega(t), \forall w \in \Omega.$$

L'espace $(\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), (\omega(t))_{t\geq 0}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P_0)$, s'appelle *l'espace canonique*, et la famille des trajectoires $\{\omega(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ est un mouvement brownien stantard.

Dans la suite on suppose donner un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$

1.3 Martingale à temps continue

Dans ce paragraphe on introduit un outil important dans la théorie des processus aléatoires à savoir : les martingales, on commence par rappeler les définitions de base, puis on rappelle les propriétés utilisées dans ce mémoire.

Définition 1.3.1 *Une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, \infty]$ est un temps d'arrêt par rapport $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$si*

$$\forall t \geq 0\ , \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{1.2}$$

Exemple 1.3.2

1-) Le premier exemple de temps d'arrêt est le temps d'arrêt constant i.e $T = c$, en effet : Si $t \geq 0$,$\{T \leq t\} = \{c \leq t\}$

$$= \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}_t & \text{si } t < c \\ \Omega \in \mathcal{F}_t & \text{si } t \geq c \end{cases} \tag{1.3}$$

2-) Deux exemples importants de temps d'arrêt sont Le temps d'entrée et le temps de rencontre, commençons par donner leur définitions

Définition 1.3.3 (Temps d'entrée) *Soit F un fermé de $I\!R$, et soit $X = \{X_t; t \geq 0\}$ un processus stochastique continue et adapté à un filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, le temps d'entrée T_F est défini par*

$$T_F = \inf\{t \geq 0, X_t \in F\}.$$

Définition 1.3.4 (Temps de rencontre) *Soit O un ouvert de $I\!R$, et soit $X = \{X_t; t \geq 0\}$ un processus stochastique continue et adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, le temps de rencontre T_O est définie par*

$$T_O = \inf\{t \geq 0, X_t \in O\}.$$

Proposition 1.3.5 *Soient F, O un fermé et un ouvert de $I\!R$, alors*

1. *Le temps d'entré T_F est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*
2. *Le temps de rencontre T_O est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$.*

Preuve de la proposition .

1. Montrons que T_F est un temps d'arrêt par rapport *à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } t \geq 0,\ T_F(\omega) \leq t &\Leftrightarrow \exists s \in [0,t], \text{tel que } X_s \in F \\ &\Leftrightarrow \exists s \in [0,t], \text{tel que } d(X_s(\omega), F) = 0 \\ &\Leftrightarrow \inf_{0\leq s\leq t} d(X_s(\omega), F) = 0. \end{aligned}$$

On sait que
$$x \in F \Leftrightarrow d(x,F) = 0,$$
et puisque les applications $t \to X_t(\omega)$ et $x \to d(x,F)$ sont continues, alors on a
$$\inf_{s\in[0,t]} d(X_s(\omega),F) = \inf_{s\in[0,t]\cap Q} d(X_s(\omega),F).$$

Ainsi
$$\forall t \geq 0, \{T_F \leq t\} = \{\inf_{s\in[0,t]\cap Q} d(X_s(\omega),F) = 0\}.$$

L'application $\omega \mapsto \inf_{s\in[0,t]\cap Q} d(X_s(\omega),F)$ est $\mathcal{F}_t-$ mesurable, donc
$$\forall t \geq 0,\ \{\inf_{s\in[0,t]\cap Q} d(X_s(\omega),F) = 0\} \in \mathcal{F}_t.$$

D'où
$$\forall t \geq 0, \{T_F \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

donc T_F est un temps d'arrêt.

2. Montrons que T_O est un temps d'arrêt par rapport *à* $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$ i.e :
$$\forall t \geq 0, \{T_O < t\} \in \mathcal{F}_t.$$
Soient $\omega \in \Omega, t \geq 0$.
$$T_O(\omega) < t \Leftrightarrow \exists s \in [0,t] /\ X_s \in O$$
c'est *à* dire
$$T_O(\omega) < t \Leftrightarrow \exists s \in [0,t] \cap Q /\ X_s(\omega) \in O.$$
Ainsi
$$\{T_O(\omega) < t\} = \bigcup_{s\in[0,t]\cap Q} \{X_s \in O\}.$$
Puisque, $\{X_s \in O\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$; alors
$$\{T_O(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_s, \forall s > t.$$

Donc T_O est un temps d'arrêt. $\diamond$

Définition 1.3.6 (Temps d'atteinte) *Soient $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard et $a \in I\!R$, on définit le* <u>*Temps d'atteinte*</u> *T_a par*

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}.$$

Une application directe de la dernière proposition donne :

Proposition 1.3.7 *Pour tout $a \in I\!R$, le temps d'atteinte T_a est un temps d'arrêt.*

Définition 1.3.8 (Processus arrêté) *Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus, T un temps d'arrêt, le processus $X^T = (X_t^T)_{t\geq 0} = (X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est appelé* <u>*le processus arrêté.*</u>

Passons maintenant, *à* la notion de martingale.

Définition 1.3.9 *Soient $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ une filtration, et $M = \{M_t; t \geq 0\}$ un processus adapté tel que $E[|M_t|] < \infty$, pour chaque $t \in I\!R^+$, alors*

a)On dit que M est une <u>*$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale*</u> *si*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \qquad E[M_t/\mathcal{F}_s] = M_s, \qquad P.p.s,$$

b) On dit que M est une <u>*$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-sous-martingale*</u> *si*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \qquad M_s \leq E[M_t/\mathcal{F}_s], \qquad P.p.s$$

c) On dit que M est une <u>*$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$- surmartingale*</u> *si*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \qquad M_s \geq E[M_t/\mathcal{F}_s], \qquad P.p.s$$

Exemple 1.3.10

1. $(B_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport *à* sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^B, t \in I\!R_+)$.
   i) Rappellons d'abord que pour tout $t \geq 0$, $B_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0, t)$, ainsi

$$\begin{aligned}
E[|B_t|] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} (-y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}} dy + \int_0^{+\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{y}{t} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \Big[- \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}} \Big]_0^{+\infty} \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty.
\end{aligned}$$

ii) $\forall t > s \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} E[B_t/\mathcal{F}_s^B] &= E[B_t - B_s/\mathcal{F}_s^B] + E[B_s/\mathcal{F}_s^B] \\ &= E[B_t - B_s] + B_s \\ &= B_t. \end{aligned}$$

2. $\{B_t^2 - t; t \geq 0\}$ est une martingale, en effet : Soient $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned} E[B_t^2/\mathcal{F}_s] &= E[B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s] \\ &= B_s^2 + 2B_s E[B_t - B_s/\mathcal{F}_s] + E[(B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s] \\ &= B_s^2 + 0 + (t - s), \end{aligned}$$

car $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$, $E[B_t - B_s] = 0$ et $E[(B_t - B_s)^2] = t - s$. Ainsi, $\forall t \geq s, E[B_t^2 - t/\mathcal{F}_s] = B_s^2 - s$.

Définitions 1.3.11 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique*

1) On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformémént intégrable si :

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{(|X_t|>\alpha)} |X_t| dP = 0.$$

2) Si $p \geq 1$, on dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans L^p si :

$$\sup_{t\geq 0} E[|X_t|^p] < \infty.$$

Théorème 1.3.12 *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable si et seulement si*

a. $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans L^1.

b. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0$ tel que : si $A \in \mathcal{F}_t$ avec $P(A) < \alpha_\varepsilon$ alors

$$\sup_{t\geq 0} \int_A |X_t| dP < \varepsilon.$$

Proposition 1.3.13 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique :*

1) S'il existe v.a.r $Z \geq 0$ avec $Z \in L^1$ et $|X_t| \leq Z$, $\forall t \geq 0$, alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable.

2) Soit $g : I\!R^+ \to I\!R^+$ tel que :

i) $\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t} = +\infty$.

ii) $\sup_t E[g(|X_t|)] < \infty$.

Alors, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable.

Théorème 1.3.14 (Martingale arrêté) *Soient $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale, T un temps d'arrêt, alors le processus M^T est encore une martingale.*

Théorème 1.3.15 (Décomposition de Doob) *Soit $\{M_t; t \in I\!R_+\}$ une $(\mathcal{F}_t)-$sous-martingale continue. Alors il existe un unique processus $\{A_t; t \in I\!R_+\}$ croissant, continu et adapté, tel que $A_0 = 0$ et $\{M_t - A_t; t \in I\!R_+\}$ soit une martingale.*

Maintenant, nous passons au problème de convergences des martingales. Nous citerons en particulier des théorèmes qui caractérisent convergences L^1 et P.p.s.

Théorème 1.3.16 (Théorème de convergence de Doob) *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une sous-martingale continue et bornée dans L^1 (i.e. $\sup E[|M_t|] < \infty$). Alors il existe une variable aléatoire réelle $M_\infty \in L^1$ telle qu'on ait*

$$M_t \to_{t\to+\infty} M_\infty \ P.p.s$$

Corollaire 1.3.17 *Si $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale continue , négative,(resp :une surmartingale continue, positive) alors, il existe une (v.a.r) $M_\infty \in L^1$ telle que $M_t \to_{t\to+\infty} M_\infty$ P.p.s.*

Définition 1.3.18 (Martingale fermée) *Une martingale continue $\{M_t; t \in I\!R_+\}$ est dite fermée, s'il existe une variable aléatoire $M_\infty \in L^1(P)$, telle que*

$$\forall t \geq 0,\ M_t = E[M_\infty/\mathcal{F}_t].$$

Théorème 1.3.19 *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $M = (M_t)_{t\geq 0}$ converge P.p.s et dans L^1 vers M_∞, P.p.s.

ii) La famille $\{M_t, t \in I\!R_+\}$ est uniformément intégrable.

iii) $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est fermée par M_∞.

1.4 Processus de Markov

Dans ce paragraphe, nous abordons une notion importante dans la théorie de processus stochastique : le processus de Markov, nous y montrons en particulier que le mouvement brownien est un processus de Markov ainsi que le processus (B_t, S_t). Commençons par définir le tribu des événements antérieurs *à* T.

Définition 1.4.1 *Soit T un temps d'arrêt. La tribu des événement antérieurs à T est définie par*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty; \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Définition 1.4.2 *Un Processus de Markov est un Processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$, tel que pour toute fonction $f : I\!R \to I\!R$ borélienne et bornée*

$$E[f(X_t)/\mathcal{F}_s] = \Lambda(X_s) \ P.p.s, \tag{1.4}$$

où $\Lambda = \Lambda(f)$ est une fonction borélienne.

Pour montrer que le mouvement brownien est un processus de Markov, nous avons besoin du résultat suivant :

Proposition 1.4.3 *Soient $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, Y(resp.X) une variable aléatoire $\mathcal{B}-$mesurable (resp. indépendante de $\mathcal{B}$). Alors, pour toute fonction mesurable $h : I\!R^2 \to I\!R$,*

$$E[h(Y,X)/\mathcal{B}] = \phi(Y), \ P.p. \ s, \tag{1.5}$$

où $\phi(t) = E(h(t,X))$.

Preuve de la proposition . Soient h une fonction mesurable bornée, $Z \in \mathcal{B}$ et $Z \geq 0$. On a

$$\phi(y) = \int h(y,x) f_X(x)dx,$$

et

$$\begin{aligned} E[Zh(Y,X)) &= \int\int\int zh(y,x)f_{Y,Z}(y,z)f_X(x)dxdzdy \\ &= \int z[\int (\int h(y,x)f_X(x)dx)f_{Y,Z}(y,z)dy]dz \\ &= \int z\phi(y)f_{Y,Z}(y,z)dydz \\ &= E[Z\phi(Y)]; \end{aligned}$$

d'où $\phi(t) = E[h(t,X)]$. $\diamond$

Proposition 1.4.4 *Le mouvement brownien est un processus de Markov.*

Preuve de la proposition .
On sait que $\forall t \geq s \geq 0$, $(B_t - B_s) \perp B_s$ (i.e $\forall t \geq s \geq 0, E[(B_t - B_s)B_s] = 0$).

On a aussi B_s est $\mathcal{F}_s^B-$mesurable, et d'aprés la proposition(1.4.3), nous avons

$$E[f(B_t/\mathcal{F}_s^B] = E[f(B_t - B_s - B_s)/\mathcal{F}_s^B] = \phi(B_s)\ P.p.s,$$

où $\phi(y) = E[f(B_t - B_s + y)]$, de même manière on montre que

$$E[f(B_t)/B_s] = \phi(B_s)\ P.p.s.$$

i.e

$$\forall t \geq s \geq 0, E[f(B_t/B_s] = E[f(B_t - B_s - B_s)/B_s] = \phi(B_s)\ P.p.s,$$

et donc la propriété de Markov est démontrée. $\diamond$

Remarque 1.4.5

- *Dorénavant, on note le maximum unilatéral du mouvement brownien* $(B_t)_{t\geq 0}$ *par* S_t *(i.e* $S_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$*).*
- *Le couple* (B_t, S_t) *est un processus de Markov, en effet :* $\forall 0 \leq t < s$*, on a*

$$\begin{aligned} E[f(B_t, S_t)/\mathcal{F}_s] &= E[f(B_t - B_s + B_s, S_s \vee B_s + \sup_{0\leq u\leq t-s}(B_{u+s} - B_s))/\mathcal{F}_s] \\ &= E[f(\tilde{B}_{t-s} + B_s, S_s \vee B_s + \tilde{S}_{t-s})/\mathcal{F}_s]; \end{aligned}$$

où

$$\tilde{B}_{t-s} = B_t - B_s \text{ et } \tilde{S}_{t-s} = \sup_{0\leq u\leq t-s}(B_{u+s} - B_s),$$

sont indépendants de $\mathcal{F}_s$*. Donc d'après(1.4.3), on aura*

$$E[f(B_t, S_t)/\mathcal{F}_s] = \Theta(B_s, S_s);$$

où

$$\Theta(x, y) = E[f(\tilde{B}_{t-s} + x, y \vee (x + \tilde{S}_{t-s}))].$$

Le théorème suivant étend la propriété de Markov simple (1.1)au cas *où* l'instant déterministe s est remplacé par un temps d'arrêt T.

Théorème 1.4.6 (Propriété de Markov forte) *(voir [6]) Soient T un temps d'arrêt, tel que $P(T < \infty) > 0$. Alors conditionnellement à $\{T < \infty\}$, le processus $B^{(T)}$ définie par*

$$B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T$$

est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.

De façon équivalente, la propriété s'énonce : conditionnellement à $B_T = x$, le processus $(B_{T+s})_{s\geq 0}$, est indépendant de $\mathcal{F}_T$ et a pour loi P_x.

Une conséquence importante de la propriété de Markov forte est le résultat suivant qui donne en particulier la loi de $S_t = \sup_{0\leq u\leq t} B_u$

Proposition 1.4.7 (Principe de réflexion) *Soient $t \in I\!R_+$, $(a,b) \in I\!R^2$, avec $b > 0$ et $a \leq b$. Alors on a,*

$$\forall t > 0, P[S_t \geq b, X_t \leq a] = P[X_t \geq 2b - a], \tag{1.6}$$

En particulier, S_t a même loi que $|B_t|$.

Preuve de la proposition . En appliquant la propriété de Markov forte au temps d'arrêt

$$T_b = \inf\{t \geq 0, B_t = b\}. \tag{1.7}$$

On sait que $T_b < \infty$ p.s. En suite,

$$\begin{array}{rcl} P[S_t \geq b, B_t \leq a] & = & P[T_b \leq t, B_t \leq a] \\ & = & P[T_b \leq t, B_t - b \leq a - b] \\ & = & P[T_b \leq t, B_t - B_{T_b} \leq a - b] \\ & = & P[T_b \leq t, B_{t-T_b}^{(T_b)} \leq a - b]; \end{array} \tag{1.8}$$

où

$$X_{t-T_b}^{(T_b)} = B_t - B_{T_b} = B_t - b.$$

Notons $B^{(T_b)}$ par $B^{'}$, de sorte que d'aprés le théorème précédent, le processus $B^{'}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_b}$ donc en particulier de T_b. Comme $B^{'}$ a même loi que $-B^{'}$, le couple $(T_b, B^{'})$ a aussi même loi que $(T_b, B^{'})$. Posons

$$H = \{(s,w) \in I\!R_+ \times \mathcal{C}(I\!R_+, I\!R); s \leq t, w(t-s) \leq a-b\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P[T_b \leq t, B^{(T_b)}_{t-T_b}] &= P[(T_b, B^{'}) \in H] \\ &= P[(T_b, -B^{'}) \in H] \\ &= P[T_b \leq t, -B^{(T_b)}_{t-T_b} \leq a-b] \\ &= P[T_b \leq t, B_t \geq 2b-a] \\ &= P[B_t \geq 2b-a]. \end{aligned}$$

parce que l'événement $\{B_t \geq 2b-a\}$ est contenu dans $\{T_b \leq t\}$, en effet : soient $a > 0$ et $b \leq a$, soit $\omega \in \{B_t \geq 2b-a\}$ alors

$$B_t(\omega) \geq 2b-a = b+(b-a) \geq b \Rightarrow S_t(\omega) \geq b \Rightarrow T_b(\omega) \leq t.$$

Pour la deuxième assertion on observe que

$$P[S_t \geq a] = P[S_t \geq a, B_t \geq a] = P[S_t \geq a, B_t \leq a] = 2P[B_t \geq a] = P[|B_t| \geq a].$$

Ainsi, $\forall a > 0$

$$P[S_t \geq a] = P[|B_t| \geq a],$$

Donc

$$\forall t > 0, S_t \overset{(d)}{=} |B_t|.$$

Telle que la notation : $\overset{(d)}{=}$ signifie :*"sont égales en distribution"*. De plus : la densité de S_t est égale *à*

$$\forall t \geq 0, \qquad f_{S_t}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}} 1_{[0,+\infty[}(x). \diamond$$

Le corollaire suivant montre l'égalité en lois des variables aléatoires S_t, $|B_t|$, et $|B_1|$ pour tout $t \in I\!R_+$.

Corollaire 1.4.8

$$\forall t \geq 0, \qquad S_t \overset{(d)}{=} |B_t| \overset{(d)}{=} \sqrt{t}|B_1|. \qquad (1.9)$$

Preuve du corollaire . On a déja montré la première égalité dans la propotition (1.4.7).
Pour la deuxième, on a

$$\forall a > 0, \qquad P[|B_t| \leq a] = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$$

En faisant le changement de variable $[z = \frac{y}{\sqrt{t}}]$, on trouve

$$\begin{aligned} P[|B_t| \leq a] &= \int_{\frac{-a}{\sqrt{t}}}^{\frac{a}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{z^2}{2}} dz \\ &= P[|B_1| \leq \frac{a}{\sqrt{t}}] \\ &= P[\sqrt{t}|B_1| \leq a], \end{aligned}$$

ainsi

$$\forall a > 0, P[|B_t| \leq a] = P[\sqrt{t}|B_1| \leq a].$$

Donc

$$\forall t \geq 0, |B_t| \overset{(d)}{=} \sqrt{t}|B_1|. \diamond$$

Remarque 1.4.9 *Le temps d'arrêt T_a est P.p.s finie, en effet :*
Soit $t > 0$ et supposons que $a > 0$, on a

$$\begin{aligned} P[T_a = +\infty] = \lim_{t \to +\infty} P[T_a > t] &= \lim_{t \to +\infty} P[S_t \leq a] \\ &= \lim_{t \to +\infty} P[|B_t| \leq a] \\ &= \lim_{t \to +\infty} \int_{-\infty}^{a} f_{|B_t|}(x) dx \\ &= \lim_{t \to +\infty} \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \lim_{t \to +\infty} \int_{0}^{\frac{a}{\sqrt{2t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$P[T_a < +\infty] = 1.$$

de même si $a \leq 0$.

Au chapitre 2 nous aurons besoin aussi de la densité du couple (S_t, B_t) :

Corollaire 1.4.10 *On a pour $t > 0$, $a \leq b$ et $b \geq 0$, le couple (S_t, B_t) a pour densité la fonction $f_{(S_t,B_t)}$ définie par*

$$f_{(S_t,B_t)}(b,a) = \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} exp\{-\frac{(2b-a)^2}{2t}\} dadb \tag{1.10}$$

Preuve du corollaire . D'après la proposition (1.4.7), on a

$$P[B_t \leq a, S_t \geq b] = P[B_t \geq 2b-a] = \int_{2b-a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}} 1_{\{b>0, a \leq b\}} dy. \tag{1.11}$$

Puisque pour tout $b > 0, a \leq b$ nous avons

$$P(B_t \leq a) = P(B_t \leq a, S_t < b) + P(B_t \leq a, S_t \geq b)$$

donc

$$F_{(S_t,B_t)}(b,a) = P(B_t \leq a) - P(B_t \leq a, S_t \geq b).$$

Avec le changement de variable suivant :$[u = \frac{y}{\sqrt{2}}]$, (1.11) devient

$$\begin{aligned} P(B_t \leq a, S_t \geq b) &= \int_{\frac{2b-a}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 1 - \phi(\frac{2b-a}{\sqrt{t}}), \end{aligned}$$

où ϕ est la f.r d'une gaussienne.

Donc

$$\begin{aligned} f_{(S_t,B_t)}(b,a) &= \frac{d^2}{dadb}\Big[1 - (1-\phi)(\frac{2b-a}{\sqrt{t}})\Big] \\ &= \frac{d^2}{dadb}\Big[\phi(\frac{2b-a}{\sqrt{t}})\Big] \\ &= \frac{d}{da}\Big[\frac{d}{db}\Big[\phi(\frac{2b-a}{\sqrt{t}})\Big]\Big] \\ &= \frac{d}{da}\Big[(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}})\frac{2}{\sqrt{t}}\Big] \\ &= \frac{2(2b-a)}{t\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}} \\ &= \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}}\mathrm{e}^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}}. \end{aligned}$$

Ainsi, la densité du couple (S_t, B_t), est

$$\frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} exp\{-\frac{(2b-a)^2}{2t}\} 1_{\{b>0, a\leq b\}}. \diamond \tag{1.12}$$

Proposition 1.4.11 *Pour tout $a \in I\!R$, et suivant la mesure de Wiener P_x, la densitée de T_a est*

$$f_{T_a}(t) = \frac{|x-a|}{\sqrt{2\pi t^3}} exp\Big\{-\frac{(x-a)^2}{2t}\Big\} 1_{\{t>0\}}. \tag{1.13}$$

Preuve de la proposition . Commençons d'abord par calculer la densité par rapport *à* la mesure de Wiener P_0. Soit $t > 0$, on distingue deux cas :

1^{er} cas : $a \geq 0$

$$\begin{aligned} F_{T_a}(t) &= P_0[T_a \leq t] \\ &= P_0[S_t \geq a] \\ &= 2P_0[B_t \geq a] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}} dx. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $[x = \sqrt{t}u]$, on trouve

$$F_{T_a}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

D'où

$$F_{T_a}(t) = 2(1 - \phi_1(\frac{a}{\sqrt{t}})),$$

avec ϕ_1 est la fonction répartition de la gaussienne $\mathcal{N}(0.1)$, donc

$$\begin{aligned} f_{T_a}(t) &= \frac{d}{dt} F_{T_a}(t) \\ &= \frac{d}{dt}\Big[2(1 - \phi_1(\frac{a}{\sqrt{t}}))\Big] \\ &= -2\frac{d}{dt}\Big[\phi_1(\frac{a}{\sqrt{t}})\Big] \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2t}} 1_{]0,+\infty]}(t). \end{aligned}$$

$\underline{2^{eme}\ cas : a < 0}$

$$\begin{aligned} F_{T_a}(t) &= P_0[T_a \le t] \\ &= P_0[S_t \ge a] \\ &= 2P_0[B_t \ge a] \\ &= 2P_0[-B_t \le -a] \\ &= 2P_0[B_t \le -a] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{-a} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}} dx \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $[x = \sqrt{t}u]$, on trouve

$$F_{T_a}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-a}{\sqrt{t}}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

d'o$\grave{u}$

$$F_{T_a}(t) = 2\phi_1(\frac{-a}{\sqrt{t}}),$$

donc

$$\begin{aligned} f_{T_a}(t) &= \frac{d}{dt} F_{T_a}(t) \\ &= \frac{d}{dt}\left[2\phi_1(\frac{-a}{\sqrt{t}})\right] \\ &= \frac{-a}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2t}} 1_{]0,+\infty]}(t). \end{aligned}$$

Ainsi, pour a quelconque, on a

$$f_{T_a}(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2t}} 1_{]0,+\infty]}(t).$$

Pour terminer, la densité de T_a suivant P_x, se calcule en faisant appel à la remarque suivante

$$P_x[B_t \in A] = P_0[(B_t + x) \in A],$$

o$\grave{u}$ A est un évènement de $\mathcal{F}$, ainsi, si $a \in I\!R$, et $x \in I\!R$, alors $\forall t > 0$

$$\begin{aligned} F^x_{T_a}(t) &= P_x[T_a \le t] \\ &= P_x[S_t \ge a] \\ &= 2P_x[B_t \ge a] \\ &= 2P_0[B_t + x \ge a] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2P_0[B_t \geq a-x] \\
&= P_0[S_t \geq a-x] \\
&= P_0[T_{a-x} \leq t] \\
&= F_{T_{a-x}}(t) \\
&= \frac{|x-a|}{\sqrt{2\pi t^3}} exp\Big\{-\frac{(x-a)^2}{2t}\Big\} 1_{\{t>0\}} dt. \ \diamond
\end{aligned}
$$

Pour le comportement asymtotique de $P_x(T_0 > t)$ on a :

Proposition 1.4.12 *Pour $x > 0$, on a*

$$
P_x[T_0 > t] \sim_{t \to +\infty} \sqrt{\tfrac{2}{\pi t}} x. \tag{1.14}
$$

PREUVE DE LA PROPOSITION .
Soit $x > 0$, alors

$$
\begin{aligned}
P_x[T_0 > t] &= P_x[S_t < 0] \\
&= P_0[S_t + x < 0] \\
&= P_0[S_t < -x] \\
&= P_0[|B_t| < -x] \\
&= P_0[\sqrt{t}|B_1| < -x] \\
&= P_0[|B_1| < \frac{-x}{\sqrt{t}}] \\
&= \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\frac{-x}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{(-\frac{y^2}{2})} dy
\end{aligned}
$$

Par le changement de variable $[\theta = y\frac{\sqrt{t}}{x}]$, on trouve

$$
\begin{aligned}
P_x[T_0 > t] &= \int_1^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2 x^2}{2t}} \frac{x}{\sqrt{t}} d\theta \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi t}} \int_1^{-1} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2 x^2}{2t}} d\theta \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} x \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2 x^2}{2t}} d\theta
\end{aligned}
$$

puisque

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{(\frac{\theta^2 x^2}{2t})} d\theta \sim_{t\to+\infty} 1,$$

alors

$$P_x[T_0 > t] \sim_{t\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}x. \ \diamond$$

L'intérale stochastique fait une grande partie de la théorie des probabilités, dont nous avons besoin de rappller les définitions et les résultats que nous allons utiliser dans notre travail.

1.5 L'intégration stochastique

Dans ce paragraphe, on introduit deux notions essentielles pour le calcul stochastique, ce sont "la martingale locale" et "la semimartingale" . On suppose donner un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$.

Définition 1.5.1 *Un processus adapté, continu* $M = (M_t)_{t\geq 0}$ *est une* $(\mathcal{F}_t, P)-$*martingale locale, s'il existe une famille de temps d'arrêts* $\{T_n, n \geq 1\}$, *telle que*

1) la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ *est croissante et* $\lim_{t\to\infty} T_n = +\infty$ *p.s.,*

2) pour tout n, *le processus* $M^{T_n} 1_{[T_n>0]} = (M_t^{T_n} 1_{[T_n>0]})_{t\geq 0}$ *est une* $(\mathcal{F}_t, P)$ *martingale uniformément intégrable.*

Exemple 1.5.2

Le mouvement brownien, ou généralement, toute martingale continue est une martingale locale, en effet : il suffit de prendre $T_n = n$, on a

1) $T_n \nearrow +\infty$.

2) pour tout n, on a $\forall t \geq 0$, $M_t^{T_n} 1_{[T_n>0]} = M_t^n 1_{[n>0]} = M_t^n = M_{t\wedge n}$ est uniformément intégrable par rapport $\grave{a}$ t, pour tout n, en effet

si $t < n$ d'après la proposition(1.3.13), si on prend $g(t) = t^2$, alors $i)$ et $ii)$ sont évidement vérifiés, donc M_t est uniformément intégrable.

si $t \geq n$ M_n est uniformément intégrable par rapport $\grave{a}$ t, pour tout n.

Définition 1.5.3 *Un processus continu Y, est dit $(\mathcal{F}_t, P)-$semimartingale si on peut écrire $Y = M + A$, où M est une $(\mathcal{F}_t, P)-$martingale locale continue et A est un processus continu adapté à variation finie.*

Exemple 1.5.4

Toute sous-martingale (resp. surmartingale) continue de carré intégrable est une semimartingale continue ; en effet

Soit $\{M_t; t \in I\!R_+\}$ une sousmartingale continue, alors d'après le théorème(1.5), il existe un unique processus $\{A_t; t \in I\!R_+\}$, continu, croissant et adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tel que $A_0 = 0$ et le processus $\{G_t = M_t - A_t; t \in I\!R_+\}$ est une martingale ; puisque le processus $\{A_t; t \in I\!R_+\}$ à variation finie, alors, le processus $\{M_t = G_t + A_t; t \in I\!R_+\}$ est une semimartingale.

Définition 1.5.5 (Processus à variation finie) *Un processus A est dit à variation finie s'il est adapté et si l' application $t \to A_t(\omega)$ est à variation finie pour toute ω.*

Définition 1.5.6 (Variation quadratique) *Un processus A à valeurs dans $I\!R$ est dit à variation quadratique finie s'il existe un processus fini $\langle X, X\rangle$ tel que pour tout $t \in I\!R_+$ et pour toute suite $\{\Delta_n\}$ de subdivisions de l'intervale $[0, t]$ avec $o = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < ... < t_i^{(n)} = t$ telle que $|\Delta_n|$ tend vers zero,*

$$\lim_{|\Delta_n|\to 0} T_t^{\Delta_n} = \langle XX\rangle_t; existeetfinie. \tag{1.15}$$

en probabilité, où

$$T_t^{\Delta_n} = \sum_i (X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}})^2.$$

le processus $\langle XX\rangle_t$ s'appelle processus variation quadratique de X.

Soient $\{H_t; t \in I\!R_+\}$ un processus continu et $\{V_t; t \in I\!R_+\}$ un processus à variation bornée. On définit

$$(\int_0^t H_s dV_s)(\omega) = \int_0^t H_s(\omega) dV_s(\omega),$$

cette intégrale est définie trajectoire par trajectoire, puisque c'est l'intégrale au sens de Riemann-Stieltjes.

Définition 1.5.7 *Si M est une martingale locale continue, on note par $L^2_{loc}(M)$ l'espace des classes de processus progressivement mesurable K tel qu'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêts croissants vers l'infini et tel que*

$$\forall n \geq 1, \qquad E[\int_0^{T_n} K_s^2 d\langle M, M\rangle_s] < +\infty. \tag{1.16}$$

Proposition 1.5.8 *Pour tout $K \in L^2_{loc}(M)$, il existe une unique martingale locale continue notée par $K.M = ((K.M)_t)_{t\geq 0}$ tel que $(K.M)_0 = 0$ telle que pour toute martingale locale continue N*

$$\langle K.M, N\rangle = K.\langle M, N\rangle. \tag{1.17}$$

Définition 1.5.9 *Si K est localement borné et $X = M + A$ est une semimartingale continue, l'intégrale stochastique de K par rapport X est la semimartingale*

$$K.X = K.M + K.A = \int_0^{\cdot} K_s dX_s. \tag{1.18}$$

où, $K.M$ est l'intégrale définie dans la proposition (1.5.8).

Théorème 1.5.10 *Soit X une semimartingale continue. Si (K^n) est une suite de processus localement borné qui converge vers zéro, et s'il existe un processus localement borné K tel que $|K^n| \leq K$ pour tout n, alors $(K^n.X)$ converge vers zéro en probabilité, uniformément sur tout intervalle compacte.*

Théorème 1.5.11 (Formule d'Itô) *Soit X une semimartingale continue et $f \in C^2(I\!R, I\!R)$; alors, $f(X)$ est une semimartingale continue et*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s. \tag{1.19}$$

Théorème de Girsanov.

Dans ce paragraphe, nous examinons que devienne le mouvement brownien quand on change, la probabilité. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité, on considère une autre probabilité P' sur$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$.

Si $P' \ll P$ (i.e P' est absolument continue par rapport *à* P, ou bien pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) = 0$ on a $P'(A)$) on sait qu'il existe une variable $\mathcal{F}_t-$mesurable Y telle que $P'(A) = E[1_A Y]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_t$. On écrit aussi $Y = \frac{dP'}{dP}$.

La condition $P^{'} \ll P$ est trop forte pour la plupart des applications, pour lesquelles on a seulement, $P^{'}$ est *localement absolument continue* par rapport *à* P. Suivant la filtration, cette notion, signifie que $P^{'} \ll P$ en restriction *à* chaque trbu $\mathcal{F}_t$. On l'écrit $P^{'} \ll P$. Précisément, pour chaque $t \in I\!R_+$ on a une dérivée de Radon-Nikodym$Y_t = \frac{dP^{'}_{|\mathcal{F}_t}}{dP_{|\mathcal{F}_t}}$, c'est -*à*- dire une variable positive $\mathcal{F}_t-$mesurable telle que

$$P^{'}(A) = E[1_A Y_t] \qquad \forall A \in \mathcal{F}_t.$$

Le théorème suivant, applique les résultats de théorème de Girsanov au mouvement brownien.

Théorème 1.5.12 (Girsanov) *Soit* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien standard sur* $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, *soit* $H \in L^1$ *est bornée, et soit*

$$W_t = B_t + \int_0^t H_s ds, \tag{1.20}$$

et on défit Q *par*

$$\frac{dQ}{dP} = exp\Big[\int_0^T -H_s dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T H_s^2 ds\Big], \tag{1.21}$$

pour $T > 0$.

Alors, W *est un* $Q-$*mouvement brownien standard pour* $0 \leq t \leq T$.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous étudions la pénalisation des trajectoires du mouvement brownien par une fonction de son maximum uniltéral. Commençons par introduire les notations utilisées :

Notations

- $\Omega = \mathcal{C}(I\!R_+; I\!R)$; l'espace des fonctions continues sur $I\!R_+$.
- $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ est l'espace canonique, avec $(X_t)_{t\geq 0}$, l'application définie par $X_t(\omega) = \omega(t)$ et $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s; 0 \leq s \leq t\}; t \geq 0$.
- $(\mathrm{P}_x)_{x\in I\!R}$ la famille des mesures de Wiener sur l'espace canonique Ω : suivant P_x, $(X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien issu de x.
- *Si* Q est une mesure de probabilité sur Ω, l'espérance par rapport à Q est notée par E_Q. Si $Q = P_x$, on écrit E_x au lieu de E_{P_x}.
- $(\theta_t)_{t\geq 0}$ est la famille d'opérateurs shift de Ω dans Ω, définie par

$$\theta_t(\omega)(s) = \omega(t+s); s \geq 0, t \geq 0.$$

- $(\mathrm{S}_t; t \geq 0)$ est le maximum unilatéral :

$$S_t = \sup_{0\leq u\leq t} X_u$$

Le premier cas étudié de pénalisation consiste *à* pénaliser par une fonction du maximum unilatéral $\varphi(S_t)$.

2.1 Pénalisation par $\varphi(S_t)$

Nous commençons par définir une famille de martingales locales qui apparaîtra d'une façon naturelle dans la pénalisation par une fonction du maximum unilatéral du mouvement brownien, cette famille est étudiée en détail dans le travail d'Azéma-Yor (voir[1]).

Proposition 2.1.1

Soit $\varphi : I\!\!R \to]0, +\infty]$ *une fonction borélienne et intégrable et posons*

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{s} \varphi(u)du. \tag{2.1}$$

Alors

$$M_t^{\varphi} := (S_t - X_t)\varphi(x) + 1 - \Phi(S_t), \tag{2.2}$$

est une P_x*-martingale locale,* $M_0^{\varphi} = 1 - \Phi(S_t)$*,* P_x *p.s., et*

$$M_t^{\varphi} = 1 - \Phi(S_t) - \int_0^t \varphi(S_u)dX_u. \tag{2.3}$$

Si on suppose que

$$\int_{I\!\!R} \varphi(u)du = 1. \tag{2.4}$$

Alors suivant P_x *,* M_t^{φ} *est une martingale, strictement positive et*

$$M_t^{\varphi} = (1 - \Phi(x))\mathcal{E}(J^{\varphi})_t,$$

où

$$J_t^{\varphi} = -\frac{\varphi(S_{t)}}{M_t^{\varphi}} = \frac{\varphi(S_{t)}}{(S_t - X_t)\varphi(S_t) + 1 - \Phi(S_t)}. \tag{2.5}$$

Passons maintenant *à* l'énoncé du théorème qui définit le premier cas de la pénalisation.

Théorème 2.1.2 *Soient φ, Φ définies dans la proposition(2.1.1).*

1. *Soit $u \geq 0$ et $x \in I\!R$. Pour tout Γ_u dans $\mathcal{F}_u$, on a*
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{E_x[1_{\Gamma u}\varphi(S_t)]}{E_x[\varphi(S_t)]} = \frac{1}{1-\Phi(x)} E_x[1_{\Gamma u} M_u^{\varphi}],$$
où $M^{\varphi} = (M_u^{\varphi})_{u\geq 0}$ est la martingale définie dans la proposition(2.1.1).
2. *Soit $(Q_x^{\varphi})_{x\in I\!R}$ la famille de probabilités définies sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ par*
$$Q_x^{\varphi}(\Gamma_u) = \frac{1}{1-\Phi(x)} E_x[1_{\Gamma u} M_u^{\varphi}],$$
pour tout $u \geq 0$ et $\Gamma_u \in \mathcal{F}_u$. Alors sous Q_x^{φ}, le processus $(X_t - x + \int_0^t \frac{\varphi(S_u)}{M_u^{\varphi}} du; t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard.

Remarque 2.1.3 *Le processus $(M_t^{\varphi}; t \geq 0)$ est une P_x-martingale, mais ce n'est pas une famille uniformément intégrable. En effet : $(M_t^{\varphi}; t \geq 0)$ est une martingale strictement positive, elle converge donc vers une v.a.r $M_\infty^{\varphi} \geq 0$ p.s. quand $t \to \infty$. Donc pour toute suite de nombres réels $(t_n)_n$ croissante vers l'infini*
$$M_{t_n}^{\varphi} \to_{n\to+\infty} M_\infty^{\varphi} \geq 0 \qquad p.s.$$
Posons $t_n = \inf\{u \geq 0, X_u = n\}$, alors $X_{t_n} = S_{t_n}$, et
$$M_{t_n}^{\varphi} = 1 - \Phi(S_{t_n}).$$

Sous P_x,$(M_{t_n}^{\varphi})_{n\geq 1}$ converge p.s vers 0, quand $n \to \infty$. Donc $M_\infty^{\varphi} = 0$ $Pp.s.$ Si $(M_t^{\varphi})_{t\geq 0}$ etait uniformément intégrable alors on aura par le théorème(1.3.19) :
$$\forall t \geq 0, \qquad M_t^{\varphi} = E[M_\infty^{\varphi}/\mathcal{F}_t] = 0,$$
ce qui est absurde.

Pour la preuve du théorème(2.1.2), on a besoin d'un résultat technique qu'on présente sous forme de lemme :

Lemme 2.1.4 *Soient $x \leq a$ et $\varphi_0 : [a, +\infty] \mapsto I\!R_+$ telles que $\int_a^\infty \varphi_0(u)du < +\infty$. Alors :*

$$(i)\ E_0[\varphi_0(a \vee (x + S_u))] \sim_{u\mapsto\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\{(a-x)\varphi_0(a) + \int_a^\infty \varphi_0(y)dy\}. \tag{2.6}$$

$$(ii)\ E_0[\varphi_0(a \vee (x + S_u))] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\{(a-x)\varphi_0(a) + \int_a^\infty \varphi_0(y)dy\}. \tag{2.7}$$

$$(iii)\ E_0[\varphi_0(a \vee (x + S_u))] \geq \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\int_a^\infty \varphi_0(y)\mathrm{e}^{(-\frac{(y-x)^2}{2})}dy,\ \text{pour tout}, u \geq 1. \tag{2.8}$$

Preuve du lemme. (2.1.4) On a

$$\begin{aligned}
E_0[\varphi_0(a \vee (x + S_u))] &= \int_\Omega \varphi_0(a \vee (x+y)) f_{S_u}(y)dy \\
&= \int_{\{x+S_u \leq a\}} \varphi_0(a \vee (x+y)) f_{S_u}(y)dy \\
&\quad + \int_{\{x+S_u \geq a\}} \varphi_0(a \vee (x+y)) f_{S_u}(y)dy. \\
&= \varphi_0(a)\int 1_{\{x+S_u \leq a\}}(y) f_{S_u}(y)dy \\
&\quad + \int 1_{\{x+S_u > a\}}(y)\varphi_0(x+y) f_{S_u}(y)dy. \\
&= \varphi_0(a)E_0[1_{\{x+S_u \leq a\}}] + E_0[\varphi_0(x+S_u)1_{\{x+S_u > a\}}] \\
&= \varphi_0(a)P_0(x+S_u \leq a) + E_0[\varphi_0(x+S_u)1_{\{x+S_u \geq a\}}].
\end{aligned}$$

D'apès le corollaire(1.4.8) on a sous P_0

$$S_u \overset{(d)}{=} |X_u| \overset{(d)}{=} \sqrt{u}|X_1|.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
E_0[\varphi_0(a \vee (x + S_u))] &= \varphi_0(a)P_0(S_u \leq a - x) + E_0[\varphi_0(x+S_u)1_{\{x+S_u > a\}}] \\
&= \varphi_0(a)P_0\Big(\sqrt{u}|X_1| \leq a - x\Big) + E_0[\varphi_0(x+S_u)1_{\{x+S_u > a\}}] \\
&= \varphi_0(a)P_0\Big(|X_1| \leq \frac{a-x}{\sqrt{u}}\Big) + \frac{2}{\sqrt{\pi u}}\int_{a-x} \varphi_0(x+y)\mathrm{e}^{(-\frac{y^2}{2u})}dy.
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable : $[z = x + y]$

$$\begin{aligned}
E_0[\varphi_0(a \vee (x + S_u))] &= \varphi_0(a)P_0\Big(|X_1| \leq \frac{a - x}{\sqrt{u}}\Big) + \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \int_a \varphi_0(z)\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2u}} dz \\
&= 2\varphi_0(a)P_0\Big(X_1 \leq \frac{a - x}{\sqrt{u}}\Big) + \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \int_a \varphi_0(z)\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2u}} dz \\
&= 2\varphi_0(a)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{a-x}{\sqrt{u}}} \mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta + \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \int_a^{+\infty} \varphi_0(z)\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2u}} dz \\
&= \varphi_0(a)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{a-x}{\sqrt{u}}} \mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta + \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \int_a^{\infty} \varphi_0(z)\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2u}} dz.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable :$[v = \sqrt{u}\zeta]$ on trouve,

$$\begin{aligned}
E_0[\varphi_0(a \vee (x + S_u))] &= \varphi_0(a)\sqrt{\tfrac{2}{\pi u}} \textstyle\int_0^{a-x} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2u}} dv + \sqrt{\tfrac{2}{\pi u}} \textstyle\int_a^{\infty} \varphi_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2u}} dy \\
&= \sqrt{\tfrac{2}{\pi u}}\Big[\varphi_0(a) \textstyle\int_0^{a-x} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2u}} dv + \textstyle\int_a^{\infty} \varphi_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2u}} dy\Big].
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{u \to +\infty} \frac{E_0[\varphi_0(a \vee (x + S_u))]}{\sqrt{\frac{2}{\pi u}}} &= \lim_{u \to +\infty} \Big[\varphi_0(a) \int_0^{a-x} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2u}} dv + \int_0^{\infty} \varphi_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{(y-x^2)}{2u}} dy\Big] \\
&= \varphi_0(a)(a - x) + \int_0^{\infty} \varphi_0(y)dy.
\end{aligned}$$

Passons *à* la démonstration de l'inégalité (2.7), puisque $\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2u}} \leq 1, \forall \theta \in I\!R$, alors l'égalité (2.9) donne :

$$\begin{aligned}
E_0[\varphi_0(a \vee (x + S_u))] &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\Big[\varphi_0(a) \int_0^{a-x} dv + \int_a^{\infty} \varphi_0(y)dy\Big] \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\Big[\varphi_0(a)(a - x) + \int_a^{\infty} \varphi_0(y)dy\Big],
\end{aligned}$$

d'o*ù* l'inégalité (2.7).

Finalement, on a d'après (2.9) :

$$\begin{aligned}
E_0[\varphi_0(a \vee (x + S_u)] &= \varphi_0(a)\sqrt{\frac{2}{\pi u}} \int_0^{a-x} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2u}} dv + \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \int_a^{\infty} \varphi_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2u}} dy \\
&\geq \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \int_a^{\infty} \varphi_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2u}} dy
\end{aligned}$$

et si $u \geq 1$ alors

$$\sqrt{\frac{2}{\pi u}}\int_a^\infty \varphi_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2u}}dy \geq \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\int_a^\infty \varphi_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}}dy. \diamond$$

Maintenant, on passe *à* la démonstration du théorème (2.1.2).

Preuve du théorème . (2.1.2)

1- Soient $s \geq 0$, $x \in I\!\!R$ et $\Gamma_s \in \mathcal{F}_s$. Supposons que $t > s$, alors on peut réécrire S_t de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S_t &= S_s \vee (\sup_{s \leq u \leq t} X_u) \\ &= S_s \vee (X_s + \sup_{s \leq u \leq t}(X_u - X_s)) \\ &= S_s \vee (X_s + \sup_{0 \leq u \leq t-s}(X_{u+s} - X_s)) \\ &= S_s \vee (X_s + \sup_{0 \leq u \leq t-s}(X_{u+s} - X_s)) \end{aligned}$$

On note :

$$S'_{t-s} = \sup_{0 \leq u \leq t-s}(X_{u+s} - X_s)$$

Par la propriété de Markov simple (voir proposition (1.2.4), ch1) S'_{t-s} a même loi que le processus S_{t-s}, puisque

$$X_{u+s} - X_s \overset{(d)}{=} X_u,$$

ainsi

$$S'_{t-s} \overset{(d)}{=} S_{t-s}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} E_x[\varphi(S_t)/\mathcal{F}_s] &= E_x[\varphi(S_s \vee (X_s + \sup_{0 \leq u \leq t-s}(X_{u+s} - X_s))/\mathcal{F}_s] \\ &= E_0[\varphi((S_s + x) \vee (X_s + x + \sup_{0 \leq u \leq t-s}(X_{u+s} + x - X_s - x))/\mathcal{F}_s] \\ &= E_0[\varphi(S_s \vee (X_s + \sup_{0 \leq u \leq t-s}(X_{u+s} - X_s))/\mathcal{F}_s] \\ &= E_0[\varphi(S_s \vee (X_s + S'_{t-s}))/\mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

Mais S'_{t-s} est indépendante de $\mathcal{F}_s$, et X_s est $\mathcal{F}_s-$mesurable en faisant appel $\grave{a}$ la proposition (1.4.3) on a

$$E_x[\varphi(S_t)/\mathcal{F}_s] = \tilde{\varphi}(S_s, X_s; t-s),$$

où

$$\tilde{\varphi}(a, x; r) = E_0[\varphi(a \vee (x + S_r))].$$

En appliquant le lemme (2.1.4), on trouve

$$\begin{array}{rcl} E_x[\varphi(S_t)/\mathcal{F}_s] & = & E_0[\varphi(S_s \vee (X_s + S_{t-s}))] \\ & \sim_{t\to+\infty} & \sqrt{\dfrac{2}{\pi(t-s)}}\{(S_s - X_s)\varphi(S) + \displaystyle\int_{S_s}^{+\infty} \varphi(y)dy\} \\ & \sim_{t\to+\infty} & \sqrt{\dfrac{2}{\pi(t-s)}} M_s^{\varphi}. \end{array}$$

Encore une fois par le lemme (2.1.4), avec "$x = a$", on obtient

$$\begin{array}{rcl} E_x[\varphi(S_t)] & = & E_0[\varphi(x + S_t)] \\ & = & E_0[\varphi(x \vee (x + S_t))] \\ & \sim_{t\to+\infty} & \sqrt{\dfrac{2}{\pi t}} \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(y)dy \\ & \sim_{t\to+\infty} & \sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}(1 - \Phi(x)). \end{array}$$

On commence par la majoration du quotient

$$\frac{E_x[1_{\Gamma_s}\varphi(S_t)]}{E_x[\varphi(S_t)]}.$$

Par l'inégalité (2.7), on a

$$E_x[\varphi(S_t/\mathcal{F}_s)] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}} M_s^{\varphi},$$

et, d'après l'inégalités (2.8) ; pour "$x = a$", nous avons

$$E_x[\varphi(S_t)] = E_0[\varphi(x+S_t)] \geq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_x^{+\infty} \varphi(y) \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}} dy.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{E_x[\varphi(S_t/\mathcal{F}_s)]}{E_x[\varphi(S_t)]} &\leq \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}} M_s^\varphi}{\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_x^{+\infty} \varphi(y) \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}} dy} \\ &\leq \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}}{\sqrt{\frac{2}{\pi t}}} \Big[\frac{M_s^\varphi}{\int_x^{+\infty} \varphi(y) \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}} dy} \Big] \\ &\leq \sqrt{\frac{t}{t-s}} \Big[\frac{M_s^\varphi}{\int_x^{+\infty} \varphi(y) \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}} dy} \Big] \end{aligned}$$

Puisque, $(M_s^\varphi)_{t \geq 0}$ est une martingale positive, alors $E_x[M_s^\varphi] < \infty$, de plus

$$\forall x \in I\!R, \left| \int_x^{+\infty} \varphi(y) \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}} dy \right| \leq \int_x^{+\infty} \left| \varphi(y) \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}} \right| dy \leq \int_x^{+\infty} \varphi(y) dy < \infty.$$

Donc

$$E_x \Big[\frac{M_s^\varphi}{\int_x^{+\infty} \varphi(y) \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}} dy} \Big] = \frac{1}{\int_x^{+\infty} \varphi(y) \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}} dy} E_x[M_s^\varphi] < \infty$$

À présent, en utilisant le théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \frac{E_x[1_{\Gamma_s} \varphi(S_t)]}{E_x[\varphi(S_t)]} &= \lim_{t \to +\infty} \frac{E_x[E_x[1_{\Gamma_s} \varphi(S_t)/\mathcal{F}_s]]}{E_x[\varphi(S_t)]} \\ &= \lim_{t \to +\infty} E_x \Big[1_{\Gamma_s} \frac{E_x[\varphi(S_t)/\mathcal{F}_s]}{E_x[\varphi(S_t]}) \Big] \\ &= E_x \Big[1_{\Gamma_s} \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}} M_s^\varphi}{\sqrt{\frac{2}{\pi t}} (1 - \Phi(x))} \Big] \\ &= E_x \Big[1_{\Gamma_s} \frac{M_s^\varphi}{1 - \Phi(x)} \Big] \\ &= \frac{1}{1 - \Phi(x)} E_x[1_{\Gamma_s} M_s^\varphi]. \end{aligned}$$

2- pour tout $u \geq 0$ et $\Gamma_u \in \mathcal{F}_u$

$$Q_x^{\varphi}(\Gamma_u) = E[1_{\Gamma u}\frac{M_u^{\varphi}}{1-\Phi(x)}],$$

i.e

$$\frac{dQ_{x/\mathcal{F}_u}^{\varphi}}{dP_{x/\mathcal{F}_u}} = \frac{M_u^{\varphi}}{1-\Phi(x)}$$

Puisque $(M_t)_{t\geq 0}$ est une P_x- martingale strictement positive, elle peut s'écrire comme une martingale exponentielle (voir [9]), i.e

$$\begin{aligned}
M_t^{\varphi} &= (1-\Phi(x))\mathcal{E}(J^{\varphi})_t \\
&= (1-\Phi(x))exp\Big\{\int_0^t J_s^{\varphi} dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t J_s^{\varphi 2} ds\Big\} \\
&= (1-\Phi(x))exp\Big\{\int_0^t -\frac{\varphi(S_s)}{M_s^{\varphi}} dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\frac{\varphi(S_s)}{M_s^{\varphi}}\Big)^2 ds\Big\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{dQ_x^{\varphi}}{dP_x} = \frac{M_u^{\varphi}}{(1-\Phi(x))} = exp\Big\{\int_0^t -\frac{\varphi(S_s)}{M_s^{\varphi}} dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\frac{\varphi(S_s)}{M_s^{\varphi}}\Big)^2 ds\Big\}.$$

Finallement, le théorème (1.5.12) (théorème de Girsanov), montre que le processus

$$(X_t - \int_0^t -\frac{\varphi(S_s)}{M_s^{\varphi}} ds; t \geq 0)$$

est un $Q_x^{\varphi}-$mouvement brownien, en d'autre terme ; le processus

$$(X_t + x - \int_0^t -\frac{\varphi(S_s)}{M_s^{\varphi}} ds; t \geq 0)$$

est un $Q_0^{\varphi}-$ mouvement brownien. $\diamond$

Maintenant, on va étudier le deuxième cas de pénalisation par une fonction du maximum unilatéral, et du mouvement brownien.

2.2 Pénalisation par $\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t - X_t)}$

Comme le premier cas, la proposition suivante définie la famille des martingales locales qui apparaîtra comme processus limite , cette famille est étudiée en détail dans [1].

Proposition 2.2.1 *Soient $\lambda > 0$, $\psi : I\!R \to I\!R$ est une fonction localement intégrable, Φ une primitve de φ $(\varphi(x) = \Phi^{'}(x))$. Soit $(M_t^{\lambda,\varphi})$ le processus*

$$M_t^{\lambda,\varphi} := \Big[(1 - \Phi(S_t))ch(\lambda(S_t - X_t)) + \varphi(S_t)\tfrac{sh(\lambda(S_t - X_t))}{\lambda}\Big]\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}, \tag{2.10}$$

alors

1. *Sous $P_x, (M_t^{\lambda,\varphi})$ est une martingale locale. $M_0^{\lambda,\varphi} = 1 - \Phi(x)$ et*

$$M_t^{\lambda,\varphi} = 1 - \Phi(x) - \int_0^t \{-\lambda(1 - \Phi(S_u))(\lambda(S_u - X_u)) + \varphi(S_u)(\lambda(S_u - X_u))\}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2 u}{2}} dX_u. \tag{2.11}$$

2. *Soit $x_0 \in I\!R$. Alors $M_t^{\lambda,\varphi} \geq 0$, $\forall t \geq 0$, P_{x_0} p.s.si et seulement s' il existe une fonction borélienne $\psi : I\!R \mapsto [0, \infty[$ et une canstante positive κ telles que les deux conditions suivantes sont vérifiées*

$$\int_{x_0}^{\infty} \psi(z)\mathrm{e}^{-\lambda z} dz < \infty, \tag{2.12}$$

$$1 - \Phi(y) = \mathrm{e}^{\lambda y}\Big(\kappa + \int_y^{\infty} \psi(z)\mathrm{e}^{-\lambda z} dz\Big), \qquad y \geq x_0. \tag{2.13}$$

Si (2.12)et (2.13) vérifiées alors $(M_t^{\lambda,\varphi})$ est une P_{x_0}-martingale.

3. *Soit $\psi : I\!R \mapsto [0, \infty[$ une fonction borélienne satisfaisant :*

$$\int_x^{\infty} \psi(z)^{-\lambda z} dz < \infty, \qquad \forall x \in I\!R. \tag{2.14}$$

Soit $\Phi : I\!R \mapsto I\!R$ définie par

$$\Phi(y) = 1 - \mathrm{e}^{\lambda y} \int_y^{\infty} \psi(z)\mathrm{e}^{-\lambda z} dz, \qquad y \in I\!R. \tag{2.15}$$

Alors

$$\varphi(y) = \Phi^{'}(y) = \psi(y) - \lambda e^{\lambda y} \int_y^{\infty} \psi(z) e^{-\lambda z} dz, \tag{2.16}$$

$(M_t^{\lambda,\varphi})$ *est une* P_x*-martingale et*

$$M_t^{\lambda,\varphi} = \Big\{\psi(S_t) \frac{sh(\lambda(S_t - X_t))}{\lambda} + e^{\lambda X_t} \int_{S_t}^{\infty} \psi(z) e^{-\lambda z} dz \Big\} e^{\frac{-\lambda^2 t}{2}}. \tag{2.17}$$

Si on suppose de plus $\psi > 0$, *alors suivant* P_x : $M_t^{\lambda,\varphi} > 0$ *et* $M_t^{\lambda,\varphi} = (1 - \Phi(x))\mathcal{E}(J^{\lambda,\varphi})_t$, *où*

$$J_t^{\lambda,\varphi} = -\lambda \frac{\varphi(S_t) ch(\lambda(S_t - X_t)) + \lambda(1 - \Phi(S_t)) sh(\lambda(S_t - X_t))}{\lambda(1 - \Phi(S_t)) ch(\lambda(S_t - X_t)) + \varphi(S_t) sh(\lambda(S_t - X_t))}. \tag{2.18}$$

On peut maintenant énoncer un deuxième théorème de pénalisation dans ce chapitre .

Théorème 2.2.2 *Supposons* $\lambda > 0$ *et* $\psi : I\!R \mapsto]0, +\infty[$ *vérifiant*

$$\int_x^{\infty} \psi(z) e^{-\lambda z} dz < \infty, \forall x \in I\!R. \tag{2.19}$$

et posons

$$\Phi(y) = 1 - e^{\lambda y} \int_y^{\infty} \psi(z) e^{-\lambda z} dz, \text{ où } y \in I\!R \text{ et } \varphi = \phi^{'}. \tag{2.20}$$

1. *Soient* $u > 0$, $x \in I\!R$, $\Gamma_u \in \mathcal{F}_u$. *Alors*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{E_x[1_{\Gamma_u} \psi(S_t) e^{\lambda(S_t - X_t)}]}{E_x[\psi(S_t) e^{\lambda(S_t - X_t)}]} = \frac{1}{1 - \Phi(x)} E_x[1_{\Gamma_u} M_u^{\lambda.\varphi}]. \tag{2.21}$$

où $(M_u^{\lambda.\psi})$ *est la* $P_x -$ *martingale définie par*

$$M_t^{\lambda.\varphi} := \Big[(1 - \Phi(S_t)) ch(\lambda(S_t - X_t)) + \psi(S_t) \tfrac{sh(\lambda(S_t - X_t))}{\lambda}\Big] e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}. \tag{2.22}$$

2. *Soit* $(Q_x^{\lambda.\varphi})_{x \in I\!R}$ *une famille de probabilités définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ *par*

$$Q_x^{\lambda,\varphi}(\Gamma_u) := \tfrac{1}{1-\Phi(x)} E_x[1_{\Gamma_u} M_u^{\lambda.\varphi}], \text{ pour tout } u \geq 0 \text{ et } \Gamma_u \in \mathcal{F}_u. \tag{2.23}$$

Alors, suivant $Q_x^{\lambda.\psi}$, *le processus*

$$\Big(X_t - x + \lambda \int_0^t \frac{\varphi(S_u)ch(\lambda(S_u - X_u)) + \lambda(1-\Phi(S_u))sh(\lambda(S_u - X_u))}{\lambda(1-\Phi(S_u))ch(\lambda(S_u - X_u)) + \varphi(S_u)sh(\lambda(S_u - X_u))}du; t \geq 0\Big) \tag{2.24}$$

est un mouvement brownien standard.

Remarque 2.2.3

1. *Supposons que ψ vérifie les conditions données dans la proposition(2.2.1), et que $\int_{\mathbb{R}} \psi(z)dz = 1$. On remarque que $M_t^{\lambda,\varphi}$ définie en (2.10) converge vers M_t^{φ}, quand $\lambda \to 0$. Dans ce cas on adopte la convention $M_t^{0,\varphi} = M_t^{\varphi}$. De plus, le théorème(2.2.2) peut être considéré comme un cas particulier du théorème(2.1.2),la démonstration du théorème(2.2.2)est semblable à celle du théorème(2.1.2), on commence par un prolongement du lemme (2.1.4) pour trouver un équivalent de $E_0[\psi(s \vee (x+S_t))]e^{\lambda\{s\vee(x+S_t)-x-X_t\}}$, quand $t \to \infty$.*
2. *Si $\varphi = 0$, alors $M_t^{\lambda,0} = ch(\lambda(S_t - X_t))e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$.*

Lemme 2.2.4 *Soient $s \geq x, s \geq 0$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que*

$$\int_s^\infty |\psi(z)|e^{-\lambda z}dz < \infty, \tag{2.25}$$

Si

$$\rho(s,x) := \psi(s)sh(\lambda(s-x)) + \lambda e^{\lambda x} \int_s^\infty \psi(z)e^{-\lambda z}dz \neq 0. \tag{2.26}$$

Alors

$$E_0[\psi(s \vee (x+S_t))e^{\lambda(s\vee(x+S_t)-x-X_t}] \sim_{t\to\infty} 2\rho_\lambda(s,x)e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}. \tag{2.27}$$

Si $\psi \geq 0$, nous avons

$$E_0[\psi(s \vee (x+S_t))e^{\lambda(s\vee(x+S_t)-x-X_t}] \leq 2\rho_\lambda(s,x)\Big(1 + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\Big). \tag{2.28}$$

Si de plus $t \geq 1$;

$$E_0[\psi(s\vee(x+S_t))e^{\lambda(s\vee(x+S_t)-x-X_t}] \geq e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\Big[\frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x-s} e^{-\frac{u^2}{2}}du \int_s^\infty \Psi(z)e^{-z}dz\Big]. \tag{2.29}$$

Preuve du lemme.

1. Posons$\Delta = E[\psi(s\vee(x+S_t))\mathrm{e}^{\{\lambda(s\vee(x+S_t)-x-X_t)\}}]$. On divise Δ en deux parties, Δ_1 et Δ_2 correspondent respèctivement $\grave{a}$ $\{S_t - x\}$ et $\{S_t > s-x\}$, i.e, Δ peut s'écrire :
$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$
o$\grave{u}$
$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}E_0[\mathrm{e}^{-\lambda X_t}1_{\{S_t<s-x\}}],\\ \Delta_2 &= E_0[\psi(x+S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}1_{\{S_t>s-x\}}].\end{aligned}$$
En utilisant le corollaire (1.4.10) du premier chapitre, on trouve :
$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}E_0[\mathrm{e}^{-\lambda X_t}1_{\{S_t<s-x\}}]\\ &= \psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}\int_{\{S_t<s-x\}}\mathrm{e}^{-\lambda a}\Big(\frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}}\Big)exp\Big(-\frac{2b-a)^2}{2t}\Big)1_{\{a<b,a>0\}}\\ &= \frac{\psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}}{\sqrt{2\pi t^3}}\int_0^{s-x}\Big[\int_0^b \mathrm{e}^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}}(2(2b-a))da\Big]\mathrm{e}^{-\lambda a}db,\end{aligned}$$
En faisant le chengement de variable :$[c = a-2b]$, on obtient
$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{2\psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}}{\sqrt{2\pi t^3}}\int_0^{s-x}\Big[\int_{-\infty}^b c\mathrm{e}^{-\lambda(c+2b)}\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2t}}dc\Big]db\\ &= \frac{2\psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}}{\sqrt{2\pi t^3}}\int_0^{s-x}\mathrm{e}^{-2\lambda b}A(t,b)db\end{aligned}$$
o$\grave{u}$
$$A(t,b) = -\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{-b}\mathrm{e}^{-\lambda c}c\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2t}}dc \tag{2.30}$$
Intégrons $A(t,b)$ par partie,
$$\left\{\begin{array}{l} U = \mathrm{e}^{-\lambda c} \to dU = -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda c}dc\\ dV = -\frac{c}{t}\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2t}}dc \to V = \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2t}}\end{array}\right\}. \tag{2.31}$$

Alors

$$\begin{aligned}
A(t,b) &= \left[\mathrm{e}^{-\lambda c-\frac{c^2}{2t}}\right]_{-\infty}^{-b} + \lambda\int_{-\infty}^{-b}\mathrm{e}^{-\lambda c-\frac{c^2}{2t}}dc \\
&= \mathrm{e}^{\lambda b-\frac{b^2}{2t}} - \lim_{u\to-\infty}\mathrm{e}^{-\lambda u-\frac{u^2}{2t}} + \lambda\int_{-\infty}^{-b}\mathrm{e}^{-\lambda c-\frac{c^2}{2t}}dc \\
&= \mathrm{e}^{\lambda b-\frac{b^2}{2t}} + \lambda\int_{-\infty}^{-b}\mathrm{e}^{-\lambda c-\frac{c^2}{2t}}dc \\
&= \mathrm{e}^{\lambda b-\frac{b^2}{2t}} + \lambda\int_{-\infty}^{-b}\mathrm{e}^{-\frac{(2\lambda tc+c^2+(\lambda t)^2)}{2t}+\frac{(\lambda t)^2}{2t}}dc
\end{aligned}$$

Si on pose : $\theta = \frac{c}{\sqrt{t}} + \sqrt{t}\lambda$, on obtient

$$A(t,b) = \mathrm{e}^{\lambda b-\frac{b^2}{2t}} + \lambda\sqrt{t}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\int_{-\infty}^{-\frac{b}{\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}}d\theta. \tag{2.32}$$

Puisque

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{-\frac{b}{\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}}d\theta = \sqrt{2\pi},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\lambda b-\frac{b^2}{2t}} + \lambda\sqrt{t}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\int_{-\infty}^{-\frac{b}{\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du}{\lambda\sqrt{2\pi t}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}} &= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{\lambda b-\frac{b^2}{2}-\frac{\lambda^2 t}{2}}}{\lambda\sqrt{2\pi t}}\right]+1 \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{-(b-\lambda t)^2}{2t}}}{\lambda\sqrt{2\pi t}}\right]+1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

par suite

$$A(t.b) \sim_{t\to+\infty} \lambda\sqrt{2\pi t}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}, \tag{2.33}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_1}{\lambda\sqrt{2\pi t}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}} &= \left[\frac{2\psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{s-x}\mathrm{e}^{-2\lambda b}\frac{A(t.b)}{\lambda\sqrt{2\pi t}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}}db\right] \\
&\sim_{t\to+\infty} \left[\frac{2\psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{s-x}\mathrm{e}^{-2\lambda b}db\right] \\
&\sim_{t\to+\infty} \left[\frac{2\psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}}{\sqrt{2\pi t}}\left[\frac{-1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-2\lambda b}\right]_0^{s-x}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sim_{t\to+\infty} \quad \Big[\frac{2\psi(s)e^{\lambda(s-x)}}{\sqrt{2\pi t}}\Big[\frac{-1}{2\lambda}(e^{-2\lambda(s-x)}-1)\Big]\Big] \\
&\sim_{t\to+\infty} \quad \Big[\frac{2\psi(s)}{\lambda\sqrt{2\pi t}}sh(\lambda(s-x))\Big].
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\Delta_1 \sim_{t\to+\infty} 2\psi(s)sh(\lambda(s-x))e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}. \tag{2.34}$$

En adoptant l'approximation (2.34), on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= E_0\Big[\psi(x+S_t)e^{\lambda(S_t-X_t)}1_{\{}S_t > s-x\}\Big] \\
&= \int_{s-x}^{+\infty}\int_{-\infty}^{b}\psi(x+b)e^{\lambda(b-a)}\Big(\frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}}\Big)e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}}dadb. \\
&= \int_{s-x}^{+\infty}\psi(x+b)e^{\lambda b}\Big[\int_{-\infty}^{b}\frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\lambda a-\frac{(2b-a)^2}{2t}}da\Big]db.
\end{aligned}$$

Avec le changement de variable :$[c = a-2b]$, on aura

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \int_{s-x}^{+\infty}\psi(x+b)e^{\lambda b}\Big[\int_{-\infty}^{-b}-\frac{2c}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\lambda(c+2b)}e^{-\frac{c^2}{2t}}dc\Big]db \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_{s-x}^{+\infty}\psi(x+b)e^{\lambda b-2\lambda b}\Big[-\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{-b}e^{-\lambda c}ce^{-\frac{c^2}{2t}}dc\Big]db \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_{s-x}^{+\infty}\psi(x+b)e^{\lambda b-2\lambda b}A(t,b)db. \\
&= 2\lambda\int_{s-x}^{+\infty}\psi(x+b)e^{-\lambda b}\Big(\frac{A(t,b)}{\lambda\sqrt{2\pi t}}\Big))db.
\end{aligned}$$

D'après (2.33), on a

$$\frac{A(t,b)}{\lambda\sqrt{2\pi t}} \sim_{t\to+\infty} e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}.$$

Avec l'hypothèse (2.25), on aura

$$\Delta_2 \sim_{t\to+\infty} \Big(2\lambda\int_{s-x}^{+\infty}\psi(x+b)e^{-\lambda b}\Big)e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}. \tag{2.35}$$

On suppose $\psi \geq 0$, on a d'une part

$$\int_{-\infty}^{-\frac{b}{\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \int_{I\!R} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi},$$

d'autre part

$$\lambda b - \frac{b^2}{2t} - \frac{\lambda^2}{2} = -\frac{(\lambda t - b)^2}{2t} \leq 0.$$

Par suite (2.32) implique que

$$A(t,b) \leq \frac{\lambda^2 t}{2}(1 + \lambda\sqrt{2\pi t}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E_0\Big[\psi(s \vee (x+S_t))\mathrm{e}^{\lambda(s\vee(x+S_t)-x-X_t}\Big] &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_{s-x}^{+\infty} \psi(x+b)\mathrm{e}^{-\lambda b+\frac{\lambda^2 t}{2}}(1+\lambda\sqrt{2\pi t})db \\
& \quad \frac{2\psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{s-x} \mathrm{e}^{-2\lambda b+\frac{\lambda^2 t}{2}}(1+\lambda\sqrt{2\pi t})db \\
&\leq 2\lambda(1+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi t}})\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}\int_{s-x}^{+\infty} \psi(x+b)\mathrm{e}^{-\lambda b}db \\
& \quad +2\lambda\psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}(1+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi t}})\Big[\int_0^{s-x}\mathrm{e}^{-2\lambda b}\Big] \\
&\leq 2\lambda(1+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi t}})\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}\Big[\psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}\int_0^{s-x}\mathrm{e}^{-2\lambda b}db \\
& \quad +\int_{s-x}^{+\infty}\psi(x+b)\mathrm{e}^{-\lambda b}db\Big].
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable : $[z = x + b]$ dans la deuxième intégrale de la dernière inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
E_0[\psi(s \vee (x+S_t))\mathrm{e}^{\lambda(s\vee(x+S_t)-x-X_t}] &\leq 2(1+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi t}})\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\Big[\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}\int_s^{+\infty}\psi(z)\mathrm{e}^{-\lambda z}dz \\
& \quad +\lambda\psi(s)\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}\int_0^{s-x}\mathrm{e}^{-2\lambda b}db\Big] \\
&\leq 2(1+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi t}})\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\Big[\psi(s)\lambda\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}\Big[\frac{-1}{2\lambda}[\mathrm{e}^{-2\lambda(s-x)} \\
& \quad -1]\Big]\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2(1+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi t}})\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\Big[\psi(s)\Big[\frac{\mathrm{e}^{\lambda(s-x)}-\mathrm{e}^{-\lambda(s-x)}}{2}\Big]\Big]\\
&\leq 2(1+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi t}})\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\Big[\psi(s)sh(\lambda(s-x))\\
&\quad +\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}\int_s^{+\infty}\psi(z)^{-\lambda z}dz\Big].
\end{aligned}$$

Soit $b \in [0, s-x]$ et $t \geq 1$. Alors

$$-\frac{b}{\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t} \geq -\frac{b}{\sqrt{t}} \geq x-s,$$

et

$$\begin{aligned}
A(t,b) &\geq \lambda\sqrt{t}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\int_{-\infty}^{-\frac{b}{\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t}}{}^{-\frac{u^2}{2}}du\\
&\geq \lambda\sqrt{t}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\int_{-\infty}^{x-s}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\Delta \geq \Delta_2 \geq \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_{s-x}^{+\infty}\psi(x+b)\mathrm{e}^{-\lambda b}[\lambda\sqrt{t}+\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\int_{-\infty}^{x-s}{}^{-\frac{u^2}{2}}du]db.$$

En faisant le changement de variable : $[z = x+b]$, on a

$$\Delta \geq \Delta_2 \geq \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x-s}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du\int_s^{\infty}\psi(z)\mathrm{e}^{-\lambda z}dz, \text{si } t \geq 1. \diamond$$

Passons *à* présent *à* la démonstration du théorème (2.2.2).

1. Preuve du théorème . Soient $u > 0$, $x \in I\!R$ et $\Gamma_u \in \mathcal{F}_u$ En adoptant la méthode utilisée dans la démonstration du théorème (2.1.2), on a, pour $t > u$

$$S_t = S_u \vee (X_u - \sup_{0\leq s\leq t-u}(X_{s+t}-X_t))$$

et

$$S'_{t-u} = \sup_{0\leq s\leq t-u}(X_{s+t}-X_t).$$

ainsi

$$\begin{aligned}
E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_u] &= E_x[\psi(S_u\vee(X_u-\sup_{0\le s\le t-u}(X_{s+t}-X_t)))\\
&\quad \mathrm{e}^{\lambda(S_u\vee(X_u-\sup_{0\le s\le t-u}(X_{s+t}-X_t)-X_t))}/\mathcal{F}_u]\\
&= E_0[\psi((S_u+x)\vee(X_u+x-\sup_{0\le s\le t-u}(X_{s+t}+x-X_t-x)))\\
&\quad \mathrm{e}^{\lambda((S_u+x)\vee(X_u+x-\sup_{0\le s\le t-u}(X_{s+t}+x-X_t-x)-X_t-x))}/\mathcal{F}_u]\\
&= E_0[\psi(S_u\vee(X_u-\sup_{0\le s\le t-u}(X_{s+t}-X_t)))\\
&\quad \mathrm{e}^{\lambda(S_u\vee(X_u-\sup_{0\le s\le t-u}(X_{s+t}-X_t)-X_t-x))}/\mathcal{F}_u]\\
&= E_0[\psi(S_u\vee(X_u-S'_{t-u}))\mathrm{e}^{\lambda(S_u\vee(X_u-S'_{t-u})-X_t-x)}/\mathcal{F}_u]\\
&= E_0[\psi(S_u\vee(X_u-S_{t-u}))\mathrm{e}^{\lambda(S_u\vee(X_u-S_{t-u})-X_t-x)}/\mathcal{F}_u].
\end{aligned}$$

Par une application de la proposition (1.4.3), et en remarquant que S_{t-u} est indépendant de $\mathcal{F}_u$, et que X_u est $\mathcal{F}_u-$mesurable, on a

$$E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_u] = \tilde{\psi}(S_u, X_u; t-u),$$

où

$$\tilde{\psi}(s,v;r) = E_0[\psi(s\vee(v+S_r))\mathrm{e}^{\lambda(s\vee(v+S_r)-x-X_r)}].$$

En utilisant l'approximation (2.27), on obtient

$$E_0[\psi(S_u\vee(X_u-S_{t-u}))\mathrm{e}^{\lambda(S_u\vee(X_u-S_{t-u})-X_{t-u}-x)}] \sim_{t\to+\infty} 2\rho_\lambda(S_u,X_u)\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(t-u)}{2}}.$$

Donc

$$E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_u] \sim_{t\to+\infty} 2\rho_\lambda(S_u,X_u)\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(t-u)}{2}}. \tag{2.36}$$

En particulier, si on prend $u=0$, (2.36) devient

$$E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_0] \sim_{t\to+\infty} 2\rho_\lambda(S_0,X_0)\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(t)}{2}}.$$

Par conséquent

$$E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}] \sim_{t\to+\infty} 2\rho_\lambda(x,x)\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(t)}{2}}. \tag{2.37}$$

De plus, si $t > u+1$, (2.28), (2.29) impliquent que

$$\begin{array}{rcl} E_x[\psi(S_t \mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_u] & = & E_0[\psi(S_u \vee (X_u - S_{t-u}))\mathrm{e}^{\lambda(S_u \vee (X_u - S_{t-u}) - X_{t-u} - x)}] \\ & \leq & 2\rho_\lambda(S_u, X_u)(1 + \dfrac{1}{\lambda\sqrt{2\pi(t-u)}})\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(t-u)}{2}} \\ & \leq & 2\rho_\lambda(S_u, X_u)(1 + \dfrac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}})\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(t-u)}{2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}] & = & E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_0] \\ & = & E_0[\psi(S_0 \vee (X_0 - S_t))\mathrm{e}^{\lambda(S_0 \vee (X_0 - S_t) - X_t - x)}] \\ & = & E_0[\psi(x \vee (x - S_t))\mathrm{e}^{\lambda(x \vee (x - S_t) - X_t - x)}] \\ & \geq & \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}} \dfrac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}} \Big(\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}} dv \Big) \int_x^\infty \psi(z)\mathrm{e}^{-z} dz \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \frac{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_u]}{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]} & \leq & \frac{2\rho_\lambda(S_u,X_u)\left(1+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}}\right)\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(t-u)}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}[\frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}} dv \int_x^\infty \psi(z)\mathrm{e}^{-\lambda z}dz]} \\ & \leq & \frac{2\rho_\lambda(S_u,X_u)\left(1+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}}\right)\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(t-u)}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}[\frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}dv \int_x^\infty \psi(z)\mathrm{e}^{-\lambda z}dz]} \\ & \leq & \frac{2\rho_\lambda(S_u,X_u)\left(1+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}}\right)\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(t-u)}{2}}}{\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\int_x^\infty \psi(z)\mathrm{e}^{-\lambda z}dz} \\ & \leq & \frac{k(x,\lambda)}{\lambda}\rho_\lambda(S_u, X_u)\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2 u}{2}}, \end{array} \tag{2.38}$$

o$\grave{u}$

$$k(x,\lambda) = \frac{(1+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}})}{\frac{1}{2}\int_x^\infty \psi(z)\mathrm{e}^{-\lambda z}dz} < \infty.$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{E_x[1_{\Gamma_u}\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]}{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]} & = & \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{E_x[E_x[1_{\Gamma_u}\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_u]]}{E_x = [\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]} \\ & = & \lim\limits_{t\to+\infty} E_x\Big[\dfrac{E_x[1_{\Gamma_u}\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_u]}{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]}\Big] \\ & = & \lim\limits_{t\to+\infty} E_x\Big[1_{\Gamma_u}\dfrac{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_u]}{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]}\Big] \end{array}$$

D'après (2.38), on remarque que $M_u^{\lambda,\varphi} = \frac{1}{\lambda}\rho_\lambda(S_u, X_u)\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2 u}{2}} = M_u^{\lambda,\varphi}$ par le théorème de la convergence dominée, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{E_x[1_{\Gamma_u}\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]}{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]} = E_x\Big[1_{\Gamma_u}\lim_{t\to+\infty}\frac{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_u]}{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]}\Big].$$

Mais, les deux formules,(2.36), (2.37) impliquent :

$$\begin{aligned} E_x\Big[1_{\Gamma_u}\lim_{t\to+\infty}\frac{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}/\mathcal{F}_u]}{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]}\Big] &= E_x\Big[1_{\Gamma_u}\lim_{t\to+\infty}\frac{2\rho_\lambda(S_u,X_u)\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(t-u)}{2}}}{2\rho_\lambda(x,x)\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(t)}{2}}}\Big] \\ &= \frac{1}{\rho_\lambda(x,x)}E_x\Big[1_{\Gamma_u}\rho_\lambda(S_u,X_u)\mathrm{e}^{\frac{-\lambda^2 u}{2}}\Big]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty}\frac{E_x[1_{\Gamma_u}\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]}{E_x[\psi(S_t)\mathrm{e}^{\lambda(S_t-X_t)}]} &= \frac{1}{\rho_\lambda(x,x)}E_x\Big[1_{\Gamma_u}\rho_\lambda(S_u,X_u)\mathrm{e}^{\frac{-\lambda^2 u}{2}}\Big] \\ &= \frac{1}{1-\Phi(x)}E_x[1_{\Gamma_u}M_u^{\lambda.\varphi}]. \end{aligned}$$

2. Pour, $u \geq 0$, et $\Gamma_u \in I\!R$, on a

$$Q_x^{\lambda,\varphi}(\Gamma_u) = E_x[1_{\Gamma_u}\frac{M_u^{\lambda.\varphi}}{1-\Phi(x)}].$$

i.e

$$\frac{dQ_x^{\lambda,\varphi}{}_{/\mathcal{F}_u}}{dP_{x/\mathcal{F}_u}} = \frac{M_u^{\lambda.\varphi}}{1-\Phi(x)}.$$

D'après [9], On sait que, pour $\psi > 0$, et suivant P_x : $M_t^{\lambda.\varphi} > 0$ et que

$$\begin{aligned} M_t^{\lambda.\varphi} &= (1-\Phi(x))\mathcal{E}(J^{\lambda,\varphi})_t \\ &= (1-\Phi(x))exp\Big\{\int_0^t J_s^{\lambda,\varphi}dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t (J_s^{\lambda,\varphi})^2 ds\Big\}, \end{aligned}$$

où

$$J_t^{\lambda,\varphi} = -\lambda \frac{\varphi(S_u)ch(\lambda(S_u - X_u)) + \lambda(1 - \Phi(S_u))sh(\lambda(S_u - X_u))}{\lambda(1 - \Phi(S_u))ch(\lambda(S_u - X_u)) + \varphi(S_u)sh(\lambda(S_u - X_u))}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_x^{\lambda,\varphi}{}_{/\mathcal{F}_u}}{dP_{x/\mathcal{F}_u}} &= \frac{M_u^{\lambda.\varphi}}{1 - \Phi(x)} \\
&= \mathcal{E}(J^{\lambda,\varphi})_t \\
&= (1 - \Phi(x))exp\Big\{\int_0^t J_s^{\lambda,\varphi} dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t (J_s^{\lambda,\varphi})^2 ds\Big\}.
\end{aligned}$$

En fin, le théorème de Girsanov,(théorème (1.5.12), ch01, [7]) montre que, le processus

$$(X_t - \lambda \int_0^t \frac{\varphi(S_u)ch(\lambda(S_u - X_u)) + \lambda(1 - \Phi(S_u))sh(\lambda(S_u - X_u))}{\lambda(1 - \Phi(S_u))ch(\lambda(S_u - X_u)) + \varphi(S_u)sh(\lambda(S_u - X_u))}; t \geq 0)$$

est un $Q_x^{\lambda,\varphi}-$mouvement brownien issu de x , i.e

$$(X_t - x - \lambda \int_0^t \frac{\varphi(S_u)ch(\lambda(S_u - X_u)) + \lambda(1 - \Phi(S_u))sh(\lambda(S_u - X_u))}{\lambda(1 - \Phi(S_u))ch(\lambda(S_u - X_u)) + \varphi(S_u)sh(\lambda(S_u - X_u))}; t \geq 0)$$

est un $Q_x^{\lambda,\varphi}-$mouvement brownien standard. $\diamond$

Chapitre 3

Dans ce chapitre, on étudie la pénalisation des trajectoires du mouvement brownien par une fonction du temps local en zéro, nous commençons par rappeler quelque propriétés utiles sur les fonctions convexes, en suite on définit le processus du temps local associé au mouvement brownien.

Rappels. Soient f une fonction convexe sur un intervalle ouvert $I \subset I\!R$, nous avons alors :

1. f possède en tout point x de I une dérivée à gauche $f'_-(x)$ est une dérivée à droite $f'_+(x)$.
2. La fonction :$y \to \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est croissante pour tout $y \in I - \{x\}$, de plus si $y > x$, alors
$$f'_+(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_-(y). \tag{3.1}$$
3. La fonction :$x \to f'_-(x)$ est croissante continue à gauche.
4. La fonction :$x \to f'_+(x)$ est croissante continue à droite.

3.1 Temps local

Commençons par généraliser la formule d'Itô pour les fonctions convexes. Dans ce qui suit f est une fonction convexe.

Théorème 3.1.1 *Si $f : I\!R \to I\!R$ est une fonction convexe et X une semimartingale continue, alors $f(X)$ est une semimartingale continue et pour tout $t \geq 0$;*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)dX_s + A_t^f.$$

où, f'_- est la dérivée à gauche de f et $A^f = (A_t^f)_{t\geq 0}$ un processus croissant, adapté, continu.

Preuve du théorème . Supposons d'abord que X est une semimartingale bornée, et soit g une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$, a support compact dans $]-\infty,0]$ telle que

$$\int_{-\infty}^{0} g(s)ds = 1.$$

Pour $n \geq 1, t \in I\!R$, posons

$$f_n(t) = n\int_{-\infty}^{0} f(t+s)g(ns)ds.$$

Il n'est pas difficile de voir que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions convexes, en effet soient $s \in [0,1], x, y \in I\!R$, alors

$$\begin{aligned}
f_n(sx+(1-s)y) &= n\int_{-\infty}^{0} f(sx+(1-s)y+z))g(nz)dz \\
&= n\int_{-\infty}^{0} f(sx+(1-s)y+(1-s)z+sz)g(nz)dz \\
&= n\int_{-\infty}^{0} f(s(x+z)+(1-s)(y+z))g(nz)dz \\
&\leq n\int_{-\infty}^{0} [sf(x+z)+(1-s)f(y+z)]g(nz)dz \\
&\leq s\Big[n\int_{-\infty}^{0} f(x+z)g(nz)dz]+(1-s)[n\int_{-\infty}^{0} f(y+z)g(nz)dz\Big] \\
&\leq sf_n(x)+(1-s)f_n(y).
\end{aligned}$$

Montrons que f_n converge vers f. $\forall x \in I\!R$, nous avons

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &= \Big|n\int_{-\infty}^{0} f(x+y)g(ny)dy - f(x)\Big| \\
&= \Big|n\int_{-\infty}^{0} f(x+y)g(ny)dy - n\int_{-\infty}^{0} f(x)g(ny)dy\Big| \\
&= \Big|\int_{-\infty}^{0} [f(x+y)-f(x)]ng(ny)dy\Big|
\end{aligned}$$

par le changement de variable $[z = ny]$, on a

$$|f_n(x)-f(x)| = \Big|\int_{-\infty}^{0} [f(x+\frac{z}{n})-f(x)]g(z)dz\Big|,$$

la fonction f est convexe donc elle est continue, ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} [f(x+\frac{z}{n})-f(x)] = 0,$$

c'est $\grave{a}$ dire

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

À présent calculons f_n', soient $x \in I\!R$ et $n \geq 0$, alors on a pour $h \in I\!R$

$$\begin{aligned}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} &= \frac{n}{h}\Big[\int_{-\infty}^{0} f(x+h+y)g(ny)dy - \int_{-\infty}^{0} f(x+y)g(y)dy\Big] \\ &= n\Big[(\int_{-\infty}^{0} \frac{f(x+y+h)-f(x+y)}{h})g(ny)dy\Big],\end{aligned}$$

Par la convexcité de f, on a

$$\forall x,y \in I\!R, \exists M := M(x,y) > 0, \forall h \in I\!R, tel\ que\Big|\frac{f(x+y+h)-f(x+y)}{h}\Big| \leq M,$$

de plus g est intégrable, ainsi d'après le théorème de convergence dominé, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} n\Big[(\int_{-\infty}^{0} \frac{f(x+y+h)-f(x+y)}{h})g(ny)dy\Big] \\ &= n\Big[(\int_{-\infty}^{0} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+y+h)-f(x+y)}{h})g(ny)dy\Big],\end{aligned}$$

par conséquent

$$f_n'(x) = n\int_{-\infty}^{0} f_-'(x+y)g(ny)dy. \tag{3.2}$$

en faisant le changement de variable suivant :$[z = ny]$, on aura

$$f_n'(x) = \int_{-\infty}^{0} f_-'(x+\frac{z}{n})g(z)dz. \tag{3.3}$$

et puisque f_-' est croissant alors f_n' l'est aussi.

On montre que f_n' converge vers f_-' .
$\forall x \in I\!R$ nous avons

$$\begin{aligned}\Big|f_n'(x) - f_-'(x)\Big| &= \Big|\int_{-\infty}^{0} f_-'(x+\frac{z}{n})g(z)dz - \int_{-\infty}^{0} f_-'(x)g(z)dz\Big| \\ &= \Big|\int_{-\infty}^{0} \Big[f_-'(x+\frac{z}{n}) - f_-'(x)\Big]g(z)dz\Big|\end{aligned}$$

on sait que f'_- est continue à gauche, comme $z \leq 0$, alors la quantité

$$f'_-(x + \frac{z}{n}) - f'_-(x),$$

tend vers zéro, quand n tend vers ∞, d'où

$$f'_n \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} f'_-. \tag{3.4}$$

Puisque f_n est de classe $\mathcal{C}^2$, alors d'après la formule d'Itô, on a pour $n \geq 1$

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \textstyle\int_0^t f'_n(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^{f_n}, \tag{3.5}$$

où

$$A_t^{f_n} = \int_0^t f''_n(X_s)d\langle X, X\rangle_s,$$

D'autre part

$$f_n(X_t) \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} f(X_t)$$
$$f_n(X_0) \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} f(X_0).$$

Puisqu' on a $f'_-(X_s)$ est bornée, alors on a

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1,\ |f'_n(X_s) - f'_-(X_s)| &\leq |f'_n(X_s)| + |f'_-(X_s)| \\ &\leq |f'(X_s)| + |f'_-(X_s)| \\ &\leq 2|f'_-(X_s)|. \end{aligned}$$

Ainsi, par utilisation du théorème (1.5.10), on trouve que $\int_0^t (f'_n(X_s) - f'_-(X_s))dX_s$ converge en probabilité vers 0, uniformément sur tout interval borné. Par (3.5), la suite des processus $\{A_t^{f_n},\ n \geq 1,\ t \geq 0\}$ converge vers un processus noté $\{A_t^f,\ t \geq 0\}$ lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent (3.5) devient

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^f.$$

À présent si X est une semimartingale non bornée, il suffit d'appliquer la première étape à la semimartingale arrêtée X^{T_n} où

$$T_n = \inf\{t \geq 0,\ |X_t| \geq n\},$$

puisque X^{T_n} est une semi martingale continue et bornée, on aura ainsi :

$$f(X_t^{T_m}) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s^{T_m})dX_s^{T_m} + \frac{1}{2}A_{m,t}^f,$$

où

$$A_{m,t}^f = \lim_{n\to\infty} A_{m,t}^{f_n} = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f''_n(X_s^{T_m})d\langle X, X\rangle_s^{T_m} = \int_0^t f''(X_s^{T_m})d\langle X, X\rangle_s^{T_m}.$$

Maintenant il suffit de faire tendre m vers l'infini pour obtenir le résultat. $\diamond$

Une conséquence immédiate du théorème précédent est :

Théorème 3.1.2 (Formule de Tanaka) *Pour tout $a \in I\!R$, il existe un processus $(L_t^a(X), a \in I\!R, t \geq 0)$, tel que l'application $t \to L_t^a$ est croissante continue, et telle que pour tout $t \geq 0, a \in I\!R$*

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{\{X_s > a\}}dX_s + \frac{1}{2}L_t^a(X), \tag{3.6}$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t 1_{\{X_s \leq a\}}dX_s + \frac{1}{2}L_t^a(X), \tag{3.7}$$

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t sgn(X_s - a)dX_s + L_t^a(X), \tag{3.8}$$

oú

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

En particulier, $(X_t - a)^+$, $(X_t - a)^-$, $|X_t - a|$ sont des semimartingales continue.

Preuve du théorème . (3.1.2) Soit $a \in I\!R$, par une application du théorème(3.1.1) pour les fonctions convexes : :$x \mapsto (x-a)^+, x \mapsto (x-a)^-$, on a,

1)

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{]a,\infty]}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^+, \tag{3.9}$$

où $A^+ = (A_t^+)_{t\geq 0}$

2)

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^- - \int_0^t 1_{[-\infty,a[}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^-, \tag{3.10}$$

où $A^- = (A_t^-)_{t\geq 0}$.

Par suite :

$$\begin{aligned}
X_t - a &= (X_t - a)^+ - (X_t - a)^+ \\
&= (X_0 - a)^+ - (X_0 - a)^- + \int_0^t 1_{]a,\infty]}(X_s)dX_s + \int_0^t 1_{[-\infty,a[}(X_s)dX_s \\
&\quad + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-) \\
&= X_0 - a + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-),
\end{aligned}$$

ainsi

$$X_t = X_0 + X_t + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-).$$

Puisque $X_0 = 0$ $p.s$; alors, $A_t^+ = A_t^-$ $p.s$, et on pose $L_t^a = A_t^+$.

En aditionnant(3.9) et (3.17), on obtient, $\forall a \in I\!\!R$,

$$\begin{aligned}
|X_t - a| &= (X_t - a)^+ + (X_t - a)^+ \\
&= (X_0 - a)^+ + (X_0 - a)^- + \int_0^t 1_{]a,\infty]}(X_s)dX_s + \int_0^t 1_{[-\infty,a[}(X_s)dX_s + L_t^a \\
&= (X_0 - a)^+ + (X_0 - a)^- + \int_0^t sgn(X_s - a)dX_s + L_t^a \\
&= |X_0 - a| + \int_0^t sgn(X_s - a)dX_s + L_t^a. \diamond
\end{aligned}$$

Passons maintenant au théorème de Lévy qui montre en particulier que S_t et L_t en même loi.

Théorème 3.1.3 (Lévy) *Les deux processus* $\{(S_t - X_t, S_t); t \geq 0\}$ *et* $\{(|X_t|, L_t); t \geq 0\}$ *ont même loi.*

Avant de commencer la démonstration de ce théorème, rappellons le lemme de Skorokhod

Lemme 3.1.4 (Skorokhod) *Soit y une fonction continue à valeurs réelles sur $[0,\infty[$ telle que $y(0) \geq 0$. Il éxiste un couple unique (z,a) de fonctions définies sur $[0,\infty[$ tel que*

i) $z = y + a$,

ii) z est une fonction positive,

iii) a est croissante, continue, egale à0etlamesurecorespondanteda$_s$ est portée par $\{s : z(s) = 0\}$. La fonction a est donnée par

$$a(t) = \sup_{s \leq t}(-y(s) \vee 0).$$

PREUVE DU THÉORÈME .
D'une part on a par la formule de Tanaka,

$$|X_t| = \alpha_t + L_t^0. \tag{3.11}$$

où $\alpha_t = \int_0^t sgn(X_s)dX_s$.

D'autre part, on peut écrire $S_t - X_t = -X_t + S_t$. Ainsi, le lemme(3.1.4) montre que $\{S_t - X_t, S_t; t \geq 0\}$ et $\{-X_t; t \geq 0\}$ ont même loi et que $\{|X_t|, L_t; t \geq 0\}$ et $\{\alpha_t; t \geq 0\}$ le sont aussi, et puisque $\{\alpha_t; t \geq 0$ et $\{-X_t; t \geq 0\}$ ont même loi, alors $\{S_t - X_t, S_t; t \geq 0\}$ et $\{|X_t|, L_t; t \geq 0\}$ le sont aussi.

Définition 3.1.5 *Un processus stochastique (à valeurs réelles) $A = (A_t)_{t\geq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ est <u>une fonctionnelle additive</u> si*

i) $A_0 = 0$ *p.s ;*

ii) A est continue à droite ;

iii)A_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout t ;

iv) pour chaque couple (s,t) d'éléments de $\mathbb{R}_+$, on a p.s.

$$A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t \tag{3.12}$$

où $(\theta_t)_{t\geq 0}$ est la famille d'opérateurs shift.

Le resultat suivant est important pour la suite, il montre en particulier que le temps local est une fonctionnelle additive (voir [8], page 402).

Proposition 3.1.6 *Si T est un temps d'arrêt, alors, pour tout x*

$$L^x_{T+S} = L^x_T + L^x_S(\theta_T). \quad P_x \text{ p.s.} \tag{3.13}$$

pour tout temps d'arrêt S.

En particulier $\forall s, t \geq 0$ $T = t$ et $S = s$, alors on trouve

$$L^x_{t+s} = L^x_t + L^x_s(\theta_t). \quad P_x \text{ p.s.} \tag{3.14}$$

3.2 Pénalisation par une fonction du temps local en zéro.

Dans cette partie, on aborde le problème de la pénalisation des trajectoires du mouvement brownien par le temps local en 0. D'aprés le théorème de Lévy, on sait que $\{(S_t - X_t, S_t); t \geq 0\}$ et $\{(|X_t|, L^0_t); t \geq 0\}$ ont même loi , et puisque $\{(S_t - X_t)\varphi(S_t) + 1 - \Phi(S_t); t \geq 0\}$ est une martingale d'après le chapitre01 alors $\{(|X_t|\varphi(L^0_t) + 1 - \Phi(L^0_t)); t \geq 0\}$ est une martingale par rapport *à* la filtration $(\mathcal{F}_t)$, les fonctions φ et Φ sont définies dans le chapitre précédent.

Proposition 3.2.1 *Soient $h^+, h^- : I\!R_+ \to I\!R_+$, fonctions boréliennes bornées, pour $l \geq 0$. Posons pour $l \geq 0$,*

$$H(l) = \frac{1}{2}\int_0^l (h^+(u) + h^-(u))du.$$

1. *Alors*

$$M^{h^+,h^-}_t = 1 - H(L^0_t) + X^+_t h^+(L^0_t) + X^-_t h^-(L^0_t),$$

est une $P_0 -$ martingale. De plus $M^{h^+,h^-}_0 = 1$ P_0 p.s, et

$$M^{h^+,h^-}_t = 1 + \int_0^t (1_{\{X_s>0\}}h^+(L^0_s) - 1_{\{X_s<0\}}h^-(L^0_s))dX_s.$$

2. *Si de plus*

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty (h^+(u) + h^-(u))du = 1, \tag{3.15}$$

et $H(l) < 1$ pour tout $l > 0$, alors $M^{h^+,h^-}_t > 0$ et $M^{h^+,h^-}_t = \mathcal{E}(J^{h^+,h^-})_t$, où

$$J^{h^+,h^-}_t = \frac{1_{\{X_t>0\}}h^+(L^0_t) - 1_{\{X_t<0\}}h^-(L^0_t)}{1 - H(L^0_t) + X^+_t h^+(L^0_t) + X^-_t h^-(L^0_t)}.$$

Remarques 3.2.2

1. *Rappelons que dans le chapitre précédent, on a introduit la famille des martingales* $(M_t^{\lambda,\varphi})_{t\geq 0}$ *et ça ne fera aucune confusion avec la famille* $(M_t^{h^+,h^-})_{t\geq 0}$*, puisque les deux couples des paramètres* (λ,φ) *et* (h^+,h^-) *appartiennent à deux ensembles différents.*
2. *Dans cette section, nous ferons les calculs suivant la mesure de Wiener* P_0*. Puisque* (X_t) *est un mouvement brownien standard alors, il est possible de travailler suivant* P_x*, en remplaçant* $(M_t^{h^+,h^-})$ *par* $(1-H(L_t^x)+(X_t-x)^+h^+(L_t^x)+(X_t-x)^-h^-(L_t^x); t\geq 0)$*, deplus, pour simplifier les calculs, on prendra* $x=0$*.*

Nous commençons l'étude de ce cas de pénalisation par le résultat suivant :

Théorème 3.2.3 *Soient* h^+, h^- *(resp :* $(M_t^{h^+,h^-})$*) les fonctions (resp : martingale) définies dans la proposition précédente. On suppose que*

$$\tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^\infty (h^+(u)+h^-(u))du = 1, \tag{3.16}$$

1. *Soient* $s\geq 0$ *et* $\Gamma_s\in\mathcal{F}_s$*. Alors*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}_0[1_{\Gamma_s}(h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}})]}{\mathrm{E}_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}]} = \mathrm{E}_0[1_{\Gamma_s}M_s^{h^+,h^-}]$$

2. *Soit* $Q_0^{h^+,h^-}$ *est la mesure de probabilité définie sur* $(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$ *par*

$$Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma_s) = \mathrm{E}_0[1_{\Gamma_s}M_s^{h^+,h^-}],$$

pour $s\geq 0$ *et* $\Gamma_s\in\mathcal{F}_s$*. Alors sous* $Q_0^{h^+,h^-}$*, le processus*

$$\left(X_t - \int_0^\infty \frac{h^+(L_s^0)1_{\{X_s>0\}} - h^-(L_s^0)1_{\{X_s<0\}}}{M_s^{h^+,h^-}}ds; t\geq 0\right)$$

est un mouvement brownien.

Remarque 3.2.4 *Comme dans le cas de la pénalisation par une fonction de* S_t*, la martingale* $(M_t^{h^+,h^-})_{t\geq 0}$ *n'est pas uniformément intégrable, en effet :*
si $\tau_l = \inf\{s>0, L_s^0>l\}$*, alors*

$$M_{\tau_l}^{h^+,h^-} = 1 - H(L_{\tau_l}^0) + X_{\tau_l}^+h^+(L_{\tau_l}^0) + X_{\tau_l}^-h^-(L_{\tau_l}^0)$$

d'après (le corollaire(2.6), [8] *page* (242)), *on a*

$$X^+_{\tau_l} = X^-_{\tau_l} = 0 \ P_0 p.s.$$

Donc

$$M^{h^+,h^-}_{\tau_l} = 1 - H(l) \ P_0 p.s.$$

Ainsi

$$M^{h^+,h^-}_{\tau_l} \rightarrow_{l\rightarrow+\infty} 0 \ P_0 p.s$$

Maintenant, si $(M^{h^+,h^-}_t)_{t\geq 0}$ *est uniformément intégrable ; alors, par le théorème(1.3.19) il existe une v.a.r* M^{h^+,h^-}_∞ *tel que*

$\forall t \geq 0; \qquad M^{h^+,h^-}_t = E[M^{h^+,h^-}_\infty / \mathcal{F}_t], \ Pp.s(3.17)$

avec

$$\lim_{t\rightarrow+\infty} M^{h^+,h^-}_t = M^{h^+,h^-}_\infty \ Pp.s.$$

Par suite

$$M^{h^+,h^-}_\infty = 0 \ Pp.s.$$

D'oú

$$\forall t \geq 0; \qquad M^{h^+,h^-}_t = 0, \ Pp.s$$

ce qui contredit le fait que $M^{h^+,h^-}_t > 0.\forall t \geq 0$

Le résultat suivant est un lemme technique qui joue un rôle important pour la démonstration du théorème(3.2.3)

Lemme 3.2.5 *Soit* $f : I\!R_+ \rightarrow I\!R_+$ *une fonction borélienne, et localement bornée et intégrable. Soient* $a \geq 0$ *et* $x \in I\!R$ *,alors*

$$E_x[f(a + L^0_t)1_{\{X_t>0\}}] \sim_{t\rightarrow\infty} f(a)\sqrt{\frac{2}{\pi t}}x^+ + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty f(s)ds. \qquad (3.18)$$

$$E_x[f(a + L^0_t)1_{\{X_t<0\}}] \sim_{t\rightarrow\infty} f(a)\sqrt{\frac{2}{\pi t}}x^- + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty f(s)ds. \qquad (3.19)$$

Preuve du lemme. Sur l'ensemble $\{T_0 > t\}$, nous avons

$$P_x\text{p.s} \ \ f(a + L^0_t)1_{\{X_t>0\}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ & \\ f(a) & \text{d'ailleurs} \end{cases}$$

En effet :

i) Si $x < 0$ alors on a $X_0 = x < 0$, P_x p.s, alors $1_{\{X_t > 0\}} = 0$ P_x p.s
ii) Si $x \geq 0$, on rappelle que par la formule de Tanaka (3.1.2)

$$L_t^0 = |X_t| - \int_0^t sgn(X_s) dX_s.$$

Donc

$$\begin{aligned} 1 &= P_0[f(a + L_t^0) = f(a + |X_t| - \int_0^t sgn(X_s) dX_s)] \\ &= P_0[f(a + L_t^0) = f(a + |X_t| - X_t + X_0)] \\ &= P_0[f(a + L_t^0) = f(a + x)] \qquad (car |X_t| = X_t) \\ &= P_x[f(a + L_t^0) = f(a)]. \end{aligned}$$

Par suite

$$E_x[f(a + L_t^0) 1_{\{X_t > 0\}}] = E_x[f(a + L_t^0) 1_{\{X_t > 0, t < T_0\}}] + \Delta_t$$

oú

$$\Delta_t = E_x[f(a + L_t^0) 1_{\{X_t > 0, t \geq T_0\}}].$$

$$\begin{aligned} E_x[f(a + L_t^0) 1_{\{X_t > 0\}}] &= E_x[f(a) 1_{\{x \geq 0\}} 1_{\{T_0 > t\}}] + \Delta_t \\ &= f(a) P_x(T_0 > t) 1\{x > 0\} + \Delta_t. \end{aligned}$$

En utilisant la formule(1.13), nous avons d'une part

$$P_x(T_0 > t) = \int_t^\infty \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathrm{e}^{\{-\frac{x^2}{2s}\}} 1_{\{s > 0\}} ds,$$

d'autre part ; on a, pour $a = |x|$

$$P_0(T_{|x|} > t) = \int_t^\infty \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathrm{e}^{\{-\frac{x^2}{2s}\}} 1_{\{s > 0\}} ds.$$

d'oṳ

$$P_x(T_0 > t) = P_0(T_{|x|} > t). \qquad \forall t > 0.$$

par conséquent

$$\begin{aligned} P_0(T_{|x|} > t) &= P_0(\inf_s \{s \geq 0, X_s = |x|\} > t) \\ &= P_0((\sup_{0 \leq u \leq t} X_u) \leq |x|) \\ &= P_0(S_t \leq |x|) \end{aligned}$$

mais d'après(1.9), on a

$$\begin{aligned}
P_0(T_{|x|} > t) &= P_0(\sqrt{t}|X_t| \leq |x|) \\
&= P_0(|X_1| < \frac{|x|}{\sqrt{t}}).
\end{aligned}$$

Or, par la proposition(1.14)

$$P_x(T_0 > t) \sim_{t \to +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}|x|.$$

On calcule maintenant Δ_t. En utilisant la propriété de Markov forte au temps d'arrêt T_0, on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_t &= E_x[f(a + L_t^0)1_{\{X_t > 0, t \geq T_0\}}] \\
&= E_x[E_x f(a + L_t^0)1_{\{X_t > 0\}}1_{t \geq T_0}/\mathcal{F}_{T_0}] \\
&= E_x[1_{\{t \geq T_0\}}E_x[f(a + L_t^0)1_{\{X_t > 0\}}/\mathcal{F}_{T_0}]] \\
&= E_x[1_{\{t \geq T_0\}}E_x[f(a + L_{t-T_0+T_0}^0)1_{\{X_{t-T_0+T_0} > 0\}}/\mathcal{F}_{T_0}]] \\
&= E_x[1_{\{t \geq T_0\}}E_x[(f(a + L_{t-T_0}^0))1_{\{X_{t-T_0} > 0\}}] \\
&= E_x[1_{\{t \geq T_0\}}E_0[f(a + L_{t-T_0}^0)1_{\{X_{t-T_0} + x > 0\}}] \\
&= E_x[1_{\{t \geq T_0\}}E_0[f(a + L_{t-T_0}^0))1_{\{X_{t-T_0} > 0\}}] \\
&= E_x[1_{\{t \geq T_0\}}g(t - T_0)],
\end{aligned}$$

oú

$$g(r) = E_0[f(a + L_r^0)1_{\{X_r > 0\}}].$$

Mais puisque, $(-X)$ et (X) ont même loi, sous P_0, on peut écrire

$$\begin{aligned}
E_0[f(a + L_r^0)] &= E_0[f(a + L_r^0)1_{\{X_r > 0\}}] + E_0[f(a + L_r^0)1_{\{X_r \leq 0\}}] \\
&= E_0[f(a + L_r^0)1_{\{X_r > 0\}}] + E_0[f(a + L_r^0)1_{\{-X_r \geq 0\}}] \\
&= E_0[f(a + L_r^0)1_{\{X_r > 0\}}] + E_0[f(a + L_r^0)1_{\{X_r \geq 0\}}] \\
&= 2E_0[f(a + L_r^0)1_{\{X_r > 0\}}].
\end{aligned}$$

D'autre part, le théorème de Lévy assure que $((S_t - X_t, S_t); t \geq 0)$ et $((|X_t|, L_t^0); t \geq 0)$ ont même loi, en particulier $(S_t; t \geq 0)$ et $(L_t^0; t \geq 0)$ ont même loi, par conséquent

$$g(r) = E_0[f(a + L_r^0)1_{\{X > 0\}}]$$

$$
\begin{aligned}
g(r) &= \frac{1}{2}E_0[f(a+L_r^0)] \\
&= \frac{1}{2}E_0[f(a+S_r)].
\end{aligned}
$$

En appliquant l'estimation(2.6) du lemme(2.1.4) ($avec : s = x = a, u = r$ et $\varphi_0 = f$), on obtient

$$
\begin{aligned}
g(r) &= \frac{1}{2}E_0[f(a+S_r)] \\
&= \frac{1}{2}E_0[f(a\vee(a+S_r))] \\
&\sim_{r\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\int_a^\infty f(s)ds.
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
g(r) \sim_{r\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\int_a^\infty f(s)ds.
$$

Finalement

$$
\begin{aligned}
\Delta_t &= E_x[1_{\{t\geq T_0\}}g(t-T_0)] \\
&\sim_{t\to+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-T_0)}}\int_a^\infty f(s)ds\Big)E_x[1_{\{t\geq T_0\}}] \\
&\sim_{t\to+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty f(s)ds\Big)P_x(t\geq T_0) \\
&\sim_{t\to+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty f(s)ds\Big)(1-P_x(t<T_0)) \\
&\sim_{t\to+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty f(s)ds\Big)\Big(1-\sqrt{\frac{2}{\pi t}}|x|\Big) \\
&\sim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty f(s)ds.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
E_x[f(a+L_t^0)1_{\{X_t>0\}}] \sim_{t\to\infty} f(a)\sqrt{\frac{2}{\pi t}}x^+ + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty f(s)ds.
$$

d'o$\grave{u}$ le premier résultat de lemme.

Le deuxième résultat du lemme(3.2.5), est une conséquence du premier, en effet :

On sait que la loi de $(-X)$ suivant P_x, est égale a celle de (X) suivant P_{-x} ; car : Pour tout $a \in I\!R$,

$$\begin{aligned} P_{-x}(X_t \leq a) &= P_0(X_t - x \leq a) \\ &= P_0(X_t \leq a + x) \\ &= P_0(-X_t \leq a + x) \\ &= P_0(-X_t - x + x \leq a + x) \\ &= P_x(-X_t \leq a). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_x[f(a + L_t^0)1_{\{X_t<0\}}] &= E_x[f(a + L_t^0)1_{\{-X_t>0\}}] \\ &= E_{-x}[f(a + L_t^0)1_{\{X_t>0\}}] \\ &\sim_{t\to\infty} f(a)\sqrt{\frac{2}{\pi t}}(-x)^+ + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty f(s)ds \\ &\sim_{t\to\infty} f(a)\sqrt{\frac{2}{\pi t}}x^- + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty f(s)ds. \end{aligned}$$

À présent on peut passer *à* la démonstration du théorème (3.2.3), pour ce faire, on adoptera une approche similaire *à* celle utilisée pour la démonstration des théorèmes (2.1.2) et (2.2.2).

Preuve du théorème .

1. Cherchons d'abord une estimation pour

$$E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}/\mathcal{F}_s];\ 0 \leq s \leq t.$$

Par une application de la formule (3.14), nous avons

$$E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}/\mathcal{F}_s] = E_0[h^+(L_s + L_{t-s} \circ \theta_s)1_{\{X_{t-s}\circ\theta_s>0\}}/\mathcal{F}_s]$$

En appliquant la propriété de Markov simple, on trouve

$$\forall t > s \qquad E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}/\mathcal{F}_{X_s}] = E_0[h^+(L_s + L_{t-s})1_{\{X_{t-s}>0\}}].$$

Mais par le lemme (3.2.5), on a

$$E_0[h^+(L_s+L_{t-s})1_{\{X_{t-s}>0\}}] \sim_{t\to+\infty} h^+(L_s)\sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}X_s^+ + \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{L_s}^{\infty} h^+(u)du.$$

Ainsi, pour tout $s,t \geq 0$ avec $t > s$,

$$E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}/\mathcal{F}_s] \sim_{t\to+\infty} h^+(L_s)\sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}X_s^+ + \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{L_s}^{\infty} h^+(u)du. \tag{3.20}$$

De même pour

$$E_0[h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}/\mathcal{F}_{X_s}],$$

on a

$$\begin{aligned} E_0[h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}/\mathcal{F}_s] &= E_0[h^-(L_s + L_{t-s}\circ\theta_s)1_{\{X_{t-s}\circ\theta_s<0\}}/\mathcal{F}_s] \\ &= E_0[h^-(L_s + L_{t-s})1_{\{X_{t-s}<0\}}]. \end{aligned}$$

Par suite

$$E_0[h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}/\mathcal{F}_s] = E_0[h^-(L_s + L_{t-s})1_{\{X_{t-s}<0\}}].$$

Maintenant une application du lemme(3.2.5) donne

$$\mathrm{E}_0[h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}/\mathcal{F}_s] \sim_{t\to+\infty} h^-(L_s)\sqrt{\tfrac{2}{\pi(t-s)}}X_s^- + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\textstyle\int_{L_s}^{\infty} h^-(u)du. \tag{3.21}$$

Posons

$$I_t = E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}} + h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}/\mathcal{F}_s].$$

et en combinant (3.20) et (3.21), on a

$$
\begin{aligned}
I_t \quad \sim_{t\to+\infty} \quad & h^+(L_s)\sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}X_s^+ + \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{L_s}^{\infty} h^+(u)du \\
+ \qquad & h^-(L_s)\sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}X_s^- + \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{L_s}^{\infty} h^-(u)du \\
\sim_{t\to+\infty} \quad & \sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}\Big\{X_s^+ h^+(L_s^0) + X_s^- h^-(L_s^0) + \int_{L_s^0}^{\infty} (\frac{h^+(u)+h^-(u)}{2})du\Big\} \\
\sim_{t\to+\infty} \quad & \sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}\Big\{X_s^+ h^+(L_s^0) + X_s^- h^-(L_s^0) + 1 - \int_{\infty}^{L_s^0} (\frac{h^+(u)+h^-(u)}{2})du\Big\} \\
\sim_{t\to+\infty} \quad & \sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}\Big\{X_s^+ h^+(L_s^0) + X_s^- h^-(L_s^0) + 1 - \int_{0}^{L_s^0} (\frac{h^+(u)+h^-(u)}{2})du \\
+ \qquad & \int_0^{\infty} (\frac{h^+(u)+h^-(u)}{2})du\Big\}
\end{aligned}
$$

Or par (3.15), nous avons

$$\int_0^{\infty} \frac{h^+(u)+h^-(u)}{2}du = 0.$$

Par conséquent

$$I_t \sim_{t\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}\Big\{X_s^+ h^+(L_s^0) + X_s^- h^-(L_s^0) + 1 - \int_0^{L_s^0} (\frac{h^+(u)+h^-(u)}{2})du\Big\},$$

donc

$$I_t \sim_{t\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}} M_s^{h^+,h^-}.$$

Maintenant on estime $E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}} + h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}]$.
En appliquant (3.18) et (3.19), avec $x = a = 0$, on trouve

$$E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}] \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{\infty} h^+(u)du.$$

$$E_0[h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}] \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{\infty} h^-(u)du.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}] &\sim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty h^+(u)du+\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty h^-(u)du \\
&\sim_{t\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^\infty \frac{h^+(u)+h^-(u)}{2}du \\
&\sim_{t\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}
\end{aligned}$$

Si on pose *à* présent

$$J_t=\frac{E_0[1_{\Gamma_s}(h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}})]}{E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}]}$$

alors nous avons,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} J_t &= \lim_{t\to+\infty}\frac{E_0[E_0[1_{\Gamma_s}(h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}})/\mathcal{F}_s]]}{E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}]} \\
&= \lim_{t\to+\infty} E_0\Big[1_{\Gamma_s}\frac{E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}/\mathcal{F}_s]}{E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}]}\Big] \\
&= E_0\Big[1_{\Gamma_s}\lim_{t\to+\infty}\Big[\frac{E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}/\mathcal{F}_s]}{E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}]}\Big]\Big].
\end{aligned}$$

et d'aprés (3.20) et(3.21), on a

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} & \frac{E_0[1_{\Gamma_s}(h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}})]}{E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}]} \\
= & E_0\Big[1_{\Gamma_s}\lim_{t\to+\infty}\Big[\frac{E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}/\mathcal{F}_s]}{E_0[h^+(L_t^0)1_{\{X_t>0\}}+h^-(L_t^0)1_{\{X_t<0\}}]}\Big]\Big] \\
= & E_0\Big[1_{\Gamma_s}\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}M_s^{h^+,h^-}}{\sqrt{\frac{2}{\pi t}}}\Big] \\
= & E_0[1_{\Gamma_s}M_s^{h^+,h^-}].
\end{aligned}$$

2. Soient $s \geq 0, \Gamma_s \in \mathcal{F}_s$, on a

$$Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma_s) = \mathrm{E}_0[1_{\Gamma_s} M_s^{h^+,h^-}]$$

c'est $\grave{a}$ dire

$$\frac{dQ_0^{h^+,h^-}{}_{/\mathcal{F}_s}}{dP_{0/\mathcal{F}_s}} = M_s^{h^+,h^-}$$

Mais d'aprés la propotition (3.2.1), $M_s^{h^+,h^-} > 0$ et $M_s^{h^+,h^-} = \mathcal{E}(J^{h^+,h^-})_s$, o$\grave{u}$

$$J_s^{h^+,h^-} = \frac{1_{\{X_s>0\}}h^+(L_s^0) - 1_{\{X_s<0\}}h^-(L_s^0)}{1 - H(L_s^0) + X_s^+ h^+(L_s^0) + X_s^- h^-(L_s^0)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dQ_0^{h^+,h^-}{}_{/\mathcal{F}_s}}{dP_{0/\mathcal{F}_s}} &= \mathcal{E}(J^{h^+,h^-})_s \\ &= exp\Big\{ \int_0^s J_t^{h^+,h^-} dX_t - \frac{1}{2}\int_0^s (J_t^{h^+,h^-})^2 dt \Big\} \end{aligned}$$

Finallement, le théorème de Girsanov(1.5) implique que le processus

$$(X_s - \int_0^s J_s^{h^+,h^-} ds; s \geq 0)$$

est un $Q_0^{h^+,h^-}$−mouvement brownien issu de x. ou bien, le processus

$$\Big(X_s - \int_0^s \frac{1_{\{X_s>0\}}h^+(L_s^0) - 1_{\{X_s<0\}}h^-(L_s^0)}{1 - H(L_s^0) + X_s^+ h^+(L_s^0) + X_s^- h^-(L_s^0)} ds; s \geq 0 \Big)$$

$Q_0^{h^+,h^-}$−mouvement brownien issu de x. ce qui implique que

$$\Big(X_s - x - \int_0^s \frac{1_{\{X_s-x>0\}}h^+(L_s^x) - 1_{\{X_s-x<0\}}h^-(L_s^x)}{1 - H(L_s^x) + (X-x)_s^+ h^+(L_s^x) + (X-x)_s^- h^-(L_s^x)} ds; s \geq 0 \Big)$$

$Q_0^{h^+,h^-}$−mouvement brownien standard.

3.3 Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié trois cas de pénalisation des trajectoires du mouvement brownien par des fonctionnelles du mouvement brownien ou de son temps local. Les techniques de démonstration sont basées sur des propriétés fines du mouvement brownien ainsi que le calcul stochastique, pour chaque cas de pénalisation nous avons exhibé la mesure limite Q_x, nous avons montré qu'elle localement absolument continue par rapport à la mesure de Wiener P_x et nous avons donné la densité de Radon-Nykodim de Q_x par rapport à P_x, en fin nous avons donné la loi du mouvement brownien sous la nouvelle mesure Q_x.

Bibliographie

[1] AIMÉ, F., DOMINIQUE, F., *Processus stochastiques*. Dunod, Paris, 2002.

[2] AZÉMA, J. et YOR, M., *Une solution simple au problème de Skorokhod*, dans : Séminaire de Probabilités, $XIII$ (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78). Springer, Berlin, 1979. MR $82c$: $60073a$.

[3] JACOD, J., *Mouvement brownien et calcul stochastique*,cours de Master de Mathématiques. Université Pierre et Marie Curie. $2007 - 2008$.

[4] JEULIN, T. et YOR, M., *Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien*, dans : Seminar on Probability, XV (Univ. Strasbourg, strasbourg, 1979/1980). Springer, Berlin, 1981. MR $83c$: 60110.

[5] LACROIX, J. et PRIOURET, P., *Probabilités Approfondies*, cours de Master de Mathématique. Université Pierre et Marie Curie. $2005 - 2006$.

[6] LE GALL, J. F., *Mouvement brownien et calcul stochastique*, Cours du DEA $1996 - 1997$. Université Pierre et Marie Curie. Janvier1997.

[7] Protter, P. E., *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2nd Edition.

[8] REVUZ, D., YOR, M., *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 de Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR $2000h$: 60050.

[9] ROYNETTE, B., VALLOIS, P. et YOR, M., *Limiting laws associated with brownien motion perturbed by its maximum, minimum and local time*, II Studia Sci. Math. Hungar. $43(3)(2006), 295 - 360$.

[10] ROYNETTE, B.,YOR, M., *Penalising Brownian Paths*. Lecture Notes in Mathematics.Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.