Mémoire de Magistère
Présenté par
Mme HOUALEF MERIEM

Titre du mémoire
Estimation Paramétrique d'un Processus AR à coefficients aléatoires

Soutenue le Juin 2009 Devant le Jury :
Président : Mr DIB Hacen Professeur Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Examinateurs :
Mr. BENMANSOUR Djamal Maitre de Conférences Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Mr.ALLAM Abd El Azize Maitre de Conférences Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Rapporteur Mr MOURID Tahar Professeur Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

0.1 Introduction

Dans ce mémoire , nous étudions les processus autorégressif à coefficients aléatoires RCA qui sont utilisés dans plusieurs domaines : ils sont appliqués en économie , biologie, ...

Nous développons les résultas traitants la question de l'estimation du coefficient de processus autorégressif à coefficients aléatoires RCA d'ordre 1 défini par

$$X_t = \phi_t X_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad t \in Z \tag{1}$$

où (ϕ_t) est une suite de v.a. iid et (ε_t)est un bruit blanc dans le cas critique $\phi = E(\phi_t) = 1$ et le cas explosif $\phi > 1$.

Nous nous interessons aux estimateurx de type mondres carrés conditionnels et moindres carrés pondérés.

Nous développons les résultats établis dans les articles suivants :

1. " Least squares estimation for critical random coefficient first-order autoregressive processes " Hwang ,S.Y. , Basawa,I.V. et Tae Yoon Kim.

Statistics and Probability Letters 23 March 2005.

2. "Explosive Random -Coefficient $AR(1)$ Processes and Related Asymptotics For Least-Squares Estimation" Hwang,S.Y,and Basawa ,I.V.

Journal of Time Series analysis Vol.26 n. 6 p. 807-824 (2004).

Dans le chapitre 1, nous rappellons certains théorèmes de la théorie des probabilités et des propriétés des processus autorégressifs.

Dans le chapitre 2, nous étudions le travail de Hwang ,S.Y. et Basawa,I.V.et Tae Yoon Kim. [15] . Pour un processus autorégressif $RCA(1)$, leur résultat principal est l'étude de la convergence de l'estimateur des moindres carrés conditionnels et des moindres carrés pondérés et leurs comportements asymptotiques en loi dans le cas critique.

Dans le chapitre 3, nous nous consacrons à l'article de Hwang ,S.Y. et Basawa,I.V. [14] . Dans le cas explosif , les auteurs établissent la convergence en probabilité de l'estimateur des moindres carrés pondérés et une loi limite et montrent aussi que l'estimateur des moindres carrés conditionnels n'est pas convergeant.

En Annexe nous présentons des résultats de simulations numériques sur le comportement asymptotique des estimateurs des moindres carrés conditionnels et des moindres carrés pondérés dans un processus $RCA(1)$ en utilisant le logiciel R.

0.2 Préliminaires

Dans ce mémoire nous notons par (Ω, A, P) un espace probabilisé. Soit (X_t) une suite de v.a. réelles définie sur (Ω, A, P) et pour $t \geq 1$, $\digamma_{t-1}$ la tribu engendrée par les v.a. $X_{t-1,}X_{t-2}, ...X_1$. La notation $\overset{d}{=}$ dénotent la "égalité en loi". $O_P(.)$ "borné en probabilité". La notation $\Longrightarrow$ dénotent la"convergence en loi".

Dans ce chapitre nous rappellons quelques théorèmes de probabilités que nous utilisons dans ce mémoire et les résultats connus sur l'estimation du paramètre d'un processus autorégressif $AR(1)$ dans les cas stationnaire et exposif.

Nous donnons le théorème central limite fonctionnel de Donsker.

Theorème 1 *Soit* $\left(X_i, i \geq 1\ i = \overline{1,n}\right)$ *une suite de variables aléatoire i.i.d.*

centrées de variance σ^2 *et* $n \geq 1$.

On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

et pour $t \geq 0$ *on définit*

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_{[nt]} - (nt - [nt]) X_{[nt]+1} \right)$$

Alors le processus $(Z_n(t))_{t \geq 0}$ *converge en loi et*

$$(Z_n(t))_{t \geq 0} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} (W_t)_{t \geq 0}$$

oū $(W_t, \quad t \geq 0)$ *est le mouvement brownien standard .*

Si $H : C \longrightarrow IR$ *est une fonctionnelle continue sur* C *l'espace des fonctions continues sur* IR^+ *alors*

$$H\left((Z_n(t))_{t \geq 0} \right) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} H\left((W_t)_{t \geq 0} \right)$$

Nous rappelons un théorème de Doob, un théorème central limite sur les martingales. et le théorème de Lyapounov

.

Theorème 2 *Toute sous-martingale* (X_n) *borneé dans* L^1 *converge prèsque sûrement vers une variable aléatoire* X *borneé dans* L^1 *.*

Theorème 3 *Soit* (M_n) *une martingale de carré intégrable.*
Posons pour $n \geq 1$ *,* $\Delta_n = M_{n+1} - M_n$ *et* $\sum_n = E\left(\Delta_n^2 / \digamma_n\right)$ *et supposons qu'il existe* $K > 0$ *une constante telle que* $\forall n,\ E\left(\Delta_n^2 / \digamma_n\right) \leq K$ *et* $\langle M \rangle_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_k$ *(crochet de martingale). Si* $\frac{\langle M \rangle_n}{n} \xrightarrow{p} \sigma^2$ *alors*

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} N(0,1)$$

.

Theorème 4 *Soit* (X_{ni}) *un tableau triangulaire de variables aléatoires indépendantes* $i = \overline{1,n}$, $E(|X_{ni}|) < \infty$ *et du second ordre . Posons* $S_n = \sum_{i=1}^{n} (X_{ni} - E(X_{ni}))$*. Si pour* $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma(S_n)^{2+\delta}} E\left|X_{ni} - E(X_{ni})\right|^{2+\delta} = 0$$

alors

$$\frac{S_n}{\sigma(S_n)} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} N(0,1)$$

Enfin nous énoncons un lemme de Toeplitz.

Lemme 1 *Soit* (a_n) *et* (b_n) *deux suites rélles telles que* $a_n b_n \longrightarrow \alpha$ *, alors* $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} b_{ti}} \sum_{i=1}^{n} a_i \longrightarrow \alpha$.

0.2.1 Processus autorégressifs d'ordre 1 AR(1)

Considérons un processus autorégressif d'ordre 1 $AR(1)$ $(X_t, t \geq 0)$ défini par l'équation aux différences

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad\qquad X_0 = 0 \tag{1.1}$$

oū (ε_t) est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribueés (bruit blanc) (pas nécesairement Gaussiennes) avec $E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$.

L'éstimateur des moindres carrés du paramètre ϕ basé sur des observations $(X_1, ..., X_n)$ et obtenu par minimisation de l'érreur quadratique est

$$\widehat{\phi}_n = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2}$$

Nous notons les troix cas suivants :

(i) $|\phi| < 1$ cas stationnaire
(ii) $|\phi| = 1$ cas critique
(iii) $|\phi| > 1$ cas explosif

La convergence en loi de l'estimateur $\widehat{\phi}_n$ est bien connue (voir Anderson [1] ,Fuller, [7]). En particulier , si (ε_t) est une suite gaussienne , nous avons pour $|\phi| \neq 1$

$$\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \sigma_\epsilon^{-1}\left(\widehat{\phi}_n - \phi\right) \Longrightarrow N(0,1) \quad , \text{ pour } |\phi| \neq 1$$

Pour le cas $|\phi| < 1$, le résultat reste vraie même si (ε_t) n'est pas gaussienne. Pour $|\phi| > 1$, le résultat est vraie seulement si (ε_t) est normal.

0.3 Processus autorégressifs à coéfficient aléatoires d'ordre 1. Cas critique

Dans ce chapitre nous étudions les résultats de l'article de Hwang ,S.Y. , Basawa,I.V. et Tae Yoon Kim [15] qui propose l'estimation du paramètre d'un processus autorégressif à coéfficient aléatoire noté $RCA(1)$ dans le cas critique. Les résultats montrent que les estimateurs (des moindres carrés pondérés et conditionels) sont convergeants et asymptotiquement normal.

Une extension naturelle du modèle $AR(1)$ de l'eqn (1.1) avec un coefficient ϕ qui devient une variable aléatoire donne un processus autorégressif à coéfficient aléatoire

noté $RCA(1)$;$(X_t, t \geq 0)$. Le processus est défini par

$$X_t = \phi_t X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad , \qquad X_0 = 0 \tag{2.1}$$

oū (ε_t) est une suite famille de variables aléatoire indépendantes identiquement distribueé centreés et $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, (pas necéssairement gaussienne) , et (ϕ_t) est une suite de v.a. aléatoires i.i.d avec $E(\phi_t) = \phi$ et $V(\phi_t) = \sigma_\varepsilon^2$. De plus (ϕ_t) et (ε_t) sont indépendantes.

Quand la v.a. ϕ_t est dégéneré à une valeur ϕ i.e $\phi_t = \phi$ l'équation (2.1) se réduit au processus $AR(1)$ standart (1.1).

0.3.1 Estimation dans un modèle RCA(1)

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de taille n de (2.1), $\mathcal{F}_{t-1}$ est la tribu engendré par $(X_{t-1,}X_{t-2}, ...X_1)$.

Le paramètre à estimer dans le modèle (2.1) est $\phi = E(\phi_t)$. L'éstimateur des moindres carrés conditionel $\widehat{\phi}_{cl}$ de ϕ est obtenu en minimisant la quantité

$$\sum_{t=1}^{n} (X_t - E(X_t/\mathcal{F}_{t-1}))^2$$

Notons que l'on a $E(X_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \phi X_{t-1}$.

En effet

$$\begin{aligned} E(X_t/\mathcal{F}_{t-1}) &= E(\phi_t X_{t-1} + \varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= E(\phi_t X_{t-1}/\mathcal{F}_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \end{aligned}$$

D'aprés la caracterisation de l'ésperance conditionnelle on a

$$\begin{aligned} E(X_t/\mathcal{F}_{t-1}) &= X_{t-1}E(\phi_t) \\ &= \phi X_{t-1} \end{aligned}$$

L'estimation de ϕ par la méthode des moindres carrées consiste à minimiser l'erreur quadratique

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n} (X_t - E(X_t/\mathcal{F}_{t-1}))^2 &= \sum_{t=1}^{n} (X_t - \phi X_{t-1})^2 \\ &: = H(\phi, X_1, X_2, ..., X_n) \end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \Leftrightarrow -2\sum_{t=1}^{n} (X_t - \phi X_{t-1}) X_{t-1} = 0$$

D'où la relation

$$\widehat{\phi}_{cl} := \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2} \tag{2.2}$$

Nous observons que le modéle $RCA(1)$ est un modéle hetéroscedastique (ie. la variance du bruit blanc dépend de X_t).

La variance conditionnelle $h_t = V\left(X_t/\mathcal{F}_{t-1}\right)$ depent de X_t

$$h_t = \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{2.3}$$

En effet

$$\begin{aligned} h_t &= V\left(X_t/\mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= V\left(\left(\phi_t X_{t-1} + \varepsilon_t\right)/\mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= V\left(\phi_t X_{t-1}/\mathcal{F}_{t-1}\right) + V\left(\varepsilon_t\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} h_t &= X_{t-1}^2 V\left(\phi_t\right) + V\left(\varepsilon_t\right) \\ &= \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Un meilleur estimateur de ϕ (au sens d'une erreur quadratique minimale) est l'estimateur des moindre carrés pondéré $\widehat{\phi}_{wl}$ (avec poids). On suppose que h_t est connu ,

alors $\widehat{\phi}_{wl}$ est obtenu en minimisant la quantité

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{h_t}\left(X_t - E\left(X_t/\mathcal{F}_{t-1}\right)\right)^2 &= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{h_t}\left(X_t - \phi X_{t-1}\right)^2 \\ &:= R(\phi, X_1, X_2, ..., X_n) \end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{\partial R}{\partial \phi} = 0 \Longleftrightarrow -2\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{h_t}\left(X_t - \phi X_{t-1}\right) X_{t-1} = 0$$

D'où l'estimateur $\widehat{\phi}_{wl}$

$$\widehat{\phi}_{wl} = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} h_t^{-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t^{-1}} \tag{2.4}$$

Posons $B = E\left(\phi_t^2\right)$. Pour $B < 1$ (cas stationnaire) il est bien connu (cf Nicholls&Quinn [16]) que les deux estimateurs $\widehat{\phi}_{cl}$ et $\widehat{\phi}_{wl}$ convergent en loi vers ϕ .Pour le cas explosif ($B > 1$) (cf Hwang & Basawa [13])montrent que $\widehat{\phi}_{wl}$ converge en loi vers ϕ mais $\widehat{\phi}_{cl}$ n'est pas un estimateur convergeant en probabilité.

Dans ce chapitre , nous étudions quelques proprietés asymptotiques de $\widehat{\phi}_{cl}$ et $\widehat{\phi}_{wl}$ dans le cas critique $B = 1$.

Plus précisement , on suppose que (ϕ_t)est une suite iid de v.a. de Bernoulli définie par

$$\begin{aligned} \phi_t &= \left\{ \begin{array}{ll} \theta & \text{avec probabilité } \alpha \\ -\theta & \text{avec probabilité } (1-\alpha) \end{array} \right\} \qquad (2.5) \\ \text{où } 0 &\leq \theta < \infty \text{ et } 0 < \alpha < 1 \end{aligned}$$

Par suite nous avons

$$\phi = E(\phi_t) = (2\alpha - 1)\,\theta \;\text{ et } B = E\left(\phi_t^2\right) = \theta^2, \sigma_\phi^2 = V(\phi_t) = 4\alpha\theta^2(1-\alpha)$$

Comme $B = \theta^2$, les troix cas $B < 1, B = 1$ et $B > 1$, correspondent maintenant aux cas $\theta < 1$, $\theta = 1$ et $\theta > 1$ respectivement.

En particulier , si on prenons $\theta = 1$ dans (2.5) nous obtenons le cas spécial d'un processus critique $RCA(1)$ et notre étude porte sur ce cas spécial.

Considére le modèle $AR(1)$ standard donné par (1.1).

Si $\phi = 1$ nous avons

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Ce qui donne par itération

$$X_t = \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j} \qquad (2.6)$$

Si nous prenons dans (1.1) $\phi = -1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} X_t &= -X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t - (-X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-1} + \dots - \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Donc

$$X_t = \sum_{j=0}^{t-1} (-1)^j \varepsilon_{t-j} \tag{2.7}$$

Les deux modèles (2.6) et (2.7) correspondant au cas standard d'ordre 1 et ont beaucoup d'applications dans les séries chronologiques (cf, Fuller .[7]).

Un modèle qui généralise (2.6) et (2.7) est

$$X_t = \sum_{j=0}^{t-1} \xi_{tj} \, \varepsilon_{t-j} \ , \tag{2.8}$$

où les coefficients aléatoires ξ_{tj} prennent 1 où -1.

Le modèle (2.8) peut être regardé comme une généralisation de la marche aléatoire standard avec des monteés et des déscentes correspondants

à $\xi_{tj} = 1$ ou $\xi_{tj} = -1$. Un tel modèle peut aussi convenir comme un modèle aléatoire "signal-bruit" très utilisé en sciences de technologie et dans modèles financiers.

Dans le contexte des series chronologique, le modèle (2.8) représente une version à coéfficients aléatoires du modèle $RCA\,(1)$ donné par (2.1) où la suite (ϕ_t) satisfait (2.5) avec $\theta = 1$.

Notons que pour le modèle (2.5) avec $\theta = 1$, le processus (X_t) est un processus de Markov de densité de transition (i.e. la densité conditionnelle de X_t sachant $X_{t+1} = \varkappa_{t+1}$) est donnée par

$$f_{X_t}\ (x/X_{t-1} = y) = \alpha f_\varepsilon\,(x - y) + (1 - \alpha)\, f_\varepsilon\,(x + y)$$

où f_ε est la densité de ε_t.

En effet

$$\begin{aligned}
P(X_t &\in A/X_{t-1} = y) = P(\phi_t X_{t-1} + \varepsilon_t \in A/X_{t-1} = y) \\
&= P(\varepsilon_t \in A - \phi_t y/X_{t-1} = y) \\
&= P(\varepsilon_t \in A - \phi_t y) \quad \text{par indépendance de } X_{t-1} \text{et } \varepsilon_t \text{ et } X_{t-1} \text{et } \phi_t \\
&= P(\varepsilon_t \in A - \phi_t y/\phi_t = 1)P(\phi_t = 1) + P(\varepsilon_t \in A - \phi_t y/\phi_t = -1)P(\phi_t = -1) \\
&= P(\varepsilon_t \in A - y/\phi_t = 1)\alpha + P(\varepsilon_t \in A + y/\phi_t = -1)(1 - \alpha) \\
&= \alpha P(\varepsilon_t \in A - y) + (1 - \alpha)P(\varepsilon_t \in A + y) \\
&= \alpha \int\limits_{A-y} f_\varepsilon\,(\varkappa)\, d\varkappa + (1 - \alpha) \int\limits_{A+y} f_\varepsilon\,(\varkappa)\, d\varkappa
\end{aligned}$$

(En faisant le changement de variabls $\varkappa = u - y$ on a si $\varkappa \in A - y$ alors $u \in A$.Donc

$$\begin{aligned} P(X_t &\in A/X_{t-1} = y) = \alpha \int\limits_A f_\varepsilon (u-y)\, du + (1-\alpha) \int\limits_A f_\varepsilon (u+y)\, du \\ &= \int\limits_A (\alpha f_\varepsilon (u-y) + (1-\alpha) f_\varepsilon (u+y))\, du \end{aligned}$$

D'où la formule.

Ainsi , la densité conditionnelle de X_t sachant $X_{t-1} = y$ est un mélange des densités correspondant au modèle standard $AR(1)$ dans (1.1) où $\phi = 1$ où $\phi = -1$, respectivement. Par conséquent , le modèle $RCA(1)$ de (2.5) avec $\theta = 1$ peut être vu comme un cas spécial d'une classe des modèles avec des changements de coefficients d'un AR avec régimes. Le régime se compose de deux états et il est régie par un mécanisme de v.a i.i.d.. (cf.Hamilton [10] pour des discussion sur le modèle des series chronologiques avec changements de régimes).

Une autre motivation de ces modèles est leur lien avec le modèle $ARCH$ (autorégressif conditionnelle hétéroscédastique ou processus d' Engle) . Précisement considérons un processus AR standard (Y_t) à coefficient fixe avec des erreurs hétéroscedastiques défini par

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \eta_t \quad , \eta_t = u_t \sqrt{\upsilon_t} \tag{2.9}$$

où $\phi = 2\alpha - 1$, $\upsilon_t = 4\alpha (1-\alpha) Y_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2$, et (u_t) est une suite de v.a.i.i.d . centreés réduites.

On peut vérifie que $E(Y_t/Y_{t-1})$ et $V(Y_t/Y_{t-1}) = \upsilon_t$ ont la même structure que celles du modèle $RCA(1)$ et sont donnés par

$$\begin{aligned} E(X_t/X_{t-1}) &= E(\phi_t X_{t-1} + \varepsilon_t/X_{t-1}) \\ &= E(\phi_t X_{t-1}/X_{t-1}) \\ &= X_{t-1} E(\phi_t) \\ &= \phi X_{t-1} \end{aligned}$$

Aussi

$$
\begin{aligned}
V\left(X_t/X_{t-1}\right) &= V\left(\phi_t X_{t-1}/X_{t-1}\right) + V\left(\varepsilon_t\right) \\
&= X_{t-1}^2\sigma_\phi^2 + \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
E\left(Y_t/Y_{t-1}\right) &= E\left(\phi Y_{t-1}/Y_{t-1}\right) + E\left(\eta_t\right) \\
&= \phi Y_{t-1}
\end{aligned}
$$

puisque Y_{t-1} ne dépent que de $\left(\eta_{t-1}, \eta_{t-2}, ..., \eta_1\right)$ et comme les v.a. η_t sont indépendantes , alors η_t et Y_{t-1} sont deux variables indépendantes. La va. υ_t ne dépent que de Y_{t-1} ,et $\eta_t = \sqrt{\upsilon_t}u_t$ donc u_t et υ_t sont indépendantes.

Par suite

$$
\begin{aligned}
E\left(\eta_t\right) &= E\left(\sqrt{\upsilon_t}u_t\right) \\
&= E\left(\sqrt{\upsilon_t}\right)E\left(u_t\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

car $E\left(u_t\right) = 0$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
V\left(Y_t/Y_{t-1}\right) &= V\left(\phi Y_{t-1}/Y_{t-1}\right) + V\left(\eta_t/Y_{t-1}\right) \\
&= Y_{t-1}^2 V\left(\phi\right) + V\left(\sqrt{\upsilon_t}u_t/Y_{t-1}\right) \\
&= \upsilon_t V\left(u_t\right) \\
&= \upsilon_t
\end{aligned}
$$

Pour $0 < \alpha < 1$ nous avons un modèle $RCA\left(1\right)$ et aussi $|\phi| < 1$ dans (2.9). Par conséquent , on peut utiliser l'analogie avec un modèle standard $AR\left(1\right)$ avec des erreurs conditionnelles hétéroscédastiques comme indiqueés dans (2.9) pour une autre motivation du modèle donné par (2.1) et (2.5) avec $\theta = 1$.

0.3.2 Convergence de l'estimateur des moindres carrés conditionnels

On considérons un processus autorégressif à coéfficient aléatoire $RCA\,(1)$ donné par (2.9) et (2-5) avec $\theta = 1$.

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

$\mathbf{C}_1$:les v.a.(ε_t)ont de lois symétriques i.e $\varepsilon_t \overset{d}{=} -\varepsilon_t$.

$\mathbf{C}_2$: $E\left(\varepsilon_t^4\right) < +\infty$.

Pour $\alpha = 0$ où 1 (ϕ_t sera dégénéré i.e $V\left(\phi_t\right) = 0$) alors le modèle RCA se réduit à un modèle AR .

Ainsi ,supposons que $0 < \alpha < 1$.

Quand $\theta = 1$, nous avons

$$\phi = E\left(\phi_t\right) = 2\alpha - 1 \text{ et } \sigma_\phi^2 = 4\alpha\left(1 - \alpha\right)$$

Par itération de la relation (2.1) , on obtient

$$X_t = \varepsilon_t + \phi_t\ \varepsilon_{t-1} + \phi_t\ \phi_{t-1}\varepsilon_{t-2} + ... + \left(\phi_t\ \phi_{t-1}...\phi_2\right)\varepsilon_1$$

que l'on peut écrire aussi

$$X_t = \sum_{j=0}^{t-1} \pi_{tj}\ \varepsilon_{t-j} \tag{2.10}$$

où $\pi_{tj} = \prod_{i=0}^{j-1} \phi_{t-i}$, $j = \overline{0, t-1}$ avec $\pi_{t0} = 1$.

Notons que $|\pi_{tj}| = 1 \quad \forall t$ et j.

Par conséquent , le modèle peut être regardé comme une marche aléatoire standard sans dérive à coefficients aléatoires de Bernoulli . Il peut aussi être désigné sous le nom d'un modèle $RCA\,(1)$ critique.

Pour des développement ultérieurs , on introduit une marche aléatoire standard $\left(\widetilde{X}_t, t \geqslant 0\right)$ qui se présenté sous la forme

$$\widetilde{X}_t = \widetilde{X}_{t-1} + \varepsilon_t\ , \widetilde{X}_0 = 0$$

Ainsi $\widetilde{X}_t = \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j}$

Sous condition $\mathbf{C}_1$,le processus (X_t) défini par (2.10) est étroitement lié à la marche aléatoire $\left(\widetilde{X}_t\right)$.

Pour étudier les propriétés des estimateurs nous établissons les résultats suivants.

Lemme 2 *Sous la condition $\boldsymbol{C}_1$ on a pour tout n fixé*

$$X_n \stackrel{d}{=} \widetilde{X}_n$$

Preuve: *Par la condition $\boldsymbol{C}_1$; $\forall n$, $\varepsilon_n \stackrel{d}{=} -\varepsilon_n$. Donc si ε_1 est de densité f_1 alors $-\varepsilon_1 \rightsquigarrow f_1$ de même si $\varepsilon_2 \rightsquigarrow f_2$ alors $-\varepsilon_2 \rightsquigarrow f_2$ ...si $\varepsilon_n \rightsquigarrow f_n$ alors $-\varepsilon_n \rightsquigarrow f_n$*
Comme

$$X_n = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_{nj}\, \varepsilon_{n-j} \quad où\ \xi_{nj} \ = 1 \ où \ -1$$

Donc une somme de v.a. indépendante admet comme densité le produit de convolution :

$$X_n \rightsquigarrow f_1 * f_2 * ... * f_n$$

Ainsi

$$\widetilde{X}_n \stackrel{d}{=} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n$$

Ce qui donne

$$\widetilde{X}_n \rightsquigarrow f_1 * f_2 * ... * f_n$$

Par conséquent

$$X_n \stackrel{d}{=} \widetilde{X}_n$$

D'où le lemme.
■

Comme conséquence nous avons

$$E\left(\sum_{t=1}^{n} \widetilde{X}_{t-1}^2\right) = E\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) \simeq n^2$$

D'une part, on a

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) &= \sum_{t=1}^{n} E\left(\sum_{j=1}^{t-1} \xi_{tj}\,\varepsilon_{t-j}\right)^2 \\
&= \sum_{t=1}^{n}\left[E\left(\sum_{j=1}^{t-1} \xi_{tj}^2\,\varepsilon_{t-j}^2\right) + 2\sum_{i=2}^{t-1}\sum_{j=1}^{i-1} \xi_{ti}\;\xi_{tj}\;E\left(\varepsilon_{t-i}\right)E\left(\varepsilon_{t-j}\right)\right] \quad \text{(par indép } \varepsilon_n\text{)} \\
&= \sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{t-1} \xi_{tj}^2\;E\left(\varepsilon_{t-j}^2\right), \qquad\qquad \text{par } E(\varepsilon_n)=0 \\
&= \sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{t-1} E\left(\varepsilon_{t-j}^2\right)
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{t=1}^{n} \widetilde{X}_{t-1}^2\right) &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{t-1} E\left(\varepsilon_{t-j}^2\right) \\
&= \sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{t-1} \sigma_\varepsilon^2 \\
&= \sum_{t=1}^{n} (t-1)\,\sigma_\varepsilon^2 \\
&= \frac{n\,(n-1)}{2}\sigma_\varepsilon^2\ .
\end{aligned}
$$

Alors

$$
E\left(\sum_{t=1}^{n} \widetilde{X}_{t-1}^2\right) = E\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) \simeq n^2\ , \tag{2.11}
$$

et

$$
E\left(\sum_{t=1}^{n} \widetilde{X}_{t-1}^4\right) = E\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^4\right) \simeq n^3 \tag{2.12}
$$

car

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{4}\right) &= \sum_{t=1}^{n} E\left(\sum_{j=1}^{t-1} \xi_{tj}\, \varepsilon_{t-j}\right)^{4} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \left[E\left(\sum_{j=1}^{t-1} \xi_{tj}^{4}\, \varepsilon_{t-j}^{4}\right) + 6 \sum_{i=2}^{t-1} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_{ti}^{2}\ \xi_{tj}^{2}\ E\left(\varepsilon_{t-i}^{2}\right) E\left(\varepsilon_{t-j}^{2}\right)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{t-1} E\left(\varepsilon_{t-j}^{4}\right) + 6 \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=2}^{t-1} \sum_{j=1}^{i-1} E\left(\varepsilon_{t-i}^{2}\right) E\left(\varepsilon_{t-j}^{2}\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{t=1}^{n} \widetilde{X}_{t-1}^{4}\right) &= \sum_{t=1}^{n} E\left(\sum_{j=1}^{t-1} \varepsilon_{t-j}^{4}\right) \\
&= \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{t-1} E\left(\varepsilon_{t-j}^{4}\right) + 6 \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=2}^{t-1} \sum_{j=1}^{i-1} E\left(\varepsilon_{t-i}^{2}\right) E\left(\varepsilon_{t-j}^{2}\right) \ .
\end{aligned}
$$

Si $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0,1)$ on a $E\left(\varepsilon_{t-i}^{2}\right) = \sigma_{\varepsilon}^{2}$ et $E\left(\varepsilon_{t-j}^{4}\right) = \frac{3}{2}\sigma_{\varepsilon}^{4}$.
Donc

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{t=1}^{n}\widetilde{X}_{t-1}^{4}\right) &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{t-1}\frac{3}{2}\sigma_{\varepsilon}^{4}+6\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=2}^{t-1}\sum_{j=1}^{i-1}\sigma_{\varepsilon}^{4} \\
&= \frac{3n\left(n-1\right)}{4}\sigma_{\varepsilon}^{4}+6\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=2}^{t-1}\left(i-1\right)\sigma_{\varepsilon}^{4} \\
&= \frac{3n\left(n-1\right)}{4}\sigma_{\varepsilon}^{4}+6\sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{t-2}m\ \sigma_{\varepsilon}^{4} \\
&= \frac{3n\left(n-1\right)}{4}\sigma_{\varepsilon}^{4}+6\sum_{t=1}^{n}\sum_{m=0}^{t-3}\left(m+1\right)\sigma_{\varepsilon}^{4} \\
&= \frac{3n\left(n-1\right)}{4}\sigma_{\varepsilon}^{4}+6\sigma_{\varepsilon}^{4}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t-2}l \\
&= \frac{3n\left(n-1\right)}{4}\sigma_{\varepsilon}^{4}+6\sigma_{\varepsilon}^{4}\sum_{t=1}^{n}\frac{\left(t-2\right)\left(t-3\right)}{2} \\
&= \frac{3n\left(n-1\right)}{4}\sigma_{\varepsilon}^{4}+6\sigma_{\varepsilon}^{4}\left(\sum_{t=1}^{n}t^{2}-\sum_{t=1}^{n}5t+6n\right) \\
&= \frac{3n\left(n-1\right)}{4}\sigma_{\varepsilon}^{4}+\left(\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}-5\frac{n\left(n+1\right)}{2}+6n\right) \\
&\simeq n^{3}
\end{aligned}
$$

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 3 *Sous les conditions $\boldsymbol{C}_1$ et $\boldsymbol{C}_2$, nous avons pour $i=\overline{0,n-1}$*

$$
Cov\left(X_{n}^{2},X_{n-i}^{2}\right)=Cov\left(\widetilde{X}_{n}^{2},\widetilde{X}_{n-i}^{2}\right)
$$

Preuve: *De la relation*

$$
X_{n}=\varepsilon_{n}+\phi_{n}\ \varepsilon_{n-1}+\phi_{n}\ \phi_{n-1}\varepsilon_{n-2}+...+\left(\phi_{n}\ \phi_{n-1}...\phi_{n-(i-1)}\right)X_{n-i}
$$

Nous obtenons

$$X_n^2 = \varepsilon_n^2 + \phi_n^2 \varepsilon_{n-1}^2 + \phi_n^2 \phi_{n-1}^2 \varepsilon_{n-2}^2 + ... + \left(\phi_n \ \phi_{n-1} ... \phi_{n-(i-1)}\right)^2 X_{n-i}^2 + R_n$$

où R_n *est une expression de produits de* ϕ_n , ε_n *et* X_{n-i}.
Comme $\theta = 1$, *alors*

$$X_n^2 = \varepsilon_n^2 + \varepsilon_{n-1}^2 + \varepsilon_{n-2}^2 + ... + X_{n-i}^2 + R_n$$

Par suite

$$\begin{aligned} Cov\left(X_n^2, X_{n-i}^2\right) &= Cov\left(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_{n-1}^2 + \varepsilon_{n-2}^2 + ... + X_{n-i}^2 + R_n, X_{n-i}^2\right) \\ &= E\left[\left(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_{n-1}^2 + \varepsilon_{n-2}^2 + ... + X_{n-i}^2 + R_n\right) X_{n-i}^2\right] \\ &\quad - E\left(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_{n-1}^2 + \varepsilon_{n-2}^2 + ... + X_{n-i}^2 + R_n\right) E\left(X_{n-i}^2\right) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} Cov\left(X_n^2, X_{n-i}^2\right) &= E\left(\varepsilon_n^2 X_{n-i}^2\right) + ... + E\left(X_{n-i}^4\right) + E\left(R_n X_{n-i}^2\right) - E\left(\varepsilon_n^2\right) E\left(X_{n-i}^2\right) \\ &\quad - ... - \left(E\left(X_{n-i}^2\right)\right)^2 - E\left(X_{n-i}^2\right) E\left(R_n\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$X_{n-i} = \varepsilon_{n-i} + \phi_{n-i} \ \varepsilon_{n-(i+1)} + \phi_{n-i} \ \phi_{n-(i+2)} \varepsilon_{n-(i+2)} + ... + \left(\phi_{n-i} \ \phi_{n-(i+2)} ... \phi_2\right) \varepsilon_1$$

D'où

$$X_{n-i}^2 = \varepsilon_{n-i}^2 + \varepsilon_{n-(i+1)}^2 + \varepsilon_{n-(i+2)}^2 + ... + \varepsilon_1^2 + K_n$$

où K_n *est formé de produits de* ε_n *et* ϕ_n.
Les v.a. ε_n *sont indépendantes , alors pour* $i = \overline{0, n-1}$ *on a*

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_n^2 X_{n-i}^2\right) &= E\left[\varepsilon_n^2 \left(\varepsilon_{n-i}^2 + \varepsilon_{n-(i+1)}^2 + \varepsilon_{n-(i+2)}^2 + ... + \varepsilon_1^2 + K_n\right)\right] \\ &= E\left(\varepsilon_n^2 \varepsilon_{n-i}^2\right) + E\left(\varepsilon_n^2 \ \varepsilon_{n-(i+1)}^2\right) + ... + E\left(\varepsilon_n^2 \varepsilon_1^2\right) + E\left(\varepsilon_n^2 K_n\right) \\ &= E\left(\varepsilon_n^2\right) E\left(\varepsilon_{n-i}^2\right) + E\left(\varepsilon_n^2\right) E\left(\varepsilon_{n-(i+1)}^2\right) + ... + E\left(\varepsilon_n^2\right) E\left(\varepsilon_1^2\right) + E\left(\varepsilon_n^2\right) E\left(\right. \end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_n^2\right)E\left(X_{n-i}^2\right) &= E\left(\varepsilon_n^2\right)E\left(\varepsilon_{n-i}^2+\varepsilon_{n-(i+1)}^2+\varepsilon_{n-(i+2)}^2+...+\varepsilon_1^2+K_n\right) \\ &= E\left(\varepsilon_n^2\right)E\left(\varepsilon_{n-i}^2\right)+E\left(\varepsilon_n^2\right)E\left(\varepsilon_{n-(i+1)}^2\right)+...+E\left(\varepsilon_n^2\right)E\left(\varepsilon_1^2\right)+E\left(\varepsilon\right. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$E\left(\varepsilon_n^2 X_{n-i}^2\right)-E\left(\varepsilon_n^2\right)E\left(X_{n-i}^2\right)=0$$

Le même résultat est obtenu pour ε_{n-iv}^2*et* R_n .
Donc

$$\begin{aligned} Cov\left(X_n^2,X_{n-i}^2\right) &= E\left(X_{n-i}^4\right)-\left(E\left(X_{n-i}^2\right)\right)^2 \\ &= V\left(X_{n-i}^2\right) \end{aligned}$$

Par le lemme 2-1 on a

$$V\left(X_{n-i}^2\right)=V\left(\widetilde{X}_{n-i}^2\right)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} Cov\left(X_n^2,X_{n-i}^2\right) &= V\left(\widetilde{X}_{n-i}^2\right) \\ &= E\left(\widetilde{X}_{n-i}^4\right)-\left(E\left(\widetilde{X}_{n-i}^4\right)\right)^2 \\ &= Cov\left(\widetilde{X}_n^2,\widetilde{X}_{n-i}^2\right) \end{aligned}$$

D'où le lemme. ■

Par conséquent d'après le lemme 2.2 ,on a

$$V\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) = V\left(\sum_{t=1}^{n} \widetilde{X}_{t-1}^2\right)$$

et

$$Cov\left(X_{t-1}^2, X_{t-1}^2\right) = Cov\left(\widetilde{X}_{t-1}^2, \widetilde{X}_{t-1}^2\right)$$

Par suite , pour $t = \overline{1, n}$

$$V\left(X_{t-1}^2\right) = V\left(\widetilde{X}_{t-1}^2\right)$$

Donc

$$\sum_{t=1}^{n} V\left(X_{t-1}^2\right) = \sum_{t=1}^{n} V\left(\widetilde{X}_{t-1}^2\right)$$

En particulier , sous la normalité de (ε_t) , nous avons

$$V\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) = n(n-1)\left(n^2 - n + 1\right)\sigma_\varepsilon^2 / 3$$

En effet

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) &= V\left(\sum_{t=1}^{n} \widetilde{X}_{t-1}^2\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n} V\left(\widetilde{X}_{t-1}^2\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n} V\left(\sum_{j=1}^{t-1} \varepsilon_{t-j}\right)^2 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) &= \sum_{t=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{t-1} V\left(\varepsilon_{t-j}^2\right) + 2\sum_{i=2}^{t-1}\sum_{j=1}^{i-1} V\left(\varepsilon_{t-i}\right) V\left(\varepsilon_{t-j}\right)\right] \\ &= n(n-1)\sigma_\varepsilon^4 + 2\sum_{t=1}^{n}\frac{t(t+1)}{2}\sigma_\varepsilon^4 \\ &= n(n-1)\left(n^2 - n + 1\right)\sigma_\varepsilon^2 / 3 \end{aligned}$$

Par conséquent , on a.

$$V\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2}\right) \simeq n^{4} \tag{2.13}$$

Le théorème suivant donne la convergence en probabilité de l'estimateur $\widehat{\phi}_{cl}$.

Theorème 5 *Sous les condition $\boldsymbol{C}_1$ et $\boldsymbol{C}_2$, nous avons.*

$$\widehat{\phi}_{cl} - \phi = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Preuve: De la définition de $\widehat{\phi}_{cl}$ nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{cl} - \phi &= \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2}} - \phi \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(X_t - \phi X_{t-1}\right) X_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2}} \end{aligned}$$

Nous désignons par

$$\widehat{\phi}_{cl} - \phi := \frac{I_{1n}}{I_{2n}}$$

où l'on a posé

$$I_{1n} := \sum_{t=1}^{n} \left(X_t - \phi X_{t-1}\right) X_{t-1} = \sum_{t=1}^{n} \left[\left(\phi_t - \phi\right) X_{t-1}^{2} + \varepsilon_t X_{t-1}\right]$$

et

$$I_{2n} := \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2}$$

Par suite

$$\begin{aligned} E\left(I_{1n}\right) &= E\left(\sum_{t=1}^{n}\left[\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^2+\varepsilon_t X_{t-1}\right]\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n} E\left(\left[\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^2+\varepsilon_t X_{t-1}\right]\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n} E\left(\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^2\right)+E\left(\varepsilon_t X_{t-1}\right) \end{aligned}$$

Comme X_{t-1} est une fonction de $\phi_{t-1},...,\phi_1$,et comme les v.a. ϕ_t sont indépendantes, alors ϕ_t et X_{t-1}^2 sont deux v.a. indépendantes.
Par conséquent

$$\begin{aligned} E\left(\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^2\right) &= E\left(\phi_t-\phi\right)E\left(X_{t-1}^2\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même , X_{t-1}ne dépend que de $\varepsilon_{t-1},...,\varepsilon_1$,et comme les v.a. ε_t sont indépendantes, alors ε_t et X_{t-1}sont deux v.a. indépendantes.
Donc

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_t X_{t-1}\right) &= E\left(\varepsilon_t\right)E\left(X_{t-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Enfin

$$E\left(I_{1n}\right)=0$$

D'une part, on

$$\begin{aligned} E\left(I_{1n}/\mathcal{F}_{t-1}\right) &= E\left(\sum_{t=1}^{n}\left[\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^2+\varepsilon_t X_{t-1}\right]/\mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n} E\left(\left[\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^2+\varepsilon_t X_{t-1}\right]/\mathcal{F}_{t-1}\right) \end{aligned}$$

et des propriétés de l'éspérance conditionnelle nous en déduisons

$$\begin{aligned} E\left(I_{1n}/\digamma_{t-1}\right) &= \sum_{t=1}^{n}\left[X_{t-1}^{2}E\left(\phi_t-\phi\right)+X_{t-1}E\left(\varepsilon_t\right)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} E\left(I_{1n}^{2}\right) &= E\left(\sum_{t=1}^{n}\left[\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^{2}+\varepsilon_t X_{t-1}\right]\right)^{2} \\ &= E\left[\sum_{t=1}^{n}Y_t^{2}+2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}Y_iY_j\right] \\ &= \sum_{t=1}^{n}E\left(Y_t^{2}\right)+2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}E\left(Y_iY_j\right) \end{aligned}$$

où on a posé

$$Y_t := \left[\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^{2}+\varepsilon_t X_{t-1}\right]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E\left(Y_iY_j\right) &= E\left(\left[\left(\phi_i-\phi\right)X_{i-1}^{2}+\varepsilon_i X_{i-1}\right]\left[\left(\phi_j-\phi\right)X_{j-1}^{2}+\varepsilon_j X_{j-1}\right]\right) \\ &= E\left(\left(\phi_i-\phi\right)\left(\phi_j-\phi\right)X_{i-1}^{2}X_{j-1}^{2}\right)+E\left(\left(\phi_i-\phi\right)X_{i-1}^{2}\varepsilon_j X_{j-1}\right) \\ &\quad +E\left(\varepsilon_i X_{i-1}\left(\phi_j-\phi\right)X_{j-1}^{2}\right)+E\left(\varepsilon_i X_{i-1}\varepsilon_j X_{j-1}\right) \end{aligned}$$

Aussi X_{i-1} ne dépent que de $\phi_{i-1},...,\phi_2$,et comme les v.a. ϕ_i sont indépendantes alors ϕ_i et X_{i-1}^2sont indépendantes. Pour $j<i$ on a X_{j-1} fonction de $\phi_{j-1},...,\phi_2$ et donc ϕ_i et X_{j-1}^2 sont indépendantes.
Par suite

$$\begin{aligned} E\left(\left(\phi_i-\phi\right)\left(\phi_j-\phi\right)X_{i-1}^{2}X_{j-1}^{2}\right) &= E\left(\phi_i-\phi\right)E\left(\left(\phi_j-\phi\right)X_{i-1}^{2}X_{j-1}^{2}\right) \\ &= 0 \qquad \text{car} \quad E\left(\phi_i\right)=\phi, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E\left(\left(\phi_i-\phi\right)X_{i-1}^2\varepsilon_jX_{j-1}\right) &= E\left(\phi_i-\phi\right)E\left(X_{i-1}^2\varepsilon_jX_{j-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même X_{j-1} ne dépent que de $\varepsilon_{j-1},...,\varepsilon_1$,et comme les ε_i sont indépendantes donc pour $j<i$; ε_i et X_{j-1} sont indépendantes .
Donc

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_iX_{i-1}\left(\phi_j-\phi\right)X_{j-1}^2\right) &= E\left(\varepsilon_i\right)E\left(X_{i-1}\left(\phi_j-\phi\right)X_{j-1}^2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_iX_{i-1}\varepsilon_jX_{j-1}\right) &= E\left(\varepsilon_i\right)E\left(X_{i-1}\varepsilon_jX_{j-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$E\left(\left[\left(\phi_i-\phi\right)X_{i-1}^2+\varepsilon_iX_{i-1}\right]\left[\left(\phi_j-\phi\right)X_{j-1}^2+\varepsilon_jX_{j-1}\right]\right)=0$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} E\left(I_{1n}^2\right) &= \sum_{t=1}^{n}E\left(\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^2+\varepsilon_tX_{t-1}\right)^2 \\ &= \sum_{t=1}^{n}E\left(\left(\phi_t-\phi\right)^2X_{t-1}^4+2\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^3\varepsilon_t+\varepsilon_t^2X_{t-1}^2\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n}E\left(\left(\phi_t-\phi\right)^2X_{t-1}^4\right)+2\sum_{t=1}^{n}E\left(\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^3\varepsilon_t\right)+\sum_{t=1}^{n}E\left(\varepsilon_t^2X_{t-1}^2\right) \\ &= \sigma_\phi^2\sum_{t=1}^{n}E\left(X_{t-1}^4\right)+\sigma_\varepsilon^2\sum_{t=1}^{n}E\left(X_{t-1}^2\right) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Finalement nous avons $E\left(I_{1n}/\mathcal{F}_{t-1}\right)=0$ et $E\left(I_{1n}^2\right)<\infty$ ce qui montre que la suite $\left(I_{1n}\right)_n$est une différence de martingales de carré-intégrable .
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a , pour tout $M>0$

$$P\left(\left|I_{1n}\right|>M\right)\leqslant\frac{E\left(I_{1n}^2\right)}{M^2}$$

Or on a montré que

$$E\left(I_{1n}^2\right)=\sigma_\phi^2E\left(\sum_{t=1}^nX_{t-1}^4\right)+\sigma_\varepsilon^2E\left(\sum_{t=1}^nX_{t-1}^2\right)$$

Donc

$$P\left(\left|I_{1n}\right|>M\right)\leqslant\left[\sigma_\phi^2E\left(\sum_{t=1}^nX_{t-1}^4\right)+\sigma_\varepsilon^2E\left(\sum_{t=1}^nX_{t-1}^2\right)\right]\diagup M^2$$

En utilisant le fait que $E\left(\sum_{t=1}^nX_{t-1}^4\right)\simeq n^3$ et $E\left(\sum_{t=1}^nX_{t-1}^2\right)\simeq n^2$ par (2.12) et (2.11) on en déduit que

$$\begin{aligned}P\left(\left|I_{1n}\right|>M\right)&\leqslant\left(\sigma_\phi^2n^3+\sigma_\varepsilon^2n^2\diagup M^2\right)\\&\leqslant\frac{n^3}{M^2}\left(\sigma_\phi^2+\frac{\sigma_\varepsilon^2}{n}\right)\end{aligned}$$

en prenant $M=n^2$on obtient

$$P\left(n^{-3/2}\left|I_{1n}\right|>n^{1/2}\right)\leqslant\frac{1}{n}\left(\sigma_\phi^2+\frac{\sigma_\varepsilon^2}{n}\right)$$

Par suite

$$n^{-3/2}I_{1n}=O_p\left(1\right)\tag{2.14}$$

De même pour I_{2n}, on a pour tout $m>0$

$$P\left(\left|I_{2n}\right|>m\right)\leqslant\frac{E\left(I_{2n}^2\right)}{m^2}$$

Par définition nous avons

$$
\begin{aligned}
I_{2n}^2 &= \left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right)^2 \\
&= \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^4 + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} X_{n-i}^2 X_{n-j}^2
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
E\left(I_{2n}^2\right) &= \sum_{t=1}^{n} E\left(X_{t-1}^4\right) + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} E\left(X_{n-i}^2\right) E\left(X_{n-j}^2\right) \\
&= \sum_{t=1}^{n} V\left(X_{t-1}^2\right) + \sum_{t=1}^{n}\left(E\left(X_{t-1}^2\right)\right)^2 + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} E\left(X_{n-i}^2\right) E\left(X_{n-j}^2\right) \\
&\leqslant V\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) + \left(\sum_{t=1}^{n} E\left(X_{t-1}^2\right)\right)^2 \\
&\quad +2E\left(\sum_{i=2}^{n} X_{n-i}^2\right) E\left(\sum_{j=1}^{i-1} X_{n-j}^2\right)
\end{aligned}
$$

En utilisant les faits que $V\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) \simeq n^4$ et $E\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) \simeq n^2$ par (2.13) et (2.12) nous arrivons à

$$
P\left(|I_{2n}| > m\right) \leqslant \frac{4n^4}{m^2}
$$

On choisit $m = n^{5/2}$, ce qui donne

$$
P\left(n^{-2}|I_{2n}| > n^{1/2}\right) \leqslant \frac{4n^4}{n^5} = \frac{4}{n}
$$

et donc

$$
n^{-2} I_{2n} = O_p(1) \tag{2.15}
$$

Nous avons le résultat en loi suivant pour la v.a. I_{2n}

$$n^{-2} I_{2n} \Longrightarrow \sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 [W(r)]^2 \, dr \tag{2.16}$$

où $(W(r), 0 \leq r \leq 1)$ est un mouvement brownien standard.
En effet le résultat (2.16) est une application du théorème central limite fonctionnel de Donsker (cf.Préliminaires). Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 &= \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{t-2} \pi_{t-1,j} \ \varepsilon_{t-1-j} \right)^2 \\
&= \sum_{t=1}^{n} \left[\sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon_{t-1-j}^2 + 2 \sum_{i=2}^{t-2} \sum_{j=1}^{i-1} \pi_{t-1,i} \ \pi_{t-1,j} \ \varepsilon_{t-1-i} \ \varepsilon_{t-1-j} \right] \\
&= \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon_{t-1-j}^2 + 2 \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=2}^{t-2} \sum_{j=1}^{i-1} \pi_{t-1,i} \ \pi_{t-1,j} \ \varepsilon_{t-1-i} \ \varepsilon_{t-1-j}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 &= \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{t-1} \varepsilon_i^2 + 2 \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=2}^{t-2} \sum_{j=1}^{i-1} \pi_{t-1,i} \ \pi_{t-1,j} \ \varepsilon_{t-1-i} \ \varepsilon_{t-1-j} \\
&= \sum_{t=1}^{n} (n-t) \, \varepsilon_t^2 + 2 \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=2}^{t-2} \sum_{j=1}^{i-1} \pi_{t-1,i} \ \pi_{t-1,j} \ \varepsilon_{t-1-i} \ \varepsilon_{t-1-j}
\end{aligned}$$

Notons que , pour $i = \overline{2, t-1}$, $j = \overline{1, i-1}$ on a

$$\pi_{t-1,i} \pi_{t-1,j} = \pi_{t-1-j, i-j} \ .$$

et rappellons que $\pi_{tj} = \prod_{i=0}^{j-1} \phi_{t-i}$ qui représente un produit de $(j-i)$ v.a. iid prennent les valeurs 1 où -1.

Comme les $\pi_{t-1-j,i-j}$ et ε_t sont indépendantes et en utilisant la condition $\mathbf{C}_1$ on peut choisir un processus$AR(1)$ standard (X_t^*) défini par $X_t^* = X_{t-1}^* + \varepsilon_t^*$, $X_0^* = 0$ avec $(\varepsilon_1^*, ..., \varepsilon_n^*) \stackrel{d}{=} (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$.

Donc on peut écrire

$$\sum_{t=1}^{n}(n-t)\,\varepsilon_t^2+2\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=2}^{t-2}\sum_{j=1}^{i-1}\pi_{t-1-j,i-j}\ \varepsilon_{t-1-i}\ \varepsilon_{t-1-j}$$
$$\overset{d}{=}\sum_{t=1}^{n}(n-t)\,\varepsilon_t^{*2}+2\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=2}^{t-2}\sum_{j=1}^{i-1}\varepsilon_{t-1-i}^{*}\ \varepsilon_{t-1-j}^{*}$$

Par conséquent

$$\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^{2}\overset{d}{=}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^{*2}$$

On pose

$$S_n=\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^{*}=X_n^{*}$$

et

$$Z_n\,(t)=\frac{1}{\sigma_\varepsilon\sqrt{n}}\left(X_{[nt]}^{*}-(nt-[nt])\,\varepsilon_{[nt]+1}^{*}\right)$$

D'une part on a

$$\begin{aligned}
A_n\quad &:\quad =n^{-2}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^{*2}-\sigma_\varepsilon^2\int_0^1 Z_n^2\,(t)\,dt\\
&=\quad n^{-2}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^{*2}-\sigma_\varepsilon^2\int_0^1\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2 n}\left(X_{[nt]}^{*}-(nt-[nt])\,\varepsilon_{[nt]+1}^{*}\right)^2dt\\
&=\quad n^{-2}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^{*2}-n^{-1}\int_0^1 X_{[nt]}^{*2}dt+2n^{-1}\int_0^1 X_{[nt]}^{*}\,(nt-[nt])\,\varepsilon_{[nt]+1}^{*}dt\\
&\quad\ +n^{-1}\int_0^1(nt-[nt])^2\,\varepsilon_{[nt]+1}^{*2}dt\\
&=\quad :A_{1,n}+A_{2,n}+A_{3,n}+A_{4,n}
\end{aligned}$$

Par les propriétés de l'intégrale de Riemenn on a

$$A_{2,n} = \frac{1}{n}\int_0^1 X^{*2}_{[nt]}dt = \frac{1}{n}\lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X^{*2}_{\left[\frac{n}{m}i\right]}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
|A_{3,n}| \quad : \quad &= \left|\frac{2}{n}\int_0^1 X^{*}_{[nt]}\left(nt-[nt]\right)\varepsilon^{*}_{[nt]+1}dt\right| \\
&= \frac{2}{n}\left|\lim_{m\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m}X^{*}_{\left[n\frac{i}{m}\right]}\left(n\frac{i}{m}-\left[n\frac{i}{m}\right]\right)\varepsilon^{*}_{\left[n\frac{i}{m}\right]+1}\right| \\
&\leq \frac{2}{n}\lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|X^{*}_{\left[n\frac{i}{m}\right]}\varepsilon^{*}_{\left[n\frac{i}{m}\right]+1}\right| \\
&\leq O_P(\frac{1}{n}) \qquad \text{(loi des grands nombres)}\ .
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
A_{4,n} \quad : \quad &= \frac{1}{n}\int_0^1\left(nt-[nt]\right)^2\varepsilon^{*2}_{[nt]+1}dt = \frac{1}{n}\lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(n\frac{i}{m}-\left[n\frac{i}{m}\right]\right)^2\varepsilon^{*^2}_{\left[n\frac{i}{m}\right]+1} \\
&\leq \frac{1}{n}\lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^{*2}_{\left[n\frac{i}{m}\right]+1} \\
&\leq O_P(\frac{1}{n}) \quad \text{(loi des grands nombres)}\ .
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A_n &= n^{-2}\sum_{t=1}^{n}X^{*2}_{t-1} - \lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{n}X^{*2}_{i} + O_P(\frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X^{*2}_{t-1} - \lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X^{*2}_{i}\right) + O_P(\frac{1}{n}) \\
&= o_p\left(1\right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé la forte des grands nombres pour la marche aléatoire (X_t^*) (martingale) pour avoir $\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n} X_{t-1}^{*2} \xrightarrow{ps} E\left(X_1^{*2}\right) = \sigma_\varepsilon^2$.et par suite $\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n} X_{t-1}^{*2} - \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} X_i^{*2}$ est bornée.
En fin nous en déduisons que

$$n^{-2}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{*2} = \sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 Z_n^2(t)\,dt + o_p(1)$$

Le théorème central limite fonctionnel de Donsker donne

$$\sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 Z_n^2(t)\,dt \Longrightarrow \sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 \left[W(t)\right]^2 dt$$

Comme

$$n^{-2}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2} \overset{d}{=} n^{-2}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{*2}$$

nous aboutissons au résultat recherché

$$n^{-2} I_{2n} = n^{-2}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 \left[W(r)\right]^2 dr$$

Comme conséquence on en tire

$$I_{2n} \nrightarrow 0$$

Finallement en regroupant (2.14) et (2.15) ,(2.16) on obtient

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\widehat{\phi}_{cl} - \phi\right) &= \sqrt{n}\frac{I_{1n}}{I_{2n}} \\ &= \frac{n^{-3/2} I_{1n}}{n^{-2} I_{2n}} \\ &= O_p(1)\end{aligned}$$

Le théorème est démontré. ■

0.3.3 Normalité asymptotique des éstimateurs des moidres carrés ponderées

Rapellons que l'éstimateur des moindres carrés ponderés est définie dans (2.4) par

$$\widehat{\phi}_{wl} = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} h_t^{-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t^{-1}}$$

On prend $\theta = 1$ dans (2.5) , et on suppose que la variance conditionnel h_t est connu.

L'estimateur $\widehat{\phi}_{wl}$ est désigné sous le nom d''estimateur de maximum de vraisemblance approchée du paramètre ϕ avec h_t connu.

On a

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{wl} - \phi &= \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} h_t^{-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t^{-1}} - \phi \\ &= \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} - \phi \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \right) h_t^{-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t^{-1}} \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit comme

$$\widehat{\phi}_{wl} - \phi := \frac{J_{1n}}{J_{2n}} \tag{2.17}$$

où

$$J_{1n} = \sum_{t=1}^{n} \left[(\phi_t - \phi) X_{t-1}^2 + \varepsilon_t X_{t-1} \right] h_t^{-1}$$

et

$$J_{2n} = \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t^{-1}$$

Lemme 4 *La suite* $(J_{1n})_n$ *est une différence de martingales de carré-intégrable et* $V\left(J_{1n}/\mathcal{F}_{t-1}\right) = J_{2n}$.

Preuve: Nous avons

$$
\begin{aligned}
E\left(J_{1n}\right) &= \sum_{t=1}^{n} E\left(\left(\phi_t-\phi\right)\frac{X_{t-1}^2}{h_t}+\varepsilon_t\frac{X_{t-1}}{h_t}\right) \\
&= \sum_{t=1}^{n}\left[\left(E\left(\phi_t\right)-\phi\right)E\left(\frac{X_{t-1}^2}{h_t}\right)+E\left(\varepsilon_t\right)E\left(\frac{X_{t-1}}{h_t}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

puisque $\frac{X_{t-1}^2}{h_t}$ est une fonction de $\phi_{t-1},...,\phi_1$ et $\varepsilon_{t-1},...,\varepsilon_1$ et donc $\frac{X_{t-1}^2}{h_t}$et ϕ_t sont indépendantes et de même $\frac{X_{t-1}^2}{h_t}$, ε_t sont indépendantes.
D'une part, on a

$$
\begin{aligned}
E\left(J_{1n}/\mathcal{F}_{t-1}\right) &= E\left(\sum_{t=1}^{n}\left[\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^2h_t^{-1}+\varepsilon_tX_{t-1}h_t^{-1}\right]/\mathcal{F}_{t-1}\right) \\
&= \sum_{t=1}^{n}\left[E\left(\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^2h_t^{-1}/\mathcal{F}_{t-1}\right)+E\left(\varepsilon_tX_{t-1}h_t^{-1}/\mathcal{F}_{t-1}\right)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n}\left[X_{t-1}^2h_t^{-1}E\left(\phi_t-\phi\right)+X_{t-1}h_t^{-1}E\left(\varepsilon_t\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
E\left(J_{1n}^2\right) &= E\left(\sum_{t=1}^{n}\left[\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^2h_t^{-1}+\varepsilon_tX_{t-1}h_t^{-1}\right]\right)^2 \\
&= E\left[\sum_{t=1}^{n}Z_t^2+2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}Z_iZ_j\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n}E\left(Z_t^2\right)+2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}E\left(Z_iZ_j\right)
\end{aligned}
$$

où

$$Z_t = \left[\left(\phi_t - \phi \right) X_{t-1}^2 h_t^{-1} + \varepsilon_t X_{t-1} h_t^{-1} \right]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E\left(Z_i Z_j\right) &= E\left(\left(\phi_i - \phi\right)\left(\phi_j - \phi\right) X_{i-1}^2 h_i^{-1} X_{j-1}^2 h_j^{-1}\right) + E\left(\left(\phi_i - \phi\right) X_{i-1}^2 h_i^{-1} \varepsilon_j X_{j-1} h_j^{-1}\right) \\ &+ E\left(\varepsilon_i X_{i-1} h_i^{-1}\left(\phi_j - \phi\right) X_{j-1}^2 h_j^{-1}\right) + E\left(\varepsilon_i X_{i-1} h_i^{-1} \varepsilon_j X_{j-1} h_j^{-1}\right) \end{aligned}$$

Or $X_{i-1}h_i^{-1}$ ne dépent que de $\phi_{i-1}, ..., \phi_1$,et les (ϕ_i) étant indépendantes donc les ϕ_i et $X_{i-1}h_i^{-1}$ sont indépendantes et aussi pour $j < i$, on a $X_{j-1}h_j^{-1}$ est fonction de $\phi_{j-1}, ..., \phi_1$ et par suite ϕ_i et $X_{j-1}h_j^{-1}$ sont indépendantes.
Ce qui donne

$$\begin{aligned} E\left(\left(\phi_i - \phi\right)\left(\phi_j - \phi\right) X_{i-1}^2 h_i^{-1} X_{j-1}^2 h_j^{-1}\right) &= E\left(\phi_i - \phi\right) E\left(\left(\phi_j - \phi\right) X_{i-1}^2 h_i^{-1} X_{j-1}^2 h_j^{-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$E\left(\left(\phi_i - \phi\right) X_{i-1}^2 h_i^{-1} \varepsilon_j X_{j-1} h_j^{-1}\right) = E\left(\phi_i - \phi\right) E\left(X_{i-1}^2 h_i^{-1} \varepsilon_j X_{j-1} h_j^{-1}\right)$$

De même $X_{j-1}h_j^{-1}$ dépend de $\varepsilon_{j-1}, ..., \varepsilon_1$ et pour $j < i$ *on* a ε_i et $X_{j-1}h_j^{-1}$ indépendantes
donc

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_i X_{i-1} h_i^{-1}\left(\phi_j - \phi\right) X_{j-1}^2 h_j^{-1}\right) &= E\left(\varepsilon_i\right) E\left(X_{i-1} h_i^{-1}\left(\phi_j - \phi\right) X_{j-1}^2 h_j^{-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_i X_{i-1} h_i^{-1} \varepsilon_j X_{j-1} h_j^{-1}\right) &= E\left(\varepsilon_i\right) E\left(X_{i-1} h_i^{-1} \varepsilon_j X_{j-1} h_j^{-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
E\left(J_{1n}^{2}\right) &= \sum_{t=1}^{n} E\left[\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^{2}h_t^{-1}+\varepsilon_t X_{t-1}h_t^{-1}\right]^{2} \\
&= \sum_{t=1}^{n} E\left[\left(\phi_t-\phi\right)^{2}X_{t-1}^{4}h_t^{-2}\right]+2\sum_{t=1}^{n} E\left[\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^{3}h_t^{-2}\varepsilon_t\right]+\sum_{t=1}^{n} E\left[\varepsilon_t^{2}X_{t-1}^{2}h_t^{-2}\right] \\
&= \sigma_\phi^{2}\sum_{t=1}^{n} E\left[X_{t-1}^{4}h_t^{-2}\right]+\sigma_\varepsilon^{2}\sum_{t=1}^{n} E\left[X_{t-1}^{2}h_t^{-2}\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n} E\left[X_{t-1}^{2}h_t^{-2}\left(\sigma_\phi^{2}X_{t-1}^{2}+\sigma_\varepsilon^{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
E\left(J_{1n}^{2}\right) &= E\left[\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2}h_t^{-1}\right] \\
&= E\left[J_{2n}\right] \\
&< +\infty
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
V\left(J_{1n}/F_{t-1}\right) &= \sum_{t=1}^{n}\left[V\left(\left(\phi_t-\phi\right)X_{t-1}^{2}h_t^{-1}/F_{t-1}\right)+V\left(\varepsilon_t X_{t-1}h_t^{-1}/F_{t-1}\right)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n}\left[X_{t-1}^{4}h_t^{-2}V\left(\phi_t\right)+X_{t-1}^{2}h_t^{-2}V\left(\varepsilon_t\right)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2}h_t^{-2}\left(\sigma_\phi^{2}+X_{t-1}^{2}\sigma_\varepsilon^{2}\right) \\
&= \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2}h_t^{-1} \\
&= J_{2n}
\end{aligned}
$$

D'où le résultat .

■

Lemme 5 *Nous avons*

$$\frac{X_{n-1}^2}{h_n} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \sigma_\phi^{-2} \quad , \quad \frac{X_{n-1}^2}{h_n} \xrightarrow{P} \sigma_\phi^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E(X_{t-1}^2 h_t^{-1}) \longrightarrow \sigma_\phi^{-2} \ .$$

Preuve: Par le théorème central limite on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t \Longrightarrow N\left(0,\ \sigma_\varepsilon^2\right)$$

Par le lemme 1

$$X_n \overset{d}{=} \widetilde{X}_n$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}}X_n \Longrightarrow N\left(0,\ \sigma_\varepsilon^2\right)$$

où

$$\frac{X_n}{\sigma_\varepsilon\sqrt{n}} \Longrightarrow N(0,1)$$

Ce qui donne

$$n^{-1}X_n^2 \Longrightarrow \sigma_\varepsilon^2\chi_1^2 \tag{2.19}$$

où χ_1^2 une v.a. de loi du Khi-deux à un degré de liberté.
On en déduit de la relation $h_n = \sigma_\phi^2 X_{n-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2$ et de (2.19) que

$$\frac{h_n}{n-1} = \sigma_\phi^2\frac{X_{n-1}^2}{n-1} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n-1} \Longrightarrow \sigma_\phi^2\ \sigma_\varepsilon^2\chi_1^2$$

La v.a. $\frac{X_{n-1}^2}{h_n}$ est bornée par $\sigma_\phi^{-2} = [4\alpha(1-\alpha)]^{-1}$ en effet

$$\begin{aligned} \frac{X_{n-1}^2}{h_n} &= \frac{X_{n-1}^2}{\sigma_\phi^2 X_{n-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2} \\ &\leqslant \frac{X_{n-1}^2}{\sigma_\phi^2 X_{n-1}^2} = \sigma_\phi^{-2} \end{aligned}$$

Par suite de

$$\frac{X_{n-1}^2}{h_n} = \frac{\frac{X_{n-1}^2}{n-1}}{\frac{h_n}{n-1}}$$

et comme $\frac{X_{n-1}^2}{n-1} \Longrightarrow \sigma_\varepsilon^2 \chi_1^2$ et $\frac{h_n}{n-1} \Longrightarrow \sigma_\phi^2\ \sigma_\varepsilon^2 \chi_1^2$ on en déduit que

$$\frac{X_{n-1}^2}{h_n} \Longrightarrow \sigma_\phi^{-2}$$

et aussi en probabilité

$$\frac{X_{n-1}^2}{h_n} \xrightarrow{P} \sigma_\phi^{-2}.$$

La v.a. $\frac{X_{n-1}^2}{h_n}$ est bornée par σ_ϕ^{-2} on a donc par le théorème de la convergence domineé

$$\frac{X_{n-1}^2}{h_n} \xrightarrow{L_1} \sigma_\phi^{-2}$$

Par un lemme de Toeplitz on a

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t^{-1} \xrightarrow{P} \sigma_\phi^{-2} \tag{2.20}$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E(X_{t-1}^2 h_t^{-1}) \longrightarrow \sigma_\phi^{-2} \tag{2.21}$$

D'où le résultat. ■

Le thèorème suivant montre la normalité asymptotique de l'éstimateur $\widehat{\phi}_{wl}$.

Theorème 6 *Sous les conditions* $\boldsymbol{C}_1$ *et* $\boldsymbol{C}_2$ *, nous avons*

$$\sqrt{J_{2n}}\left(\widehat{\phi}_{wl} - \phi\right) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} N\left(0,1\right) \ .$$

Preuve: Par la condition $\mathbf{C}_2$: $E\left(\varepsilon_t^4\right) < \infty$, nous allons montrer la condition de Liapounov (cf. Préliminaires) pour $J_{1n} = \sum_{t=1}^{n} D_t$: pour $\delta > 0$

$$\left(\frac{1}{V\left(J_{1n}\right)}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \sum_{t=1}^{n} E\left|D_t\right|^{2+\delta} = o\left(1\right)$$

où $D_t = \left[\left(\phi_t - \phi\right) X_{t-1}^2 + \varepsilon_t X_{t-1}\right] h_t^{-1}$ est une différence de martingale.
Par $\left|X_{t-1}^2 h_t^{-1}\right| \leq \sigma_\phi^{-2} = \left[4\alpha\left(1-\alpha\right)\right]^{-1}$on a

$$\begin{aligned} V\left(J_{1n}\right) &= E\left[J_{2n}\right] \\ &= \sum_{t=1}^{n} E\left[X_{t-1}^2 h_t^{-1}\right] \\ &= n\ \sigma_\phi^2 \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \left|D_t\right| &= \left|\left(\phi_t - \phi\right) X_{t-1}^2 h_t^{-1} + \varepsilon_t X_{t-1} h_t^{-1}\right| \\ &\leq \left|\phi_t - \phi\right| \left|X_{t-1}^2 h_t^{-1}\right| + \left|\varepsilon_t h_t^{-\frac{1}{2}}\right| \left|X_{t-1} h_t^{-\frac{1}{2}}\right| \\ &\leq \left[4\alpha\left(1-\alpha\right)\right]^{-1} \left|\phi_t - \phi\right| + \left|\varepsilon_t h_t^{-\frac{1}{2}}\right| \left|X_{t-1} h_t^{-\frac{1}{2}}\right| \end{aligned}$$

D'autre part

$$\left|\phi_t - \phi\right| \leq M$$

alors

$$\left[4\alpha\left(1-\alpha\right)\right]^{-1} \left|\phi_t - \phi\right| \leq M_1$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \left|D_t\right|^{2+\delta} &\leq \left(M_1 + \left|\varepsilon_t h_t^{-\frac{1}{2}}\right| \left|X_{t-1} h_t^{-\frac{1}{2}}\right|\right)^{2+\delta} \\ &\leq 2^{2+\delta-1} \left(M_1^{2+\delta} + \left|\varepsilon_t h_t^{-\frac{1}{2}}\right|^{2+\delta} \left|X_{t-1} h_t^{-\frac{1}{2}}\right|^{2+\delta}\right) \\ &\leq 2^{\delta+1} \left(M_1^{2+\delta} + \left|\frac{X_{t-1}^2}{h_t}\right|^{\frac{2+\delta}{2}} \left|\frac{1}{h_t^{\frac{2+\delta}{2}}}\right| \left|\varepsilon_t\right|^{2+\delta}\right) \end{aligned}$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
|D_t|^{2+\delta} &\leq 2^{\delta+1}\left(M_1^{2+\delta}+\left(\sigma_\varepsilon^{-2}\right)^{\frac{2+\delta}{2}}\left(\sigma_\phi^{-2}\right)^{\frac{2+\delta}{2}}|\varepsilon_t|^{2+\delta}\right) \\
&\leq K_1+K_2\,|\varepsilon_t|^{2+\delta}
\end{aligned}
$$

Par conséquent $\left(E\,|\varepsilon_t|^{2+\delta}=m_4\right)$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{V(J_{1n})}\right)^{\frac{2+\delta}{2}}\sum_{t=1}^{n}E\,|D_t|^{2+\delta} &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2+\delta}\sum_{t=1}^{n}\left(K_1+K_2E\,|\varepsilon_t|^{2+\delta}\right) \\
&\leq \left(\frac{1}{\sigma_\phi\sqrt{n}}\right)^{2+\delta}[nK_1+nK_2m_4] \\
&\leq \frac{K_1+K_2m_4}{n^{\frac{\delta}{2}}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0
\end{aligned}
$$

où encore

$$
\left(\frac{1}{\sigma_\phi\sqrt{n}}\right)^{2+\delta}\sum_{t=1}^{n}E\,|D_t|^{2+\delta}=o(1)
$$

Ainsi la condition de Lyapounov est vérifiée.
Donc nous avons le théorème central limite de Liapounov

$$
\frac{J_{1n}-E(J_{1n})}{\sqrt{V(J_{1n})}}=\frac{J_{1n}}{\sqrt{E(J_{2n})}}\Longrightarrow N(0,1)
$$

En outre (2.20) et (2.21) impliquent

$$
\frac{J_{2n}}{E(J_{2n})}\xrightarrow{P}1
$$

Par conséquent de

$$
\begin{aligned}
\sqrt{J_{2n}}\left(\widehat{\phi}_{wl}-\phi\right) &= \sqrt{J_{2n}}\frac{J_{1n}}{J_{2n}} \\
&= \sqrt{J_{2n}}\frac{\frac{J_{1n}}{\sqrt{E(J_{2n})}}}{\frac{J_{2n}}{\sqrt{E(J_{2n})}}} \\
&= \frac{\frac{J_{1n}}{\sqrt{E(J_{2n})}}}{\frac{\sqrt{J_{2n}}}{\sqrt{E(J_{2n})}}}
\end{aligned}
$$

nous avons

$$\sqrt{J_{2n}}\left(\widehat{\phi}_{wl}-\phi\right)=\frac{\frac{J_{1n}}{\sqrt{E(J_{2n})}}}{\sqrt{\frac{J_{2n}}{E(J_{2n})}}}\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N\left(0,1\right)$$

■

Dans cette partie nous considérons maintenant le cas où σ_ϕ^2 et σ_ε^2 sont inconnus dans l'expression de h_t.

Soit $\widehat{\sigma}_\phi^2$ et $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ des estimateurs convergeants de σ_ϕ^2 et σ_ε^2 respectivement. Nous définissons l'estimateur

$$\widetilde{\phi}_n=\frac{\sum_{t=1}^{n}X_tX_{t-1}\ \widehat{h}_t^{-1}}{\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2\ \widehat{h}_t^{-1}} \tag{2.22}$$

où

$$\widehat{h}_t=\widehat{\sigma}_\phi^2X_{t-1}^2+\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$$

Theorème 7 *Sous les conditions* $\boldsymbol{C}_1$ *et* $\boldsymbol{C}_2$ *, nous avons*

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2\widehat{h}_t^{-1}}\left(\widetilde{\phi}_n-\phi\right)\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N\left(0,1\right)$$

Preuve: Comme $\left|h_t^{-1}\right|<\sigma_\varepsilon^{-2}$ on a

$$\begin{aligned}\sup_{1\leq\ t\ \leq n}\left|\widehat{h}_t^{-1}-h_t^{-1}\right| &= \sup_{1\leq\ t\ \leq n}\left|\frac{h_t-\widehat{h}_t}{\widehat{h}_th_t}\right|\\ &= \sup_{1\leq\ t\ \leq n}\left|\frac{h_t-\widehat{h}_t}{\widehat{h}_th_t}\right|\\ &= \sup_{1\leq\ t\ \leq n}\left|\left(\widehat{h}_t-h_t\right)h_t^{-1}\widehat{h}_t^{-1}\right|\end{aligned}$$

D'autre part, $\left|\widehat{h}_t^{-1}\right| = \left|\frac{1}{\widehat{\sigma}_\phi^2 X_{t-1}^2 + \widehat{\sigma}_\varepsilon^2}\right| < \frac{1}{\widehat{\sigma}_\varepsilon^2} = \widehat{\sigma}_\varepsilon^{-2}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\sup_{1\leq\ t\ \leq n}\left|\widehat{h}_t^{-1} - h_t^{-1}\right| &\leq \sigma_\varepsilon^{-2}\sup_{1\leq\ t\ \leq n}\left|\left(\widehat{h}_t - h_t\right)h_t^{-1}\right| \\
&\leq \sigma_\varepsilon^{-2}\sup_{1\leq\ t\ \leq n}\left|\left(\widehat{\sigma}_\phi^2 - \sigma_\phi^2\right)X_{t-1}^2 h_t^{-1} + \left(\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2\right)h_t^{-1}\right| \\
&\leq \sigma_\varepsilon^{-2}\left[\left(\widehat{\sigma}_\phi^2 - \sigma_\phi^2\right)\sup_{1\leq\ t\ \leq n}\left|X_{t-1}^2 h_t^{-1}\right| + \left(\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2\right)\sup_{1\leq\ t\ \leq n}\left|h_t^{-1}\right|\right] \\
&\leq \sigma_\varepsilon^{-2}\left[\left(\widehat{\sigma}_\phi^2 - \sigma_\phi^2\right)\sigma_\phi^{-2} + \left(\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2\right)\sigma_\varepsilon^{-2}\right]
\end{aligned}$$

D'où du fait que $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 \longrightarrow \sigma_\varepsilon^2$ et $\widehat{\sigma}_\phi^2 \longrightarrow \sigma_\phi^2$ on en déduit que

$$\sup_{1\leq\ t\ \leq n}\left|\widehat{h}_t^{-1} - h_t^{-1}\right| = o_p(1) \tag{2.23}$$

Les auteurs Hwang et Basawa [12] affirme que

$$\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\ h_t^{-1}\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\ \widehat{h}_t^{-1}\right) = 1 + o_p(1) \tag{2.24}$$

D'autre part, montrons que

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t^{-1}}\left(\widetilde{\phi}_n - \widehat{\phi}_{wl}\right) = o_p(1) \tag{2.25}$$

On pose

$$B_n = \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t^{-1} \quad \text{et} \quad \widehat{B}_n = \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\ \widehat{h}_t^{-1}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2} h_t^{-1}} \left(\widetilde{\phi}_n - \widehat{\phi}_{wl}\right) &= \sqrt{B_n}\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}\ \widehat{h}_t^{-1}}{\widehat{B}_n} - \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} h_t^{-1}}{B_n}\right) \\
&= \frac{\sqrt{B_n}}{\widehat{B}_n B_n}\left(B_n \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}\ \widehat{h}_t^{-1} - \widehat{B}_n \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} h_t^{-1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{B_n}}{\widehat{B}_n B_n}\left(B_n \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}\ \widehat{h}_t^{-1} - B_n \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} h_t^{-1} + B_n \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} h\right. \\
&= \frac{\sqrt{B_n}}{\widehat{B}_n} \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} \left(\widehat{h}_t^{-1} - h_t^{-1}\right) + \frac{\sqrt{B_n}\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} h_t^{-1}}{\widehat{B}_n B_n}\left(B_n - \widehat{B}_n\right) \\
&\leq \frac{\sqrt{B_n}}{\widehat{B}_n} \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} \sup_{1\leq\ t\ \leq n} \left(\widehat{h}_t^{-1} - h_t^{-1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\widehat{B}_n\sqrt{B_n}} \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} h_t^{-1} \left(B_n - \widehat{B}_n\right)
\end{aligned}$$

Comme $\sup_{1\leq\ t\ \leq n} \left(\widehat{h}_t^{-1} - h_t^{-1}\right) \longrightarrow 0$ par (2.23) et $\left(B_n - \widehat{B}_n\right) \xrightarrow{p} 0$ par (2.24)

pour avoir le résultat il reste à montrer que $\frac{\sqrt{B_n}}{\widehat{B}_n}\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}$ et $\frac{1}{\widehat{B}_n\sqrt{B_n}}\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} h_t^{-1}$

sont bornés en probabilité.
En effet par l'inégalité de Cauchy-Schwarz , $\frac{B_n}{\widehat{B}_n} \xrightarrow{p} 1$ (par (2.24)) et $B_n \xrightarrow{p}$ ∞ , on a

$$\frac{1}{\widehat{B}_n\sqrt{B_n}} \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} h_t^{-1} \leq \frac{1}{\widehat{B}_n\sqrt{B_n}} \left[\sum_{t=1}^{n} X_t^2 h_t^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\widehat{B}_n}\left[\sum_{t=1}^{n} X_t^2 h_t^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{B_n}}{\widehat{B}_n} =$$

De meme $\frac{\sqrt{B_n}}{\widehat{B}_n}\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}$ est bornée en probabilité.

Par conséquent

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t^{-1}} \left(\widetilde{\phi}_n - \widehat{\phi}_{wl}\right) = o_p\left(1\right)$$

Par les équations (2.25) et le théorème 2-2 on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \ \widehat{h}_t^{-1}} \left(\widetilde{\phi}_n - \phi\right) &= \sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \ \widehat{h}_t^{-1}} \left(\widetilde{\phi}_n - \widehat{\phi}_{wl} + \widehat{\phi}_{wl} - \phi\right) \\
&= \sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \ \widehat{h}_t^{-1}} \left[\left(\widetilde{\phi}_n - \widehat{\phi}_{wl}\right) + \left(\widehat{\phi}_{wl} - \phi\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \ \widehat{h}_t^{-1}}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t}} \sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t} \left(\widetilde{\phi}_n - \widehat{\phi}_{wl}\right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \widehat{h}_t^{-1}}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \ h_t}} \sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \ h_t} \left(\widehat{\phi}_{wl} - \phi\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \ \widehat{h}_t^{-1}} \ \left(\widetilde{\phi}_n - \phi\right) = o_p\left(1\right) + \sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 h_t} \left(\widehat{\phi}_{wl} - \phi\right)$$

Par suite

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \widehat{h}_t^{-1}} \left(\widetilde{\phi}_n - \phi\right) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} N\left(0, 1\right)$$

■

0.4 Processus autorégressifs à coéfficient aléatoires d'ordre 1. Cas éxplosif

Dans ce chapitre nous étudions l'article de S.Y. Hwang et I.V. Basawa [14] Dans cet article les auteurs étudient les estimateurs des moindres carrées et des moindres carrées pondéres pour le paramètre d'un processus AR à coefficients aléatoires dans le cas explosif. Ils montrent des propriétés de convergence et de normalité asymptotique.

Considérons un processus autorégressif à coéfficients aléatoires RCA d'ordre (1) défini par

$$X_t = (\phi + \phi_t) X_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{3.1}$$

où (ϕ_t) et (ε_t) sont des suites de variables aléatoire i.i.d centreé et $V(\phi_t) = \sigma_\phi^2$,$V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ tel que σ_ϕ^2 et σ_ε^2 sont connus et les suites (ϕ_t) et (ε_t) sont indépendantes.

Posons

$$\tau = \left(\phi + \sigma_\phi^2\right)^{\frac{1}{2}} \; sgn(\phi)$$

où

$$sgn(\phi) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & si\ \phi \geq 0 \\ -1 & si\ \phi < 0 \end{array} \right\}$$

et

$$\tau^2 = E(\phi + \phi_t)^2 = \phi^2 + \sigma_\phi^2 \tag{3.2}$$

Pour ce modèle , la quantité τ^2 joue le rôle d'un paramètre critique . Il découle de Nicholle&Quinn (cf. [16]) qui montrent que (3.1) admet une solution strictement stationnaire avec un moment de second ordre fini (au sens de la convergence en moyenne quadratique et de la convergence presque sûre) si et seulement si $\tau^2 < 1$ (cf. [17]).

La solution est donneé par

$$\begin{aligned} X_t &= (\phi + \phi_t) X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + (\phi + \phi_t) \varepsilon_{t-1} + (\phi + \phi_t)\left(\phi + \phi_{t-1}\right) \varepsilon_{t-2} \\ &\quad + ... + (\phi + \phi_t) ... \left(\phi + \phi_{t-s}\right) X_{t-(s+1)} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$X_t = \sum_{j=0}^{s} \pi_j \ \varepsilon_{t-j} + \pi_{s+1} X_{t-(s+1)}$$

où

$$\pi_0 = 1 \text{ , et } \pi_j = \prod_{i=0}^{j-1} \left(\phi + \phi_{t-i}\right)$$

D'où

$$X_t - \sum_{j=0}^{s} \pi_j \ \varepsilon_{t-j} = \pi_{s+1} X_{t-(s+1)}$$

En effet , pour la convergence en moyenne quadratique comme $\tau^2 < 1$ on a

$$\begin{aligned} E\left[X_t - \sum_{j=0}^{s} \pi_j \ \varepsilon_{t-j}\right]^2 &= E\left[\prod_{i=0}^{s} \left(\phi + \phi_{t-i}\right) X_{t-(s+1)}\right]^2 \\ &= E\left(\phi + \phi_t\right)^2 E\left(\phi + \phi_{t-1}\right)^2 ...E\left(\phi + \phi_{t-s}\right)^2 E\left(X_{t-(s+1)}^2\right) \\ &= \tau^{2(s+1)} E\left(X_{t-(s+1)}^2\right) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \ \varepsilon_{t-j} \qquad (3.3)$$

Pour $\tau^2 < 1$, nous avons aussi

$$\begin{aligned} E\left(X_t\right) &= E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \ \varepsilon_{t-j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E\left(\pi_j\right) E\left(\varepsilon_{t-j}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
V\left(X_t\right) &= V\left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j\ \varepsilon_{t-j}\right) \\
&= E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j\ \varepsilon_{t-j}\right)^2 - \left[E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j\ \varepsilon_{t-j}\right)\right]^2 \\
&= E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^2\ \varepsilon_{t-j}^2 + 2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1} \pi_i\ \pi_j\ \varepsilon_i\ \varepsilon_j\right).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
V\left(X_t\right) &= E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^2\ \varepsilon_{t-j}^2\right) + 2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1} E\left(\pi_i\right) E\left(\pi_j\right) E\left(\varepsilon_i\right) E\left(\varepsilon_j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} E\left(\pi_j^2\right) E\left(\varepsilon_{t-j}^2\right) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{2j} \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\tau^2}
\end{aligned}$$

Par (3.1) , nous avons

$$\begin{aligned}
E\left(X_t / X_{t-1}\right) &= E\left[\left(\left(\phi+\phi_t\right) X_{t-1}+\varepsilon_t\right) / X_{t-1}\right] \\
&= E\left(\left(\phi+\phi_t\right) X_{t-1} / X_{t-1}\right) \\
&= X_{t-1} E\left(\phi+\phi_t\right) \\
&= \phi X_{t-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
V\left(X_t / X_{t-1}\right) &= V\left[\left(\left(\phi+\phi_t\right) X_{t-1}+\varepsilon_t\right) / X_{t-1}\right] \\
&= X_{t-1}^2 V\left(\phi+\phi_t\right) + V\left(\varepsilon_t\right) \\
&= \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

On dit que le procéssus (X_t) est un modèle hétéroscédatique conditionnel (cf Engle [9]).

Rappellons que l'éstimateur des moidres carreés conditionnels est obtenu en minimisant la quantité $\sum_{t=1}^{n}\left(X_t - E\left(X_t/\mathcal{F}_{t-1}\right)\right)^2$ et est donné par

$$\widetilde{\phi}_{cl} = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2} \tag{3.4}$$

Cet estimateur converge et asymptotiquement normal (pour $\tau^2 < 1$) sous la condition $E\left(X_t^4\right) < \infty$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\widetilde{\phi}_{cl} - \phi\right) & \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} N\left(0, A\right) \\ \text{où} \quad A \quad = \quad & \sigma_\phi^2 \left(E\left(X_t^2\right)\right)^{-1} E\left(X_t^4\right) + \sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

En particulier , dans le sens d'une plus petite variance asymptotique pour l'estimateur , un meilleur estimateur de ϕ est l'éstimateur des moindres carreés pondérés obtenu en minimisant la quantité suivante

$$\sum_{t=1}^{n} V_{t-1}^{-1}\left(X_t - \phi X_{t-1}\right)^2 \ \text{, où } V_{t-1} = \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

L'éstimateur des moindres carreés pondérés pour ϕ est donné par

$$\widetilde{\phi}_{wl} = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} V_{t-1}^{-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}} \tag{3.5}$$

Pour $\tau^2 < 1$, on a

$$\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\widetilde{\phi}_{wl} - \phi\right) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} N\left(0, B\right) \tag{3.6}$$

où $B = \left[E \left(\frac{X_t^2}{\sigma_\phi^2 X_t^2 + \sigma_\varepsilon^2} \right) \right]^{-1} E\left(X_t^2\right).$

Hwang et Basawa [12] affirme que

$$\begin{aligned} B &= \left[E \left(\frac{X_t^2}{\sigma_\phi^2 X_t^2 + \sigma_\varepsilon^2} \right) \right]^{-1} E\left(X_t^2\right) \\ &\leq \sigma_\phi^2 \left(E\left(X_t^2\right)\right)^{-1} E\left(X_t^4\right) + \sigma_\varepsilon^2 = A \end{aligned}$$

Remarquons que si $\sigma_\phi^2 = 0$, alors le modèle $RCA(1)$ se réduit à un modèle $ARC(1)$,et $\widetilde{\phi}_{wl} = \widehat{\phi}_n$.

Dans cet partie , nous étudions le cas explosif $(\tau^2 > 1)$. Dans le contexte de processus $RCA(1)$ explosif ; Quinn (cf. [18]) a prouvé que la solution (3.2) continue à être strictement stationnaire et ergodique si $\eta = E \log |\phi + \phi_t| < 0$,et seulement si $\eta \leq 0$.

La région de stricte stationnarité $\eta < 0$ contient la condition $\tau^2 < 1$ (et donc elle est moins restrictif), puisque par l'inégalité de Jensen on a

$$\eta = E \log |\phi + \phi_t| \leq \log E |\phi + \phi_t|$$

et par l'inégalité de Cauchy -.Shwarz on a

$$\log E |\phi + \phi_t| \leq \log E^{\frac{1}{2}} |\phi + \phi_t|^2 = \log |\tau|$$

Donc $\eta \leq \log |\tau|$.

Il est possible d'avoir une solution strictement stationnaire (presque sûrement) pour $\tau^2 \geq 1$ tant que $\eta < 0$. Cependant ,une telle solution n'aura pas un moment d'ordre 2 fini si $\tau^2 \geq 1$ (cf Pourahmadi [8]).

Nous sommes consernés par le cas où $\tau^2 > 1$ que nous continuerons à nommer "cas explosif" . Le terme explosif se rapporte ici au fait que $V(X_t)$ augmentent exponentiellement vers l'infinie quand $t \longrightarrow +\infty$.

Nous devons distinguer entre les deux sous classes suivantes

$$\begin{aligned} S_1 &: \tau^2 > 1 \quad \text{et} \quad \eta < 0 \\ S_2 &: \tau^2 > 1 \quad \text{et} \quad \eta \geq 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $S = S_1 \cup S_2$ et tout processus appartenant à la classes S est un processus explosif RCA.

0.4.1 Propriétés asymptotiques des estimateurs

Considérons le modèle $RCA\,(1)$ explosif $(X_t, t \geq 0)$ défini par

$$X_t = (\phi + \phi_t)\, X_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ X_0 = 0 \tag{3.8}$$

où (ϕ_t) et (ε_t) sont des suites de v.a.i.i.d (pas nécessairement gaussiennes) centreés et de variances finie $\sigma_\phi^2 > 0$ et $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ respectivement ,(ϕ_t) et (ε_t) sont indépendantes.

Nous itérons la relation (3.8) pour avoir

$$X_n = \sum_{j=0}^{n-1} \pi_{nj} \varepsilon_{n-j}$$

où $\pi_{n0} = 1$, $\pi_{nj} = \prod_{i=0}^{j-1} \left(\phi + \phi_{n-i}\right)$ et $j = \overline{1, n-1}$

Par suite, par indépendance

$$E\,(X_n) = E\left(\sum_{j=0}^{n-1} \pi_{nj}\ \varepsilon_{n-j}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} E(\pi_{nj})\ E\,(\varepsilon_{n-j}) = 0$$

et

$$\begin{aligned} V\,(X_n) &= V\left(\sum_{j=0}^{n-1} \pi_{nj}\ \varepsilon_{n-j}\right) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{n-1} E\,(\pi_{nj})^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{n-1} \tau^{2j} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left(\tau^{2n} - 1\right)\left(\tau^2 - 1\right)^{-1} \end{aligned}$$

Remarque 8 *1. Si $\sigma_\phi^2 = 0$, le processus $RCA\,(1)$ se réduit à un processus $AR\,(1)$, et on a $\tau^2 = \phi^2$.Nous notons que $V\,(X_n)$ est:*
(i) croissant exponentiellement pour $\tau^2 > 1$.
(ii)croissant linéairement pour $\tau^2 = 1$ et $V\,(X_n) = n\ \sigma_\varepsilon^2$.
(iii) convergeant vers $\left(\tau^2 - 1\right)^{-1} \sigma_\varepsilon^2$ pour $\tau^2 < 1$.

Ainsi , la relation (3.8) donne une variance explosive pour $\tau^2 > 1$.

2. Nous notons que nous avons traitons un processus unilatéral $(X_t\ ,\ t \geq 0)$ avec la valeur initiale $X_0 = 0$. La meme étude est valable pour le processus bilatéral $(X_t\ ,\ t \in R)$. Pour la classe S_1 , la seule solution strictement stationnaire (X_t) est donnée par (3.3).
Si eqn (3.8) commence par X_0 ayant la distribution stationnaire , alors $(X_t\ ,\ t \geq 0)$ est strictement stationnaire et un processus de Markov ergodic. Par conséquent la valeur initiale ne change pas les résultats asymptotiques. (théorème centrale limite et théorème ergodique) obtenue pour $(X_t\ ,\ t \geq 0)$. Feigin et Tweedie(cf. [6]).

Posons

$$Z_n = \tau^{-n} X_n\ , n = 0, 1, 2, ...$$

Nous montrons (cf. ci dessous) que $V(Z_n) = E(Z_n^2)$ converge vers $(\tau^2 - 1)^{-1} \sigma_\varepsilon^2$.où $\tau^2 = E(\phi + \phi_t)^2 = \phi^2 + \sigma_\phi^2$.

Pour un processus $AR(1)$ explosif , Z_n converge en moyenne quadratique et presque sûrement (cf .Fuller [7]).

Cependant ,pour le cas d'un processus $RCA(1)$ explosif, on a

$$\begin{aligned}
E(Z_n - Z_{n-1})^2 &= E\left(\tau^{-n} X_n - \tau^{-n+1} X_{n-1}\right)^2 \\
&= E\left(\tau^{-n}(X_n - \tau X_{n-1})\right)^2 \\
&= \tau^{-2n} E(X_n - \tau X_{n-1})^2
\end{aligned}$$

De (3.8)

$$\begin{aligned}
E(Z_n - Z_{n-1})^2 &= \tau^{-2n} E((\phi + \phi_n - \tau) X_{n-1} + \varepsilon_n)^2 \\
&= \tau^{-2n} \left[E\left((\phi + \phi_n - \tau)^2 X_{n-1}^2\right) + 2E((\phi + \phi_n - \tau) X_{n-1}\varepsilon_n) + E(\varepsilon_n)^2\right]
\end{aligned}$$

Comme X_{n-1} dépend de $\varepsilon_{n-1}, ..., \varepsilon_1$,et les (ε_n) sont indépendants , alors , ε_n et X_{n-1} sont indépendants. De même pour X_{n-1} est indépendant de (ϕ_n).

Par suite

$$\begin{aligned}
E(Z_n - Z_{n-1})^2 &= \tau^{-2n} E\left(X_{n-1}^2\right) E\left(\phi^2 + \phi_n^2 + 2\phi_n\phi + \tau^2 - 2\tau\phi_n - 2\tau\phi\right) + \tau^{-2n}\sigma_\varepsilon^2 \\
&= \tau^{-2n}\left(\phi^2 + \sigma_\phi^2 + \tau^2 - 2\tau\phi\right) E\left(X_{n-1}^2\right) + \tau^{-2n}\sigma_\varepsilon^2 \\
&= 2\tau^{-2n}\left(\tau^2 - \tau\phi\right) E\left(X_{n-1}^2\right) + \tau^{-2n}\sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
E\left(X_{n-1}^{2}\right) &= E\left(\sum_{j=0}^{n-2}\pi_{n-1,j}\ \varepsilon_{n-1-j}\right)^{2} \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} E\left(\pi_{n-1,j}^{2}\right) E\left(\varepsilon_{n-1-j}^{2}\right) \\
&= \sigma_{\varepsilon}^{2}\sum_{j=0}^{n-2}\tau^{2j} \\
&= \sigma_{\varepsilon}^{2}\frac{1-\tau^{2(n-1)}}{1-\tau^{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E\left(Z_{n}-Z_{n-1}\right)^{2} &= 2\tau^{-2n}\left(\tau^{2}-\tau\phi\right)\sigma_{\varepsilon}^{2}\left(1-\tau^{2(n-1)}\right)\left(1-\tau^{2}\right)^{-1}+\tau^{-2n}\sigma_{\varepsilon}^{2} \\
&= \tau^{-2n}\sigma_{\varepsilon}^{2}+2\left(\tau^{2}-\tau\phi\right)\tau^{-2}\left(1-\tau^{2}\right)^{-1}\sigma_{\varepsilon}^{2} \\
&\quad -2\left(\tau^{2}-\tau\phi\right)\sigma_{\varepsilon}^{2}\tau^{-2n}\left(1-\tau^{2}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Comme $\tau^2 > 1$,nous obtenons

$$E\left(Z_{n}-Z_{n-1}\right)^{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\left(\tau^{2}-\tau\phi\right)\tau^{-2}\left(1-\tau^{2}\right)^{-1}\sigma_{\varepsilon}^{2}=\gamma$$

où $\tau^2 - \tau\phi > 0$ car $\tau^2 = \phi^2 + \sigma_\phi^2 \neq \phi^2$et donc $\tau \neq \phi$ et par suite $\gamma > 0$.

Ainsi , (Z_n) n'est pas une suite de Cauchy dans L^2 et (Z_n) ne converge pas en moyenne quadratique.

Le théorème suivant donne les proprietées asymptotiques du modèle $RCA\,(1)$ explosif .

Theorème 9 *Soit (X_t) un processus $RCA\,(1)$ explosif. Quand $n \longrightarrow \infty$, on a*

(I) : il existe une variable aléatoire Z^* tq $E\,(Z^*) < \infty$,

et

$$Z_n^2 = \tau^{-2n}X_n^2 \xrightarrow{p.s} Z^*$$

$$(II) : \tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2} \xrightarrow{p.s} \left(\tau^{2}-1\right)Z^{*}\ .$$

Preuve: (I) : Premièrement , montrons que $Z_n^2 = \tau^{-2n} X_n^2$ est une sous-martingale où $\digamma_n = \sigma_n (X_n, X_{n-1}, ..., X_1)$ est la tribu engendreé par $(X_n, X_{n-1}, ..., X_1)$.
On a

$$\begin{aligned} E\left(Z_n^2/\digamma_{n-1}\right) &= E\left(\tau^{-2n} X_n^2/\digamma_{n-1}\right) \\ &= \tau^{-2n} E\left(X_n^2/\digamma_{n-1}\right) \\ &= \tau^{-2n} E\left[\left(\left(\phi+\phi_n\right) X_{n-1}+\varepsilon_n\right)^2/\digamma_{n-1}\right] \end{aligned}$$

Par la linéarité de l'ésperance conditionnelle

$$\begin{aligned} E\left(Z_n^2/\digamma_{n-1}\right) &= \tau^{-2n} E\left[\left(\phi^2+2\phi\phi_n+\phi_n^2\right) X_{n-1}^2/\digamma_{n-1}\right] + 2\tau^{-2n} E\left[\left(\phi+\phi_n\right) X_{n-1}\varepsilon_n/\digamma_{n-1}\right] \\ &\quad +\tau^{-2n} E\left(\varepsilon_n^2\right) \end{aligned}$$

Par la caractérisation de l'ésperance conditionnelle

$$\begin{aligned} E\left(Z_n^2/\digamma_{n-1}\right) &= X_{n-1}^2 \tau^{-2n} E\left(\phi^2+2\phi\phi_n+\phi_n^2\right) + 2\tau^{-2n} X_{n-1} E\left(\left(\phi+\phi_n\right)\varepsilon_n\right) + \tau^{-2n}\sigma_\varepsilon^2 \\ &= \tau^{-2n}\left(\left(\phi^2+\sigma_\phi^2\right) X_{n-1}^2+\sigma_\varepsilon^2\right) \\ &= \tau^{-2n}\left(\tau^2 X_{n-1}^2+\tau^{-2n}\sigma_\varepsilon^2\right) \\ &= \tau^{-2(n-1)} X_{n-1}^2+\tau^{-2n}\sigma_\varepsilon^2 \\ &= Z_{n-1}^2+\tau^{-2n}\sigma_\varepsilon^2 \geq Z_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Ainsi la suite (Z_n^2) est une sous-martingale positive.
De plus

$$\begin{aligned} E\left(Z_n^2\right) &= E\left(\tau^{-2n} X_n^2\right) \\ &= \tau^{-2n} E\left(X_n^2\right) \\ &= \tau^{-2n} E\left(\sum_{j=0}^{n-1} \pi_{nj}\ \varepsilon_{n-j}\right)^2 \\ &= \tau^{-2n}\ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{n-1} \tau^{2j} \end{aligned}$$

Alors

$$E\left(Z_n^2\right) = \tau^{-2n}\ \sigma_\varepsilon^2\left(\tau^{2n}-1\right)\left(\tau^2-1\right)^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\tau^2-1\right)^{-1}\sigma_\varepsilon^2 \quad \text{car} \quad \tau^2>1$$

Ce qui donne
$$E\left(Z_n^2\right) < \infty$$

Par suite la sous martingale positive (Z_n^2) est dans L^1 et le théorème de la convergence de Doob (cf Préliminaires) permet d'affirmer qu'il existe une variable aléatoire Z^* tq $E\left(Z^*\right) < \infty$ et $Z_n^2 \xrightarrow{p.s} Z^*$.
(II) : On a presque surement , nous avons (par I)

$$Z_{t-1}^2 = \tau^{-2(t-1)} X_{t-1}^2 \longrightarrow Z^* \quad \text{p.s.}$$

Par un lemme de Toeplitz
$$\left(\sum_{t=1}^{n} \tau^{-2(t-1)}\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) \longrightarrow Z^*$$

De plus
$$\sum_{t=1}^{n} \tau^{-2(t-1)} = \sum_{l=0}^{n-1} \tau^{-2l} = \left(\tau^{2n} - 1\right)\left(\tau^2 - 1\right)^{-1}$$

Ce qui donne
$$\left(\tau^{2n} - 1\right)^{-1}\left(\tau^2 - 1\right)\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) \longrightarrow Z^*$$

Ainsi
$$\tau^{-2n}\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) \longrightarrow \left(\tau^2 - 1\right)^{-1} Z^*$$

■

Reste à identifier la limite Z^*. Tout d'abord , nous montrons que $P\left(Z^* > 0\right) = 1$ implique que la suite des v.a. $(\phi_t + \phi\ )$ ne prend que deux valeurs (suite binaire).

Lemme 6 *Si* $P\left(Z^* > 0\right) = 1$ *alors,* $P\left(\left(\phi_n + \phi\right)^2 = \tau^2\right) = 1$ *(i.e.* $\left(\phi_n + \phi\right)^2$ *est dégénérer à* τ^2*).*

Preuve: Rappelons que

$$X_n = (\phi + \phi_n) X_{n-1} + \varepsilon_n.$$

Donc

$$\begin{aligned} X_n^2 &= ((\phi + \phi_n) X_{n-1} + \varepsilon_n)^2 \\ &= (\phi + \phi_n)^2 X_{n-1}^2 + 2 (\phi + \phi_n) X_{n-1}\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \tau^{-2n} X_n^2 &= \tau^{-2n} (\phi + \phi_n)^2 X_{n-1}^2 + 2\tau^{-2n} (\phi + \phi_n) X_{n-1}\varepsilon_n + \tau^{-2n}\varepsilon_n^2 \\ &= \tau^{-2n+2-2} (\phi + \phi_n)^2 X_{n-1}^2 + 2\tau^{-2n+1-1} (\phi + \phi_n) X_{n-1}\varepsilon_n + \tau^{-2n}\varepsilon_n^2 \\ &= \tau^{-2} (\phi + \phi_n)^2 \tau^{-2(n-1)} X_{n-1}^2 + 2\tau^{-n-1} (\phi + \phi_n) \varepsilon_n \left(\tau^{-n-1} X_{n-1}\right) + \tau^{-2n}\varepsilon_n^2 \end{aligned}$$

Par suite

$$Z_n^2 = \tau^{-2} (\phi + \phi_n)^2 Z_{n-1}^2 + 2\tau^{-1}\tau^{-n} (\phi + \phi_n) \varepsilon_n Z_{n-1} + \tau^{-2n}\varepsilon_n^2 \tag{3.9}$$

D'une part , pour tout $\delta > 0$

$$\sum_{t=1}^{\infty} P\left(\left|\tau^{-2n}\varepsilon_n^2\right| > \delta\right) < \infty$$

puisque par l'inégalité de Markov on a

$$\begin{aligned} P\left(\left|\tau^{-2n}\varepsilon_n^2\right| > \delta\right) &\leq \frac{E\left(\left|\tau^{-2n}\varepsilon_n^2\right|\right)}{\delta} \\ &\leq \tau^{-2n}\frac{E\left(\left|\varepsilon_n^2\right|\right)}{\delta} \\ &\leq \frac{\tau^{-2n}\sigma_\varepsilon^2}{\delta} \end{aligned}$$

qui est le terme d une série convergeante car $\tau^2 > 1$.
Par conséquent par le lemme de Borel-Cantelli on a

$$\tau^{-2n}\varepsilon_n^2 \xrightarrow{p.s} 0 \tag{3.10}$$

D'autre part , pour tout $\delta > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\tau^{-n}\left(\phi+\phi_n\right)\varepsilon_n\right| > \delta\right) < \infty.$$

Par l'inégalité de Bienyamé-.Tchebychev on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\tau^{-n}\left(\phi+\phi_n\right)\varepsilon_n\right| > \delta\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\left(\tau^{-n}\left(\phi+\phi_n\right)\varepsilon_n\right)^2}{\delta^2} \\
&\leq \frac{1}{\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\tau^{-2n}\phi^2 E\left(\varepsilon_n^2\right)+\tau^{-2n}E\left(\varepsilon_n^2\right)E\left(\phi_n^2\right)\right] \\
&\leq \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\tau^{-2n+2} \\
&\leq \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\delta^2}\sum_{l=1}^{\infty}\tau^{-2l} \\
&< \infty \qquad \text{car } \tau^2 > 1
\end{aligned}$$

De même par le lemme de Borel-Cantelli on trouve

$$\tau^{-n}\left(\phi+\phi_n\right)\varepsilon_n \xrightarrow{p.s} 0 \tag{3.11}$$

Par le premier point du théorème 3.1

$$Z_{n-1}^2 = \tau^{-2(n-1)}X_{n-1}^2 \xrightarrow{p.s} Z^*$$

Comme $P\left(Z^* > 0\right) = 1$, donc

$$\left|\tau^{-n-1}X_{n-1}\right| \xrightarrow{p.s} \sqrt{Z^*} \tag{3.12}$$

En utilisant (3.10), (3.11) et (3.12), et $Z^* < \infty$ nous obtenons de (3.9)

$$\tau^{-2}\left(\phi+\phi_n\right)^2 \xrightarrow{p.s} \frac{Z^*}{Z^*} = 1$$

Ce qui implique
$$P\left((\phi_n+\phi)^2=\tau^2\right)=1$$

D'où le Lemme. ■

Considérons la suite de v.a. binaire suivante

$$\phi_n+\phi=\left\{\begin{array}{cc} |\tau| & \text{avec une proba. } p \\ -|\tau| & \text{avec une proba. } 1-p \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

où $|\tau|>1$ et $0<p<1$.*Le* cas $p=0$ ou 1 est exclu quand $\sigma_\phi^2>0$. Nous observons que η devient $\log|\tau|$. Donc les cas $\eta<0$,$\eta=0$ et $\eta>0$ corespondent à $\tau^2<1$,$\tau^2=1$ et $\tau^2>1$ respectivement.

Ainsi , l'étude du cas stationnaire de la classe S_1 ne se pose pas , lorsque $P\left(Z^2>0\right)=1$.

Supposons que la condition suivante est satisfaite.

$\mathbf{C}_1$: ε_t est de loi symétrique i.e. $\varepsilon_t\overset{d}{=}-\varepsilon_t$.

Fuller (cf. [7]) fait remarquer en vertu de la symétrie de (C_1) qu' un explosif $RCA\,(1)$ avec coefficient binaire se comporte en loi comme un processus $AR\,(1)$ standard explosif $(Y_t,t\geq 0)$ donné par

$$Y_t=\tau Y_{t-1}+\varepsilon_t \quad , \quad Y_0=0 \tag{3.14}$$

Pour $|\tau|>1$, il est bien connu par Fuller ([7]) que $\tau^{-n}Y_n$ converge vers une variable aléatoire Y presque surement et en moyenne quadratique.

Nous avons le Lemme suivant

Lemme 7 *Pour un processus $RCA\,(1)$ explosif ayant un coefficient binaire $(\phi_n+\phi)$, nous avons sous C_1.*

(I) : $Z^*\overset{d}{=}Y^2$

où Y désigne la limite de la v.a. $\tau^{-n}Y_n$ qui converge presque surement et en moyenne quadratique.

(II) : Si (ε_t) est gaussienne alors

$$Z^*\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}\sigma_\varepsilon^2\left(\tau^2-1\right)^{-1}\chi_1^2$$

où χ_1^2 est une v.a. Khi-deux de degré de liberté 1.

Preuve: Pour le point (I) on sait que

$$X_n = \varepsilon_n + (\phi + \phi_n)\,\varepsilon_{n-1} + ... + (\phi + \phi_n)\left(\phi + \phi_{n-1}\right) ... (\phi + \phi_1)\,\varepsilon_1$$

La relation (3.14) peut s'écrire comme suit

$$Y_n = \varepsilon_n + \tau\varepsilon_{n-1} + \tau^2\varepsilon_{n-2} + ... + \tau^{n-1}\varepsilon_1$$

De la condition $\mathbf{C}_1$ et du coefficient binaire $(\phi_n + \phi)$, nous avons

$$X_n \overset{d}{=} Y_n \quad \text{pour chaque } n = 1, 2, ...$$

Par conséquent

$$\tau^{-2n}X_n^2 \overset{d}{=} \tau^{-2n}Y_n^2$$

Par le premier point du théorème 2.1 on a

$$\tau^{-2n}X_n^2 \xrightarrow{p.s} Z^*$$

et

$$\tau^{-2n}Y_n^2 \xrightarrow{p.s} Y^2$$

Par suite

$$Z^* \overset{d}{=} Y^2$$

Pour le point (II) , comme (ε_n) est i.i.d et $\varepsilon_n \overset{d}{=} N(0,1)$ alors

$$X_n = \sum_{j=0}^{n-1} \pi_{nj}\ \varepsilon_{n-j} \quad , \quad X_n \overset{d}{=} N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\left(\tau^{2n} - 1\right)\left(\tau^2 - 1\right)^{-1}\right) \quad \text{pour chaque } n$$

Donc

$$\frac{X_n}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2\left(\tau^{2n} - 1\right)\left(\tau^2 - 1\right)^{-1}}} \overset{d}{=} N(0,1)$$

Par conséquent

$$\frac{X_n^2}{\sigma_\varepsilon^2\left(\tau^{2n} - 1\right)\left(\tau^2 - 1\right)^{-1}} \overset{d}{=} \chi_1^2$$

Ce qui donne

$$\left(\tau^{2n}-1\right)^{-1}X_n^2 \overset{d}{=} \sigma_\varepsilon^2\left(\tau^2-1\right)^{-1}\chi_1^2$$

Ainsi , comme $\tau^2>1$

$$\tau^{-2n}X_n^2 \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \sigma_\varepsilon^2\left(\tau^2-1\right)^{-1}\chi_1^2$$

Par le premier point du théorème 2.1

$$\tau^{-2n}X_n^2 \xrightarrow{p.s} Z^*$$

Donc

$$Z^* \overset{d}{=} \sigma_\varepsilon^2\left(\tau^2-1\right)^{-1}\chi_1^2$$

■

Remarque 10 *1. Nous observons que le modèle $RCA(1)$ avec la structure binaire de ϕ_n appartenant à la classe S_2. Dans le lemme 2.1, on utilise $P(Z^*>0)=1$ pour avoir la structure binaire de ϕ_n sous $\boldsymbol{C}_1$ en particulier pour une suite (ε_n) gaussienne. En revanche , on peut vérifier que $Z^*=0$ (p.s) , i.e $P(Z^*>0)=0$ pour le cas stationnaire $\eta<0$.Pour voir cela , nous prenons d'abord le cas général de (ϕ_n) avec $\tau^2>1$, et $\eta<0$. Par Quinn (cf.[18]) , il existe une solution strictement stationnaire (3-3) pour un processus bilateral (3.1). Pour un processus unilatéral qui est un processus de Markov , X_n donné par (3.8) converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que celle obtenue pour le processus bilatéral $RCA(1)$ (Nicholls &Quinn [16]). Ainsi , $\tau^{-2n}X_n^2$ converge vers zéro ,i.e $Z^*=0$ p.s quand $\tau^2>1$, et $\eta<0$ (i.e le processus appartenant à la classe S_1).*

Nous imposons une deuxiéme condition.

$\mathbf{C}_2$: La limite de v.a.Z^*, $P(Z^*>0)>0$.

Pour un processus stationnaire appartenant à S_1, on a $Z^*=0$ *p.s* . Pour un processus non-stationnaire avec ϕ_t binaire (appartenant à la classe S_2) , nous avons $Z^*>0$ *p.s.*

En particulier , pour tout processus appartenant à $S=S_1\cup S_2$ et lorsque (ε_t) est gaussien , on peut obtenir Z^* comme un mélange de lois de type Khi-deux.

Pour vérifier cela , soit (ε_t) i.i.d et $\varepsilon_t \Longrightarrow N(0,1)$.

Lemme 8

La suite $\left(\beta_n^2 = \tau^{-2n} \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{j-1} \left(\phi - \phi_{n-i}\right)^2\right)$ *est une sous-martingale et* $Z^* \stackrel{d}{=} \beta^* \sigma_\varepsilon^2 \chi_1^2$.

Preuve: Posons

$$\begin{aligned} \beta_n^2 &= \tau^{-2n} \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{j-1} \left(\phi - \phi_{n-i}\right)^2 \\ &= \tau^{-2n} \left[1 + \left(\phi - \phi_n\right)^2 + ... + \left(\phi - \phi_n\right)^2 \left(\phi - \phi_2\right)^2\right] \end{aligned}$$

La fonction caractéristique conditionnelle est

$$\begin{aligned} E\left(e^{i\ t\ Z_n}/\phi_n, ..., \phi_1\right) &= E\left(e^{i\ t\ \tau^{-n} X_n}/\phi_n, ..., \phi_1\right) \\ &= E\left(e^{i\ t\ \tau^{-n}\left(\varepsilon_n + (\phi-\phi_n)^2 \varepsilon_{n-1} + ... + (\phi-\phi_n)^2 (\phi-\phi_2)^2 \varepsilon_1\right)}\right) \\ &= E\left(e^{i\ t\ \tau^{-n} \varepsilon_n}\right) E\left(e^{i\ t\ \tau^{-n} (\phi-\phi_n)^2 \varepsilon_{n-1}}\right) ... E\left(e^{i\ t\ \tau^{-n} (\phi-\phi_n)^2 (\phi-\phi_2)^2 \varepsilon_1}\right) \end{aligned}$$

La fonction caractéristique de la loi normale donne

$$E\left(e^{i\ t\ \tau^{-n} \varepsilon_n}\right) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_\varepsilon^2 t^2\ \tau^{-2n}\right]$$

Par suite

$$E\left(e^{i\ t\ \tau^{-n} (\phi-\phi_n)^2 \varepsilon_{n-1}}\right) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_\varepsilon^2 t^2\ \tau^{-2n} \left(\phi - \phi_n\right)^2\right]$$

De même

$$E\left(e^{i\ t\ \tau^{-n} (\phi-\phi_n)^2 (\phi-\phi_2)^2 \varepsilon_1}\right) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_\varepsilon^2 t^2\ \tau^{-2n} \left(\phi - \phi_n\right)^2 ... \left(\phi - \phi_2\right)^2\right]$$

Donc

$$
\begin{aligned}
E\left(e^{i\ t\ Z_n}/\phi_n,...,\phi_1\right) &= \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 t^2\ \tau^{-2n}\left(1+(\phi-\phi_n)^2+...+(\phi-\phi_n)^2...(\phi-\phi_2)^2\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 t^2\ \tau^{-2n}\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{i=0}^{j-1}(\phi-\phi_{n-i})^2\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 t^2 \beta_n^2\right]
\end{aligned}
$$

Montrons que $\left(\beta_n^2\right)$ est une sous-martingale par rapport $\digamma_{n-1}$ la tribu engendrée par $\left(\beta_{n-1}^2,...,\beta_1^2\right)$.
D'une part

$$
\begin{aligned}
\beta_n^2 &= \tau^{-2n}+\tau^{-2n}(\phi-\phi_n)^2+...+\tau^{-2n}(\phi-\phi_n)^2(\phi-\phi_2)^2 \\
&= \tau^{-2n}+\tau^{-2}(\phi-\phi_n)^2\tau^{-2(n-1)}\left[1+\left(\phi-\phi_{n-1}\right)^2+...+\left(\phi-\phi_{n-1}\right)^2(\phi-\phi_2)^2\right] \\
&= \tau^{-2n}+\tau^{-2}(\phi-\phi_n)^2\beta_{n-1}^2
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
E\left(\beta_n^2/\digamma_{n-1}\right) &= E\left(\left[\tau^{-2n}+\tau^{-2}(\phi-\phi_n)^2\beta_{n-1}^2\right]/\digamma_{n-1}\right) \\
&= \tau^{-2n}+\tau^{-2}\beta_{n-1}^2 E(\phi-\phi_n)^2 \\
&= \tau^{-2n}+\beta_{n-1}^2 \geq \beta_{n-1}^2.
\end{aligned}
$$

Donc $\left(\beta_n^2\right)$ est une sous-martingale.
D'autre part

$$
\begin{aligned}
E\left(\beta_n^2\right) &= E\left(\tau^{-2n}\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{i=0}^{j-1}(\phi-\phi_{n-i})^2\right) \\
&= \tau^{-2n}\sum_{j=0}^{n-1}\tau^{2j} \\
&= \tau^{-2n}\left(\tau^{2n}-1\right)\left(\tau^2-1\right)^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\tau^2-1\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Par le théorème de Doob (cf .préliminaires) il existe une variable aléatoire β^*, tq $\beta_n^2 \xrightarrow{p.s} \beta^*$ et $E(\beta^*) < \infty$.Cela implique que

$$E\left(e^{i\ t\ Z_n}/\phi_n, ..., \phi_1\right) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 t^2 \beta_n^2\right] \xrightarrow{p.s} \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 t^2 \beta^*\right]$$

Par le théorème de convergence domineé nous obtenons : $E\left(E\left(e^{i\ t\ Z_n}/\phi_n, ..., \phi_1\right)\right) = E(e^{i\ t\ Z_n}) \longrightarrow E(\exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 t^2 \beta^*\right])$ donc

$$Z_n = \tau^{-n} X_n \Longrightarrow U\sqrt{\beta^*} \qquad \text{où } U \hookrightarrow N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$$

D'où

$$Z_n^2 \Longrightarrow \beta^* \sigma_\varepsilon^2 \chi_1^2$$

D'aprés la premier point du théorème 1

$$Z_n^2 \xrightarrow{p.s} Z^*$$

Par suite

$$Z^* \stackrel{d}{=} \beta^* \sigma_\varepsilon^2 \chi_1^2$$

qui est un mélange de v.a. Khi-deux avec une v.a. β^* indépendante de la variable χ_1^2 .
D'où le Lemme. ■

Remarque 11 *En particulier ,si le processus appartient à S_1, $\beta^* = 0$ p.s et si le processus appartient à la classe S_2 avec ϕ_t binaire , $\beta^* = (\tau^2 - 1)^{-1}$ p.s . Cependant en général ,$\beta^* \geq 0$ p.s.*

0.4.2 Convergence des estimateurs

Pour le modèle $RCA(1)$ explosif , nous allons montrer que l'estimateur $\widetilde{\phi}_{cl}$ n'est pas convergeant et cela est en contraste avec le cas du modèle $AR(1)$ explosif.

En outre , l'estimateur $\widetilde{\phi}_{wl}$ admet une loi asymptotique gaussienne même lorsque la suite (ε_t) n'est pas gaussienne.

Dans la suite nous supposons que la condition suivante:

$\mathbf{C}_3$: (ϕ_t) est une suite bornée.

Par exemple si la suite (ϕ_t) suit une loi uniforme sur $[-1,1]$ ou encore des lois gaussiennes tronqueés.

Nous avons le résultat suivant

Theorème 12 *Supposons que les conditions $\boldsymbol{C}_2$ et $\boldsymbol{C}_3$ sont satisfaites . Alors , pour le modèle $RCA\,(1)$ explosif , l'estimateur $\widetilde{\phi}_{cl}$ ne converge pas vers ϕ en probabilité :*

$$\widetilde{\phi}_{cl} \overset{P}{\nrightarrow} \phi.$$

Preuve: Nous écrivons par définition de $\widetilde{\phi}_{cl}$ par (3.4)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}_{cl} - \phi &= \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2} - \phi \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \left[X_t X_{t-1} - \phi X_{t-1}^2\right]}{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2}
\end{aligned}$$

On pose

$$\widetilde{\phi}_{cl} - \phi := \frac{T_n}{D_n}$$

où

$$T_n = \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \left[\phi_t X_{t-1}^2 + \varepsilon_t X_{t-1}\right],$$

et

$$D_n = \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2.$$

D'après le premier point du théorème 2-1 on a

$$D_n = \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \xrightarrow{p.s} \left(\tau^2 - 1\right)^{-1} Z^*$$

Ainsi , sous la condition C_2 , pour que $\widetilde{\phi}_{cl}$ converge vers ϕ il suffit de montrer que $T_n \overset{P}{\longrightarrow} 0$. Par l'inégalité de Bienyaimé -Tchebychev on a

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t X_{t-1}\right| > \delta\right) &\leq \frac{\tau^{-4n} E\left(\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t X_{t-1}\right)^2}{\delta^2} \\
&\leq \frac{\tau^{-4n}}{\delta^2}\sigma_\varepsilon^2\sum_{t=1}^{n} E\left(X_{t-1}^2\right)
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n} E\left(X_{t-1}^2\right) &= \sum_{t=1}^{n} E\left(\sum_{j=0}^{t-1}\pi_{t-1,j}\ \varepsilon_{t-1-j}\right)^2 \\
&= \sum_{t=1}^{n}\sigma_\varepsilon^2\sum_{j=0}^{t-1}\tau^{2j} \\
&= \sum_{t=1}^{n}\sigma_\varepsilon^2\left(\tau^{2(t-1)}-1\right)\left(\tau^2-1\right)^{-1}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n} E\left(X_{t-1}^2\right) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(\tau^2-1)}\left[\sum_{t=1}^{n}\tau^{2(t-1)}-n\right] \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(\tau^2-1)}\left[\sum_{l=1}^{n-1}\tau^{2l}-n\right] \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(\tau^2-1)}\left[\frac{\tau^{2n}-1}{\tau^2-1}-n\right] \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(\tau^2-1)^2}\left[\tau^{2n}-1-n\left(\tau^2-1\right)\right]
\end{aligned}$$

Comme $\tau^2 > 1$,on en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t X_{t-1}\right| > \delta\right) &\leq \frac{\sigma_\varepsilon^4}{\delta^2\left(\tau^2-1\right)^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ \tau^{-2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\ \tau^{-4n}-\left(\tau^2-1\right)\sum_{n=1}^{\infty} n\ \tau^{-4n}\right] \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Par le lemme de Borel-Cantelli , il en résulte

$$\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t X_{t-1} \xrightarrow{ps} 0$$

Donc

$$T_n - \tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\phi_t X_{t-1}^2 = \tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t X_{t-1} \xrightarrow{ps} 0 \qquad (3.15)$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\left|\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\phi_t X_{t-1}^2 - \tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\tau^{2(t-1)}\phi_t Z^*\right| &= \left|\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\phi_t\left(X_{t-1}^2 - \tau^{2(t-1)}Z^*\right)\right| \\
&\leq \tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}|\phi_t|\left|X_{t-1}^2 - \tau^{2(t-1)}Z^*\right|
\end{aligned}$$

Comme $\tau^{-2(t-1)}X_{t-1}^2 \xrightarrow{p.s} Z^*$, et

$$\begin{aligned}
\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}|\phi_t|\left|X_{t-1}^2 - \tau^{2(t-1)}Z^*\right| &= \tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}|\phi_t|\left|\tau^{2(t-1)}\tau^{-2(t-1)}X_{t-1}^2 - \tau^{2(t-1)}Z^*\right| \\
&= \tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\tau^{2(t-1)}|\phi_t|\left|(\tau^{-2(t-1)}X_{t-1}^2 - Z^*)\right|
\end{aligned}$$

en utilisant le lemme de Toeplitz et C_3 , nous obtenons

$$\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}|\phi_t|\left|X_{t-1}^2 - \tau^{2(t-1)}Z^*\right| \xrightarrow{ps} 0$$

Par conséquent

$$\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\phi_t X_{t-1}^2 - \tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\tau^{2(t-1)}\phi_t Z^* \xrightarrow{ps} 0 \qquad (3.16)$$

Des résultats précédants (3.15) et (3.16) nous arrivons à :

$$T_n - I_n Z^* \xrightarrow{ps} 0$$

où

$$I_n = \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \tau^{2(t-1)} \phi_t$$

Par suite nous avons besoin de montrer que $I_n \xrightarrow{P} 0$ sur l'évènment $\{Z^* > 0\}$.
Remarquez que la suite (I_n) vérifier l'équation suivante

$$\tau^2 I_n - I_{n-1} = \phi_n$$

Ainsi , si $I_n \xrightarrow{P} 0$ sur $\{Z^* > 0\}$, alors $\phi_n \xrightarrow{P} 0$ sur $\{Z^* > 0\}$.
Or si $\phi_n \xrightarrow{P} 0$, il existe une sous suite $\left(n_k \text{ telle que } \phi_{n_k} \xrightarrow{p.s} 0\right)$.
Ceci contredit l'hypothèse que $\left\{\phi_{n_k}\ ,\ k = 1, 2, ...\right\}$ est i.i.d. de variance $\sigma_\phi^2 > 0$;ce qui est absurde .
Donc

$$\widetilde{\phi}_{cl} \overset{P}{\nrightarrow} \phi$$

■

Remarque 13 *La condition* $\boldsymbol{C}_2$ *a été utilisé dans la preuve précédente par conséquent le théoreme n'est pas applicable à la classe* S_1 *.*

Dans ce qui suit nous allons étudier les propriétés de l'éstimateur des moindres carreés ponderés $\widetilde{\phi}_{wl}$ défini par (3.5).

Nous donnons quelques résults préléminaires sur cet estimateur.

Nous avons

$$\begin{aligned} B_n\left(\widetilde{\phi}_{wl} - \phi\right) &= B_n \left(\frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} V_{t-1}^{-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}} - \phi \right) \\ &= B_n \left(\frac{\sum_{t=1}^{n} \left(X_t - \phi X_{t-1}\right) X_{t-1} V_{t-1}^{-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}} \right) \\ : &= \sum_{t=1}^{n} Y_t \end{aligned}$$

où $Y_t = (X_t - \phi X_{t-1}) X_{t-1} V_{t-1}^{-1}$ et $B_n = \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}$.

Lemme 9 *On définit* $S_n = \sum_{t=1}^{n} Y_t$ *est une martingalede carré intégrable* ,$V(S_n \diagup \digamma_{t-1}) = B_n$ *et* $E(S_n^2) = \sum_{t=1}^{n} E(B_n) =: b_n^2$.

Preuve: Nous avons

$$E(S_n) = E\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t\right) = \sum_{t=1}^{n} E(Y_t)$$

et

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E\left((X_t - \phi X_{t-1}) X_{t-1} V_{t-1}^{-1}\right) = E\left(\phi_t X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}\right) + E\left(\varepsilon_t X_{t-1} V_{t-1}^{-1}\right) \\ &= E\left(\phi_t\right) E(X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}) + E\left(\varepsilon_t\right) E(X_{t-1} V_{t-1}^{-1}) = 0 \end{aligned}$$

car $X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}$ ne dépend que de $\phi_{t-1}, \phi_{t-2}, ..., \phi_1, donc$ ϕ_t et $X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}$ sont indépendantes. De même $X_{t-1} V_{t-1}^{-1}$ ne dépend que de $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, ..., \varepsilon_1$, donc ε_t et $X_{t-1} V_{t-1}^{-1}$ sont indépendantes.
Donc

$$E(S_n) = 0$$

D'une part,

$$\begin{aligned} E(S_n / \digamma_{t-1}) &= E\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t / \digamma_{t-1}\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n} E(Y_t / \digamma_{t-1}) \\ &= \sum_{t=1}^{n} \left[E\left(\phi_t X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1} / \digamma_{t-1}\right) + E\left(\varepsilon_t X_{t-1} V_{t-1}^{-1} / \digamma_{t-1}\right)\right] \\ &= \sum_{t=1}^{n} \left[X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1} E(\phi_t) + X_{t-1} V_{t-1}^{-1} E(\varepsilon_t)\right] = 0 \end{aligned}$$

D'autre part, de la même manière que dans (3.17) nous avons aussi $E\left(S_n^2\right) < \infty$.
Donc S_n est une martingale de carré intégrable.
Nous avons

$$\begin{aligned}
V\left(S_n/F_{t-1}\right) &= V\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t/F_{t-1}\right) \\
&= \sum_{t=1}^{n}\left[V\left(\phi_t X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}/F_{t-1}\right) + V\left(\varepsilon_t X_{t-1} V_{t-1}^{-1}/F_{t-1}\right)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n}\left[X_{t-1}^4 V_{t-1}^{-2} V\left(\phi_t\right) + X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-2} V\left(\varepsilon_t\right)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}\left[X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}\sigma_\phi^2 + V_{t-1}^{-1}\sigma_\varepsilon^2\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}\left(X_{t-1}^2\sigma_\phi^2 + \sigma_\varepsilon^2\right) V_{t-1}^{-1} \\
&= \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1} = B_n
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
V\left(S_n\right) &= E\left(S_n^2\right) = E\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t\right)^2 \\
&= E\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t^2\right) + 2E\left(\sum_{i\neq j} Y_i Y_j\right) \quad ,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
Y_i Y_j &= \left(\phi_i X_{i-1}^2 V_{i-1}^{-1} + \varepsilon_i X_{i-1} V_{i-1}^{-1}\right)\left(\phi_j X_{j-1}^2 V_{j-1}^{-1} + \varepsilon_j X_{j-1} V_{j-1}^{-1}\right) \\
&= \phi_i X_{i-1}^2 V_{i-1}^{-1}\phi_j X_{j-1}^2 V_{j-1}^{-1} + \phi_i X_{i-1}^2 V_{i-1}^{-1}\varepsilon_j X_{j-1} V_{j-1}^{-1} \\
&\quad + \varepsilon_i X_{i-1} V_{i-1}^{-1}\phi_j X_{j-1}^2 V_{j-1}^{-1} + \varepsilon_i X_{i-1} V_{i-1}^{-1}\varepsilon_j X_{j-1} V_{j-1}^{-1}
\end{aligned}$$

Comme $X_{i-1}V_{i-1}^{-1}$ ne dépent que de $\phi_{i-1}, ..., \phi_1$, et les (ϕ_i) sont indépendantes

,alors les ϕ_i et $X_{i-1}V_{i-1}^{-1}$ sont indépendantes. comme $j < i$, donc $X_{j-1}V_{j-1}^{-1}$ est une fonction de $\phi_{j-1}, ..., \phi_{1,}$par suite ϕ_i et $X_{j-1}V_{j-1}^{-1}$ sont indépendantes et alors

$$\begin{aligned} E\left(\phi_i X_{i-1}^2 V_{i-1}^{-1} \phi_j X_{j-1}^2 V_{j-1}^{-1}\right) &= E\left(\phi_i\right) E\left(X_{i-1}^2 V_{i-1}^{-1} \phi_j X_{j-1}^2 V_{j-1}^{-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E\left(\phi_i X_{i-1}^2 V_{i-1}^{-1} \varepsilon_j X_{j-1} V_{j-1}^{-1}\right) &= E\left(\phi_i\right) E\left(X_{i-1}^2 V_{i-1}^{-1} \varepsilon_j X_{j-1} V_{j-1}^{-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même X_{j-1} V_{j-1}^{-1} ne dépend que de $\varepsilon_{j-1}, ..., \varepsilon_1$ et comme $j < i$ alors ε_i et $X_{j-1}V_{j-1}^{-1}$ sont indépendantes.
Donc

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_i X_{i-1} V_{i-1}^{-1} \phi_j X_{j-1}^2 V_{j-1}^{-1}\right) &= E\left(\varepsilon_i\right) E\left(X_{i-1} V_{i-1}^{-1} \phi_j X_{j-1}^2 V_{j-1}^{-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_i X_{i-1} V_{i-1}^{-1} \varepsilon_j X_{j-1} V_{j-1}^{-1}\right) &= E\left(\varepsilon_i\right) E\left(X_{i-1} V_{i-1}^{-1} \varepsilon_j X_{j-1} V_{j-1}^{-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement

$$E\left(Y_i Y_j\right) = 0$$

et

$$\begin{aligned}
E\left(S_n^2\right) &= \sum_{t=1}^{n} E\left(Y_t^2\right) \\
&= \sum_{t=1}^{n} E\left(\phi_t^2 X_{t-1}^4 V_{t-1}^{-2} + 2\phi_t X_{t-1}^3 V_{t-1}^{-2}\varepsilon_t + \varepsilon_t^2 X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-2}\right) \\
&= \sum_{t=1}^{n} \left[E\left(\phi_t^2\right) E\left(X_{t-1}^4 V_{t-1}^{-2}\right) + E\left(\varepsilon_t^2\right) E\left(X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-2}\right)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n} \left[E\left(\phi_t^2\right) E\left(X_{t-1}^4 V_{t-1}^{-2}\right) + E\left(\varepsilon_t^2\right) E\left(X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-2}\right)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n} E\left[X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}\left(\sigma_\phi^2 X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1} + V_{t-1}^{-1}\sigma_\varepsilon^2\right)\right]
\end{aligned}$$

Alors

$$E\left(S_n^2\right) = \sum_{t=1}^{n} E\left(B_n\right) =: b_n^2 \tag{3.17}$$

D'où le Lemme.

■

Nous considérons les conditions suivantes:

$\mathbf{C}_4$: $E\left|\varepsilon_t\right|^{2+\delta} < \infty$, pour $\delta > 0$

$\mathbf{C}_5$: $n^{-1}B_n \xrightarrow{P} \Delta^2 > 0$ quand $n \to \infty$

Nous remarquons que la condition $\mathbf{C}_5$ est satisfaite pour la classe S_1,i.e $\eta < 0$ $(\tau^2 > 1)$.

En effet , pour voir cela , rappellons

$$B_n = \sum_{t=1}^{n} U_{t-1}, \text{ où } U_{t-1} = X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1}$$

Notons que (U_t) est une suite de v.a. borneé. En outre , par le théorème ergodic nous avons $n^{-1}B_n \xrightarrow{P} E\left(U_1\right) = \Delta^2 > 0$.

Ensuite , pour le cas où $P\left(Z^* > 0\right) = 1$, $\mathbf{C}_5$ est à nouveau vérifiée . En effet , écrivons

$$U_{t-1} = \frac{\tau^{-2(t-1)} X_{t-1}^2}{\sigma_\phi^2 \tau^{-2(t-1)} X_{t-1}^2 + \tau^{-2(t-1)}\sigma_\varepsilon^2}$$

Par le premier point du théorème 2.1

$$\tau^{-2(t-1)}X_{t-1}^2 \xrightarrow{ps} Z^*$$

Alors

$$U_{t-1} \xrightarrow{ps} \frac{Z^*}{\sigma_\phi^2 Z^*} = \sigma_\phi^{-2}$$

Par conséquent

$$n^{-1}B_n \xrightarrow{P} \sigma_\phi^{-2} = \Delta^2 > 0$$

Donc $\mathbf{C}_5$ est vraie lorsque $P(Z^* > 0) = 1$

Dans le cas général nous procéder Comme suit : supposons que (ε_t) est gaussienne. On a

$$\begin{aligned} E\left|U_{t-1} - \sigma_\phi^{-2}\right| &= E\left|X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1} - \sigma_\phi^{-2}\right| \\ &= E\left[\frac{\sigma_\varepsilon^2 \sigma_\phi^{-2}}{\sigma_\phi^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2}\right] \end{aligned}$$

comme

$$X_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \left(\phi + \phi_{t-1}\right)\varepsilon_{t-2} + \ldots + \left(\phi + \phi_{t-1}\right)\ldots\left(\phi + \phi_1\right)\varepsilon_1$$

Donc l'éspérance conditionelle

$$E\left[\left|U_{t-1} - \sigma_\phi^{-2}\right| / \phi_{t-1}, \ldots \phi_1\right] = \int_0^\infty \frac{\sigma_\varepsilon^2 \sigma_\phi^{-2}}{\sigma_\phi^2 \alpha_{t-1}^2 x^2 + \sigma_\varepsilon^2} dH(x) \tag{3.18}$$

où $H(x)$ est la densité d'une $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $\alpha_{t-1}^2 = 1 + \left(\phi + \phi_{t-1}\right)^2 + \ldots + \left(\phi + \phi_{t-1}\right)^2 \ldots \left(\phi + \phi_1\right)^2$.

Or

Comme $\alpha_{t-1}^2 \xrightarrow{P} \infty$ quant $t \to \infty$, on applique le théorème de la convergence domineé à (3.18) et donc $E\left[\left|U_{t-1} - \sigma_\phi^{-2}\right| / \phi_{t-1}, \ldots \phi_1\right] \longrightarrow 0$.

Comme U_{t-1} est borneé on applique de nouveau le théorème de la convergence domineé et on arrive à :

$$E\left|U_{t-1} - \sigma_\phi^{-2}\right| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent

$$n^{-1}B_n \xrightarrow{L^1} \sigma_\phi^{-2}$$

et alors

$$n^{-1}B_n \xrightarrow{P} \sigma_\phi^{-2}$$

Nous allons énoncer un résultat donnant la loi limite de l'estimateur $\widetilde{\phi}_{wl}$.

Theorème 14 *Pour le modèle éxplosif $RCA(1)$ et sous les conditions $\boldsymbol{C}_3$***,** *$\boldsymbol{C}_4$ et$\boldsymbol{C}_5$, nous avons*

$$B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl}-\phi\right) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} N(0,1).$$

Preuve: Par la condition $\mathbf{C}_5$, on a

$$n^{-1}B_n \xrightarrow{P} \Delta^2 > 0$$

et par le théorème de la convergence domineé

$$n^{-1}E(B_n) = n^{-1}b_n^2 \xrightarrow{L^1} \Delta^2 > 0$$

Ce qui implique

$$\frac{n^{-1}B_n}{n^{-1}b_n^2} = b_n^{-2}B_n \xrightarrow{P} 1 \tag{3.19}$$

Soit

$$S_n = \sum_{t=1}^{n} Y_t \text{ où } Y_t = (\phi_t X_{t-1} + \varepsilon_t)\, X_{t-1}V_{t-1}^{-1}$$

On a

$$\begin{aligned}
|Y_t| &= \left|(\phi_t X_{t-1} + \varepsilon_t)\, X_{t-1}V_{t-1}^{-1}\right| \\
&\leq |\phi_t|\left|X_{t-1}^2V_{t-1}^{-1}\right| + \left|\varepsilon_t V_{t-1}^{-\frac{1}{2}}\right|\left|X_{t-1}V_{t-1}^{-\frac{1}{2}}\right|
\end{aligned}$$

et comme

$$\left|X_{t-1}^2V_{t-1}^{-1}\right| \leq \sigma_\phi^{-2} \text{ et } \left|V_{t-1}^{-1}\right| \leq \sigma_\varepsilon^{-2}$$

on en tire que

$$\begin{aligned}
|Y_t|^{2+\delta} &\leq \left[|\phi_t|\left|X_{t-1}^2V_{t-1}^{-1}\right| + \left|\varepsilon_t V_{t-1}^{-\frac{1}{2}}\right|\left|X_{t-1}V_{t-1}^{-\frac{1}{2}}\right|\right]^{2+\delta} \\
&\leq 2^{2+\delta-1}\left[|\phi_t|^{2+\delta}\left(\sigma_\phi^{-2}\right)^{2+\delta} + |\varepsilon_t|^{2+\delta}\left|V_{t-1}^{-1}\right|^{\frac{2+\delta}{2}}\left|X_{t-1}^2V_{t-1}^{-1}\right|^{\frac{2+\delta}{2}}\right]
\end{aligned}$$

Par $\mathbf{C}_3$ on a (ϕ_t) est bornée donc

$$\begin{aligned}
|Y_t|^{2+\delta} &\leq 2^{1+\delta}\left[|\phi_t|^{2+\delta}\left(\sigma_\phi^{-2}\right)^{2+\delta}+|\varepsilon_t|^{2+\delta}\left(\sigma_\phi^{-2}\right)^{\frac{2+\delta}{2}}\left(\sigma_\varepsilon^{-2}\right)^{\frac{2+\delta}{2}}\right] \\
&\leq K_1+K_2\,|\varepsilon_t|^{2+\delta} \qquad \text{où } K_1 \text{ et } K_2>0
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
b_n^{-(2+\delta)}\sum_{t=1}^{n}E\,|Y_t|^{2+\delta} &\leq b_n^{-(2+\delta)}\sum_{t=1}^{n}\left[K_1+K_2E\,|\varepsilon_t|^{2+\delta}\right] \\
&\leq \left(\frac{1}{n\sigma_\phi^2}\right)^{\frac{2+\delta}{2}}[nK_1+nK_2m_4] \\
&\leq \frac{1}{\sigma_\phi^2}\left(\frac{K_1}{n^{\frac{\delta}{2}}}+\frac{K_2m_4}{n^{\frac{\delta}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

Par suite

$$b_n^{-(2+\delta)}\sum_{t=1}^{n}E\,|Y_t|^{2+\delta}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Ainsi la condition de Lyapounov est vérifie , et on a

$$\frac{S_n}{\sqrt{V(S_n)}}\Longrightarrow N(0,1)$$

Car

$$\frac{S_n}{b_n}\Longrightarrow N(0,1) \tag{3.20}$$

et

$$\frac{B_n^{\frac{1}{2}}}{b_n}\xrightarrow{P}1$$

Des équations (3.19) et (3.20) les conditions du théorème centrale limite sur les martingales sont vérifiées et finalement

$$\begin{aligned}
B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl}-\phi\right) &= \frac{S_n}{B_n}B_n^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{S_n}{B_n^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\frac{S_n}{b_n}}{\frac{B_n^{\frac{1}{2}}}{b_n}}\Longrightarrow N(0,1)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Nous retournons au cas stationnaire $\tau^2 < 1$, où $n^{-1}B_n \xrightarrow{P} E(U_1) = E\left(\frac{X_t^2}{\sigma_\phi^2 X_t^2+\sigma_\varepsilon^2}\right)$ et $\frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) \xrightarrow{P} E(X_t^2)$.

Ainsi , les résultats dans (3.6) , pour $\tau^2 < 1$ donne

$$B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl} - \phi\right) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} N(0,1)$$

Nous pouvons unifier les résultats pour $\tau^2 > 1$, $\tau^2 < 1$ dans le théorème suivant

Theorème 15 *Sous les conditions du théorème précédent ,pour le modèle $RCA(1)$,nous avons*

$$B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl} - \phi\right) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} N(0,1) \ \textit{pour}\ \tau^2 \neq 1.$$

En comparant ce résultat avec le même dans le cas $AR(1)$, nous remarquons que la normalité de (ε_t) n'est pas nécéssaire pour un modèle $RCA(1)$.Par contre , l'hypothèse de normalité de (ε_t) est nécéssaire dans le cas d'un processus $AR(1)$ explosif $(|\phi| > 1)$.

Si σ_ϕ^2 et σ_ε^2 sont inconnus , ils peuvent être remplacés par des estimateurs convergeants.

Nous pouvons voir cela de la manière suivante (pour le cas $\tau^2 < 1$ voir Schick[18]). Soit $\widehat{\sigma}_\phi^2$ et $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ des éstimateures convergeant vers σ_ϕ^2 et σ_ε^2 respectivement .

On définit

$$\widehat{V}_{t-1} = \widehat{\sigma}_\phi^2\ X_{t-1}^2 + \widehat{\sigma}_\varepsilon^2$$

Ainsi

$$\max_{1\le t\le n}\left|\widehat{V}_{t-1}^{-1} - V_{t-1}^{-1}\right| = \max_{1\le t\le n}\left|\frac{V_{t-1} - \widehat{V}_{t-1}}{\widehat{V}_{t-1}V_{t-1}}\right|$$

Dautre part

$$\left|\widehat{V}_{t-1}^{-1}\right| = \left|\frac{1}{\widehat{\sigma}_\phi^2 X_{t-1}^2 + \widehat{\sigma}_\varepsilon^2}\right| < \frac{1}{\widehat{\sigma}_\varepsilon^2} = \widehat{\sigma}_\varepsilon^{-2} \longrightarrow \sigma_\varepsilon^{-2}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\max_{1\le t\le n}\left|\widehat{V}_{t-1}^{-1}-V_{t-1}^{-1}\right| &= \max_{1\le t\le n}\left|\left(V_{t-1}-\widehat{V}_{t-1}\right)\widehat{V}_{t-1}^{-1}V_{t-1}^{-1}\right| \\
&\le \sigma_{\varepsilon}^{-2}\max_{1\le t\le n}\left|\left(V_{t-1}-\widehat{V}_{t-1}\right)V_{t-1}^{-1}\right| \\
&\le \sigma_{\varepsilon}^{-2}\max_{1\le t\le n}\left|\left(\widehat{\sigma}_{\phi}^{2}-\sigma_{\phi}^{2}\right)X_{t-1}^{2}V_{t-1}^{-1}+\left(\widehat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}-\sigma_{\varepsilon}^{2}\right)V_{t-1}^{-1}\right| \\
&\le \sigma_{\varepsilon}^{-2}\max_{1\le t\le n}\left[\left|\widehat{\sigma}_{\phi}^{2}-\sigma_{\phi}^{2}\right|\left|X_{t-1}^{2}V_{t-1}^{-1}\right|+\left|\widehat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}-\sigma_{\varepsilon}^{2}\right|\left|V_{t-1}^{-1}\right|\right]
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\max_{1\le t\le n}\left|\widehat{V}_{t-1}^{-1}-V_{t-1}^{-1}\right| &\le \sigma_{\varepsilon}^{-2}\left[\left|\widehat{\sigma}_{\phi}^{2}-\sigma_{\phi}^{2}\right|\max_{1\le t\le n}\left|X_{t-1}^{2}V_{t-1}^{-1}\right|+\left|\widehat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}-\sigma_{\varepsilon}^{2}\right|\max_{1\le t\le n}\left|V_{t-1}^{-1}\right|\right] \\
&\le \sigma_{\varepsilon}^{-2}\left[\left|\widehat{\sigma}_{\phi}^{2}-\sigma_{\phi}^{2}\right|\sigma_{\phi}^{-2}+\left|\widehat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}-\sigma_{\varepsilon}^{2}\right|\sigma_{\varepsilon}^{-2}\right]
\end{aligned}$$

Comme $\widehat{\sigma}_{\phi}^{2}$ et $\widehat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ sont des éstimateures converge vers σ_{ϕ}^{2} et σ_{ε}^{2} ceci implique

$$\max_{1\le t\le n}\left|\widehat{V}_{t-1}^{-1}-V_{t-1}^{-1}\right| = o_p(1) \tag{3.21}$$

On définit un $\widetilde{\phi}_n$ un estimateur des moindres carrés pondérés par

$$\widetilde{\phi}_n = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}\widehat{V}_{t-1}^{-1}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{2}\widehat{V}_{t-1}^{-1}} \tag{3.22}$$

Pour cet estimateur $\widetilde{\phi}_n$ nous avons le résultat suivant.

Corollaire Sous les conditions du théorème précédent , nous avons pour le modèle $RCA(1)$

$$B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_n-\phi\right) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} N(0,1) \quad \text{pour } \tau^2 \neq 1 \ .$$

Preuve: Considérons

$$
\begin{aligned}
B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_n-\phi\right) &= B_n^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}\widehat{V}_{t-1}^{-1}}{\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2\widehat{V}_{t-1}^{-1}}\right] \\
&= \frac{B_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}\widehat{V}_{t-1}^{-1}}{B_n^{-1}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2\widehat{V}_{t-1}^{-1}}
\end{aligned}
$$

Hwang et Basawa [12] affirme que

$$
B_n^{-1}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2\widehat{V}_{t-1}^{-1}=1+o_p\left(1\right) \tag{3.23}
$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
& B_n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}\widehat{V}_{t-1}^{-1}-S_n\right) \\
= \;& B_n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}\widehat{V}_{t-1}^{-1}-\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}V_{t-1}^{-1}\right) \\
= \;& B_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}\left(\widehat{V}_{t-1}^{-1}-V_{t-1}^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

D'où

$$
B_n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}\widehat{V}_{t-1}^{-1}-S_n\right)=o_p\left(1\right)
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_n-\phi\right)-B_n^{-\frac{1}{2}}S_n &= \frac{B_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}\widehat{V}_{t-1}^{-1}}{B_n^{-1}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2\widehat{V}_{t-1}^{-1}}-B_n^{-\frac{1}{2}}S_n \\
&= \frac{B_n^{-\frac{1}{2}}}{\widehat{B}_n}\left[B_n\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}\widehat{V}_{t-1}^{-1}-\widehat{B}_nS_n\right]
\end{aligned}
$$

et ensuite

$$\begin{aligned} B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_n-\phi\right)-B_n^{-\frac{1}{2}}S_n &= \frac{B_n^{-\frac{1}{2}}}{\widehat{B}_n}\left[B_n\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}\widehat{V}_{t-1}^{-1}+B_nS_n-B_nS_n-\widehat{B}_nS_n\right] \\ &= \frac{B_n}{\widehat{B}_n}B_n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}\widehat{V}_{t-1}^{-1}-S_n\right)-\frac{B_n^{-\frac{1}{2}}}{\widehat{B}_n}S_n\left(\widehat{B}_n-B_n\right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{B_n}{\widehat{B}_n}\xrightarrow{p}1$ et

$$\begin{aligned} \frac{B_n^{-\frac{1}{2}}}{\widehat{B}_n}S_n &= \frac{B_n^{-\frac{1}{2}}}{\widehat{B}_n}\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\phi X_{t-1}\right)X_{t-1}V_{t-1}^{-1} \\ &= \frac{B_n^{-\frac{1}{2}}}{\widehat{B}_n}\left[\sum_{t=1}^{n}X_tX_{t-1}V_{t-1}^{-1}-\phi\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2V_{t-1}^{-1}\right] \\ &= \frac{B_n^{-\frac{1}{2}}}{\widehat{B}_n}\sum_{t=1}^{n}X_tX_{t-1}V_{t-1}^{-1}-\phi\frac{B_n^{\frac{1}{2}}}{\widehat{B}_n} \\ &= \frac{B_n^{-\frac{1}{2}}}{\widehat{B}_n}\sum_{t=1}^{n}X_tX_{t-1}V_{t-1}^{-1}-\frac{1}{\sqrt{B_n}}\frac{B_n}{\widehat{B}_n}=o_P(1) \end{aligned}$$

car $\frac{B_n}{\widehat{B}_n}\xrightarrow{p}1$ et $B_n\xrightarrow{p}\infty$

$$\frac{B_n^{-\frac{1}{2}}}{\widehat{B}_n}\sum_{t=1}^{n}X_tX_{t-1}V_{t-1}^{-1}\leq\frac{B_n^{-\frac{1}{2}}}{\widehat{B}_n}\left[\sum_{t=1}^{n}X_t^2V_{t-1}^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2V_{t-1}^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\widehat{B}_n}\left[\sum_{t=1}^{n}X_t^2V_{t-1}^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{B_n}}{\widehat{B}_n}=\frac{1}{\sqrt{B}}$$

Alors

$$B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_n-\phi\right)=B_n^{-\frac{1}{2}}S_n+o_p\left(1\right)$$

ce qui implique par le théorème précédent

$$B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_n-\phi\right)\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N\left(0,1\right)\quad\text{pour }\tau^2\neq1$$

D'où le corollaire. ■

0.4.3 Comportement asymptotique conditionnellement à $(Z^* > 0)$

Dans cette partie nous regardons le comportement de l'estimateur des moindres carrés $\widetilde{\phi}_{cl}$ pour le modéle $RCA\,(1)$ explosif . Cependant les convergences sont étudiées sous la condition que l'évènement $(Z^* > 0)$ soit réalizé. L'évènement $(Z^* > 0)$ est similaire à la non-éxtinction d'un processus de branchement . Nous notons la probabilité conditionnelle à $(Z^* > 0)$ par P^* : $P^*\,(.) = P\,(./Z^* > 0)$ et par E^* l'espérance par rapport à P^*.

Nous supposons que $\mathbf{C}_2$ est vérifiée i.e $P\,(Z^* > 0) \neq 0$.

Nous présentons les résultats préliminaires suivants.

Lemme 10 *Sous P^* , nous avons*

$$i)\quad \tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \overset{P^*ps}{\longrightarrow} \left(\tau^2-1\right)^{-1} Z^*$$

$$ii)\quad n^{-1}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1} \overset{P^*ps}{\longrightarrow} \sigma_\phi^{-2}$$

Preuve: $i)$ Rappellons que $Z_n^2 = \tau^{-2n}X_n^2$ est une $\mathcal{F}_{t-1}$ -sous-martingale $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\,(X_{t-1},...,X_1)$
On a

$$\begin{aligned}
E^*\left(Z_n^2/\mathcal{F}_{t-1}\right) &= E^*\left(\tau^{-2n}X_n^2/\mathcal{F}_{t-1}\right)\\
&= \tau^{-2n}E^*\left(X_n^2/\mathcal{F}_{t-1}\right)\\
&= \tau^{-2n}E^*\left[\left(\left(\phi+\phi_n\right)X_{n-1}+\varepsilon_n\right)^2/\mathcal{F}_{t-1}\right]\\
&= \tau^{-2n}E^*\left[\left(\phi+\phi_n\right)^2 X_{n-1}^2/\mathcal{F}_{t-1}\right]+\tau^{-2n}E^*\left[2\varepsilon_n\left(\phi+\phi_n\right)X_{n-1}/\mathcal{F}_{t-1}\right]+\tau^{-2n}E^*\left(\varepsilon_n^2\right.
\end{aligned}$$

Les propriétés de l'éspérance conditionnelle impliquent

$$\begin{aligned}
E^*\left(Z_n^2/\mathcal{F}_{t-1}\right) &= \tau^{-2n}X_{n-1}^2E^*\left[\left(\phi+\phi_n\right)^2\right]\\
&\quad +2\tau^{-2n}X_{n-1}E^*\left[\varepsilon_n\left(\phi+\phi_n\right)\right]+\tau^{-2n}\sigma_\varepsilon^2\\
&= \tau^{-2n}\left(\tau^2X_{n-1}^2+\sigma_\varepsilon^2\right)\\
&= \tau^{-2(n-1)}X_{n-1}^2+\tau^{-2n}\sigma_\varepsilon^2\\
&= Z_{n-1}^2+\tau^{-2n}\sigma_\varepsilon^2 \geq Z_{n-1}^2 \quad \text{car } \tau^2>1
\end{aligned}$$

Donc Z_n^2 est une sous-martingale.
Par le théorème de Doob , il existe une v.a. Z^*, $E^*(Z^*) < \infty$ telle que

$$Z_n^2 = \tau^{-2n} X_n^2 \xrightarrow{P^* ps} Z^*$$

On utilise le lemme de Toeplitz pour avoir

$$\left(\sum_{t=1}^{n} \tau^{-2(t-1)} \right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \xrightarrow{P^* ps} Z^*$$

De plus comme

$$\sum_{t=1}^{n} \tau^{-2(t-1)} = \sum_{l=0}^{n-1} \tau^{-2l} = \left(\tau^{2n} - 1\right) \left(\tau^2 - 1\right)^{-1}$$

Donc

$$\left(\tau^{2n} - 1\right)^{-1} \left(\tau^2 - 1\right) \left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \right) \xrightarrow{P^* ps} Z^*$$

Ce qui donne

$$\tau^{-2n} \left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \right) \xrightarrow{P^* ps} \left(\tau^2 - 1\right)^{-1} Z^*$$

Pour *ii*) On a

$$X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1} = \frac{\tau^{-2(t-1)} X_{t-1}^2}{\tau^{-2(t-1)} X_{t-1}^2 \sigma_\phi^2 + \tau^{-2(t-1)} \sigma_\varepsilon^2}$$

D'où

$$X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1} \xrightarrow{P^* ps} \frac{Z^*}{Z^* \sigma_\phi^2} = \sigma_\phi^{-2}$$

De même par le lemme de Toeplitz

$$\left(\sum_{t=1}^{n} \right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1} \xrightarrow{P^* ps} \sigma_\phi^{-2}$$

Ce qui donne

$$n^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1} \xrightarrow{P^* ps} \sigma_\phi^{-2}$$

■

Lemme 11 *Sous P^*, (ϕ_n) ne converge pas vers zero en probabilité*

$$\phi_n \overset{P^*}{\nrightarrow} 0 \ .$$

Preuve: Raisonnons par l'absurde.
Supposons que

$$\phi_n \xrightarrow{P^*} 0$$

Alors , il existe une sous-suite tel que $\phi_{n_k} \xrightarrow{P^* ps} 0.$
Considérons l'évènement G défini par

$$G = \{\lim \phi_n = 0, \text{ quand } n \to \infty\}$$

Or d'après le Lemme 2.1 $(Z^* > 0) \Longrightarrow \forall n : \ (\phi + \phi_n)^2 = \tau^2$ Il en résulte que $\lim \phi_{n_k}$ existe et donc $(Z^* > 0) \subset G$.
Par suite

$$P(G) \geq P(Z^* > 0) > 0$$

Puisque G est un évènement dans la tribu queue, par la loi 0-1 de Kolmogorov on a donc $P(G) = 1$.Ce qui contredit l'hypothèse sur la suite $(\phi_{n_k}, k = 1, 2, .)$ car la suite est de moyenne nulle et de variance $\sigma_\phi^2 > 0$.
Par conséquent

$$\phi_n \overset{P^*}{\nrightarrow} 0$$

Nous avons le résultat suivant ■

Theorème 16 *Supposons $\boldsymbol{C}_3$ est vérifiée . Pour le modèle $RCA(1)$ explosif l'éstimateur des moindre carreé $\widetilde{\phi}_{cl}$ ne converge pas ϕ :*

$$\widetilde{\phi}_{cl} \overset{P^*}{\nrightarrow} \phi$$

Preuve: Par définition des estimateurs

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}_{cl} - \phi &= \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2} - \phi \\
&= \frac{\tau^{-2n}\left[\sum_{t=1}^{n} \phi_t X_{t-1}^2 + \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t X_{t-1}\right]}{\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2}
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\widetilde{\phi}_{cl} - \phi := \frac{T_n}{D_n}$$

où

$$T_n = \tau^{-2n} \left[\sum_{t=1}^{n} \phi_t X_{t-1}^2 + \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t X_{t-1} \right]$$

et

$$D_n = \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2$$

D'après le premier point du lemme 3.5 on a

$$D_n = \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \xrightarrow{P^* ps} \left(\tau^2 - 1\right)^{-1} Z^*$$

Donc pour que $\widetilde{\phi}_{cl}$ converge il suffit de montrer que

$$T_n \xrightarrow{P^*} 0$$

Pour $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned} P^* \left(\left| \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t X_{t-1} \right| > \delta \right) &= P \left(\left| \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t X_{t-1} \right| > \delta \diagup Z^* > 0 \right) \\ &= \frac{P \left(\left\{ \left| \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t X_{t-1} \right| > \delta \right\} \cap \{ Z^* > 0 \} \right)}{P\left(Z^* > 0\right)} \end{aligned}$$

Comme

$$\left(\left\{ \left| \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t X_{t-1} \right| > \delta \right\} \cap \{ Z^* > 0 \} \right) \subset \left\{ \left| \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t X_{t-1} \right| > \delta \right\}$$

Donc

$$P^* \left(\left| \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t X_{t-1} \right| > \delta \right) \leq P \left(\left| \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t X_{t-1} \right| > \delta \right) P^{-1}\left(Z^* > 0\right)$$

D'autre part , l'inégalité de Bienyaimé -Tchébychev donne

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t X_{t-1}\right|>\delta\right) &\leq \frac{V\left(\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t X_{t-1}\right)}{\delta^2}\\
&\leq \tau^{-4n}\frac{E\left(\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t X_{t-1}\right)^2}{\delta^2}
\end{aligned}
$$

Comme X_{t-1} est fonction de $\varepsilon_{t-1}, ..., \varepsilon_1$ et comme ε_i sont i.i.d. ce qui implique que X_{t-1} et ε_t sont indépendants
Ceci donne

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t X_{t-1}\right|>\delta\right) &\leq \frac{\tau^{-4n}}{\delta^2}\sigma_\varepsilon^2\sum_{t=1}^{n}E\left(X_{t-1}^2\right)\\
&< \infty
\end{aligned}
$$

Par le lemme de Borel-Cantelli

$$\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t X_{t-1}\xrightarrow{P^*ps}0$$

Par suite

$$\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t X_{t-1}\xrightarrow{P^*ps}0$$

et donc

$$T_n-\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\phi_t X_{t-1}^2\xrightarrow{P^*ps}0$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
&\left|\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\phi_t X_{t-1}^2-\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}\tau^{2(t-1)}\phi_t Z^*\right|\\
\leq\ &\tau^{-2n}\sum_{t=1}^{n}|\phi_t|\left|X_{t-1}^2-\tau^{-2(t-1)}Z^*\right|
\end{aligned}
$$

Comme

$$\tau^{-2(t-1)}X_{t-1}^2\xrightarrow{P^*ps}Z^*$$

Alors

$$\sum_{t=1}^{n} |\phi_t| \left|\tau^{-2(t-1)} X_{t-1}^2 \tau^{2(t-1)} - \tau^{2(t-1)} Z^*\right| \xrightarrow{P^*ps} 0$$

Ce qui donne

$$\tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \phi_t X_{t-1}^2 \xrightarrow{P^*ps} \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \tau^{2(t-1)} \phi_t Z^*$$

D'où

$$T_n - I_n Z^* \xrightarrow{P^*ps} 0$$

où

$$I_n = \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \tau^{2(t-1)} \phi_t$$

Pour montrer la convergence de $\widetilde{\phi}_{cl}$, nous devons montrer que

$$I_n = \tau^{-2n} \sum_{t=1}^{n} \tau^{2(t-1)} \phi_t \xrightarrow{P^*} 0$$

où (I_n)vérifie l'équation aux différences suivante

$$\begin{aligned} \tau^2 I_n - I_{n-1} &= \tau^{-2(n-1)} \sum_{t=1}^{n} \tau^{2(t-1)} \phi_t - \tau^{-2(n-1)} \sum_{t=1}^{n-1} \tau^{2(t-1)} \phi_t \\ &= \tau^{-2(n-1)} \left(\tau^{2(n-1)} \phi_n\right) \\ &= \phi_n \quad n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Si $I_n \xrightarrow{P^*} 0$, nous devons avoir $\phi_n \xrightarrow{P^*} 0$ qui contredit le lemme précédent. Par conséquent , l'éstimateur $\widetilde{\phi}_{cl}$ ne converge pas sous P^* . ■

Dans cette partie nous étudions la convergence de l'estimateur des moindres carrés pondérés $\widetilde{\phi}_{wl}$.

Rappellons

$$B_n = \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 V_{t-1}^{-1} \text{ où } V_{t-1} = \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

et

$$Y_t = \sum_{t=1}^{n} \left(X_t - \phi X_{t-1}\right) X_{t-1} V_{t-1}^{-1}$$

On définit
$$S_n^* = \sum_{t=1}^{n} Y_t - E^*\left(Y_t / \mathcal{F}_{t-1}\right)$$

Lemme 12 *La suite* (S_n^*) *est une martingale.*

Preuve: On a
$$\begin{aligned}
E^*\left(S_n^*/\mathcal{F}_{t-1}\right) &= E^*\left(\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - E^*\left(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}\right)\right)/\mathcal{F}_{t-1}\right) \\
&= E^*\left(\sum_{t=1}^{n-1}\left(Y_t - E^*\left(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}\right)\right)/\mathcal{F}_{t-1}\right) \\
&\quad + E^*\left(Y_n - E^*\left(Y_n/\mathcal{F}_{n-1}\right)/\mathcal{F}_{t-1}\right) \\
&= \sum_{t=1}^{n-1} Y_t - E^*\left(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}\right) \\
&= S_{n-1}^*
\end{aligned}$$

Donc (S_n^*) est une martingale. ■

Soit
$$B_n^* = \sum_{t=1}^{n} V^*\left(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}\right)$$

Introduisons les quantités
$$\begin{aligned}
W_{1n} &= \left(B_n^*\right)^{-\frac{1}{2}} S_n^* \\
W_{2n} &= \left(B_n^*\right)^{-\frac{1}{2}} B_n^{\frac{1}{2}} \\
W_{3n} &= B_n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{n} E^*\left(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}\right).
\end{aligned}$$

Nous imposons la condition suivante

$\mathbf{C}_6$: Sous P^* , $W_{1n} \overset{L^*}{\Longrightarrow} W_1$,de plus $(W_{2n}\ , W_{3n})' \xrightarrow{P^*} (W_2\ , W_3)'$

Le théorème suivant donne loi limite de l'estimateur $\widetilde{\phi}_{wl}$

Theorème 17 *Si la condition* $\boldsymbol{C}_6$ *est vérifiée alors, pour* $n \to \infty$
$$B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl} - \phi\right) \overset{L^*}{\Longrightarrow} W_2^{-1} W_1 + W_3$$

Preuve: Un calcul simple donne

$$\begin{aligned}
& B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl}-\phi\right)-W_{2n}^{-1}W_{1n}+W_{3n} \\
= \;& B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl}-\phi\right)-\left(B_n^*\right)^{-\frac{1}{2}}S_n^*\left(B_n^*\right)^{\frac{1}{2}}B_n^{-\frac{1}{2}}+B_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{n}E^*\left(Y_t/\digamma_{t-1}\right) \\
= \;& B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl}-\phi\right)-B_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t-E^*\left(Y_t/\digamma_{t-1}\right)\right)+B_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{n}E^*\left(Y_t/\digamma_{t-1}\right)
\end{aligned}$$

Par suite

$$B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl}-\phi\right)-W_{2n}^{-1}W_{1n}+W_{3n}=B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl}-\phi\right)-B_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{n}Y_t$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl}-\phi\right)-B_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{n}Y_t &= B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl}-\phi\right)-B_n^{-\frac{1}{2}}S_n \\
&= o_p\left(1\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl}-\phi\right)-W_{2n}^{-1}W_{1n}+W_{3n}=o_{p^*}\left(1\right).$$

Par la condition $\mathbf{C}_6$

$$B_n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\phi}_{wl}-\phi\right)\overset{L^*}{\Longrightarrow}W_2^{-1}W_1+W_3$$

Ce qui donne le résultat ■

Remarque 18 *Si $P^*=P$, on a $W_2=1$,$W_3=0$ et $W_1\overset{L^*}{\Longrightarrow}N\left(0,1\right)$. Donc le théorème 6 se réduit au théorème 3.*

0.5 ANNEXE

Pour illustrer le comportement de l'estimateur de Hwang S.Y. et Basawa I.V. [14] défini dans le chapitre 3, nous présentons des simulations d'un modèle autorégressif à coefficient aléatoire $RCA\left(1\right)$.

Nous générons des échantillons de tailles différentes et nous calculons à chaque fois l'estimateur du paramètre.

Le processus autorégressif à coefficient aléatoire à simuler est le suivant:

$$X_t = (a + \phi_t) X_{t-1} + \varepsilon_t$$

où $a = C^{st}$, $(\varepsilon_t) \hookrightarrow N(0, \sigma^2)$ et $(\phi_t) \hookrightarrow N(0, \delta^2)$

Nous fixons les valeurs de $\sigma^2 = 0.8$ et $\delta^2 = 0.4$. Les valeurs du paramètre a sont fixés à $a = 1$ (cas critique) et $a = 1.5$ (cas éxplosif) .

Nous générons un échantillon de taille n donnée par la formule de récurrence précédente. Nous calculons les estimateurs $\widetilde{\phi}_{cl}$ et $\widetilde{\phi}_{wl}$,leurs moyennes et leurs écart- type pour 100 répliques de l'échantillon à chaque fois.

Nous avons obtenu les tableaux suivants et nous utilisons le Logiciel R pour nos simulations.

	Taille de échantillon n	$\widetilde{\phi}_{cl}$	$\widetilde{\phi}_{wl}$	$mean\left(\widetilde{\phi}_{cl}\right)$	$mean\left(\widetilde{\phi}_{wl}\right)$	$sd\left(\widetilde{\phi}_{cl}\right.$
	$n = 50$	0.9716515	1.144746	0.8914464	0.7131255	1.18938
Pour $a = 1$	$n = 100$	$1.074528A$	0.9479396	0.5435822	0.4005822	4.14318
	$n = 500$	0.8982995	0.9207954	0.856491	1.002663	3.16603
	$n = 1000$	1.013999	0.9054036	1.433062	1.421535	4.14798
	$n = 10000$	1.006213	0.9995642	0.7524121	0.723438	2.62762

	Taille de échantillon n	$\widetilde{\phi}_{cl}$	$\widetilde{\phi}_{wl}$	$mean\left(\widetilde{\phi}_{cl}\right)$	$mean\left(\widetilde{\phi}_{wl}\right)$	$sd\left(\widetilde{\phi}\right.$
	$n = 50$	0.5409649	1.60785	0.4421012	1.456344	4.8572
Pour $a = 1.5$	$n = 100$	3.286886	1.508042	2.381183	1.057773	6.8874
	$n = 500$	2.424696	1.241475	-5.528747	0.7634003	69.03
	$n = 1000$	-17.60373	1.510874	-15.02691	1.266407	157.90
	$n = 10000$	8.30185	1.480448	-5.380336	1.723883	64.581

0.6 Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié les processus autorégressifs à coefficients aléatoires dans les cas critique et explosif.

Nous avons développé les résultats établis par les auteurs Hwang S.Y. et Basawa I.V. et Tae Yoon Kim. [14] et Hwang S.Y. et Basawa I.V. [13].

Ils montrent la convergence de l'estimateur des moindres carrés conditionnels et des moindres carrés pondérés et leurs comportements asymptotiques en loi dans le cas critique.

Dans le cas explosif , les auteurs établissent la convergence en probabilité de l'estimateur des moindres carrés pondérés et une loi limite tandis que l'estimateur des moindres carrés conditionnels n'est pas convergeant.

En Annexe nous présentons des résultats de simulations numériques montant le comportement asymptotique des estimateurs des moindres carrés conditionnels et des moindres carrés pondérés dans un processus $RCA(1)$ en utilisant le logiciel R.

Bibliographie

[1] Anderson. T.w. (1959) **On asymptotitic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations**. Annals of Mathematics and Statistics 30, 676-87.

[2] Basawa, I. V. and Brockwell, P. J. (1984) **Asymptotics conditional inference for regular nonergodic models with an appkication to autoregressive processes**.Annals of Statistics 12, 161-71.

[3] Brown, B. M. (1971) **Martingale central limit theorems.Annals of Mathematics and Statistics** 42, 59-66.

[4] Chow, Y. S. and Teicher, H.(1978) **Probability theory** .New York:Springer.

[5] Engle, R. F. (1982) **Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of UK inflation**.Econometrica 50, 987-1007.

[6] Feigin, P. D.and Tweedie, R. L. (1985) **Random coefficient autoregressive processes:a Markov chain analysis of stationarity and finiteness of mements**. Journal of Time Series Analysis 6, 1-14.

[7] Fuller, W. A. (1996) **Introduction to Statistical Time Series (2nd edn)**. Wiley,New York.

[8] Godambe, V.P; 1985. **The fondations of finite sample estimation in stochastic processes**. Biometrica 72, 419-428.

[9] Hall, P. G.and Heyde, C. C. (1980) **Martingale Limit Theory and its Application.** New York :Academic Press.

[10] Hamilton, J.D ;1994 .Time Seriess Analysis. Princeton University Press, Princeton,NJ.

[11] Hwang, S. Y. and Basawa, I. V. (1998) **Parameter estimation for generalized random coefficient autoregressive processes**.Journals Statistical Planning and Inf .68, 323-37.

[12] Hwang, S. Y. and Basawa, I. V. (2003). **Estimation for nonlinear autoregressive models generated by beta-ARCH processes** .Sankhya 65. 744-762.

[13] Hwang, S. Y. and Basawa, I. V. (2005). **Explosive random coefficient AR(1) processes and related asymptotics for least squres estimation** .Journals of Time Series Analysis,to appear.

[14] Hwang, S. Y. and Basawa, I. V. (2004).**Explosive random coefficient AR(1) processes and related asymptotics for least squres estimation** .Journals of Time Series.Journal of Time Series analysis Vol.26 n. 6 p. 807-824

[15] Hwang ,S.Y. , Basawa,I.V. et Tae Yoon Kim. **Least squares estimation for critical random coefficient first-order autoregressive processes** . Statistics and Probability Letters 23 March 2005.

[16] Nicholls, D. F. and Quinn, B. G. (1982) **Random Coefficient Autoregressive Models** :An Introduction Lecture Notes in Statistics, 11. New York :Springer .

[17] Pourahmadi, M. (1986) **On stationarity of solution of a doubly stochastic model**. Journal of Time Series Analysis 7, 123-31.

[18] Quinn, B. G. (1982) **A note on the existence of strictly stationary solutions to bilinear equations**. Journal of Time Series Analysis 3, 249-52.

[19] Schick, A (1996) $\sqrt{n}$-**consistent estimation in a random coefficient autoregressive model**. The Australian Journals of Statistics 38, 155-60.

[20] Wang, D; Ghosh, S.K; (2004). **Bayesian Analysis of Random Coefficient Autoregressive Models** ISMS#2566,N. C. State University.